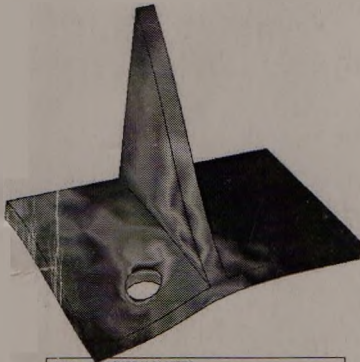


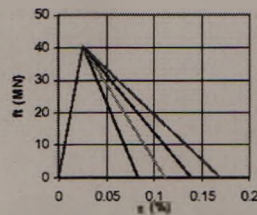
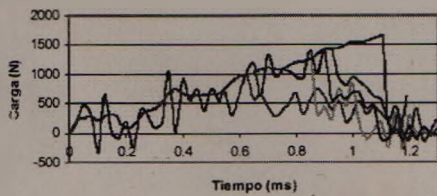
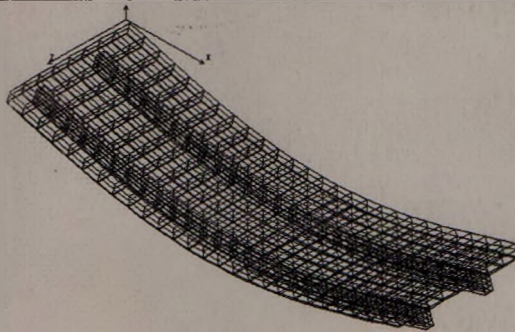


**Universidad Nacional del Nordeste**  
**Facultad de Ingeniería**  
**U.N.N.E. – Resistencia - Chaco**  
**10 al 12 de Noviembre de 2004**



Contour Plot of NODAL V. MISES  
Deformation (MID): DISPLACEMENT of LOAD ANALYSIS, step 1.

**2<sup>DA</sup> JORNADA  
DE  
COMUNICACIÓN  
CIENTÍFICA  
PARA  
INGENIERÍA  
2004**



— Cf = 2160 N/m    — Cf = 3240 N/m    — Cf = 5400 N/m  
— Cf = 4250 N/m (DF)    — Ens. Laboratorio

— Cf = 2160    — Cf = 3240  
— Cf = 5400    — Cf = 4250

## **Dimensionado de la placa de asiento de una columna metálica por el MEF.**

Mroginski, Javier L. – Beneyto, Pablo A. – Di Rado, H. Ariel – Manzollino, Juan E.  
Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería.  
Universidad Nacional del Nordeste  
Av. Las Heras 727, 3500 Resistencia - ARGENTINA.  
e-mail: mroginski@javier.net.ar

### **Antecedentes.**

Existen muchas estructuras cuyas características geométricas, mecánicas o de cargas no permiten la utilización de modelos de cálculo simplificados tales como los de sólidos bidimensionales o de revolución. En dichos casos es imperante considerar la estructura como un sólido tridimensional y hacer uso de la teoría de la elasticidad para tres dimensiones.

Por otro lado, a pesar de su aparente mayor dificultad, el análisis tridimensional de una estructura por el método de los elementos finitos no presenta en principio grandes problemas conceptuales ya que la teoría de la elasticidad para tres dimensiones es una generalización de la teoría bidimensional.

Pese a la relativa sencillez del procedimiento de análisis, los problemas tridimensionales representan si un mayor esfuerzo de cálculo por elementos finitos, en comparación con los modelos simplificados. Dicha dificultad es inherente al tamaño del problema, que pasa de dos a tres dimensiones, ocasionando un aumento considerablemente en el tiempo de cálculo y un esfuerzo mayor en la preparación de los datos e interpretación de los resultados.

Por estos motivos se tiende, siempre que sea posible, a modelar la estructura de manera que pueda evitarse su estudio en tres dimensiones.

### **Materiales y Métodos.**

1) Teoría de la Elasticidad Tridimensional.

Los conceptos fundamentales, definiciones y ecuaciones usadas en el análisis de tensiones y deformaciones se tratan específicamente en la disciplina llamada "teoría de la elasticidad". Estos fundamentos son usados para resolver problemas de tensiones por métodos clásicos o analíticos y también por el método de elementos finitos, entre ellos se extraerán los siguientes:

#### *Campo de desplazamientos.*

El movimiento de un punto en el espacio queda perfectamente definido por las tres componentes del vector desplazamiento;

$$\underline{d} = [u, v, w]^T \quad (1)$$

donde u, v, w son los desplazamientos del puntos según los ejes cartesianos x, y, z.

