UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Y AGRIMENSURA

LICENCIATURA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Tesina

Estudio exploratorio de las ecuaciones lineales en Z

Autor: Prof. Mosqueda, Daniel Luis.

Directora: Mgter. Saiz, Irma Elena.

Corrientes, 2017

ÍNDICE

RESUMEN

En esta investigación nos propusimos explorar y analizar las concepciones presentes en los alumnos del Nivel Medio sobre las ecuaciones lineales en Z.

Para determinar las concepciones que surgen en el alumno a la hora de enfrentarse a las ecuaciones en Z, analizamos un libro de texto del Nivel Medio de uso frecuente por docentes y alumnos, un video online, un artículo de investigación y un registro de clase extraído de una investigación ya publicada. El material empírico analizado nos permitió observar ciertas rupturas que emergen en el aprendizaje de los alumnos respecto a las ecuaciones lineales al pasar de N a Z. Concebir que una suma sea negativa o la concatenación del doble sigo, sumar un negativo, son ejemplos de algunas de las rupturas detectadas en este trabajo de investigación.

Pudimos concluir que existen determinados conocimientos fundamentales en el aprendizaje de las ecuaciones en Z, que al no ser tratados en la clase de matemática provocan grandes dificultades a los alumnos. Para superar estas rupturas, propias del conocimiento matemático, será necesario que el docente tome consciencia de ellas y de esta manera actúe en consonancia.

Palabras claves: Ecuaciones lineales. Rupturas. Números Enteros.

INTRODUCCIÓN

Justificación

Nuestra experiencia en el Nivel Medio nos permitió tomar consciencia de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos cuando se plantea el tema de resolución de ecuaciones lineales en Z[1]. De igual forma, en el Nivel Universitario observamos que muchas de esas dificultades no han sido superadas por los ingresantes, las cuales son identificadas por los docentes en una corta frase: "*los alumnos no saben despejar".*

Cuando se hace referencia a la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones lineales con números enteros en el Nivel Medio, con frecuencia, se selecciona casi como único método de resolución el de *deshacer* (método del despeje, o transposición), en el que no queda claro para el estudiante cuando el profesor afirma: *"lo que está sumando pasa restando", "lo que multiplica pasa dividiendo",* etc., en aquellas ecuaciones que no son de la forma $ax + b = c$. Esto provoca una variedad de errores en su resolución, más aún cuando los coeficientes son enteros negativos. Y ante una ecuación en la que se podría economizar los procedimientos, los alumnos utilizan indiscriminadamente el método de resolución mencionado y la toma de decisiones queda fuera de ella. Por ejemplo, es probable que frente a la ecuación $3x = 0$, los alumnos escriban $x = 0 : 3$; $x = 0$ o bien $x = 0 - 3 = -3$, dejando de lado la propiedad sí el producto de dos factores es cero, entonces al menos uno de ellos debe ser cero.

Trabajar en el conjunto Z plantea nuevas cuestiones específicas de este conjunto que no fueron necesariamente tratadas previamente cuando se presentaron ecuaciones en N, e incluso en el trabajo con la operatoria en Z; por ejemplo, la solución de una ecuación puede ser un número negativo; una ecuación puede no tener solución o tener infinitas soluciones, además puede plantear que la suma de dos números dé por resultado un número menor que uno de los sumandos: ¿cómo sumar un número a 5 y que de por resultado -8?. Estas cuestiones aparentemente contradictorias para los alumnos, que no aparecen en las ecuaciones en N ni las diferencias y/o rupturas que la suma en Z provoca en los conocimientos de los alumnos en relación con la suma en N, no son tratadas generalmente en el aula. Con frecuencia se asume que, si ya han trabajado con ecuaciones lineales en N y con la operatoria en Z, resolver ecuaciones en este último conjunto no debería presentar mayores dificultades para los alumnos.

---

[1] En este trabajo indicaremos con N, Z, Q al conjunto de los números naturales, enteros y racionales respectivamente.

Según el Diseño Curricular de Corrientes - Matemática (2013) se debe proponer actividades en las que se analice el campo de solubilidad de las ecuaciones lineales (con una variable) que intervienen en cada situación. Habitualmente en la clase de matemática solo se proponen ecuaciones con solución única y en otros casos, no se plantea a los estudiantes problemas en las que intervienen ecuaciones con coeficientes enteros, en los que su uso resulta una herramienta sumamente eficiente: expresar distintas relaciones de una determinada situación. O bien se presentan ejercicios en los que es posible dar respuesta a ellos utilizando únicamente recursos aritméticos. Por ejemplo ante la ecuación $2x + 5 = -11$, los alumnos pueden realizar el siguiente razonamiento: considerar a 2x como un número, entonces 2x antes de sumarle 5 debía valer -16, por lo tanto x debe ser 8, y la importancia - necesidad del álgebra, no se ve reflejada en este tipo de actividad.

La necesidad de explorar y dar respuesta a las dificultades que presentan los alumnos del nivel medio e incluso estudiantes de niveles superiores a la hora de resolver ecuaciones en Z, nos permitió dar lugar a este estudio didáctico. Para lograrlo, planteamos las siguientes preguntas que encaminaron esta investigación.

En cuanto al contenido matemático en estudio:

- ¿Cuáles son las características específicas de las ecuaciones en Z?
- ¿Qué nuevas situaciones plantean las ecuaciones en Z con respecto a las ecuaciones en N?
- ¿De qué manera influyen las rupturas de las operaciones en el pasaje de N a Z, en la resolución de ecuaciones?

En cuanto a lo didáctico:

- ¿Cuáles son las dificultades que deben superar los alumnos para aprender a trabajar con ecuaciones en Z? ¿Cuáles de esas dificultades están explicitas en los Diseños Curriculares?

Antecedentes

Para los investigadores Pizón y Gallardo (2000, citado en Castellanos Cruz, s.f.) una de las dificultades que presentan los estudiantes en relación con el aprendizaje del álgebra, son las transformaciones entre números positivos y negativos en expresiones algebraicas. Es así que los alumnos ignoran el signo del número y las letras son consideradas únicamente como positivas.

Esquinas Sancho (2009) afirma que los problemas que se plantean sobre ecuaciones en la Escuela, pueden resolverse a través del uso de recursos meramente aritméticos por lo que el alumno no acepta la necesidad de un tratamiento algebraico.

De esta manera el álgebra no se presenta como una herramienta útil sino más bien como un método impuesto por el profesor sin sentido para el alumno. Sessa (2005) afirma que para los alumnos *"las ecuaciones son cosas que se despejan y dominar las reglas de esa técnica suele ser una fuente inagotable de dificultades para ellos"* (p. 67). Al respecto Abrate, Vicenç y Pochulu (2008, p.164) afirman "…cuando los alumnos "creen" conocer todas las técnicas básicas, terminan utilizándolas indiscriminadamente sin analizar que por otros métodos el problema hubiese resultado más fácil y menos laborioso en su resolución". En consideración de esto último, las investigaciones realizadas por los autores (Kieran, 1992; Rivero, 2000; Pochulu, 2005a, 2005b; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Abrate, Vicenç y Pochulu, 2007a, 2007b, entre otros, citados por Abrate et al., 2008) "muestran que los estudiantes no están logrando una formación matemática adecuada en Álgebra" (p.164)

Esquinas Sancho (2009) y Sessa (2005) sostienen que en la escuela, las ecuaciones no son consideradas como una restricción en un dominio, en el que se incluye la noción de variabilidad propia del álgebra. Esta característica no es comprendida por los alumnos cuando se resuelven a través de la realización de operaciones en ambos miembros de la igualdad.

Rojano Ceballos (2010) menciona que una las estrategias que se presenta en la clase tradicional es el modelo de la balanza para resolver ecuaciones lineales con una incógnita, cuya idea fundamental es mantener el equilibrio (igualdad algebraica) y concluye, basándose en otros estudios, sobre algunas ventajas y dificultades al extender el dominio de los naturales a los enteros. Sostiene que actúa como un factor que obstruye la generalización del método de resolución, ya que el modelo de la balanza no fue ideado para ecuaciones con números negativos ni ecuaciones en las que intervienen expresiones de la forma 7 – (–2x) o 5x + (–3), pues es necesario llevar a expresiones equivalentes como 7 + 2x; 5x – 3 respectivamente, donde se requiere la sintaxis de las operaciones con enteros.

Esquinas Sancho (2009) propone la introducción del álgebra como lenguaje, para evitar de esta manera un álgebra vacía de significados. Sugiere proponer **problemas contextualizados** para el aprendizaje del lenguaje algebraico, lo que dará mayor conexión entre signos y símbolos. Al igual que en otras investigaciones, afirma que "las actividades aritméticas son un excelente punto de partida para fomentar las ideas de generalización del álgebra y llegar a la formalización de un modo espontáneo" (p. 151). Melisani (1999) acepta esta afirmación, pero añade que en la fase de transición entre pensamiento aritmético y pensamiento algebraico, ciertos obstáculos a nivel aritmético en el cual incluye los números negativos, pueden retardar el desarrollo del lenguaje algebraico.

Una de las posibles vías para arribar al concepto de ecuación, consiste en proponer actividades ligadas a la *generalización*. Este proceso permitiría a los alumnos "atrapar" el verdadero sentido de este objeto (Sessa, 2005, pp. 71 – 72). Algo similar encontramos en Alonso et al. (1993) cuando afirma que el alumno sentirá la necesidad de utilizar letras en el momento de describir relaciones o propiedades numéricas, logrando de esta manera darles un sentido.

OBJETIVOS

El **objetivo general** de este trabajo consiste en explorar y analizar las concepciones presentes en los alumnos del nivel medio, a partir de los conceptos, herramientas y procedimientos utilizados por los mismos para plantear y resolver ecuaciones lineales en Z.

Para lograrlo, planteamos los siguientes **objetivos específicos**:

- Conocer los aspectos significativos que surgen tanto en el planteo como en la resolución de las ecuaciones en Z.
- Estudiar las rupturas de las operaciones en el pasaje de N a Z, en la resolución de ecuaciones.
- Reconocer las cuestiones que están explícitamente indicadas en los Diseños Curriculares en relación con las ecuaciones en Z.
- Identificar las dificultades que deben superar los alumnos para aprender a trabajar con ecuaciones en Z.

El presente trabajo de investigación ha sido organizado en cinco capítulos, los cuales se especifican sintéticamente de la siguiente manera:

En el primer capítulo realizamos, por un lado, un estudio sobre el proceso de construcción de los negativos hasta ser considerados como número. Por otro, explicitamos las definiciones y propiedades que sustentan este trabajo respecto a los números enteros y las ecuaciones lineales.

En el segundo, precisaremos los conceptos y definiciones propuestas en la Teoría de Situaciones Didácticas utilizadas en esta investigación. En un segundo apartado, proponemos un análisis del Diseño Curricular de Corrientes: Matemática.

En el tercer capítulo, nos centraremos en el análisis de un artículo de investigación en el que se identifican los aportes realizados por Eva Cid respecto a la enseñanza de los números negativos y explicitaremos las principales contribuciones en esta tesina.

El Capítulo cuatro, abarca el análisis de dos objetos educativos muy distintos. El primero, corresponde al análisis de un libro de texto escolar utilizado actualmente en el Nivel Medio de segundo año, en el que se indaga las cuestiones propuestas por el autor para trabajar con ecuaciones lineales en Z y de qué manera pretende hacer evolucionar los conocimientos de las ecuaciones en N hacia el nuevo conjunto. En segundo lugar, un video online disponible actualmente en YouTube, referido al concepto de ecuación en Z en el que se investiga la rigurosidad de las definiciones propuestas y los ejemplos citados por el youtuber.

El último capítulo contiene tres aspectos referidos a la exploración con los alumnos. Primero proponemos un estudio matemático de las actividades propuestas para los alumnos. En segundo lugar, analizamos los posibles procedimientos que podrían utilizar en dichas actividades y, por último, analizamos un registro de clase ordinaria de segundo año.

Al finalizar todos los capítulos, se encuentra disponible el material bibliográfico referente a las teorías matemáticas - didácticas y en la sección de anexos, los documentos - objetos de análisis - para la elaboración de esta tesina.

CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO MATEMÁTICO

Desde el punto de vista matemático proponemos dos aspectos relacionados entre sí. Iniciamos este capítulo con una breve descripción de los antecedentes históricos que llevaron a la constitución de los negativos como número. Conocer la historia de un objeto matemático nos permite adquirir una herramienta esencial para la planificación de las actividades áulicas y de esta manera propiciar un aprendizaje significativo para el alumno. Luego de este desarrollo, explicitamos un estudio referido a la construcción formal de los números enteros a partir de los naturales en la cual se explicitan sus propiedades fundamentales. Y con el desarrollo de las ecuaciones lineales, su definición y clasificación según el conjunto solución. Todo ello nos permitirá fundamentar las afirmaciones del resto de los capítulos.

Origen y evolución de los números negativos

Sabemos que la Historia de la Matemática resulta un instrumento fundamental para enriquecer la enseñanza, ya que permite responder a las dificultades de los conceptos que surgen en esta ciencia. González Urbaneja, P. (2004) afirma "el estudio de la historia permite conocer la aparición de dificultades epistemológicas que presentan una gran similitud con las que atraviesan los estudiantes*"* (p. 21). Es por ello que en este apartado nos proponemos a exponer los principales sucesos históricos referidos a los números negativos, desde sus primeros usos hasta su aceptación formal como número.

Desde la antigüedad, la idea de número estaba asociada a la noción de cantidad y magnitud para las diversas culturas. El avance de la ciencia matemática provocó la creación de otros números no naturales, como el cero y los negativos. En su artículo Torres Ninahuanca C. (s. f.) señala "los griegos utilizaban magnitudes negativas en sus teoremas, siempre referido a las propiedades de la resta, por ejemplo, en (a–b).(c–d) = ac + bd – ad – bc; dejándolos como restas indicadas*"*. Diofanto en el siglo III fue el primero en utilizar esa notación simbólica para abordar la resolución de ecuaciones algebraicas sin recurrir a la geometría. Enunció la regla "*sustracción por sustracción da adición*"[2], regla que se refería únicamente a las sustracciones de la forma a > b y c > d, dejando de lado cualquier tipo de referencia a los números negativos.

Según la investigadora Macías (s.f.), las primeras manifestaciones del uso de los "números enteros" se remontan al siglo V, en oriente (China). Se manipulaban

[2]"Lo que más adelante se denominó regla de los signos". Ver en González, J. (1990). *Números Enteros*. 1st ed. Madrid: Síntesis, p. 23.

números positivos y negativos a través del uso de tablillas o bolas de diferentes colores y también varillas de color rojo para los negativos, negro para los positivos. Para Boyer (1999), *"No hay evidencias de que los chinos hayan aceptado los números negativos como solución de una ecuación"* (p. 264)

En el año 628 d.C., el matemático hindú Bramagupta (598 - 670)[3], presenta un escrito llamado *Brahma – sphuta – siddhanta.* (*Doctrina de Brahma Correctamente Establecida*). En el cual por primera vez se hace referencia a los números negativos y sus reglas operatorias, pero sin ningún tipo de justificación lógica. Se cree que fue el idealizador del concepto de cero. Aunque hay constancia de que esta obra gozó de amplia difusión en el mundo árabe y no hay evidencia de que hayan dado trascendencia a la cuestión de los números negativos.

El europeo Fibonnacci en su obra Flos (1225) es considerado como el primer matemático que ante una ecuación cuya única solución era negativa, dice que el enunciado del problema es absurdo y que ésta señala un haber, una deuda. En Europa, aproximadamente por el siglo XV, los números negativos fueron ignorados y en sus primeras apariciones, eran denominados "números satánicos".[4]

En el Renacimiento, alrededor de 1000 años después de la publicación de Bramagupta, los números negativos vuelven a presentarse y lo hacen de la mano del francés Nicolás Chuquet (1445 – 1500), autor de "*Triparty*"[5] publicado en 1484. En esta obra se dedica al estudio de ecuaciones, en la cual aparece por primera vez, un número negativo aislado en una ecuación algebraica[6]. Chuquet fue el primero en aceptar las soluciones negativas de las ecuaciones y en su obra explica las operaciones con números enteros (positivos, negativos y el cero) y con fracciones, proponiendo un modo explícito la regla de los signos de la multiplicación.

Luego de siete décadas, en 1544 el alemán Michael Stifel (1487-1567), en su obra "Aritmética Íntegra", manifiesta un conocimiento de los números negativos proporcionando las reglas para operar con ellos. Esta aceptación era para los números negativos como coeficientes, pero no como raíces de una ecuación, pues los consideraba como números absurdos (Boyer, 1999, p. 361). La notación utilizada actualmente para los números positivos y negativos fue gracias a Stifel[7] a partir del siglo XV. Antes de esto se utilizaba la abreviatura de p para los positivos y m para los

---

[3] Consultado en http://www.ecured.cu/index.php/Brahmagupta
[4] En González, J. (1990). *Números enteros*. 1st ed. Madrid: Síntesis., se dice que probablemente porque habían llegado de la mano de los árabes, a quienes consideraban hijos de Satán.
[5] Citado en http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=chuquet-nicolas
[6] Extraído de https://historiadelacienciarenacentista.wordpress.com/page/3/
[7] Extraído de Castillo Angulo, C. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos*. [Tesis de maestría], Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ingeniería y Administración. Repositorio institucional Biblioteca Digital

negativos[8]. Un año más tarde, el italiano Giordano Cardano (1501-1576) en su obra "Ars magna", agrega la transformación de las ecuaciones cuatrinomias en trinomias, al mismo tiempo surgen algunas conjeturas acerca de las raíces negativas a las que llamó *falsas*.