*Campo de deformaciones.*

Siguiendo la teoría de la elasticidad, el vector de deformación en un punto está definido por seis componentes:

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T \quad (2)$$

donde:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

*Campo de tensiones.*

El vector de tensiones en un punto contiene seis componentes conjugadas de las seis respectivas deformaciones.

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \quad (3)$$

donde las  $\sigma$  representan las tensiones normales y  $\tau$  las tensiones tangenciales.

*Relación tensión – deformación.*

La relación entre las seis deformaciones y las seis tensiones, para elasticidad isotrópica, viene expresada por una matriz de 6 x 6 simétrica y con dos coeficientes independientes: el módulo de elasticidad (E) y el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Para este caso la ecuación constitutiva será:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^0) + \underline{\sigma}^0 \quad (4)$$

donde:  $\underline{\sigma}^0$  y  $\underline{\varepsilon}^0$  son la tensión inicial y la deformación inicial respectivamente y D es la matriz constitutiva para el caso general de tres dimensiones.

$$\underline{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{E(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{E(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{E(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

2) Implementación matricial del Método de Elementos Finitos.

*Expresión matricial de la energía potencial total.*

La energía potencial total  $V$  de un cuerpo elástico lineal viene dado por la suma de la energía potencial de deformación  $U$  y de la energía potencial  $V_e$  asociada al trabajo de las fuerzas exteriores.

$$V = U + V_e \quad (6)$$

$$\text{donde: } U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV \quad , \quad V_e = - \int_V \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{d} \cdot dV - \int_S \mathbf{t}^T \cdot \mathbf{d} \cdot dS \quad (7)$$

$$\text{entonces: } V = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV - \int_V \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{d} \cdot dV - \int_S \mathbf{t}^T \cdot \mathbf{d} \cdot dS \quad (8)$$

*Aproximación por elementos finitos.*

En primer lugar se discretiza el dominio mediante una malla de elementos finitos y se aproxima el campo de desplazamiento en función de los desplazamientos nodales  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  con funciones de interpolación  $N_i$  se tiene:

$$\mathbf{u} = \sum u_i \cdot N_i(x, y, z) \quad , \quad \mathbf{v} = \sum v_i \cdot N_i(x, y, z) \quad , \quad \mathbf{w} = \sum w_i \cdot N_i(x, y, z) \quad (9)$$

$$\text{o bien, en forma matricial: } \underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{d}}^e \quad (10)$$

*Matriz gradiente.*

Reemplazando los campos de desplazamientos aproximados en las expresiones de las deformaciones se obtendrá la relación entre las deformaciones y los desplazamientos nodales.

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{B}}^e \cdot \underline{\mathbf{d}}^e \quad (11)$$

donde:  $\underline{\mathbf{d}}^e$  es el vector de desplazamientos nodales y  $\underline{\mathbf{B}}^e$  es la matriz gradiente del

$$\text{elemento y posee la siguiente forma: } \underline{\mathbf{B}}^e = \left[ \underline{\mathbf{B}}_1^e, \dots, \underline{\mathbf{B}}_i^e, \dots, \underline{\mathbf{B}}_{\text{maximo}}^e \right] \quad (12)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

*Matriz de rigidez y vector de cargas nodales equivalentes.*

Reemplazando los campos de desplazamientos aproximados en la expresión de energía

potencial total se tiene:

$$V = \frac{1}{2} \int_V \underline{d}^{eT} \underline{B}^{eT} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \underline{d}^e \cdot dV - \int_V \underline{b}^{eT} \cdot \underline{N}^{eT} \cdot \underline{d}^e \cdot dV - \int_S \underline{d}^{eT} \cdot \underline{N}^{eT} \cdot \underline{d}^e \cdot \underline{t}^T \cdot dS \quad (14)$$

definiendo a la matriz de rigidez del elemento como:

$$\underline{K}^e = \int_V \underline{B}^{eT} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot dV \quad (15)$$

y al vector de cargas nodales equivalentes del elemento como:

$$\underline{f}^e = \int_V \underline{N}^{eT} \cdot \underline{b} \cdot dV + \int_S \underline{N}^{eT} \cdot \underline{p} \cdot dS \quad (16)$$

la energía potencial total del dominio puede expresarse como:

$$V = \frac{1}{2} \underline{d}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{d} - \underline{d}^T \cdot \underline{f} \quad (17)$$

El siguiente paso consiste en minimizar la ecuación anterior. Esto se lleva a cabo aplicando el método de Rayleigh-Ritz respecto de las coordenadas generalizadas que en este caso son los desplazamientos nodales.