Por su lado el matemático italiano, Rafael Bombelli (1526-1573) en una obra publicada en 1572 con el nombre de "Álgebra", trató las reglas de los signos para operar con números positivos y negativos. Escribió[9]:

"Además hace más veces más
Menos veces menos hace más
Más veces menos hace menos
Menos veces más hace menos

El francés Francisco Vieta (1540-1603) quien, aun siendo considerado uno de los principales precursores del álgebra, no los aceptaba como raíces ni como coeficientes. A diferencia de esto, Simón Stevin (1548 – 1620) aceptó los números negativos por su utilidad para el cálculo y acepta la expresión x + (-y) como una adición y no como una sustracción en la que a x se sustrae y. Aunque no encontraba sentido para los negativos y las raíces negativas, intentó justificar la regla de los signos a través de la geometría, ya que los números negativos le resultaban poco fiables por la idea que poseía respecto de los números, pues consideraba que: "un número es lo que representa cantidad"

Con respecto a la regla "*menos x menos = más*", Stevin elaboró una justificación. A partir de saber que 3 x 2 = 6, reemplazó: 3 = 8 – 5 y 2 = 9 – 7 luego multiplicó (9 – 7) con (8 – 5) aplicando la propiedad distributiva llegando a que necesariamente (-7)(-5) tiene que ser +35. También elaboró una demostración geométrica en la que concluye: "más multiplicado por más da producto más, menos por menos da producto más, más por menos, o menos por más da producto menos, …" (Gómez, 2001, p. 261)

Durante el desarrollo del siglo XVII, los números negativos ganan una mayor aceptación. Con Albert Girard (1590 – 1633), de origen francés, tradujo varias obras de Stevin. En 1629 proporcionó una nueva interpretación al formular las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación. Rey Pastor J. y Babini J. (s. f.) exponen al respecto

> "… toda ecuación tiene tantas raíces como indica el grado, para lo cual considera, además de las raíces positivas, las negativas y las complejas simples y dobles. Observa que las raíces "imposibles" (negativas e imaginarias) sirven para asegurar la validez de la regla general y comprobar que no hay otras soluciones…" (pp. 22 – 23).

[8] Extraído de Torres Ninahuanca C. (s. f.). *Números Enteros: Origen e Historia*.
[9] Citado en http://apprendre-math.info/espagnol/historyDetail.htm?id=Bombelli

Girard aceptó las raíces negativas a las que consideraba en sentido contrario al de las positivas como vemos en su expresión: “lo negativo en geometría indica un retroceso mientras que lo positivo un avance” (Boyer, 1999, p.389)

En forma similar a lo que ocurría en el continente europeo, en Inglaterra, los números negativos también despertaron interés. John Wallis (1616 – 1703), quien aceptó los números negativos, los utilizó e incluso dio reglas para operar con potencias negativas, aunque con carencia de los fundamentos lógicos.

La problemática sobre los negativos como número y soluciones de ecuaciones siguió durante los siglos XVI y XVII. Los matemáticos franceses Descartes y Pascal también rechazaban a los números negativos. René Descartes, (1596 – 1650), si bien conoce la existencia de raíces negativas las ignoró. En la obra “Pensamientos”[10] de Blas Pascal (1623 – 1662), se encuentra lo siguiente: “…demasiada verdad, nos pasma (conozco quienes no pueden entender que, si se resta de cero cuatro, queda cero)*”.* Otras posturas al igual que las mencionadas, por ejemplo para el francés Antoine Arnauld (1612 – 1694), cuestionaba a los números negativos respecto de la proporción –1 : 1 :: 1 : –1 decía: “¿Cómo puede ser una cosa menor a otra mayor lo mismo que una mayor a otra menor?” (González, 1990, p. 32). El alemán Leibniz (1646 – 1716), responde a esta cuestión sugiriendo no centrar la atención en el contenido para fijarla en la forma, decía al respecto**:** “se pueden calcular con estas proporciones porque su forma es correcta”[11] **.** Leibniz y Jean Bernoulli (1667 – 1748, suizo), discutían sobre la naturaleza de los logaritmos de los números negativos. Tenía conocimiento de los números negativos y se puede suponer, por la manera en que se interesó por los logaritmos de los negativos, que no los rechazaba.

Según lo mencionado por Cid (2015), Johann Hudde (1628 – 1704) en su aporte a la obra Exercitationes Mathematicae publicadas en 1656 – 1957 por su maestro Van Schooten, fue el primer matemático que empleó coeficientes literales en una ecuación para indicar números reales cualesquiera, positivos o negativos.

En González, (1990), Newton (1642 – 1727), en su obra “Enumeratio Linearum Tertii Ordinis” publicada en 1676 otorga un significado geométrico a los números negativos *“… pues si 4 es la coordenada de un punto P, -4 es la coordenada de un punto Q situado a igual distancia del origen que P pero en la semirrecta opuesta”* (p. 34) (Interpretación geométrica equivalente, ya había sido admitida por Girad y Wallis en1655).

Durante el siglo XVIII, podemos ver que el mismo D’ Alambert (1717-1783) es quien primero define a las cantidades negativas como: “Aquellas que son observadas

[10] En www.cervantesvirtual.com, se puede encontrar la obra completa.
[11] Se puede consultar en Gallardo, A. y Hernández, A (2002). *Emergencia de los Números Negativos*.

como menores que nada y que están precedidas del signo menos" (González, 1990, p. 37). Pero luego en su artículo titulado "Negativo" (1750), afirma: *"Decir que la cantidad negativa es menos que nada es expresar una cosa que no se puede concebir".* Para él, la solución negativa en una ecuación significa que el problema está mal planteado. Por ejemplo: "Si se busca un número que añadido a 100 dé 50, las reglas del álgebra darán x = –50, lo que hace ver que la cantidad x es igual a 50 y que en lugar de ser añadida debe ser restada" (Bagazgoitia, 2007, p. 140)

Para la multiplicación de dos números negativos (– a).(– b) D'Alambert justifica diciendo que (– a).(– b) es restar b veces la cantidad negativa – a (argumenta de la siguiente manera:

> "…adjuntar una cantidad negativa equivale a restar una positiva y restar una negativa equivale a adjuntar una positiva entonces es + ab, pues (–a).(–b)= – (–a) – (–a) – … – – (–a) = + (+ a) + (+ a) + … + (+ a) = + ab"(González, 1990, p. 39)

El geómetra francés Lázaro Carnot (1753 – 1823), muestra su falta de comprensión ante los números negativos frente a la proporción -1 / 1 :: 1 / -1, se manifiesta en términos semejantes a Antoine Arnauld y ante la desigualdad$(-3)^2 < (2)^2$ expresa: *"…* el cuadrado de la más grande será menor que el cuadrado de la más pequeña, lo que está en contra de todas las ideas claras que se pueden formar de cantidad*"*(Glaeser, 1981, citado en Cantoral Uriza, 2008, p. 258)

En Inglaterra, Mac Laurin (1698 – 1746) en su Tratado de Álgebra, obra que se publica en 1748, justificó la regla de los signos para la multiplicación algebraicamente.

Años después, el suizo Leonhard Euler (1707 – 1783)[12], acepta a los negativos y los utiliza en sus ecuaciones, por ejemplo, ene$^{\pi i}$ +1 = 0 de donde $e^{\pi i} = -1$ y realizó una justificación para el caso de –a x b = – ab, en la que concluye – por + o + por – es igual a – [13]

Sin embargo, Gabriel Cramer (1704 – 1752) también suizo como L. Euler, evitaba a los números negativos. En su obra *Laplace, en sus lecciones de L'École normale de l'an* manifestó su aceptación de los negativos, pero sin abandonar la relación de los negativos con las deudas; justificó las reglas de los signos, similar a lo realizado por Mac Laurin.

Recién en el siglo XIX, produciéndose un importante desarrollo de la matemática, es cuando se logra otorgar un status de número a los negativos y las reglas para operar con ellos.

En 1821, el francés, Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo. En ese año, Cauchy publicó el curso de

[12] Entre algunos de sus aportes para las notaciones tenemos el uso de π y el número de Euler e.
[13] La "x" denota multiplicación.

análisis en donde considera que las cantidades algebraicas son distintas de las aritméticas y en relación a la multiplicación de negativos, propuso el siguiente teorema "El producto de dos signos semejantes es siempre +, y el producto de dos signos opuestos es siempre –" (Gómez, 2001, p. 407)

En Inglaterra George Peacock (1791 – 1858), publicó Treatise on Algebra (1830), en el cual trata como una estructura lógica las leyes de la aritmética más tarde ampliadas en 1842 y 1845. Sería este el comienzo de un proceso de axiomatización de la aritmética y el álgebra. Pero Augustus De Morgan (1806 – 1871), inglés nacido en la India, quien, profundizando las ideas de Peacock, quitaría todo sentido a las letras y a los símbolos + y –, centrándose en las leyes de combinación de los mismos con excepción del signo =. A su vez el inglés William Rowan Hamilton, (1805 – 1865), presentó en 1833 "un álgebra formal de *parejas* de números reales" (Boyer, 1999, p. 714), definiendo las reglas para la adición y la multiplicación de dichas parejas de modo que se obtuvieran los mismos resultados que al operar con los complejos.

A partir de las ideas de Peacock, De Morgan y Hamilton, el alemán Hermann Hankel (1839-1873) publica en 1867, "Teoría del Sistema de los Números Complejos" en la que establece que: "la condición para construir una aritmética universal es por tanto la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles" [14].

A partir de las ideas de Peacock, De Morgan y Hamilton, el alemán Hermann Hankel (1839-1873) publica en 1867, "Teoría del Sistema de los Números Complejos" en la que establece que: "la condición para construir una aritmética universal es por tanto la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles"[15] y con ello se logra formalizar al conjunto de los negativos evitando justificarlos en el ámbito de lo concreto.

Hankel, basándose en el Principio de Permanencia de Peacock, formula el Principio de Formas Equivalentes (o de las leyes formales), en el que amplió las normas de la aritmética y propone como concepto de número a símbolos o agregados cuyo significado puede ser cualquiera. Y se definen para el nuevo conjunto, las operaciones de suma y multiplicación y el concepto de igualdad, con el objetivo de que se conserven las propiedades uniforme, asociativa, conmutativa, distributiva y conservación del elemento neutro. Esto significó una ruptura en la línea de pensamiento predominante hasta ese entonces, y de esta manera se amplía el

[14] Boyer C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid Alianza. p. 693, también en González, J. (1990). Números enteros. 1st ed. Madrid: Síntesis. p. 48.

[15] Boyer C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid Alianza. p. 693, también en González, J. (1990). Números enteros. 1st ed. Madrid: Síntesis. p. 48.

concepto de número, permitiendo definitivamente la aceptación de los negativos como números.

Desde entonces, comenzaron los intentos para lograr la elaboración de una definición rigurosa para los negativos. Surgieron así distintas teorías, algunas que han partido de considerar los números negativos como una extensión del número cardinal u ordinal.

Entre los primeros trabajos se encuentra el de Hankel a partir de concebir a los negativos como la diferencia entre dos números naturales donde el sustraendo es mayor que el minuendo. La culminación de esta construcción se logró con el aporte del alemán Richard Dedekind (1831 – 1916), quien estableció una relación de "equisustractividad" entre pares de números naturales, enunciada de la siguiente manera: $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$, superando el caso en que $b > a$ o $d > c$[16]. A continuación demostró que la relación definida cumplía con las propiedades de una relación de equivalencia. Concluyendo que el conjunto de las clases de equivalencias constituía el conjunto de los números enteros. Definió la adición como: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ y la multiplicación la definió de la misma forma que la regla dada por Hamilton para la multiplicación de parejas: $(a, b).(c, d) = (ac + bd, bc + ad)$, las unidades $(a + 1, a)$ y $(a, a + 1)$ y al cero (a, a) y demostró que las operaciones así definidas cumplen con las leyes fundamentales de la adición y la multiplicación. De esta manera quedó definido formalmente el conjunto de los Números Enteros, lo que permitió que los números negativos adquieran el mismo estatus que los números positivos.

Actualmente existen otras teorías como ser la Teoría de las Congruencias elaborada por el matemático Leopold Kronecker (1823 – 1891) y la Teoría de los Operadores, a la que adhirió Giuseppe Peano (1858 – 1932) y Alessandro Padoa (1868 – 1937) que explican la estructura del conjunto de números enteros.

Números Enteros

Basándonos en el texto de Noriega (1987), Courant y Robbins (1979), una primera aproximación al conjunto de números naturales que lo simbolizamos N, da lugar a definirlos como aquellos números que cotidianamente utilizamos para contar: 1, 2, 3, 4, etc. En este conjunto se pueden realizar siempre dos operaciones: suma y multiplicación. Sin embargo las operaciones inversas no lo son, por ejemplo la resta en N no es posible realizarla cuando el minuendo es menor que el sustraendo, es decir no existe ningún número natural x que verifica la ecuación $a + x = b$, con $a \in N$, $b \in N$,

[16] González, J. *Op. Cit*., p. 51.

$a > b$. Ningún $x \in N$ puede satisfacer la ecuación $5 + x = 3$. Para salvar esta cuestión, los matemáticos introdujeron el símbolo 0 mediante la relación $a - a = 0$ ($a \in N$), los símbolos $-1, -2, -3, \ldots$ acompañados de la definición $b-a =-(a - b)$ para el caso $a > b$, haciendo posible la sustracción para cualquier par de números positivos y negativos. A raíz de esto, se considera un conjunto más amplio, denominado conjunto de números enteros $Z = \{0, 1, -1, 2, -2,\ldots\}$, es decir, lo podemos caracterizar como el conjunto que incluye el cero, los naturales y sus "negativos" (u inversos aditivos). Ahora bien, para que esta incorporación de números funcione se deben definir las operaciones de tal manera que las propiedades válidas en N se conserven en este nuevo dominio. Por ejemplo, la regla $(-1)(-1) = 1$ servirá como regla de los signos para la multiplicación de los enteros negativos y no es más que una consecuencia del deseo de los matemáticos por conservar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma en N: $a (b + c) = ab + ac$. Si consideramos $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ y además si suponemos $(-1)(-1) =-1$, $(-1).1 = -1$ (por ser 1 neutro) se tiene $(-1)(1 - 1) = -1.0 = 0$ mientras que $(-1) .1 + (-1). (-1) = -1 - 1 = -2$, llegamos a que la propiedad distributiva no es válida. Durante mucho tiempo los matemáticos no pudieron comprender que la regla de los signos y demás definiciones referidas a los enteros negativos no podían ser demostradas. Couran y Robbins (1979) al respecto afirman

> Todos eran creaciones hechas con objeto de alcanzar libertad en las operaciones, conservando siempre las leyes fundamentales de la aritmética. Lo que puede – y debe – probarse es únicamente el hecho de que con tales definiciones las leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la aritmética se conservan. (p. 63)

Construcción formal de los números enteros

A continuación, daremos la construcción propuesta por Dedekind R. de los números enteros a partir de los números que ya conocemos, los naturales. No existe otro conjunto que se pueda utilizar, y nos basaremos en estos números para construir los enteros. En una primera instancia definiremos el conjunto y luego demostraremos que posee una estructura semejante a los números naturales, en el sentido de que es posible definir dos operaciones, suma y producto, y que ellas satisfacen todas las propiedades conocidas de los naturales. Este nuevo conjunto se considera una ampliación o generalización de los naturales.

Sean las ecuaciones en N_0:

$$a = x + b \text{ entonces } x = a - b \text{ con } a \geq b$$

$c = x + d$ entonces $x = c - d$ con $c \geq d$, luego la solución será la misma para ambas ecuaciones si:

$$a - b = c - d$$

Para que $a - b = c - d$ tenga sentido para todos los elementos de N_0[17], se utiliza $a + d = b + c$ válido en todo N_0.

Sea N_0, consideramos el conjunto definido por:

$$N_0 \times N_0 = N_0^2 = \{(m, n) / m, n \in N_0\}$$

En él definimos una relación de la siguiente forma: Si (a, b) y (c, d) son dos elementos de N_0^2 entonces $(a, b) \sim (c, d)$ sí y sólo si $a + d = b + c$. Se entiende que el símbolo para la suma indica la operación de suma como números naturales. Notemos que los elementos a, b, c, y d son números naturales o cero y como hemos dicho anteriormente, en esta nueva relación ya no interesa si $a > b$ o $b < a$.

Se puede probar entonces, que la relación dada es de equivalencia.

Reflexiva:

$$\forall \ (a , b) \in N_0^2: (a , b) \sim (a , b)$$

$$a + b = b + a \Rightarrow (a , b) \sim (a , b)$$

Simétrica:

$\forall \ (a , b), (c , d) \in N_0^2$: (a , b) c (c , d) entonces $(c , d) \sim (a , b)$, por propiedad simétrica de la igualdad y conmutativa de la suma en N_0)

Transitiva:

$$\forall \ (a , b) ; (c , d) ; (e , f) \in N_0^2: (a , b) \sim (c , d) \wedge (c , d) \sim (e , f) \Rightarrow (a , b) \sim (e , f)$$

Demostración: por hipótesis $a + d = b + c$, $c + f = d + e$. Sumando miembro a miembro $a + d + c + f = b + c + d + e$, por propiedad cancelativa se elimina $c + d$ y se obtiene $a + f = d + e \Rightarrow (a , b) \sim (e , f)$

Por otro lado, si (a, b) es cualquier elemento de N_0^2, entonces su clase de equivalencia viene dada por: $[a, b] = \{(x, y) \in N_0^2 / (x, y) \sim (a, b)\}$

$$(x, y) \sim (a, b) \Rightarrow x + b = y + a$$

Para caracterizar a cada clase de equivalencia, analizamos los siguientes casos:

i) $a = b \Rightarrow [a, b] = \{(x, y) \in N_0^2 / y = x\}$

ii) $a > b \Rightarrow [a, b] = \{(x, y) \in N_0^2 / x = y + a - b\}$

iii) $a < b \Rightarrow [a, b] = \{(x, y) \in N_0^2 / y = x + b - a\}$

En particular

$$[0, 0] = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \ldots\}$$

$$[1, 0] = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), \ldots\}$$

[17] Conjunto de los números naturales incluido el 0.

[2, 0] = {(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4),…}

- -

[0, 1] = {(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5),…}

[0, 2] = {(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6),…}

[0, 3] = {(0, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7),…}

- -

La representación de las clases de equivalencia en N_0^2 es la siguiente[18]:

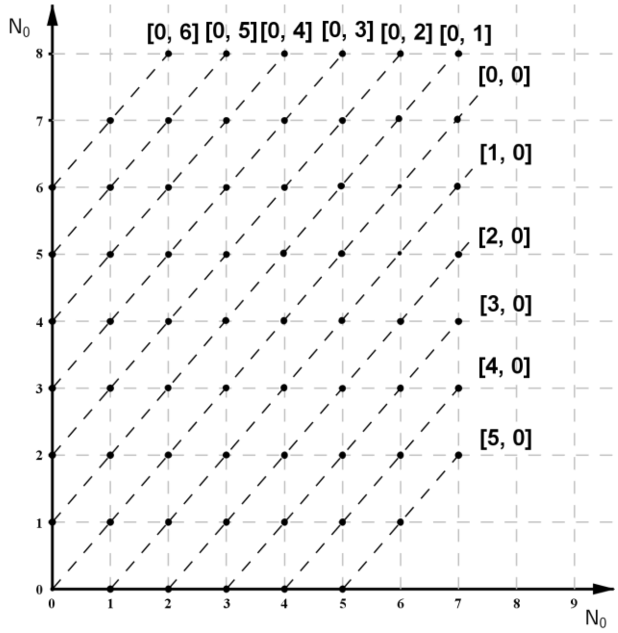


Gráfico Nº1: clases de equivalencia en N_0^2

Eligiendo un único elemento de cada clase de equivalencia, se obtiene un conjunto de índices, es decir que a cada elemento de éste le está asociado una clase de equivalencia

$$I = \{(n, 0)\} \cup \{(0, n + 1)\},\ n \in N_0^2$$

Cada clase de equivalencia se llama número entero y el cociente $\frac{N_0^2}{\sim}$ es el conjunto Z de los números enteros.

Definición:

Número entero es toda clase de equivalencia determinada por la relación en N_0^2.

Conjunto de los números enteros es Z = $\frac{N_0^2}{\sim}$

Definición

Número entero 0 es la clase [0, 0]

Entero positivo es toda clase del tipo [n, 0] con n $\geq$ 1

[18] Gráfico modificado para esta tesina. El original puede consultarse en Rojo A. (2001). *Álgebra I*. Vigésima ed. Buenos Aires: El Ateneo p. 281.

Entero negativo es toda clase [0, n] con $n \geq 1$

A partir de ello, utilizaremos la notación usual para los números enteros

[0, 0] = 0

[n, 0] = + n si $n \geq 1$

[0, n] = − n si $n \geq 1$

De este modo obtenemos

$$[0, 0]= \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \ldots\} = 0$$

$$[1, 0] = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), \ldots\} = 1$$

$$[2, 0] = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), \ldots\} = 2$$

- -

$$[0, 1] = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \ldots\} = -1$$

$$[0, 2] = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), \ldots\} = -2$$

$$[0, 3] = \{(0, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), \ldots\} = -3$$

- -

Para cualquier clase de equivalencia [a, b] se puede encontrar su representante canónico, para ello basta considerar [a − b, 0] (si a> b)[19] o que [0, b − a] (si b > a). Así [3, 4] = [0, 1] = −1; [9, 2] = [7, 0] = 7

Si no hubiéramos considerado el 0, nuestra definición sería la siguiente[20]:

Número entero 0 es la clase [1, 1]

Entero positivo es toda clase del tipo [n, 1] con n >1

Entero negativo es toda clase [1, n] con n >1

A partir de ello, utilizaremos la notación usual para los números enteros

[1, 1] = 0

[n , 0] = + (n – 1)si n >1

[0, n + 1] = − (n – 1) si n > 1

Hemos definido el conjunto de los números enteros Z como el cociente formado por todas estas clases de equivalencia de la forma [a, b], con a y b números naturales. A continuación definiremos en Z las operaciones suma y producto. Para lograr este objetivo usaremos la suma y producto de números naturales y definimos en N_0^2 la adición y multiplicación mediante:

Si (a, b) y (c, d) son dos pares en N_0^2, entonces:

1. (a, b) + (c, d) = (a + c, b+ d)
2. (a, b) . (c, d) = (ac + bd, ad + bc)

---

[19] Pues Si a > b [a, b] = $\{(x, y) \in N_0^2 / x = y + a - b\}$, si y = 0 $\Rightarrow$ [a, b] = $\{(a - b, 0) \in N_0^2 / a, b \in N_0\}$. Luego [a, b] = [a – b, 0]. Ahora si a < b, [a, b] = $\{(x, y) \in N_0^2 / y = x + b - a\}$, si x = 0 $\Rightarrow$ [a, b] =$\{(0, b - a) \in N_0^2 / a,b \in N_0\}$, y [a, b] = [b – a, 0].

[20] Nosotros preferimos incluir el 0.

Tanto la suma como el producto están bien definidos, de lo contrario una clase de equivalencia puede venir dada por dos representantes distintos y esto podría alterar la definición de la suma o el producto.

Proposición: *La relación de equivalencia definida es compatible*[21] con estas leyes de composición en N_0^2.

Demostración:

i) Por definición de la relación de equivalencia, conmutatitivad y asociatividad de la adición en N_0 , y por la definición 1., se tiene:

$(a, b) \sim (a', b') \wedge (c, d) \sim (c', d') \Rightarrow a + b' = b + a' \wedge c + d' = d + c' \Rightarrow$

$\Rightarrow (a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c') \Rightarrow (a + c , b + d) \sim (a'+ c', b' + d') \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) +(c, d) \wedge (a', b') + (c', d')$

ii) Sean $(a, b) \sim (a', b') \wedge (c, d) \sim (c', d') \Rightarrow a + b' = b + a' \wedge c + d' = d + c'$, entonces multiplicamos la primera igualdad por c y luego por d, y utilizamos la propiedad simétrica de la igualdad.

$ac + b'c = bc + a'c$

$bd + a'd = ad + b'd$

Sumando y reordenando términos.

$ac + bd + a'd + b'c = bc + ad + a'c + b'd$ (1)

multplicando la segunda igualdad por a' y luego por b'.

$a'c + a'd' = a'd + a'c'$

$b'd +b' c' = b'c + b'd'$

Sumando

$a'c + b'd + a'd' + b' c' = a'd + b'c + a'c' + b'd'$ (2)

sumando (1) y (2), después de cancelar resulta

$(ac + bd)+ (a'd' + b' c') = (ad + bc)+ (a'c' + b'd')$

Por definición de relación de equivalencia

$(ac + bd, ad + bc) \sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$

Por definición de producto resulta

$(a, b) . (c, d) \sim (a', b') . (c', d')$

[21] "Sea $A \neq \phi$, $\sim$ una relación de equivalencia definida en A, y * una ley de composición interna en A. Se dice que $\sim$ es compatible con * $\Leftrightarrow a \sim a' \wedge b \sim b' \Rightarrow a * b \sim a' * b'$ cuales quiera sean a, a', b, b'". Es decir, la composición de pares de elementos no depende de los representantes elegidos. Rojo, A. op.cit. p. 154

Adición y multiplicación en Z

De acuerdo con el teorema fundamental de compatibilidad[22], existe en el conjunto cociente es $Z = \frac{N_0^2}{\sim}$ dos leyes de composición interna inducidas, llamadas suma y producto de enteros únicos, tales que la aplicación canónica $f: N_0^2 \to Z$ es un homomorfismo. En otras palabras, la suma y producto de dos números enteros es otro número entero.

Ejemplos de cómo se realiza la suma y multiplicación de números enteros:

$(-3) + (+2) = f\,(0, 3) + f(2, 0) = f[(0, 3) + (2, 0)] = f(2, 3) = f(0, 1) = -1$

$(-3) \,.\, (-2) = f\,(0, 3) \,.\, f\,(0, 2) = f[(0, 3) \,.\, (0, 2)] = f(6, 0) = 6$

Generalizando, podemos afirmar lo siguiente:

Sean $x = [a, b] = f\,[(a, b)]$, $y = [c, d]= f\,[(c, d)]$, dos números enteros, se definen

Suma: $x + y = [a, b] +[c, d] = [a + c, b + d]$

Multiplicación: $x\,y =[a, b] \,.\, [c, d] = [ac + bd, ad + bc]$

Es importante hacer la siguiente observación: el símbolo "+" en el lado izquierdo de la primera igualdad indica suma de números enteros, mientras que el mismo signo en el lado derecho indica una suma de números naturales. La misma observación es válida para el producto.

El siguiente paso es demostrar que se verifican todas las propiedades de la aritmética para los números enteros, estudiadas en los naturales.

Las estructuras de (Z, +), (Z, .), (Z, +, .)

- **(Z, +)** *es un grupo conmutativo.*

Debemos demostrar que la suma es:

- *Ley de composición interna*

Sean x e $y \in Z$ tal que $x = [a, b]$; $y = [c, d]$ a, b, c, d en N_0

$x + y = [a, b] +[c, d] = [a + c, b + d]$ como la suma en N_0 es cerrada, se tiene que $x + y \in Z$

- *Conmutativa.*

[22]. Teorema fundamental de compatibilidad: Si $\sim$ es una relación de equivalencia compatible con la ley de composición interna * en el conjunto no vacío A, entonces existe en el conjunto cociente $\frac{A}{\sim}$ una única ley de composición interna *', tal que la aplicación canónica φ: $A \to \frac{A}{\sim}$ es un homomorfismo. Además, las propiedades de * en A se transfieren a *' en $\frac{A}{\sim}$ (Rojo A. op. cit. p. 155).

Sean x e y $\in$ Z, entonces a, b, c, d en N_0 tal que x + y = [a, b] +[c, d] = [a + c, b + d] = =[c + a, d + b] = [c, d] + [a, b] = y + x. Hemos utilizado la definición de número entero, definición de suma en Z, y propiedad conmutativa de la suma en N_0.

- *Asociativa.*

Sean x, y, z $\in$ Z tales que x = [a, b] y = [c, d] z =[e, f]

(x + y) + z = {[a, b] + [c, d]}+ [e, f] = [a + c, b + d] + [e, f] = [(a + c) + e, (b + d) + f] =

= [a + (c + e), b + (d + f)] = [a , b] + [c + e, d + f] = [a , b] + {[cf, d] + [e, d]} =

= x + (y + z)

Por definición de número entero, definición de suma, propiedad asociativa de la suma en N_0.

- *Existencia de elemento neutro*

El neutro para la adición en Z es 0 = [0, 0]o su equivalente [n, n],n $\in$ N

Sea x $\in$ Z tal que x = [a, b]

x+0 = [a, b] + [0, 0]= [a + 0, a + 0] = [a, b] ;[0 + x] = [a, b] por ser la suma en Z conmutativa.

- *Existencia de elemento inverso u opuesto*

El entero opuesto de [a, b] es [b, a]

x + (-x) = [a, b] + [b, a] = [a + b, a + b] = [0, 0] = 0

Otra propiedad adicional de (Z, +) es que las ecuaciones de la forma x + a = b, a, b $\in$ Z admiten solución única en Z, por existencia del opuesto y del elemento neutro de la adición. En este conjunto se tiene x = b + (–a) $\in$ Z.

Resta en Z

La resta se tiene una forma distinta de lo que sucedía en N_0.

Dados dos números enteros en un cierto orden a los que se denominan minuendo (m) y sustraendo (s), se define la operación binaria *resta o diferencia* (r) al número entero tal que si se suman resta (r) y sustraendo (s) se obtiene por resultado el minuendo (m). Simbólicamente m –s = r $\Leftrightarrow$ m = r + s

Como (Z, +) es un grupo abeliano, se tiene (haciendo r = x) la ecuación: s + x = m $\Leftrightarrow$ x= m – s $\Leftrightarrow$ x= m + (–s) por lo tanto m – s = m + (–s). La resta o diferencia se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

- **(Z, .)** *es un monoide conmutativo*

Debemos probar que el producto es

- *Ley de composición interna*.

Sean x e y $\in$ Z tal que x = [a, b] ; y = [c, d] a, b, c, d en $N_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$x . y = [a, b] .[c, d] = [ac + bd, ad + bc] como el producto en N_0 es cerrada, se tiene que x . y $\in$ Z

- *Conmutativa***.**

Sean x e y $\in$ Z, entonces existen a, b, c, d en N tal que

x . y = [a, b] .[c, d] = [ac + bd, ad + bc] = = [ca + db, da + cb] = [c, d] . [a, b] = y . x.

Hemos utilizado la definición de número entero, producto en Z, y propiedad conmutativa del producto en N_0.

- *Asociativa.*

Sean x, y, z $\in$ Z tales que x = [a, b], y = [c, d], z =[e, f]

(x y) z = ([a , b] · [c , d]) · (e , f) = [ac + bd , ad + bc] · [e , f] =

= [(ac + bd) e + (ad + bc) f , (ac + bd) f + (ad + bc) e] =

= [ace +adf + bde + bcf ,acf + ade + bdf + bce) =

= [a (ce + df) + b (de + cf), a (cf + de) + b (df + ce) =

= [a , b] [ce+ df, de + cf) = [a , b] ([c , d] . [e , f])

Por definición de producto en Z, propiedad distributiva del producto con respecto a la suma en N, extracción de factor común y nuevamente definición de producto en Z.

- *Existencia de elemento neutro*

Neutro para el producto en Z es +1 = [1, 0] o su equivalente [n + 1, n] , n $\in$ N_0

Sea x $\in$ Z tal que x = [a, b]

x.(+1) = [a, b] + [1, 0]= [a .1 + b.0, a.0 + b.1] = [a, b]

- **(Z, +, .)** *es un anillo conmutativo y con unidad*

Como (Z, +) es un grupo, (Z, .) un monoide conmutativo, basta probar que el producto en Z es distributivo con respecto a la suma:

Seanx = [a , b],y = [c , d]yz = [e , f] entonces:

(x + y) + z = ([a , b]+ [c , d]) ·[e , f]= [a + c , b + d] **.** [e , f]=

= [(a + c)e + (b + d) f , (a + c)f+ (b + d) e] =

= [ae + bf + ce + df, af +be+ cf+ de] =

= [ae + bf , af + be] + [ce + df , cf+ de] =

= [a , b] . [e , f] + [c , d] . [e , f] = xz + yz

Primero hemos calculado la suma en Z, luego aplicado la definición del producto en Z, propiedad distributiva del producto respecto a la suma en N_0.

División en Z

La división se define a partir de la multiplicación. Diremos que un entero x se divide entre otro entero y (no nulo) si existe un m en Z tal que y . m es igual a x.

Simbólicamente $x : y = m \Leftrightarrow y \,.\, m = x$

Propiedad: (Z, + , .) es un anillo sin divisores de cero.

Seanlos enteros x = [a , b],y = [c , d]tales que x y = 0 entonces

$[a , b] \,.\, [c , d] = [ac + bd , ad + bc] = [0 , 0] \Rightarrow (ac + bd , ad + bc) \sim (0 , 0) \Rightarrow ac + bd =$
$= ad + bc \Rightarrow ac - ad = bc - bd \Rightarrow a. (c - d) = b. (c - d) \Rightarrow a = b \Rightarrow x = 0$

Otras Propiedades:

Sean x e y dos números enteros entonces:

i) $-x = (-1).\, x$
ii) $-(-x) = x$
iii) $(-x)(-y) = xy$

Demostración:

i) De la propiedad 0x = 0, entonces $(-1 + 1)x = 0$, por propiedad distributiva $-1x + x = 0$ (elemento unidad del producto). Luego sumando el opuesto de x en ambos miembros tenemos: $-1x = -x$
ii) Sabemos por i) que $-1x = -x$ entonces $-(-x) = -1\,(-1)x$, $[-1.(-1)]x$ por propiedad asociativa y por cálculo $(-1)(-1) = [0 , 1]. [0 , 1] = [0.0 + 1.1, 0.1 + 1.0] = [1 , 0] = 1$. Luego $-(-x) = 1.x = x$
iii) $(-x)\ (-y) = (-1)x.\ (-1)y = (-1)(-1)xy = 1.xy = xy$, por propiedad i), propiedad asociativa del producto, cálculo anterior, y elemento neutro.

Relación de orden en (Z, +,.)

Para a, b $\in$ Z tales que a = [m , n] y b = [m' , n'] las relaciones de orden <, > entre los enteros se define por:

$$a < b \Leftrightarrow m + n' < n + m'$$
$$a > b \Leftrightarrow m + n' > n + m'$$

Para cualquier par de enteros a, b se verifica la ley de tricotomía es decir se cumple una y solo una de ls siguientes relaciones

a) a = b b) a < b c) a > b

Demostración:

Sean a = [m , n] y b = [m' , n'] dos números enteros. Sabemos que m + n' y n + m' son dos números naturales. Por la ley de tricotomía se verifica:

a) $m + n' = n + m' \Leftrightarrow a = b$

b) $m + n' < n + m' \Leftrightarrow a < b$

c) $m + n' > n + m' \Leftrightarrow a > b$

Propiedades de las operaciones en Z

Sean n, n_1, n_2, n_3 son números enteros negativos. p, p_1, p_2, p_3 enteros positivos.

1) *Al sumar dos números enteros, es posible obtener un número entero menor a uno o los dos sumandos*.

Casos: a) $n_1 + n_2 = n_3$ ($n_3$es menor a los sumandos, $n_2 < 0 \Rightarrow\Rightarrow n_1 + n_2 < n_1 + 0 = n_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n_3 < n_1$. Ídem para n_2)

b) $p + n_1 = n_2$ sí $|p| < |n_1|$ (n_2 es menor que p y no es mayor que n_1) pues $p > 0$ $\Rightarrow n_1 + p > n_1 + 0 = n_1 \Rightarrow n_2 > n_1$)

Los ítems a) y b) permiten afirmar la siguiente propiedad: *En Z, la suma de dos números puede ser un número negativo.*

c) $p_1 + n = p_2$ sí $|p| > |n|$ ($p_2$es menor a p_1 y mayor que n: $n < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1 + n < p_1 + 0 = p_1 \Rightarrow p_2 < p_1$)

2) *Al restar dos enteros, es posible obtener un número entero mayor al minuendo.*
Casos:

a) $p_1 – n=p_2$ ($-n > 0 \Rightarrow p_1 – n > p_1 p_2 > p_1$)

b) $n_1 – n_2 = e$ (entero) y $e > n_1$. Se subdivide en dos casos:

Si $n_1 – n_2 = n_3$($-n_2 > 0 \Rightarrow n_1 – n_2 > n_1 \Rightarrow n_3 > n_1$)

Si $n_1 – n_2 = p$ (Trivial, $p > n_1$)

O bien si e es un entero, $e – n = e + p < e$ si nos basamos en la propiedad de la suma de naturales y lo demostrado en 1 b) y 1c)

3) *El producto de dos números enteros puede ser*

Mayor o igual a los factores dados: $p_1 . p_2 = p_3 n_1 . n_2= p$

Menor o igual a uno de los factores: $p. n_1 = n_2$

Isomorfismo de los enteros positivos con N

Sea Z^+ el conjunto de los enteros positivos. Definimos la función $F: Z^+ \rightarrow N$ / $F(+a) = a$

Se verifica:

I) F es inyectiva: $+a \neq +b \Rightarrow a \neq b \Rightarrow F(+a) \neq F(+b)$

II) F es sobreyectiva: $\forall a \in N, \exists +a \in Z$ / $F(+a) = a$

III) F es un morfismo respecto a la adición en Z y en N:

$F[(+a) + (+b)] = F[+(a + b)] = a + b = F[(+a)] + F[(+b)]$

IV) F es un morfismo respecto a la multiplicación en Z y en N:

$F[(+a) . (+b)] = F[+(a . b)] = a . b = F[(+a)] . F[(+b)]$

En consecuencia, F es un isomorfismo de Z^+ en N, es decir, ambos conjuntos son indistinguibles algebraicamente y pueden identificarse.