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{d}} = \underline{K} \cdot \underline{d} - \underline{f} = 0 \Rightarrow \underline{K} \cdot \underline{d} = \underline{f} \quad (18)$$

Esta última expresión representa un sistema de ecuaciones que tiene por incógnitas los desplazamientos nodales de toda la malla. Obsérvese que el primer paso para resolver este sistema de ecuaciones es el montaje de la matriz de rigidez global  $\underline{K}$  y del vector de cargas  $\underline{f}$  en un proceso que se denomina ensamblaje. El siguiente paso consiste en imponer las condiciones de contorno para que el sistema de ecuaciones tenga una única solución.

### 3) Teoría de falla.

Las teorías de rotura tratan de elaborar hipótesis tendientes a establecer las causas primordiales de la producción de los mecanismos que llevan al colapso de los materiales. Aún cuando estas hipótesis pretendan ser lo más exactas posibles, en general no son demostrables y solo pueden ser justificadas experimentalmente.

Por otro lado, no todos los materiales rompen por los mismos motivos, de manera que las distintas teorías sólo son aplicables a determinados casos.

Una de las teorías antes mencionadas es la de Huber – Von Mises – Hencky, también conocida como la de Von Mises nada más, que establece lo siguiente: “*En un cuerpo*

*sujeto a un estado tensional cualquiera, el inicio de la fluencia en un punto ocurre cuando la energía de distorsión por unidad de volumen correspondiente a dicho estado de tensión, alcanza el valor de la energía de distorsión de la sollicitación por tracción simple, cuando se alcanza el límite de fluencia”.*

Para el estado tridimensional de tensiones, la energía de distorsión por unidad de volumen es:

$$\mu_f = \frac{(1+\mu)}{3 \cdot E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]$$

Mientras que en el estado de tracción simple resulta ser:

$$\mu_f = \frac{(1+\mu)}{3 \cdot E} \sigma_c^2$$

Igualando ambas expresiones y despejando  $\sigma_c$  se tienen la tensión de comparación de Huber – Von Mises – Hencky para el estado tridimensional de tensiones:

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (19)$$

Por lo que un material cualquiera se encontrará en buenas condiciones de servicio siempre y cuando se cumpla que:

$$\sigma_c < \sigma_{adm} \quad (20)$$

Experimentalmente se demostró que esta teoría se adapta perfectamente a los materiales dúctiles como el acero.

### **Discusión de Resultados.**

En el siguiente ejemplo de aplicación se plantea el dimensionado de la placa de asiento de una columna metálica (Figura 1) sometida al efecto de volcamiento provocado por la acción del viento, sufriendo sollicitaciones de arrancamiento en sus bulones de anclaje, mediante el análisis tridimensional por medio del método de los elementos finitos.

Figura 1: Geometría inicial del fuste y de la placa de anclaje

Se colocó la carga máxima de tracción (provocada por el viento en dirección diagonal) 26,05 Tn distribuida en los nodos cercanos a los orificio de los bulones.

En una primera instancia, adicionándole un refuerzo a la placa de anclaje, se observan tensiones muy elevadas tanto en la placa como en el primer refuerzo (Figura 2).

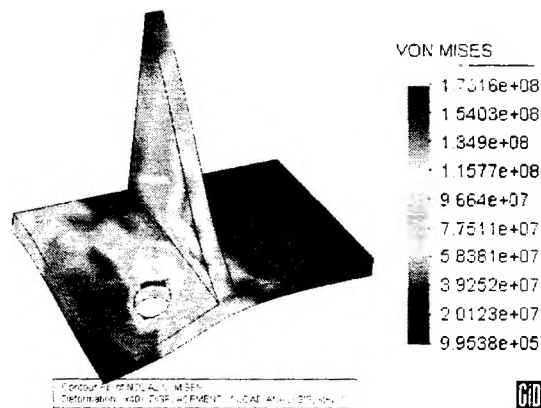


Figura 2. Tensiones en la primer etapa del dimensionado

Finalmente se lograron tensiones moderadas colocando dos refuerzos más (figura 4), en donde se notan ciertas concentraciones puntuales de tensiones cerca del agujero (por la

forma de colocar las cargas) y en el borde de la izquierda de la figura, en donde en realidad la placa tiene un espesor un poco mayor, ya que este va aumentando.