A continuación, nos proponemos a definir las ecuaciones y, en particular, las ecuaciones lineales.

Ecuación

Basándonos en lo que afirma De Burgos Roman (2007), consideremos una función escalar de n variables $E(x_1, x_2, ..., x_n)$, llamamos ecuación en las incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ a $E(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Es necesario que dejemos en claro que ella no es una identidad (igualdad), sino que en general $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ no será cero, que solo lo será para algún o algunos valores particulares de las incógnitas. Si $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$ verifica $E(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, entonces la n-upla $(s_1, s_2, ..., s_n)$ es una **solución** de la ecuación. Si la ecuación tiene al menos una solución, se dice que es **compatible**; si no tiene ninguna, **incompatible**. Se dice que una ecuación compatible es **determinada** o **indeterminada** según tenga una única solución o infinitas soluciones, respectivamente. Si cualquier n-upla $(s_1, s_2,...., s_n)$ verifica una ecuación determinada, la ecuación se llama **identidad.**

Sin utilizar el concepto de función de n variables, otra manera de definir a las ecuaciones es utilizando las proposiciones. Por ejemplo, para una **ecuación en una variable**

> "… es una proposición en la que dos expresiones, donde al menos una contiene la variable, son iguales. Las expresiones se llaman lados de la ecuación. Como una ecuación es una proposición, podría ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de la variable. A menos que se restrinja de otra manera, los valores admisibles de la variable son los del dominio de la variable[23]. Los valores admisibles de la variable, si los hay, que proporcionan una proposición verdadera se llaman soluciones o raíces de la ecuación" (Sullivan, M, 2014, pág. 84)

[23] Denominaremos conjunto de referencia al dominio de definición de una ecuación, terminología utilizada en Gorostegui, E., Vilotta, D y Saiz, I. (2011). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación Matemática*, *23*, p. 132

Ecuación lineal

Teniendo en cuenta lo que afirma Poole D. (2011, pág. 64 – 65), se llama ecuación lineal en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a toda ecuación que puede escribirse en la forma $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$, donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y el término constante b son números reales o elementos de algún subconjunto de R.

Por lo expuesto anteriormente, cuando definimos ecuaciones, la n - upla $(s_1, s_2, \ldots., s_n)$ o la sucesión de n números reales $s_1, s_2, \ldots., s_n$ ordenados es solución de la ecuación lineal en n variables $a_1x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$ cuando estos valores verifican la ecuación dada al sustituir $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, …., $x_n = s_n$, es decir, $a_1s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n = b$

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal se denomina **conjunto solución** y cuando se determina este conjunto se dice que se ha resuelto la ecuación (Larson R., 2014). Dos o más ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución se llaman **equivalentes.**

En esta investigación solo trabajaremos con n = 1, es decir con ecuaciones lineales en una variable y definidas en Z: $a x + b = c$, con $a, b, c \in Z$. Ella plantea el interrogante ¿existe algún valor de x que la verifica? De acuerdo a lo planteado en párrafos anteriores, podemos definirla a partir de la función $f(x) = a x + b$, en la que hemos fijado $f(x) = c$, es decir si existe x perteneciente al dominio de la función para el cual $f(x) = c$, es decir tiene como imagen al número c.

Una ecuación lineal en x, a veces se llama también *ecuación de primer grado en x o ecuación de grado 1 en x.*

Ecuaciones en Z

Las ecuaciones, cuyos coeficientes pertenecen al conjunto de números enteros[24], se llaman diofánticas, en honor a Diofanto de Alejandría. Las ecuaciones de primer grado en una variable o ecuaciones lineales pueden simplificarse a la forma $ax = b$ y estas tendrán solución, solo si b es múltiplo de a, esto significa que existe $c \in Z$ tal que $ac = b$, en cuyo caso $x = c$ es solución de la ecuación planteada.

Teorema

Dados a, b y $c \in Z$, entonces la ecuación $ax + b = c$ tiene solución única cuando a es múltiplo de $c - b$, esto es, existe $x_0 \in Z$ tal que $a x_0 = c - b$

[24] La condición necesaria para este tipo de ecuaciones es que se debe obtener soluciones enteras. Véase Aguilar A. (2011) *Elementos de Álgebra Moderna.* Costa Rica. Editorial Universidad Estatal a distancia san José. pp. 37 – 39.

Demostración: Si la ecuación $ax + b = c$ tienen solución entonces existe $x_0 \in Z$ tal que $ax_0 + b = c$. Ahora se suma el opuesto de b en ambos lados de la ecuación, para obtener $ax_0 + b + (-b) = c + (-b)$, entonces $ax_0 = c - b$ y, por lo tanto, x_0 es un factor de $c - b$.

Conclusiones

Por lo expuesto, podemos decir que el concepto de número cambió a través del tiempo para dar lugar a otros tipos de números que no estaban asociados a reflejar la realidad pero que al definirlos de determinada manera cumplían con las propiedades de la suma y la multiplicación. Los antecedentes históricos de los números enteros, nos permiten afirmar que hubo una sorprendente lentitud en el proceso de construcción del concepto de número negativo. Su consideración como tal no fue hasta mediados del siglo XIX. Con la regla de los signos, hecha por Diofanto, se utilizaban unos entes, los ahora llamados números negativos, que eran necesarios en muchas ramas de las matemáticas: álgebra, análisis, geometría analítica, trigonometría, etc., pero que la comunidad matemática, en sus comienzos, no sabía cómo encajar dentro de su cuerpo teórico. Su aceptación fue lograda luego de catorce siglos de sus primeros indicios en la historia. Como se mencionó, el concepto de número estaba asociado a la noción de cantidad, como lo afirmaba Stevin. Esta relación, influyó en muchos matemáticos por lo que no aceptaban a los negativos. Aunque lo podrían utilizar en la resolución de ecuaciones y asociándola como los valores que se encuentran en sentido opuesto de una semirrecta.

Gracias a los aportes de los matemáticos Peacock, De Morgan y Hamilton, Hermann Hankely deRichard Dedekind, y la definición de dos operaciones, queda establecido el conjunto de números enteros.

Este resumen sobre los números negativos, nos orientará en el análisis de un artículo de investigación y también respecto a la producción de los alumnos, que corresponde al capítulo 5. Es decir, no podremos dejar de lado el pensamiento de los grandes matemáticos a la hora de estudiar las producciones de los alumnos sobre los negativos.

El estudio de los números enteros a partir del conocimiento de los naturales y sus propiedades, nos permitió comprobar todo el desarrollo teórico que se encuentra detrás del concepto de número entero. Como ser su definición, compatible con las reglas operatorias de suma y producto (Principio de Permanencia de las Leyes Formales) y sus propiedades que dan lugar a su estructura algebraica.

Por otro lado, hemos podido rescatar el verdadero significado de la inclusión del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números enteros a través de un isomorfismo. Esta cuestión, también es obviada en textos universitarios y en muchos casos se habla de igualdad entre los enteros positivos y los números naturales, cuando en realidad son identificables mediante una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos. A pesar de que poseen comportamientos similares en cuanto a las operaciones y el orden, son objetos matemáticos distintos.

En los estudios superiores, los números enteros son estudiados luego de la enseñanza y aprendizaje de los números reales, cuyas propiedades de este conjunto se “trasladan” a Z. En cambio, en el nivel secundario, los alumnos aún no han construido el concepto del número real. La omisión de que los números negativos fueron creados como necesidad intrínseca de la matemática, en muchos casos dificulta la justificación de las reglas operatorias en Z.Al exponer esta construcción formal de los números enteros, debemos dejar en claro que su objetivo no es proponerlo a los alumnos del Nivel Medio, sino más bien, creemos que su conocimiento resulta necesario e indispensable para la formación del profesorado.

En relación a las ecuaciones, podemos afirmar que una ecuación puede ser definida como una restricción del dominio de una función escalar f (x) = 0 o como una proposición entre dos expresiones. No la podemos definir como una igualdad porque no necesariamente se verifica para todos los elementos del conjunto de referencia. Posiblemente existan elementos del conjunto de referencia de la ecuación que la verificarán y otros que no, es decir, la proposición resultará verdadera y en otros casos, será falsa. Por ejemplo, ante la ecuación lineal $2x + 5 = 1$, definida en Z, se cumple al reemplazar $x = -2$. Sin embargo, para cualquier entero $x \neq -2$ resultará una proposición falsa, lo que da fundamento a lo expuesto en este marco teórico: una ecuación puede tener solución (única o infinitas) o ninguna, dependiendo del conjunto de referencia en el que se trabaje.

Finalmente consideraremos ecuaciones lineales en Z, a aquellas que tienen coeficientes y cuyo valor de la variable asume valores enteros. Lo cual no quiere decir que una ecuación sin solución o con infinitas soluciones enteras no sea considerada como tal.

En la tabla 1 exponemos una posible categorización del conjunto solución de las ecuaciones lineales en Z.

Ecuaciones lineales en Z $ax + b = c$ $a, b, c \in Z$; x: variable que puede tomar valores en Z	Existe solución entera	Única	$a \neq 0$; $a \mid (c - b)$ (a divide al entero c – b) $x = (c - b)/a$
		Infinitas	$a = 0$; $b = c$ $0x = 0$
	No existe solución	Noes un número entero	$a \neq 0$; $a \nmid (c - b)$ (a no divide al entero c – b) $x = (c - b)/a$
		En ningún subconjunto de R	$a = 0$; $b \neq c$ $0x = (c - b)$ Demostración: como $b \neq c$, $c - b \neq 0$, pero $0x = 0 \neq c - b$

Tabla 1. Categorización del conjunto solución de las ecuaciones lineales en Z.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO DIDÁCTICO

Desde muchos años atrás, investigadores y docentes se han preocupado por la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la Escuela. A partir de distintas perspectivas han propuestos teorías que tienden a mejorar la clase. Consideramos al aprendizaje de la matemática como una construcción social de los conocimientos a través de la resolución de problemas en el que juegan un papel sumamente importante las conjeturas, pruebas, refutaciones, intercambio de ideas y las argumentaciones que surgen en la clase.

En este capítulo hemos considerado como marco teórico de referencia la propuesta desarrollada inicialmente por Guy Brousseau sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas en la que numerosos investigadores franceses de la Didáctica de la Matemática continúan perfeccionándola. Pero no debemos olvidar los aportes a esta teoría de los investigadores argentinos: Irma Saiz, Patricia Sadovsky, Carmen Sessa, Mabel Panizza, entre otros.

Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) tiene sus orígenes en la década del 70. Inicialmente su visión respecto al aprendizaje y la enseñanza se basaba desde lo cognitivo, influenciada altamente por una epistemología piagetiana. Actualmente esta teoría tiene por enfoque a "…una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden" (Brousseau, 2007, p. 7)

Para Sadovsky (2005)[25], los elementos centrales de la teoría de situaciones didácticas pueden describirse sintéticamente a través de las siguientes hipótesis postuladas por Brousseau:

1) "El alumno produce conocimiento como resultado de su adaptación a un medio resistente en el que interactúa" (p. 18)

Al respecto Brousseau (1986) menciona:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (citado en Panizza, s. f., p. 3)

[25] Los autores del libro son Alagia, Bressan y Sadovsky.

2) “Para todo conocimiento (matemático) es posible construir una situación fundamental, que puede comunicarse sin apelar a dicho conocimiento y para el cual éste determina la estrategia óptima” (p. 19)

3) La intencionalidad didáctica en un medio es indispensable para que el alumno adquiera los conocimientos culturales.

Una vez mencionado los postulados más importantes de la TSD, definiremos los términos necesarios que fundamentan esta investigación.

Situación didáctica. Situación adidáctica – Obstáculo

La teoría de Situaciones Didácticas dio lugar al surgimiento de algunas nociones como*situación didáctica, situación adidáctica, obstáculo*

Para Brousseau (2007) “la interacción entre un sujeto y un medio determinado” (p. 17) se llama *situación*. Entendiendo como medio no solo al problema sino las relaciones que se van construyendo a medida que el sujeto produce conocimiento, modificando de esta manera su realidad.

Desde esta teoría, se llama **situación didáctica** a aquella situación elaborada con el objetivo de que el alumno se apropie de un determinado conocimiento (Panizza, s. f., p. 4). Para Brousseau (2007) “Esa situación o ese problema elegido por el docente lo involucra a él mismo en un juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio. Este juego más amplio es la situación didáctica”. En términos de Brousseau (1982, citado en Panizza, s. f., p. 4)

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Además, el autor, enuncia que para todo conocimiento matemático es posible crear una “situación” a la que denomina **situación fundamental**, siendo ese conocimiento, que se pretende que el alumno logre “alcanzar”, la herramienta que proporciona la solución óptima a la situación planteada.

La situación adidáctica:

Esta es otra de las nociones propuestas por la TSD y en la cual nos apoyaremos para el análisis de los capítulos posteriores.

Se llama situación adidáctica a aquellas situaciones en las que el alumno se enfrenta solo al problema haciendo uso de sus conocimientos. Las intervenciones del docente respecto al conocimiento matemático que se pone en juego en la actividad desaparecen. Pero esta ausencia no significa que se aleja del aula, sino que se dedica a realizar “buenas preguntas” que orienten la realización de la tarea de los alumnos. A propósito, Sadovsky (2005) afirma:

> … la situación adidáctica modeliza una actividad de producción de conocimientos por parte del alumno independientemente de la mediación docente. El sujeto entra en interacción con una problemática, poniendo en juego sus propios conocimientos, pero también modificándolos, rechazándolos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hacer sobre los resultados de sus acciones. (pp. 19 – 20)

La situación adidáctica posee dos condiciones para considerarse como tal:

- El alumno debe elegir una estrategia entre varias. Aceptando que, al hacerlo, rechaza otras.
- La situación tiene una tarea independientemente del conocimiento a aprender.

Debemos aclarar que la situación adidáctica es un subsistema de la situación didáctica y que la intencionalidad de esta no desaparece en la situación o fase adidáctica.

Obstáculo

Al trabajar un determinado conocimiento matemático, el alumno elabora determinadas ideas respecto a él, lo que da lugar a una concepción. Al ampliar el abanico de problemas, dicha concepción se ve obligada a evolucionar, con el fin de adaptarse a las situaciones nuevas. Si el sujeto de aprendizaje se resiste a reemplazar una concepción antigua por una nueva a pesar del fracaso, trata de mantenerla y hacerla evolucionar lo menos simple, decimos que esa concepción es un *obstáculo*. Los obstáculos se presentan en forma persistentes a través de los errores.

Brousseau (2007) los caracteriza de la siguiente manera como:

- Un obstáculo es un conocimiento.
- Este conocimiento incluye un conjunto de problemas en los que funciona y otros en los que no permite resolver o dificulta su resolución.
- No son construcciones personales, sino que surgen de una de una génesis de un saber, ya sea didáctico o histórico.
- No desaparece con los conocimientos nuevos, se opone a su aprehensión y reaparece en forma imprevista.

En definitiva, para él un obstáculo es un conocimiento legítimo e inevitable.

Basándonos en los trabajos elaborados por Brousseau, en los que se explican las nociones de concepción y obstáculo, se presenta una clasificación de los obstáculos entre los que se encuentran los *obstáculos epistemológicos*[26]. Mena A. (s. f.) los define como aquellos obstáculos que enfrenta el individuo (el estudiante) y que pueden identificarse en la propia historia sobre las dificultades que los matemáticos tuvieron que superar ante situaciones de carácter similar.

Análisis del Diseño Curricular de Corrientes

El Diseño Curricular del Ciclo Básico de Corrientes[27], correspondiente a la asignatura Matemática cuenta con siete apartados:

- Marco Orientador.
- Fundamentación.
- Expectativas de Logro por año.
- Organización de los contenidos.
- Organización de Contenidos por año.
- Orientaciones Didácticas.
- Bibliografía.

El primer apartado responde a la pregunta ¿qué es la matemática? ¿Cuáles son las razones de ser de los contenidos matemáticos? En la que predomina la resolución de problemas como actividad fundamental del quehacer matemático.

En el segundo, se afirma que a través de esta resolución de problemas se da sentido a los conocimientos matemáticos. Se busca que la clase sea una "pequeña comunidad científica", es decir, un espacio en la que se pone en juego la intuición, exploración, análisis, generalización, y en el que serán necesarios las conjeturas, las discusiones, etc.

En cuanto a lo algebraico, los símbolos deben surgir en la clase como una necesidad y no por imposición del docente.

Teniendo en cuenta el objeto de estudio de esta tesina, nos centraremos en analizar únicamente las propuestas para el segundo año del Ciclo Básico de la Secundaria en el que se presentan por primera vez los números enteros. En este nivel, se suponen conocidas las operaciones y ecuaciones lineales en N.

En el apartado Nº3, se incluyen las expectativas de logro a alcanzar. Los especialistas del diseño proponen:

> Utilizar los símbolos y representaciones gráficas para expresar generalizaciones, relaciones y funciones en diversos contextos, continuando progresivamente con el

[26] El concepto de Obstáculo epistemológico fue creado por Bachelard G. en 1938 y redefinido por Brousseau G en 1976. Cid E. *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos* (2000), Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
[27] Puede consultarse en el Anexo I

> proceso de modelización matemática iniciado (…) Comunicar las ideas, los conceptos, las propiedades y los procedimientos, utilizando adecuadamente el lenguaje oral – escrito y simbólico. (p.109)

Encontramos similitud entre lo mencionado y lo propuesto por Carmen Sessa. Una de las vías para el aprendizaje de las ecuaciones es a través de la generalización. Ésta permite construir el concepto de ecuación, como una restricción sobre cierto dominio (Sessa, 2005, pp. 71 - 72). En otras palabras, a través de la generalización se fundamenta el uso de los símbolos.

En cuanto al siguiente apartado, "Organización de los contenidos", se inicia el estudio de los números enteros y se afirman que las ecuaciones juegan un papel sumamente importante para que los alumnos alcancen la abstracción. Este apartado se divide a su vez en cuatro ejes:

En relación con el Número y las Operaciones

En relación con el Álgebra y las Funciones

En relación con la Geometría y la Medida

En relación con la Probabilidad y la Estadística

De los cuales solo consideramos para el análisis los dos primeros ejes por su relación con nuestra investigación.

El primer eje, incluye, por ejemplo, el uso de los números enteros como número relativo (temperaturas, nivel del mar) o como diferencia de dos números naturales (juegos de cartas, pérdidas y ganancias) en diferentes situaciones concretas.

Y a continuación se menciona las situaciones que deben proponerse en el aula. Entre ellas:

- Modelizar el significado de la suma, resta, multiplicación, división y potenciación en Z.
- Analizar las operaciones en Z y sus propiedades como extensión de las elaboradas en N.

Nos preguntamos si el significado de las operaciones que se deben modelizar, se refiere a por ejemplo "el resultado de la suma puede ser menor que los sumandos" para salvar concepciones como "la suma aumenta y la resta disminuye" y si el contexto concreto permitirá obtenerlos. Para autores como Cid (2001), la introducción de los números negativos a través de modelos concretos ya sean de neutralización o de desplazamiento, pueden justificar una de las operaciones obstaculizando la otra. Es el contexto algebraico que permitirá dar sentido a los números negativos y de esta manera salvar el obstáculo epistemológico dado por el concepto de número como cantidad (p. 16). Comúnmente en el aula las propiedades de los números enteros se exponen como axiomas y no se cuestionan su veracidad.

Las ecuaciones lineales forman parte del eje representado por el álgebra y las funciones. El diseño curricular, entre otros lineamientos, afirma que se deber proponer problemas que den lugar a “Expresar el conjunto solución por medio de ecuaciones lineales con una variable y analizar el campo de solubilidad de las mismas (solución única, infinitas soluciones, sin solución)” (p. 113)

La clasificación de las ecuaciones lineales está explícita en el diseño. Sin embargo, no queda claro si las ecuaciones lineales sin solución se refieren a aquellas de la forma $0.x = b$, $b \neq 0$ o aquellas en las que la solución no pertenece al conjunto de referencia de la ecuación. El uso de un dominio específico para las ecuaciones no se evidencia. Suponemos que se trabajarán ecuaciones en Z y luego en Q.

Conclusiones

A partir de algunos conceptos extraídos de la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau, nos permitirá asumir un enfoque para el análisis del libro de texto del nivel medio y el registro de clases ordinaria del mismo nivel, correspondiente a los capítulos 4 y 5 respectivamente.

Esta teoría pone énfasis a la interacción entre el alumno y su relación con un *medio*, en el cual él es el encargado de construir un determinado conocimiento matemático. Sin embargo, el docente no está ausente en esa construcción, sino participa en la clase a través de preguntas orientadoras que no están relacionadas directamente con el saber en cuestión, actúa como un moderador de la discusión entre los alumnos, etc.

En el proceso de aprendizaje, es posible que se presenten en los alumnos algunos *obstáculos*, entendidos como un conocimiento – y no una dificultad - que resulta ineficaz para lograr alcanzar una nueva concepción del contenido. Se evidencian a través de los errores y algunos de esos obstáculos podrían tener su origen en la propia historia de la matemática.

En cuanto al Diseño curricular, no se menciona el uso de las técnicas para resolver ecuaciones. Pero si queda explícito que, en la clase, el lenguaje algebraico surge como una necesidad y no por decisión del docente. En cuanto a las posibles rupturas entre las ecuaciones en N y las ecuaciones en Z no existe evidencia que den cuenta de ellas. Solo se mencionan los significados de las operaciones en Z y la extensión de sus propiedades a partir de los naturales, cuestión que no queda explícito si en algún momento se cuestionarán aquellas que no se verifican en el conjunto de los enteros.

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE UN ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Actualmente existen una variedad de investigaciones relacionadas al estudio de las ecuaciones con números enteros, y los números negativos. Pero en este apartado nos centraremos en un artículo de investigación propuesto por Cid (2000). "*Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas"[28], en el que se analiza, desde la Teoría de Situaciones Didácticas, la existencia de obstáculos epistemológicos en las prácticas de enseñanza y aprendizaje de los números enteros negativos. Los objetivos propuestos en esta investigación son:

- Investigar los obstáculos en la historia de la matemática a través del concepto de obstáculos epistemológicos propuesto por Brousseau.
- Constatar si dichos obstáculos epistemológicos están presentes en los alumnos actuales.
- Analizar cómo influye los obstáculos epistemológicos en la enseñanza actual y nuevas propuestas didácticas de los números negativos.
- Verificar si el concepto de obstáculo epistemológico propuesto por Brousseau, permite obtener resultados no obtenidos por otros medios y a su vez, decidir si dicho concepto es útil en la investigación didáctica.
- Profundizar en las condiciones históricas que dieron lugar a la existencia y evolución de los enteros negativos, información que considera de suma importancia para la elaboración de posibles propuestas escolares.

El artículo propuesto por Cid consta de cinco apartados. El primero se denomina "la noción de obstáculo epistemológico", en él se introduce al concepto de obstáculo epistemológico. En el apartado 2 del artículo, la autora presenta los obstáculos epistemológicos en los números negativos formulados por Glaeser en el año 1981 y en el apartado 3, propone las aportaciones de Doroux (1982), Brouseau (1983), Schubring (1986, 1988). En cuanto a los ítems 4 y 5 del artículo, Cid presenta un resumen y otras aportaciones al tema respectivamente. A continuación nos dedicaremos a exponer con más detalles cada uno de estos apartados.

En el primer apartado, la autora introduce previamente el concepto de concepción, como aquellos conocimientos que funcionan en situaciones específicas pero que dejan de ser eficientes cuando se modifican las variables didácticas de la situación dada y lo diferencia de obstáculo, ya definido en el marco teórico didáctico de esta tesina. Menciona las distintas obras de Brousseau en los que se ocupa de las nociones de concepción - obstáculo en las que recupera una clasificación de los

[28] Ver Anexo II

obstáculos de acuerdo al origen en que se producen en la triada: alumno – docente – saber o en la sociedad en general. Entre ellas retoma a los obstáculos epistemológicos, entendidos como aquellos obstáculos que pueden identificarse en la historia, y la comunidad matemática asumió la necesidad de considerarlo y superarlo. Señala que la definición de obstáculo presenta implícitamente una correlación entre las concepciones obstáculos de los alumnos actuales respecto al saber y aquellos conocimientos de los matemáticos de una época que han obstaculizado la evolución de la matemática.

En el apartado 2 "obstáculos epistemológicos en los números negativos: la aportación de Glaeser", se destaca un artículo en el que detecta los obstáculos que impiden el aprendizaje de los números negativos, caracterizándolos con los términos dificultad, umbral, síntoma, etc. Desde la emergencia de los números negativos hasta la actualidad, Glaeser identifica los siguientes obstáculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas*. Esto se observa particularmente en la obra de Diofanto, mencionada en el capítulo 1 respecto al origen y evolución de los números negativos.
- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas*. Se refiere a las ideas planteadas por los matemáticos Stevin, D'Alembert y Descartes mencionadas anteriormente en el marco histórico.
- *Dificultad para unificar la recta real*. Algunos matemáticos consideraban a los negativos como oposición a los positivos, ambos de naturaleza distinta. Esta diferenciación dio lugar a considerar dos semirrectas opuestas que funcionaban separadamente.
- *La ambigüedad de los dos ceros*. Son las dificultades presentes en los matemáticos para comprender un cero absoluto (ausencia de cantidad) y un cero relativo (elegido arbitrariamente). No podían aceptar la existencia de cantidades "menores que nada".
- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas*. La aceptación de los negativos como cantidades reales permitió justificar su estructura aditiva pero no la multiplicativa. En 1867, Hankel se ocupó de la prolongación de la multiplicación de los reales positivos a los reales, en el que se conservan las propiedades básicas de los positivos. Es decir, no se trata de justificar los negativos a través de la naturaleza, sino que los objetos son inventados a fin de responder a las necesidades de las matemáticas.
- *Deseo de un modelo unificador*. Los obstáculos anteriores se hubieran superado si fuera posible encontrar un modelo concreto que explique la estructura aditiva y

multiplicativa de los enteros, pero un determinado modelo explica, por ejemplo, la estructura aditiva y obstaculiza la multiplicativa.

En el apartado 3, “obstáculos epistemológicos en los negativos: otras aportaciones”, Cid menciona el trabajo de Duroux y utiliza la definición de obstáculo epistemológico en el mismo sentido que Brouseau. Considera que los dos primeros obstáculos propuestos por Glaeser mencionados en el apartado anterior no pueden ser considerados como tal, pues dan lugar a una falta de conocimiento y no a un conocimiento en particular: considera como obstáculo a “la dificultad para unificar la recta real”. La concepción de número como medida de una magnitud, noción transmitida en la escuela, puede ser una de las causas en la consideración de los positivos y los negativos como objetos distintos, y estos últimos por ende no resultan una prolongación de los naturales. Esto se justifica en que los positivos representan una medida y los negativos están compuestos por dos partes: el signo – (menos) y la medida, situación observada con frecuencia en los alumnos en la clase.

Brouseau, afirma que detrás de las dificultades, errores, resistencias que provoca ese conocimiento - obstáculo sirven de ayuda para determinarlos. Además, hace hincapié sobre la importancia de identificar aquellas situaciones en las que un conocimiento resulta eficaz. Este autor coincide con lo que afirma Duroux respecto a la heterogeneidad de los positivos y los negativos como obstáculo, pero añade que es posible que emerja un obstáculo previo: “la concepción del número como medida”, muy presente en la noción de orden que disponen los alumnos actualmente en el que por ejemplo afirman “-3 es mayor que 1”

Para Schubring, quien realizó un trabajo semejante al de Glaeser, analiza textos de matemáticos alemanes a través del término de obstáculo en un sentido muy diferente al de Doroux y Brouseau. Para él, un obstáculo es considerado también como una dificultad, al igual que Glaeser. El rechazo de los números negativos los agrupa en tres categorías:

- *Obstáculos epistemológicos internos a la matemática*: se refiere a la dificultad de diferenciar los conceptos de cantidad, magnitud y número. Brouseau afirma algo similar a esta idea, pero no en términos de dificultad.
- *Obstáculos epistemológicos*: incluye por un lado a una epistemología sustancialista u ontológica, en la que los conceptos matemáticos justifican el mundo real. Y por otro, una epistemología sistémica en la que los conceptos matemáticos son creados internamente, es decir no surgen para dar respuesta al entorno físico. Para Cid, existe una gran concordancia entre este posible obstáculo y el que plantea Glaeser “estancamiento en el periodo de las operaciones concretas”.

- *Arquitectura de las matemáticas*: describe la manera en que se consideran el álgebra y la geometría. Si se consideran de igual importancia, esto favorece a la noción de cantidad, pero limita la diferencia entre número y cantidad. Ahora, si la geometría es la más importante de la matemática, la cantidad es la noción básica y el concepto de número resulta secundario. Mientras, si el álgebra es primordial, la noción de número es considerada como básica y se tiene lo que se llama "aritmetización de las matemáticas".

En cuanto al apartado 4, Cid plasma un resumen de lo expuesto en los apartados anteriores, profundizando algunos aspectos. De aquí extraemos las siguientes afirmaciones:

- La definición de obstáculo de Brousseau no ha sido contrastada experimentalmente. Las investigaciones que existen utilizan un significado diferente al formulado por él y hasta el momento no hay objeciones para reemplazarlo.
- Las nuevas investigaciones solo se basan en lo propuesto por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring pero sin justificación alguna respecto a sus posturas.
- El reconocimiento de obstáculos en la historia de la matemática resulta importante en la didáctica de esta ciencia si alguno de ellos se evidencia en la enseñanza actual. No existen investigaciones que relacionen las concepciones de los estudiantes sobre el aprendizaje de los negativos con los obstáculos en la historia de dichos números.
- La enseñanza de los números enteros basada en modelos concretos resulta poco eficaz, aunque algunos de ellos justifiquen la suma en los enteros, no permiten hacerlo para el producto.

Acerca del último apartado, la autora expresa algunas aportaciones al tema

1) *Sobre la metodología precisa para determinar los obstáculos en la historia de las matemáticas:*

Cid propone adaptar el concepto de obstáculo epistemológico para poder emplearlo en la historia de las matemáticas. Por ello considera las siguientes variables: campo de problemas de las obras de los matemáticos, objeto de referencia, conocimiento, saber, límites de la concepción y relación de la misma matemática de una época con las anteriores y posteriores.

2) *Sobre los obstáculos en la historia de los números negativos. Se identifican dos concepciones obstáculos:*

- La primera surgió en la matemática griega clásica, en la que la diferencia entre cantidades se define como operación de "sustraer de lo que previamente existe". Los objetos de referencia son, por un lado, los números naturales y las razones de números naturales, considerados como medidas absolutas de cantidades de magnitud y, por otra, la "sustracción" como diferencia de números naturales o de sus razones con minuendo mayor o igual que el sustraendo. El campo de problemas que aborda es el de los problemas aritméticos en Q^+ o R^+. El álgebra es simplemente una herramienta de resolución de los problemas aritméticos.

- El segundo obstáculo aparece en el siglo XVII, la diferencia entre cantidades es interpretada como variación o diferencia orientada o relativa. Los objetos de referencia son, por un lado, los números con signo entendidos como medidas relativas de cantidades de magnitud o como medidas orientadas. Por otro lado, las diferencias de números positivos con minuendo mayor, menor o igual que el sustraendo, entendidas como variaciones o "diferencias" orientadas. Esta concepción "da sentido" y permite aceptar las soluciones negativas de las ecuaciones, pero no justifica la estructura ordinal ni multiplicativa de los reales.

3) *Sobre la necesidad de tener en cuenta los obstáculos históricos en la enseñanza de los números negativos*: el uso de modelos concretos en la enseñanza funciona como analogías y aun cuando pueden superar el primer obstáculo mencionado en el punto 2 de este apartado, refuerzan el segundo, el cual es necesario superar para elaborar el concepto de número negativo.

La negatividad surge en el contexto algebraico, y son las exigencias del cálculo las que determinan las reglas de los números con signo. Es así que en las concepciones históricas sobre la negatividad, lo semántico no determina la sintaxis de los números enteros sino las exigencias de las técnicas algebraicas. Usualmente, en la clase de matemática se introducen los números negativos en un contexto aritmético en el cual su uso no es necesario, y las reglas de cálculo están determinadas por el modelo concreto que se utilice, agravando de esta manera el obstáculo epistemológico.

Conclusiones

El análisis de este artículo de investigación, nos favoreció en dos aspectos. En primer lugar, nos permitió conocer las dificultades - concepciones presentes en los matemáticos de la antigüedad en relación a los números negativos y en un segundo lugar perfeccionar el tratamiento didáctico de los negativos en las aulas. Como docentes debemos considerar los obstáculos epistemológicos - entendidos como aquellos conocimientos que pueden rastrearse en la historia y que la comunidad matemática debió superarlo - de un objeto matemático a la hora de seleccionar actividades y planificar nuestra clase para los alumnos del nivel medio, ya que muchos de esos obstáculos epistemológicos subsisten en los estudiantes actuales. La labor realizada por Cid, nos permitió, por un lado, elaborar posibles procedimientos de los alumnos respecto a los problemas del capítulo 5 y por otro, identificar aquellos obstáculos que posiblemente surgirán a raíz del planteo y resolución de ecuaciones lineales con enteros, como por ejemplo, que la incógnita no puede ser un número negativo. Este contexto algebraico será propicio para justificar las reglas de cálculo en Z. Permitiendo superar aquellos obstáculos, expresados en el análisis de este artículo referente al concepto de número entero, que aún siguen presentes en los alumnos.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA EN UN LIBRO DE TEXTO Y DE UN VIDEO

Introducción

En este capítulo realizaremos el análisis de dos propuestas - muy diferentes entre ellas - de enseñanza del tema de Ecuaciones en Z, un libro de texto de uso frecuente en las escuelas de la región y de actualidad, ya que fue publicado en 2016 y de un video disponible en YouTube, dado que actualmente constituye – sin dudas – un recurso bastante masivo de consulta tanto de alumnos como de profesores.

El libro seleccionado es: "*Matemática II*", de Effenberger Pablo (2016), Editorial Kapelusz y el video "Primer año - Ecuaciones en Z - Video 1 - ¿Qué es una ecuación en Z?"[29], publicado el 30 de agosto de 2015.

Con estos análisis pretendemos conocer las principales características de propuestas de enseñanza y en particular los recortes realizados con el fin de identificar los aprendizajes posibles de los alumnos a partir de su uso o consulta.

Análisis del libro de texto

En el libro de texto examinamos las definiciones utilizadas, qué conocimientos necesitaría el alumno para la realización de las actividades propuestas y, además, si en las tareas que dejaba para los estudiantes, los conocimientos necesarios para realizarlos estaban tratados anteriormente en el texto. También, hemos analizado si en el texto se proponen actividades que promuevan la construcción de conocimientos y no una mera repetición de los mismos.

Este libro está organizado en capítulos destinados a trabajar algunos de los dominios tradicionales de la Matemática: Aritmética, Geometría y Estadística. En particular en Aritmética (conjuntos numéricos) podemos señalar los tres primeros capítulos destinados a los números enteros mientras que el sexto a los racionales.

El título del primer Capítulo es *Números enteros* (orden, operaciones, etc.) y en el capítulo siguiente, el autor propone el tema *Ecuaciones, sistemas e inecuaciones,* el cual se asume que se incluirá Ecuaciones en Z, objeto de la tesina y de este análisis. En suportada el autor detalla explícitamente los contenidos a desarrollar en el mismo:

- Lenguaje coloquial y simbólico.
- Ecuaciones con números enteros.
- Conjunto solución de una ecuación.

[29] Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=y3N6whDucSk

- Ecuaciones con potencias y raíces.
- Sistemas de ecuaciones.
- Inecuaciones con números enteros.

Cabe señalar que solamente en los temas ecuaciones e inecuaciones el autor indica que se trabajará en Z.

Iniciaremos el análisis en la página 32 cuyo título es "Ecuaciones. Conjunto solución" y en la medida de lo necesario analizaremos una o más páginas anteriores a este tema. Las páginas analizadas se incluyen en el Anexo III

Una primera mirada a los títulos de los apartados, indica que esta página está destinada al contenido de ecuaciones en general, no necesariamente de primer grado, al cual el autor dedica la siguiente página con el título: Ecuaciones de primer grado.