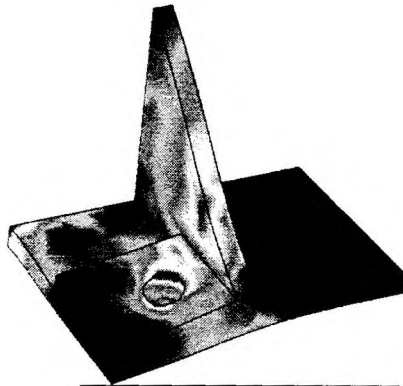


Figura 3: Tensiones en la segunda etapa del dimensionado

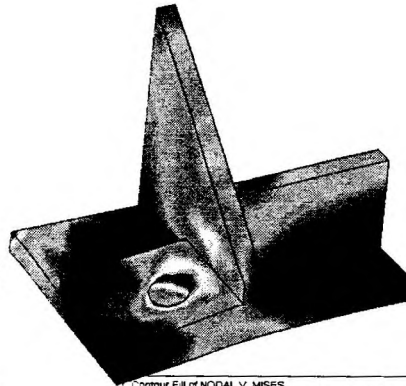


Figura 4: Tensiones en la tercera (y ultima) etapa del dimensionado

La parte de la placa con el agujero en el centro de la misma no presenta problemas, salvo concentraciones puntuales de tensión debido al modelado, como se observa en la figura 5.

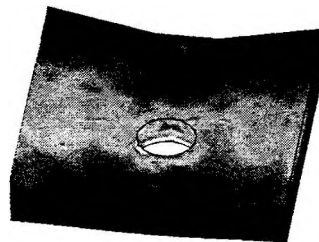


Figura 5: Tensiones en la media

En las figuras 4 y 5 puede apreciarse la distribución de las tensiones de comparación de Von Mises de las placas de esquina y de la central, respectivamente. Se observa que en una porción muy reducida de la placa se supera, por escaso margen, la tensión admisible ( $\sigma_{adm}=1714 \text{ kg/cm}^2$ ) por lo que se considera que la placa se encuentra en *Buenas Condiciones* operativas.



Figura 6. Configuración final del fuste y de la placa de anclaje

Esta última figura 6 se observa un esquema de cómo quedó la placa del fuste para absorber las tensiones que se generan debido al viento en dirección diagonal a la estructura.

#### Conclusiones.

- Cuando las características geométricas, mecánicas o de cargas no permiten la utilización de modelos de cálculo simplificados el análisis del cuerpo como un sólido tridimensional por el método de los elementos finitos se presenta como la mejor alternativa obteniéndose resultados de mayor precisión y posibilitando una mejor interpretación del comportamiento del cuerpo.
- La implementación matricial de la teoría de la elasticidad en tres dimensiones no presenta dificultades conceptuales.
- El trabajo computacional se incrementa requiriendo ordenadores de mayor capacidad.

#### Bibliografía.

- AWRUCH, A. and DI RADO, H. Introducción al método de los elementos finitos. EUDENE (1998)
- BARES R. Tablas para el cálculo de placas y vigas pared. (1974)
- BATHE KLAUS-JURGEN Finite Element Procedures Prentice Hall (1996)
- GARCIA MERAYO, F. Programación en FORTRAN Editorial Paraninfo S.A. (1996)
- MALVERN, L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. USA (1969).
- OÑATE, E. Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. CIMNE (1992)

OWEN, D. R. J. and HINTON, E. Finite Elements in Plasticity; Theory and Practice. Pineridge Press Limited. Swansea. U. K. (1980).

ZIENKIEWICZ, C. C.; HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W. A unified approach to soil mechanics problems (including plasticity and viscoplasticity). In: Finite Elements in Geomechanics (Edited by Gudehus), pp 151-177 J. Wiley & Sons, London, UK (1977).

ZIENKIEWICZ, C. C.; HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. Geotechnique, V.25, pp 671-689 (1975).