El autor parte de definir **ecuación** como "*una igualdad en la que hay por lo menos un valor desconocido (incógnita)*" y muestra cuatro ejemplos: dos ecuaciones lineales, una cuadrática y una ecuación radical[30] . A continuación, define **conjunto solución** de una ecuación como "*el o los valores de la incógnita que verifican la igualdad"*. Para cada una de las ecuaciones dadas previamente, muestra que un cierto valor (o dos en el caso de la cuadrática) es solución de la ecuación porque reemplazando la incógnita por ese valor se mantiene la igualdad. El conjunto solución de cada una es representado como conjunto $S = \{5\}$o con la igualdad $x = 5$ (para el primer caso).

En relación con las definiciones dadas podemos preguntarnos siguiendo a Sessa (2005):

> … qué se puede decir de la igualdad que aparece en la escritura de una ecuación... ¿es verdadera? ¿es falsa? Ninguna de las dos cosas. El signo igual en la escritura de la ecuación está expresando una condición que se impone sobre x. Habrá valores de x para los cuales es verdadera y valores para los cuales es falsa. La ecuación, en definitiva, define un conjunto: el conjunto de valores de x para los cuales es verdadera. Ahora bien, para que ese conjunto esté bien definido hay que explicitar sobre qué dominio numérico se está considerando la ecuación. (…) Los problemas que se presentan a los alumnos suelen hablar de un número desconocido pero dado, que cumple con ciertas condiciones que se expresan por una ecuación. En esta presentación, la ecuación es asimilada a una igualdad (numérica) verdadera, de la cual no se conoce una parte (un número o una incógnita). (pp 67 – 68).

Y la autora continúa diciendo*:*

[30]"Cuando la variable en una ecuación está dentro de una raíz cuadrada, cúbica, etc., es decir cuando ocurre un radical, la ecuación se llama *ecuación radical*". Sullivan M. (2016). *Álgebra y Trigonometría*. México: Pearson Educación p. 118.

> Al definir la ecuación como una "igualdad con incógnita" se acerca al objeto al campo de lo aritmético: es como una cuenta, de la cual se desconoce un término. La concepción que se cristaliza de este modo, asimila el concepto de ecuación al de "ecuación en una sola variable y con solución única. (p. 68).

Las ideas señaladas por la autora, se corresponden con la presentación que realiza el autor de este libro, si bien analiza que hay ecuaciones que *no tienen solución* como x = x + 2, es decir, cuyo conjunto solución es vacío. O que *cualquier valor la verifica* como x + x = 2x. En relación con esta última, el autor señala que su conjunto solución es S = Z, de donde se puede asumir que - aunque no lo identifica como tal - se refiere a Z como dominio numérico de trabajo, al que ya habíamos definido como *conjunto de referencia.* Consecuentemente con esta idea, no incluye ecuaciones cuya solución sea por ejemplo un número no entero, como en 2x = 1 cuyo conjunto solución está formado únicamente por el número ½. Si bien en este libro, no ha sido aún definido Q (Capítulo 6), los alumnos conocen las fracciones desde 3º o 4º grado de la Escuela Primaria y sería una buena ocasión para tener en cuenta el conjunto de referencia en el que está definida la ecuación, ya que es una ecuación sin solución en Z y con solución única en Q.

De todos modos, hasta el momento de presentar estos conceptos, el autor no ha mencionado ninguna técnica para resolver una ecuación.

En el siguiente ejercicio (actividad 10), el autor propone unir cada ecuación de las cinco presentadas con el valor seleccionado - entre 6 dados - que la verifica. Se supone que los alumnos deberían tomar los distintos valores expuestos y reemplazarlos en las ecuaciones correspondientes; en el caso de verificar la igualdad, deberían ser considerados como soluciones de la ecuación, si bien en esta página no se menciona dicha técnica. Analizando las páginas anteriores en el apartado Lenguaje coloquial y simbólico (pág. 30 y 31), no se pudieron encontrar ejercicios de este tipo. Por lo tanto, los alumnos – a través de conocimientos previos – deberían entender que deben reemplazar la incógnita por el valor dado.

En la actividad 11, el autor enuncia "*plantear la ecuación y decidir si no tiene solución o si cualquier valor la verifica".* En cuanto a plantear la ecuación, podríamos suponer que el autor asume que los alumnos están en condiciones de realizarlo, de acuerdo a lo que propuso en las páginas iniciales de este capítulo. Para comprobarlo, analizamos las actividades 3 y 4 del apartado Lenguaje coloquial y simbólico, en el cual describe al lenguaje simbólico como "*el utilizado por la Matemática para expresar propiedades o fórmulas y está compuesto por números, letras, operaciones, relaciones, conectivos, etc*."

En la actividad 3 plantea seis expresiones verbales, por ejemplo, la mitad del siguiente de un número, para cada una de las cuales, el alumno deberá seleccionar la correspondiente, entre las tres propuestas por el autor. Las expresiones dadas son bastante complejas de simbolizar, por ejemplo, el cuadrado del siguiente de un número.

En el caso de la actividad 4, el autor plantea un trabajo en cierto modo inverso al anterior, ya que los alumnos deberán expresar coloquialmente seis expresiones simbólicas.

Sin explicación específica, los alumnos podrían recurrir a una lectura más o menos literal; por ejemplo, en 3(p + 1) podría ser leído "tres por p más 1" y es una lectura coloquial correcta, es el lenguaje matemático el que es suficientemente preciso en respuesta a la situación que esté planteada.

Pero si analizamos las expresiones verbales dadas por el autor en el inciso anterior, vemos que se refieren en casi todos los casos al siguiente o anterior de un número o a expresiones no ambiguas como la diferencia entre un número y su cuadrado. Revisando las soluciones que plantea al final del libro para el ejercicio 4, puede observarse que espera expresiones del tipo: "el triple del siguiente de un número" y no la expresión analizada previamente.

Después de analizar estos dos tipos de actividades, podemos afirmar que hay una diferencia considerable entre los incisos anteriormente citados donde sólo se simbolizaban expresiones verbales y las actividades planteadas en el ejercicio 11. Se trata de simbolizar igualdades entre dos expresiones que en algunos casos se reducen a un número, y que no es seguro que los alumnos puedan simbolizar.

Por otra parte, el autor solo solicita determinar si las ecuaciones (y no los problemas) no tienen solución o si cualquier valor la verifica. Veamos uno como ejemplo, el f) La suma de un número, de su anterior y de su siguiente es igual al triple del número, o sea el autor espera que los alumnos planteen la ecuación $n + n - 1 + n + 1 = 3n$ y una manipulación algebraica les permitirá arribar a la igualdad $3n = 3n$ y concluir que la ecuación la verifica cualquier valor.

Pero nos interesa analizar además si las ecuaciones aparecen en este libro como un recurso para resolver un problema o por imposición de la consigna. Analicemos desde ese punto de vista, los problemas planteados. Por ejemplo, en el inciso a) "Un número es igual a su siguiente" ¿Cómo se presentaría como problema? Podría pensarse en ¿Hay algún número que sea igual a su siguiente?, y cabe la pregunta de que si plantear una ecuación permitiría una resolución más "matemática" que responder directamente que no tiene solución tal como el mismo autor lo indicó en la teoría inicial de esta página. Sería un ejemplo, donde plantear una ecuación no aporta ni economía ni mayor conocimiento a los alumnos. Lo mismo podría decirse de las situaciones planteadas en los incisos c), e) y g).

En los demás, plantear una ecuación y reducir a la mínima expresión (realizado en la página anterior) podría permitirle afirmar que se llega a una cierta igualdad. De todos modos, se espera que los alumnos planteen la ecuación porque lo pide la consigna y no por su decisión. Y, por otra parte, deben determinar si tiene o no solución o se verifica para cualquier valor. A partir de este análisis podemos afirmar que la actividad propuesta está lejos de constituir sólo un ejercicio de traducción y ejercitación de lo tratado anteriormente.

En relación con la propuesta en esta página bajo el título Ecuaciones y Conjunto solución, podemos concluir que las ecuaciones son presentadas como objetos en sí mismos, no como herramienta en un proceso del algebrización para la resolución de un problema aritmético. O sea, el álgebra aparece como un dominio independiente y no al servicio de la aritmética.

El siguiente apartado corresponde a las *Ecuaciones de primer grado*, mientras que en la página anterior mostraba o planteaba algunas ecuaciones de grado mayor o no polinómicas, como ya expresamos al inicio de este análisis. Tal como mencionamos en las páginas anteriores, el autor sólo considera ecuaciones con coeficientes y soluciones enteras.

En el primer recuadro teórico, plantea una técnica para resolver ecuaciones de primer grado, en la cual se recurre a la ley uniforme sin explicitar su enunciado y sin aclarar que se trata de una propiedad de las operaciones aritméticas.

El autor propone tres ecuaciones resueltas aplicando dicha ley, asumiendo que esos ejemplos serán suficientes para que los alumnos puedan comprender y utilizarla en otros casos.

En el mismo recuadro teórico, el autor retoma una mención sobre las ecuaciones sin solución y aquellas que se verifican para cualquier valor entero de la variable.

Nuevamente podemos analizar que el autor no plantea ni se ocupa de ecuaciones que no tengan solución en Z, pero sí en otro conjunto numérico como Q. Eso le permite afirmar que *"De una ecuación que no tiene solución, se obtiene una contradicción".* La afirmación no es válida en general por lo que acabamos de afirmar. Consideramos que planteada en forma inversa sería de mayor utilidad para los alumnos: *Si al resolverla se llega a una contradicción es porque la ecuación no tiene solución, en ningún conjunto numérico*.

De forma similar, el autor plantea: "*De una ecuación que se verifica para cualquier valor se obtiene una igualdad*". Se podría realizar un análisis análogo al anterior y proponer la redacción: *Si al resolver una ecuación se llega a una igualdad, la* *ecuación es válida para cualquier valor*. Pero, más aún, es necesario analizar que la igualdad que se obtiene es en realidad una identidad ya que la misma ecuación fue definida como una igualdad. La diferencia consiste en que en la igualdad que aparece al resolver la ecuación puede observarse directamente que es una identidad.

El inciso12 está destinado a hallar el conjunto solución de nueve ecuaciones de primer grado ejercitando la técnica presentada al inicio de la página.

Los ejercicios planteados se pueden categorizar según el conjunto solución de cada ecuación:

Solución única: ejercicios a, b, c, e, f, g, h, i.

Sin solución: ejercicio d.

Infinitas soluciones: No hay ningún ejercicio de este tipo, sin embargo, en las soluciones, el autor plantea que el ejercicio f tiene infinitas soluciones, por lo cual creemos que se trata de un error de impresión.

Se puede observar que predominan las ecuaciones con una única solución entera.

En la actividad 13 plantea un trabajo similar al del inciso 11, pero aclarando que en este caso, todas las ecuaciones tienen una solución ya que la consigna es: *“plantear la ecuación y hallar el número que cumple con cada condición”*. El uso reiterado de la palabra “es” en relación a las expresiones verbales dadas, podría provocar en los alumnos una cierta idea de equivalencia entre “leer es” y escribir el signo igual. Al finalizar esta página, el autor plantea tres ejercicios a los que enmarca con la palabra Desafío. No se trata de ecuaciones de primer grado -las cuales el autor no ha definido -sino cuadráticas y espera que los alumnos puedan realizar ciertos razonamientos como: “si el producto de dos números es 0 es porque alguno de sus factores es 0”. Razonamientos similares podrían ser usados en ejercicios anteriores como el ítem b) del punto 13 que plantea “*El doble de su anterior es setenta y seis”*, por lo tanto, el número buscado sería la mitad de 76. Plantear una ecuación del tipo 2n = 76 parece totalmente innecesaria para resolver este problema, tal situación lo menciona Alonso et al (1993), el lenguaje algebraico es un instrumento para resolver problemas. Pero si estos pueden resolverse con otras estrategias no se debe forzar al alumno a que utilicen el álgebra, sino tratar de convencerlos a través de actividades adecuadas para que lo usen. Cuando el alumno se dé cuenta de que sus procedimientos no son útiles, sentirá la necesidad de plantear ecuaciones.

En cuanto a las pág. 34 y 35, rotulados bajo el título Repaso, el autor propone nueve actividades - numeradas del 15 al 23 - similares a las propuestas en las páginas anteriores referidas al lenguaje coloquial - simbólico y a ecuaciones de primer grado.

Pero a diferencia de estos, en el que se utilizó un contexto aritmético, las actividades 21 y 23, se enmarcan en un contexto geométrico.

En relación al ítem 21, se plantea *"en un rectángulo, la base es el triple de la altura disminuida en dos unidades"*. En los ítems a) y b) solicita al alumno a encontrar la expresión simbólica del perímetro y del área respectivamente, y luego en el c) propone *"calcular la base y la altura del rectángulo si el perímetro es 52 cm*". En el c) el autor pretendería que resuelvan la ecuación obtenida en a). A nuestro parecer, el ejercicio en sí puede reducirse, sin perder su esencia, al inciso c), en el cual lo simbólico surge como una herramienta útil (encontrar las características de todos los rectángulos que cumplen con el enunciado del ejercicio 21) para el alumno y así arribar a la resolución del problema.

Por último, a diferencia de la actividad 21 en el que no aparece explícitamente la palabra "ecuación", el problema N.º 23, el autor solicita plantear la ecuación y calcular la longitud de los lados de las dos figuras geométricas que presenta (un triángulo escaleno y un rectángulo) en el cual se tiene como dato el valor de su respectivo perímetro y la longitud de cada lado está expresado a través de una expresión algebraica.

En ambos casos, el objetivo de los problemas no es el aprendizaje del concepto de ecuación, sino más bien los podemos rotular como ejercicios de aplicación, ya que este contenido fue desarrollado en páginas anteriores.

Conclusiones

Luego de este análisis, podemos afirmar que en el libro de texto Matemática II, las ecuaciones no emergen como una herramienta para resolver problemas. El lenguaje algebraico/simbólico indispensable en este contenido no surge como necesidad, sino es impuesta por el autor del libro de texto, con carencias de significados para el alumno. Por tal motivo, el alumno no podría apropiarse y dar cuenta de las ventajas que ofrecen las ecuaciones. Al respecto, Sessa (2005) afirma que en la enseñanza del álgebra, en particular de las ecuaciones, lo fundamental es plantear situaciones en las que su uso fuera necesario, eficaz, más económico y la toma de decisiones del alumno juegue un rol importante. Lo que se contrapone con la intencionalidad de todas las actividades que presenta el autor, cuya resolución, en muchos casos, puede llevarse a cabo a través de los conocimientos aritméticos de los alumnos. Si bien no hace hincapié en el campo de referencia de las ecuaciones - el cual es Z - resulta importante resaltar que al definir ecuaciones como una ***igualdad***, el autor no solo considera ecuaciones con solución única, sino incluye a aquellas con infinitas y con ninguna solución en el conjunto Z. Pero en esta última, sólo propone ecuaciones cuya resolución da lugar a una contradicción, dejando de lado aquellas en las que el valor de la variable no pertenece a Z. Lo que nos permite afirmar que para el autor de este libro de texto, una **ecuación en Z** será aquella en la que los coeficientes y la variable son únicamente números enteros.

Análisis del video online

En el inicio de la transmisión del video online[31], cuya duración es de aproximadamente dos minutos, el autor menciona su intencionalidad en la cual expresa *"En este vídeo, vamos a ver qué es una ecuación en Z y como reconocerla*". Es decir, expone las condiciones necesarias y suficientes para reconocer una ecuación en Z. En la pantalla del reproductor, se encuentra en recuadro la siguiente definición: *"se llaman* ***ecuaciones en Z****, a toda ecuación cuyo valor de la* ***variable*** *pertenece al conjunto de los números enteros. Es decir que* ***el resultado*** *puede ser un numero negativo, cero o positivo*".[32]

Si nos basamos en la primera oración de esta definición, nos da la pauta de que el autor considera a la ecuación como una función, en la que se define su dominio, en este caso Z. En otras palabras, parte de tener bien en claro el conjunto de referencia de las ecuaciones en el que se trabaja, por lo que se asemeja lo que afirma Sessa (2005), y que hemos mencionado en la pág. 42 de esta tesina.

En consecuencia, es razonable considerar la ecuación$2x = \frac{3}{5}$ en Z. Pues la variable x puede asumir valores enteros, independientemente de que la solución sea $x = \frac{3}{10}$, es decir si la proposición P(x) representa la ecuación dada en Z, P(a) será falso, cualquiera sea $a \in Z$, ya que $2a \neq \frac{3}{5}$. Ahora bien, si consideramos la última frase de la definición mencionada por el presentador, notamos que para él lo propuesto como ecuación en Z no puede ser considerado como tal. El youtuber utiliza la palabra variable como sinónimo de incógnita, lo cual queda demostrado en dos cuestiones:

- El presentador no afirma que un valor entero será solución de una ecuación si éste verifica la ecuación dada. En términos de Sessa (2005) *"la proposición resulta verdadera"*. La necesidad de hablar del valor de verdad no se explicita porque se supone que se reemplazará en la variable (incógnita) por el valor que la verifica (valor que existe, pero desconocido) y no por otros.

[31] La imagen del video (captura de pantalla) y transcripción pueden consultarse en el Anexo IV.
[32] La negrita es nuestra.

- Y la segunda, surge la idea de que las ecuaciones siempre tienen solución y ésta es única, dejando de lado aquellas ecuaciones con infinitas soluciones enteras o sin solución en Z.

Al definir ecuaciones en la que interviene la palabra variable, ésta puede asumir distintos valores enteros (o racionales, reales etc., según sea el conjunto de referencia), es decir podemos asignarle cualquier valor entero que queramos. Pero al resolver una ecuación en Z, se presenta además la discusión si existe o no un valor entero que la verifique. La definición sobre las ecuaciones en Z, da lugar a dos ideas importantes a tener en cuenta en relación a su conjunto solución, por ejemplo la ecuación 2x = 2x + 1, no podrá ser considerada como una ecuación en Z pues no existe ningún valor entero x que la verifique. Y del mismo modo, una ecuación cuyos coeficientes no sean enteros. Así, para el presentador, la ecuación $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{12} = -\sqrt{3}$ es en Z (se verifica para x = 2). Para el tutor del video, lo fundamental es que la solución esté en Z. Pero en el nivel escolar en el que se encuentran los alumnos (posiblemente 2º año de la secundaria), desconocen los números irracionales y en consecuencia no podrían llevarlo a la forma ax + b = c, con a, b y c en Z.

Es primordial distinguir entre el conjunto de referencia de una ecuación con el conjunto solución de la misma. En contraposición de la idea que propone el autor, f(x) = 0 es ecuación en un conjunto A sí la solución está en A. Una ecuación puede estar definida en un determinado conjunto y no tener solución en él. De esta manera, la ecuación 3x – 5 = 2 podemos definirla en Z y sin embargo no existe ningún entero que la verifica. A nuestro parecer, una *ecuación en Z*, es aquella que *puede expresarse de tal manera que sus coeficientes son números enteros, sin necesidad de conocer su conjunto solución*. Según lo que expresa el autor implícitamente, no interesa el conjunto numérico en el que están definidas las operaciones y/o a la pertenencia de los coeficientes de una ecuación, sino basta con identificar el conjunto numérico a la que forma parte la solución.

Después de definir una ecuación en Z, el autor presenta tres ecuaciones lineales - con sus respectivas soluciones - no expresadas en su forma canónica:

3x + 2 = 4x – 2; x = 4

$\frac{x-5}{2} = 2x - 1$; x = -1

9x – 6 = 2x + 30 ; x = $\frac{36}{7}$

Y se pregunta si las ecuaciones dadas son en Z. Para él, no es posible anticiparlo, es indispensable resolverla para saber en "qué conjunto" es ecuación. Lo que no ocurre con la ecuación x + 5 = 1 en Z, cuya solución entera queda garantizado por la ley de cierre para la suma, es decir podemos anticiparlo. Y además en este caso “son suficientes los procedimientos aritméticos basados en las propiedades de las operaciones definidas en Z” (Saiz et al, 2014, p. 51), con lo cual la afirmación del presentador resulta parcialmente verdadera.

Conclusiones

Resumiendo, podemos observar que en este video el presentador no hace hincapié en la enseñanza de técnicas usuales para resolver las ecuaciones en Z. Pretende caracterizar a las ecuaciones a través de su conjunto solución. Asigna un estatus de objeto matemático a las ecuaciones y no el de una herramienta al servicio de la resolución de un determinado problema, en el cual la situación o el usuario es quién decide el conjunto de referencia. Aunque la variable de una ecuación asuma valores enteros no implica que el conjunto solución sea un número entero y aunque la solución no sea un número entero, la ecuación está definida en Z.

CAPÍTULO 5: EXPLORACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE ALUMNOS

A continuación, nos proponemos analizar los conceptos, nociones, herramientas y/o procedimientos que podrían utilizar los alumnos (de aproximadamente 12 - 13 años) a la hora de enfrentarse a problemas en las que es posible el uso de las ecuaciones lineales en Z. Para ello hemos considerado seis problemas extraídos del registro de una investigación previa[33], correspondiente al 2º año de una Escuela Secundaria, ubicada en la periferia de la localidad de Corrientes. El objetivo principal de esa clase fue el aprendizaje de las ecuaciones en Z. Para ello el docente plantea seis problemas referidos al tema.

Los problemas presentados por el profesor en la clase son los siguientes[34]:

Resolvé las siguientes situaciones, justificando tus respuestas:

1) ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado –107? Respuesta: -134
2) ¿Existe algún número entero que sumado a –27 dé como resultado -107? Respuesta: -80
3) ¿Es posible hallar algún número entero que multiplicado por –89 de como resultado –5073? Respuesta: 57
4) ¿Existe algún número entero que multiplicado por 74 dé como resultado –9475? Respuesta: No existe el entero.
5) ¿Hay algún número entero que al dividirlo por 126 dé como resultado –478? Respuesta: –60228
6) ¿Cuál es el número entero que al multiplicarlo por –5 y sumarle 434 da como resultado –772?” Respuesta: No existe el entero.

Estos problemas pueden ser analizados desde distintos puntos de vista:

- Tipo de tarea: Encontrar un número
- Averiguar la existencia o encontrarlo.
- Acerca de las soluciones / conjunto solución.
- Operaciones involucradas.

Los problemas presentados tienen en principio, excluyendo el problema 6, el mismo formato: *averiguar si existe un número entero* que cumpla ciertas condiciones. Si bien no se utiliza el mismo término para plantear la pregunta: ¿Hay? ¿Existe? O ¿Es posible hallar? que asumimos en principio como equivalentes. Sin embargo en el último problema presentado, hay un cambio de pregunta ¿cuál es el número entero…?

---

[33] El registro de la clase corresponde a la investigación de Saiz, I; Vilotta, D; Gorostegui, E; (2014). *Sobre la complejidad de la gestión en una clase de matemática: entre lo planificado y la realidad del aula*. Modelización algebraica de problemas planteados en Z. *Educación Matemática,* 26() 41-72.

[34] Para facilitar la lectura, hemos añadido al final de cada problema su respuesta correspondiente.

en la que queda explícito o da el supuesto de que sí existe y la tarea consiste obligatoriamente a determinarlo.

Desde otra perspectiva, es importante señalar que los ejercicios mencionados en el primer párrafo, plantean una pregunta de existencia, sin necesidad de mostrar cuáles son esos números, cuando ese sea el caso. Matemáticamente los problemas 1, 2 y 5 pueden responderse sin necesidad de hallar el número buscado. Por ejemplo, en el primer problema, dado que la operación suma es una ley de composición interna en Z, lo cual equivale a decir que la suma en Z es cerrada, es posible asegurar la existencia de un número entero que sumado a 27 de cómo resultado -107. Situación similar sucede en los problemas 2 y 5. Aunque en este último caso, la existencia queda garantizada por la ley de cierre del producto en el conjunto de los enteros. Pero en los problemas 3 y 4 la existencia no puede ser asegurada. No es posible responderlos sin realizar su búsqueda, para lo cual es necesario suponer a priori que ese número entero existe (actividad propia del álgebra). Esos números existirán siempre y cuando aquel número de menor valor absoluto sea divisor del de mayor.

Por otra parte, para averiguar si existe tal número en cada uno de los problemas, se puede plantear y resolver la ecuación lineal y una vez conocido el valor numérico analizar si cumple o no la condición, es decir si pertenece o no conjunto numérico de referencia.

Otro aspecto a destacar de los problemas, es que se los puede clasificar según el conjunto solución: una sola solución entera (solución única), es el caso de los problemas 1, 2, 3 y 5. Y problemas sin solución (conjunto vacío) en el conjunto de referencia, tales como los problemas 4 y 6. De los que tienen solución, solo uno de ellos tiene solución positiva (problema 3) a diferencia de los otros problemas solubles, cuya solución es un número entero negativo. Entre los problemas no existe alguno con infinitas soluciones enteras.

En cuanto a la dificultad de los problemas, éstos fueron presentados por el profesor según un grado de complejidad dado por las operaciones involucradas en cada uno, es decir, la dificultad en ellos se va incrementando a partir de presentar una única operación: suma, resta, multiplicación, división y finalmente la combinación de dos operaciones: suma y producto.

Resolución y análisis matemático de los problemas

En esta sección, plantearemos las soluciones a cada uno de los problemas presentados en la clase por el docente. En la sección anterior, hemos mencionado que para dar respuesta a los problemas sobre la existencia o no de un número entero que cumpliera determinadas condiciones, era factible plantear y resolver una ecuación lineal. En una próxima sección, nos proponemos presentar y analizar algunos posibles procedimientos y/o estrategias, correctos/as o no, a los que podrían recurrir los alumnos a la hora de abordar estos seis problemas.

Problema N° 1: ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado –107?

Para resolverlo, podemos suponer que existe un número x, tal que x + 27 = –107. Sumando a izquierda en ambos miembros de la igualdad el opuesto de 27, es decir, –27 (lo cual no es posible hacerlo en el conjunto de números naturales) tenemos:

$$x + 27 + (-27) = -107 + (-27)$$

$$x + 0 = -134, \text{ y por ser el 0 elemento neutro para la suma}$$

$$x = -134 \in Z$$

Problema N° 2: ¿Existe algún número entero que sumado a –27 de como resultado–107?

Supongamos que existe x tal que x + (–27) = –107. Utilizamos el mismo procedimiento del problema N° 1: sumar el opuesto de –27, es decir –(–27) = 27 y obtenemos

$$x + (-27) + 27 = -107 + 27; (-27 + 27 = 0)$$

$$x + 0= -107 + 27$$

$$x = - 80 \in Z.$$

Los problemas 1 y 2 son similares en cuanto sumar un número a otro y obtener un tercero. Estos pueden generalizarse al igual que su solución de la siguiente manera: ¿Existe algún número entero que sumado a “a” dé como resultado b?

Dados dos enteros a y b existirá siempre el entero x tal que x + a = b.

Demostración:

Sumando (–a) a izquierda ambos miembros: x + a + (–a) = b + (–a)

$$x + 0= b + (-a), \text{ pero } b + (-a) = b - a$$

$$x = b - a.$$

¿x pertenece a los enteros? La respuesta es sí, pues b – a es la resta entre los enteros, operación definida en Z.

Problema N°3: ¿Es posible hallar algún número entero que multiplicado por -89 de como resultado -5073?

Sea x tal que x . (–89) = – 5073. Realizando la división en Z tenemos:

$$x = -5073 : (-89)$$

Por regla de los signos se tiene

$$x = 57 \in Z$$

Problema 4: ¿Existe algún número entero que multiplicado por 74 de como resultado–9475?

Este problema es análogo a lo propuesto en el problema N° 3. Aunque en este caso no existe tal número.

Consideremos un x para el cual se verifica: x . 74 = -9475

Resolviendo la ecuación: x = - 9475 : 74

$$x = -\frac{9475}{74} \notin Z$$

Afirmamos que no existe ningún entero que verifique dicha restricción, es decir no hay ningún entero que sea el cociente entre 9475 y 74.

Problema N° 5: ¿Hay algún número entero que al dividirlo por 126 de como resultado–478?

Aquí la operación que interviene es la división. Este tipo de problema siempre tendrá solución entera. La justificación se sustenta en lo siguiente:

Sea x / x : 126 = –478

Multiplicando a izquierda ambos miembros por 126;

(x : 126) .126 = –478 . 126

Será $x = -478 . 126 = -60228 \in Z$

Generalización del problema 5

Sea x tal que x : a = b, entonces x = a.b

Como a y b son enteros y el producto en este conjunto está definido y es cerrado, se tiene que x existe y es entero. El signo de x será positivo si los signos de a y b son iguales, y negativo en caso contrario.

Problema N° 6: ¿Cuál es el número entero que al multiplicarlo por –5 y sumarle 434 da como resultado –772?

Este problema es una combinación de los problemas anteriores. Las operaciones involucradas son suma y multiplicación. Debido a esta última y las razones dadas en un principio, estos problemas no tendrán siempre solución.

En este caso no existe el número entero x:

$$5x = -772 - 434$$

$$5x = -1206$$

$$x = -\frac{1206}{5} \notin Z$$

Conclusión, no existe x entero.

Posibles procedimientos de los alumnos

Problema Nº 1

Para responder al interrogante ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado –107? Se podrían plantear los siguientes procedimientos:

Procedimientos correctos:

1. Tantear, probando con números positivos y negativos. Llegar a la conclusión de que es necesario sumar un entero negativo para obtener –107. Sise sumara enteros positivos a 27, se obtendrán valores positivos.
2. Sumar sucesivamente números negativos de mayor valor absoluto que 27 para obtener un número negativo como resultado. Dicho número deberá ser un negativo, mayor que 107 en valor absoluto. Ajustarlo de tal manera que cumpla las condiciones solicitadas.
3. Sumar (–27) a 27, con lo que se lograría obtener 0, para llegar a -107 faltaría sumar (–107). Entonces se sumó en total –134

En estos tres procedimientos, aparece una nueva noción que no se presentaba en N: *al sumar en Z, es posible obtener un resultado menor que los sumandos*. La dificultad presente es la de sumar un negativo.

4. En la recta numérica, a partir del punto de abscisa 27, retroceder puntos sobre la recta y ubicarse en –107. La dificultad de llevar a cabo este procedimiento es que sumar no es retroceder. Para llegar a -107, habría que dirigirse hacia la izquierda. Con –27 se llega a 0 y todavía habría que ir a la izquierda 107 más. Es decir, se restó en total 134. Pero se estaría resolviendo 27 – … = –107 y no 27 + …. = –107. Por lo que es posible que no se comprenda la idea de sumar un negativo al realizar este procedimiento. Aunque podría justificarse que hay una suma si se aplica la regla a – b = a + (–b) (a, b números naturales).
5. Usar una resta para resolver una suma. Para encontrar un número que sumado a 27 de –107, se puede buscar pensar en un número tal que –107 menos ese número de 27, es decir realizar la cuenta–107 – 27 = –134 (suma y resta como operaciones inversas)

Procedimientos / Respuestas incorrectos/as

6. Basarse en la recta numérica. Si se parte de –107 para llegar a 27, claramente hay que sumar (avanzar), y si lo hacen correspondería a: –107 + 134 = 27 y por lo tanto, el número que se buscaba es 134 que hay que restar a 27 (y no sumar) y se sigue pensando en números naturales.

7. Uso de la recta numérica: afirmar que no es posible encontrar el número porque no es posible avanzar desde el 27 para llegar al –107. Concepción de suma como *avanzar*

8. Uso de la resta como operación inversa de la suma: –107 – 27 = 134. Luego 134 + 27 = 161 es el número buscado.

9. Obtener –80 como resultado, porque –80 es mayor que el 27 positivo y da como resultado –107 (está considerando a los números como cantidad)

10. Sumar a 27 un número positivo, el resultado será siempre positivo. Por lo que este camino elegido no resulta válido. Luego afirmar que el número entero no existe.

11. Sumar –80 + 27 = -107 (puede provenir de 107 – 27 = –80 y luego –80 + 27 = = –107, por la regla de los signos "menos por más da más".

12. Restar 107 – 27 = –80 (relación correcta, pero resultado incorrecto). Luego –80 + (–27) = –107

13. No existe el número, porque para lograr –107 debe ser –80, y se estaría restando en lugar de sumar. (Confusión entre los signos operativos y predicativos)

14. Sumar con varios números y encontrar el 80 (80 + 27 = 107) y luego aplicar la regla de los signos para –80 (+ . – y se obtiene –107)

15. –80 pues –80 más +27 y como son de distintos signos es –107. Traslada la regla de los signos del producto en la suma.

Uso de ecuaciones

Si los alumnos plantean una ecuación. Por ejemplo, si plantearan la ecuación lineal:x + 27 = –107. No se presenta el problema de tener que sumar un negativo. Al despejar x, se obtiene –107 – 27= –134.

Ahora bien, si la ecuación planteada es 27 + x = –107

Puede pensarse que existe una contradicción entre lo obtenido y el signo de x (considerado como positivo)

Ambas ecuaciones representan simbólicamente al enunciado.

Problema 2

"¿Existe algún número entero que sumado a –27 dé como resultado –107?", Algunos de los procedimientos ya expuestos en el problema 1, podrían aplicarse en este problema

Procedimientos correctos

1. Tantear con números negativos.

2. Usar una resta: –107 – (–27) = –107 + 27 = –80 relación inversa entre la suma y la resta y la aplicación de la propiedad – (–a) = a, (a un natural)

Procedimientos erróneos

3. Plantear una resta: –107 – 27 = –134. Confusión entre el signo (–) del 27 como una operación, y no como parte de un número.

Uso de ecuaciones

Se podría plantear de dos formas

Ecuación de la forma x + (–27) = –107

Una dificultad en ella es su escritura, ya que intervienen números negativos. Posiblemente escriban x + –27 = –107.

En cambio, esa dificultad no se encuentra con la ecuación –27 + x = –107.

En ambas ecuaciones es más fácil establecer que el valor de la incógnita es un entero negativo. A diferencia de lo que ocurre en el problema N° 1, porque los números involucrados son de la “misma clase”

Problema 3

¿Es posible hallar algún número entero que multiplicado por –89 de como resultado –5073?, los estudiantes podrían

1. Tantear: Establecer de que se trata necesariamente de un número positivo, teniendo en cuenta la regla de los signos de la multiplicación. Un análisis de los valores dados permitiría establecer que se trata de un número mayor que 10 y menor que 100, pues –89 . 10 = –890 y –89 . 100= –8900 (cuyos valores limitan superior e inferiormente –5073 respectivamente). Probando con distintos números comprendidos en el intervalo abierto (10; 100) lograrían obtener el número buscado: 57.

2. Realizar el algoritmo de 5073 : 89 asumiendo que es lo mismo que realizar –5073 : (–89) y luego aplicar la regla de los signos por lo que obtendrán 57 o –57.

3. Estimación: –89 es el consecutivo de –90. Se podría considerar los productos –90. 40 = –3600; –90. 50 = –4500; –90 . 60 = -5400. Estableciendo la conclusión de que el número buscado, si existiera debería estar comprendido entre 50 y 60. sería importante que los alumnos de la secundaria pudieran hacer un tanteo, no número a número sino realizando más estimaciones. Por ejemplo en este caso nos permitió averiguar que el cociente está entre 10 y 100, por lo tanto tendrá dos cifras. Observando la tabla de valores, se ha aproximado por exceso (en valor absoluto) al número (–5073) a través de multiplicaciones en las que interviene (–90). Por lo tanto si se considera la fila de 57 . (-90), la multiplicación entre 57 y (-89) será –(5130 – 90) = -5073.Por lo tanto el número buscado es 57. Y es mayor que 50 porque es la mitad de 8900.

N	Productos n . (–90)
50	–4500
51	–4590
52	–4680
53	–4770
54	–4860
55	–4950
56	–5040
57	–5130
58	–5220
59	–5310
60	–5400

En este problema, se presenta una noción similar a la del problema 1, al multiplicar dos enteros, es posible obtener otro, tal que sea menor que los números dados, a diferencia de lo que sucede en N: “la multiplicación agranda”

Posibles errores de los alumnos en el planteo de ecuaciones, debido a la compleja escritura de los enteros.

Al escribir la ecuación x . (–89) = –5073 es posible que se escriba: x.–89 = –5073 o si se omite el operador, x – 89 = –5073 llevará a dar una respuesta errónea.

Otra posibilidad es escribir –89 . x = –5073. En cada una de ellas, al intentar “despejar x”, es posible que realicen la cuenta –5073 + 89 = –4984 en lugar de dividir o bien, realicen una división y cambien el signo negativo de 89, es decir –5073 : 89= –57 . En otras palabras, se confunde los signos de los números con los símbolos operativos, en la que influye el conocido método para resolver ecuaciones: *“método del despeje o método de deshacer”* y que da lugar a diferentes errores en la resolución de ecuaciones.

Problema 4:

¿Existe algún número entero que multiplicado por 74 de como resultado –9475?

Podrían utilizar recursos similares del problema 3.

1. Noción de múltiplos. Apoyarse en las cuentas de números naturales: Al multiplicar un número cuya cifra de las unidades es 4 por cualquier otro, se obtendrán otros que tengan a 0, 2, 4 u 8 como unidad. Por lo que será imposible encontrar un número que multiplicado por 74 de –9475.
2. Uso de la relación divisor: 74 es divisible por 2 (número par), por lo cual todos los múltiplos de 74 también lo serán de 2. Si existiera un entero tal que multiplicado por 74 sea (–9475), se estaría afirmando que (–9475) también es un múltiplo de 2. Lo cual esta última afirmación no es válida. Por lo tanto, dicho entero no existe. En otros términos, podría afirmarse lo anterior de la siguiente manera, *el producto entre un número par y otro número entero, siempre es par*. Como 74 es par y (–9475) impar, no existe tal número que verifique el problema. O también, *el producto entre dos enteros es impar si y solo sí ambos enteros son impares.*
3. Realizar la división –9475 : 74 = -126,333333…. (lo cual no es la división en Z) y den como respuesta –126. (se asume que el cociente de –9475 : 74 en valor absoluto será igual que 9475 : 74)
4. Relacionar la división con la multiplicación y saber que si existiera un cociente exacto, la última cifra del cociente por la última del divisor (4) debería ser 5 y esto no puede suceder. Por lo tanto, no existe el entero.

Uso de Ecuaciones

En el planteo de una ecuación, no se presenta la dificultad en su escritura, a diferencia del problema 3. Debido que elcoeficiente de la incógnita es positivo: x.74 = –9475(o en 74.x = –9475). Otra diferencia es que, al resolverla, es posible que no se cometan errores. Es decir, se realice la cuenta –9475 : 74, siempre y cuando tengan los medios para realizar esta cuenta. Precisamente, en este problema, la dificultad está en la realización de la “división no exacta” de un divisor con dos cifras, pues en general, se proponen ejercicios en las que el dividendo es múltiplo del divisor y con divisores de una cifra.

Problema 5

¿Hay algún número entero que al dividirlo por 126 de como resultado –478?

1. Por las reglas de los signos, el número buscado debe ser negativo. Por la “prueba de la división”, se tiene Divisor x Cociente + Resto = Dividendo, entonces

126 . (–478) + 0 = Dividendo. Por lo tanto, el problema dado se reduce a la búsqueda del dividendo, el cual es -60228.

2. Multiplicar 126 . (–478), por ser el cociente y el producto operaciones inversas.

Uso de Ecuaciones

Al expresar este problema en ecuación, pueden escribir x : 126 = –478, su resolución no presentaría dificultades como el problema 3.

Entre los problemas 3, 4 y 5 en el planteo de la ecuación, es posible que se afirme: "sólo en el problema 3, es posible que ese entero exista pues x es positivo y el resultado es negativo" si se tiene en cuenta las reglas de los signos de la multiplicación y de la división.

Problema 6

¿Cuál es el número entero que al multiplicarlo por –5 y sumarle 434 da como resultado -772?

1. Tantear con números enteros y verificar el resultado. Procedimiento válido, pero no es uno los más óptimos desde el punto de vista de economizar la tarea.
2. Podrían establecer que el número buscado, bajo el supuesto de que existe debe ser positivo pues de lo contrario, al multiplicarle por (–5) y sumarle un positivo se obtendría un número positivo.
3. Otros, podrán dar como respuesta de que ese número entero no existe pues, al multiplicar un número por –5, independientemente del signo, se obtienen números cuya última cifra pueden ser únicamente 0 o 5, luego al sumarle 434, la cifra de las unidades del resultado será solamente 4 o 9 respectivamente. Lo cual no sucede con el entero (–772).
4. Realizar las operaciones inversas. Restar –772 – 434 = –1206. Pero este número es el producto de un entero por (–5). Lo cual es imposible porque (–1206) no es divisible por (–5). Un error los llevaría a dividir por (–5) y luego restar 434. En ambos casos fomenta el concepto de ecuación como número desconocido.

Uso de Ecuaciones

A diferencia de los problemas anteriores, hay dos operaciones involucradas. La dificultad en la escritura para expresiones en la que se multiplica la incógnita por un número negativo, de la forma x. –5 + 434 = –772 o –5x + 434 = –772

El sujeto que lo resuelve podría preguntarse "¿Cuál de los dos números paso primero, el –5 o el 434? Posiblemente para él no haya nada que le permita responderla.

En ambos casos, con el fin de obtener una ecuación en la que esté involucrada una sola operación aritmética se podría dar como respuesta:

1) sumar –5 + 434 y obtener x.429 = –772 $\Rightarrow$ x = –772 : 429 $\cong$ –1,7995

2) –5x =–772 – 434 $\Rightarrow$ x = –1206 + 5 = –1201, o bien algún valor que se obtiene al calcular de forma errónea estas operaciones involucradas.

Análisis del Registro de Clase

Para finalizar con este capítulo, analizamos un registro de clase - extraído de una investigación anterior[35] - cuyo objetivo es la introducción a las ecuaciones en Z. En ella indagamos las ideas, procedimientos y conocimientos utilizados por los alumnos, como así también las dificultades que se les presentó al trabajar con ecuaciones en este nuevo conjunto numérico.

De acuerdo con el registro, al inicio de la clase, el profesor escribe en el pizarrón los seis problemas ya analizados en el apartado anterior de este capítulo. Se observa que el docente tiene la intencionalidad de que sus alumnos lo resuelvan sin su intervención sobre el conocimiento en cuestión,

En cuanto al primer problema ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado –107? cuya respuesta es –134, los alumnos:

- Plantean dudas sobre la existencia del número buscado. Para algunos de ellos surge la inquietud de que si tuvieran la certeza de que el número existe, estarían en condiciones de buscarlo. En el álgebra siempre suponemos la existencia del número y luego se trata de determinarlo.

A1: Profesor, cómo puede ser que hay (“haya”) algún número entero que sumado... que sumado a 27 dé como resultado -107?

P: te está preguntando…

A2: ¿Y no nos puede decir sí o no nomás?

P: Resolvé con tu compañero. No, si hay, encuentren.

A3: ¿Y si no hay?

A2: ¿Y no nos puede decir sí o no nomás?

P: Resolver dice Gabriel.

El alumno A2 plantea además otra duda no sólo el problema de la existencia, dice: *¿cómo puede ser que sumado, …?* mostrando una dificultad a nivel de la

[35] El registro de la clase corresponde a la investigación de Saiz, I; Vilotta, D; Gorostegui, E; (2014). Sobre la complejidad de la gestión en una clase de matemática: entre lo planificado y la realidad del aula. Modelización algebraica de problemas planteados en Z. *Educación Matemática,* 26, 41-72.

operatoria en los enteros. Esta duda puede provenir probablemente respecto a ideas como

- No aceptar la posibilidad de sumar un número negativo, es decir no admitir una suma de la forma … + (–a), con a $\in$ N
- El resultado de la suma no puede ser menor que uno de los sumandos, propiedad válida en N, no así en Z. Su conocimiento permitiría saber si el número existe de antemano sin hallarlo.
- El resultado de una suma no puede ser un número negativo.

▪ Explican la tarea correctamente, aunque no saben cómo resolverla

A2: Puede ser que… No entiendo pues qué dice ahí... Hay algún número entero...

A3: Hay algún número entero que sumado a 27 de como resultado –107

A2: Tenemos que hacer una operación con el número 27 que nos dé –107 (...)

▪ La ambigüedad sobre la frase “la suma”. La indicación propuesta por el docente no resuelve el conflicto que tienen al plantearles *“te tiene que dar la suma”.* los estudiantes no pueden identificar si es la suma referida al resultado –107 o a la suma que deben realizar con el 27.

A1: No hice nada todavía.

A6: ¿Ese es?

P: No sé... (a otro grupo) a ver

A8: (...) la suma de todo (...) o ¿la suma hay que hacer?

P: Te tiene que dar la suma. Cuánto te da la suma.

A8: 161.

P: Pero entonces no cumple lo que está diciendo.

A8: No, pero le digo, le pongo el resultado que me da en la suma...

P: Cuál hiciste, cuál es tu número entero.

A8: 134.

P: Que sumado a 27 te dé como resultado -107

A8: Ajam.

P: Y bueno, entonces si vos decís que si hacés la suma no te da -107...

A8: Si, me da...

P: Bueno, entonces por qué me decís si ponés...

▪ Consideran que lo fundamental en el problema es que se obtenga –107 y no la de sumar 27, por ello realizan la cuenta 134 – 27 = –107

P: (desde el pizarrón) A ver, vamos a empezar a ver, para ayudarle a algunos de los chicos que todavía no están encontrando. A ver quién me puede decir... pasá. Bueno, Maxi (A8) pasá a hacer el primero.

P: Vamos a ver lo que hace Maxi y vamos a preguntarle lo que no hace.

A3: Yo ya encontré.

P: "¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado 107?"
(Maxi termina de escribir en el pizarrón134 - 27= –107)

A8: Ese es Profesor.

P: ¿Cuál es?

A8: 134.

P: Bueno, la mayoría de los que encontraron, encontraron ese número.
Hay gente que todavía no encontró. ¿Cómo llegaste a ese?

A8: Haciendo la suma Profesor.

P: Haciendo la suma... pero cómo fuiste buscando.

A8: Me fui fijando qué número sumado a –27 da 107.

P: ¿Cuánto te tienen que dar?

A8: 107.

P: -107

A3: -107

En el fragmento anterior, se observa que los negativos tienen un estatus distinto al de los positivos. Son considerados por los alumnos como una magnitud (valor absoluto del número) seguido de una unidad de medida (signo negativo).

No hubo discusión entre los alumnos ni comparación de resultados y/o procedimientos. En la clase, los alumnos sostienen la idea de que 134 es solución. El profesor pretende hacerles ver que 134 no es solución porque no cumple con las condiciones del problema y no como consecuencia de un error de la cuenta.

P: "¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado -107?"
(Maxi termina de escribir en el pizarrón134 – 27= –107)

A8: Ese es Profesor.

P: ¿Cuál es?

A8: 134.

P: Bueno, la mayoría de los que encontraron, encontraron ese número. Hay gente que todavía no encontró. ¿Cómo llegaste a ese?

A8: Haciendo la suma Profesor.

P: Hacé Maxi, cómo plantearías la ecuación.

A8: No sé Profesor, si yo hice de esa manera.

P: Bueno, a ver.

A1: No va a dar.

A fin de demostrar que 134 no es solución del problema, solicita a sus alumnos el planteo de una ecuación, con la justificación de usar un procedimiento que permita encontrar de una manera "más fácil" los números. Se observa que algunos alumnos comentan del porqué de esa necesidad, si ya encontraron ese número (hasta el momento sostenían que la solución era 134)

P: Bueno, sentate. Ahora lo que van a hacer es buscar cómo podemos escribir eso, o sea, cómo podemos plantear la ecuación para encontrar la manera más fácil de resolver. ¿Está? Entonces, vamos a plantear la ecuación ahora que sabemos esto que escribió Maxi acá, entonces, vamos a plantear la ecuación para ver si podemos resolver de una manera más fácil. Dale, escribimos...

A6: ¿Y qué escribimos?

P: Lo que vamos a hacer en el punto uno es tratar de plantear una ecuación, buscando una manera más fácil, es decir, una expresión que nos permita hallar ese valor más fácil.

A2: Profesor, ¿este papelito es para nosotros?

P: Sí.

(Una alumna busca en su carpeta una hoja con ecuaciones, la saca para trabajar)

P: ¿qué pasa?

(...)

P: No, tienen que trabajar ahora, tienen que escribir cómo pueden escribir esto como una ecuación.

A9: (...)

P: Dale, resolvé y trabajá en tu hoja.

A9: Nop

P: Dale. Quiero ver en sus hojas el trabajo. El 1.

A8: ¡¡Ya está el 1!!

(...)

P: Dale, avancen.

El Profesor olvida sus buenas intenciones de que los alumnos construyan los conocimientos y cae en la práctica usual de traducción literal de enunciados coloquiales.

P: Estamos buscando un valor de equis. O sea, a ese que no sabemos le llamamos x.

Alumnos: Sí.

P: Y después dice "que sumado a 27" ...

A (varios): más 27.

P: Más 27... dé como resultado, dé como resultado...

A10: -107.

P: -107 (Escribe en el pizarrón: x + 27= –107).

P: Bien, tiene alguno, ¿ya tenían esto escrito?

A6: Yo ya sabía Profesor... No quería decir nomás.

Escribir la ecuación con x como incógnita elimina la necesidad de tener que pensar en el signo del número que se busca. En este caso, elimina la necesidad de sumar un positivo más "algo" para lograr un número negativo. Ahora, el problema o la dificultad se trasladan a la cuenta involucrada para encontrar el valor de x.

En el problema 1

P: –107 (Escribe en el pizarrón: x + 27= –107)

P: Bien, tiene alguno, ¿ya tenían esto escrito?

A6: Yo ya sabía Profesor... No quería decir nomás.

P: Bueno, entonces, lo que hay que hacer ahora qué es.

A6: Despejar.

A6: Pasar.

P: ¿Qué hago?

A6: Pasar.

A10: Más 27 al menos.

P: O sea que, pasar... Agustín.

(...)

P: Pasá Miriam (A10).

A10: Usted me ayuda Profesor.

(Escribe –27 al lado del –107 y encierra estas dos cifras en un círculo)

(...)

P: Bueno, hacé.

(Mira la pizarra, buscando una solución. Los compañeros le gritan 134 y 80)

A10: Bueno, callense.

(Hace una resta en el pizarrón: –107 – 27= 80)

P: A ver, ella dice que es 80, que 80 es el valor de equis. Quiere decir que yo lo reemplazo acá y te tiene que dar ¿cuánto? Te tiene que dar –107. ¿80 + 27 me da –107?

A (varios): no.

A8: Sí, le da menos 107 pero positivo Profesor.

P: Me da 107 positivo, o sea que 80 no puede ser.

Una de las respuestas al problema 1 por un grupo de alumnos es 80 (107 – 27). Pero de todos modos analizamos esta intervención docente. El problema de los alumnos es calcular correctamente –107 – 27. Este cálculo no se discute, pero el docente lo analiza en términos de ecuaciones. Afirmamos que la cuenta es incorrecta independientemente si verifica o no la ecuación. Además, para verificarla es necesario operar en forma correcta. En síntesis, el docente renuncia a discutir los cálculos con los enteros, que le daría la respuesta correcta.

P: Bueno, hacé.

Mira la pizarra, buscando una solución. Los compañeros le gritan 134 y 80)

A10: Bueno, callense.

(Hace una resta en el pizarrón: –107 – 27=80)

P: A ver, ella dice que es 80, que 80 es el valor de equis. Quiere decir que yo lo reemplazo acá y te tiene que dar ¿cuánto? Te tiene que dar –107. ¿80 + 27 me da –107?

A (varios): no.

A8: Sí, le da menos 107 pero positivo Profesor.

P: Me da 107 positivo, o sea que 80 no puede ser.

A8: 134 es el número.

P: O sea, ¿qué está pasando?

A8: La hizo mal, porque tenía que pasar al de la suma, tenía que sumar los dos negativos, y ahí tenía que sumar y le da 134(esto muestra que Maxi = A8 tampoco sabe que es –134)

P: ¿Entendés lo que te dice él?

En el problema 2, el profesor solicita a sus alumnos la ecuación correspondiente. Aquí surge la dificultad del doble signo, sumar un negativo (ambos signos están escritos). En cambio, restar un positivo como en–107 – 27, el signo + no está escrito. Aparece una dificultad de la resta entre un negativo y un número natural, que puede considerarse como una suma si te tiene en cuenta que + (– 27) = – 27

Los alumnos escriben en el pizarrón la siguiente ecuación correspondiente al Problema 2

x + –27 = –107

= –107 – 27

x = –80

P: A ver, vamos a mirar lo que hizo Leandro. Él pone. Dice: ¿Existe algún número entero que sumado a –27 dé como resultado –107? Entonces, el número entero que estamos buscando ¿cómo se llama?

A: 80.

P: Bien, pero ¿cómo le llamamos en principio?

A: Menos.

Alumna: Negativo.

P: O sea, al número entero que estamos buscando, desconocido, le llamamos

Al: x.

P: x. Bueno, a ese número entero le sumamos –27, da como resultado –107. Él escribió eso ahí. A ver: él dice que el resultado es –80. Pero fíjense, a ver, qué pasó acá. En el primer paso escribió la ecuación, planteó la ecuación. Y en el segundo paso ¿qué hizo?

A: Resolvió.

P: ¿Qué resolvió?

A: Eso.

P: ¿Cómo lo solucionó?

Al: Está mal profe porque tenía que estar sumando. Sin embargo, tiene que quedar 27 positivo ahí. Porque está 27 negativo y tiene que pasar positivo. Y ahí me doy cuenta que el positivo le saca el (...)

P: ¿Y acá qué me queda? –107 – 27 ¿a qué es igual?

Al: 80... no... a 300... a 134.

P: –107 – 27 ¿a qué es igual?

Al: 134

A2: 80

A3: 80

Profesor: ¿134?

Al: –107 – 27

P: ¿Eh?

Al: es 134.

P: ¿134?

A5: ¿Menos puede ser profe?

Al: Pero ¿27 positivo o negativo?

A5: Negativo.

P: Él dice que –107 – 27 es igual a –80

A: No pues.

Alumna: –107 – 27...me da 134...

P: Es igual a –134.

Al: Y bueno, qué es lo que estoy diciendo yo...

P: Pero vos decís 134... Estamos en enteros. O sea, es –134, es números enteros.

Al: Ah, si

P: Entonces, esto que está acá es –134, no me da -80,

Al: Ahí está negativo tiene que pasar a positivo profesor. El 27... El 27 es positivo. 107 menos.

En varias oportunidades, otra de las dificultades presente en los alumnos consistió en definir el conjunto de los números enteros. Para ellos la frase "números enteros" no implica necesariamente la idea de negativos. En el fragmento 2, observamos que el profesor pretende que sus alumnos den cuenta de que los enteros incluyen a los negativos. La noción presente en los alumnos respecto a los enteros es que estos no son fracciones. A6 parece tener una idea de número entero básicamente como un número (sería el natural) que puede o no poseer un signo menos, atributo no tan importante como el número. El profesor esperaba que A6 respondiera: los positivos, el 0 y los negativos, sin embargo, él debió mencionar esta respuesta, ya que la misma no aporta ayuda al alumno frente a la resolución del problema. Lo importante es conocer algunas características o propiedades de esos números: por ejemplo, para cada número natural x (entero positivo) existe –x que es el opuesto y x + (–x) = = –x + x = 0 etc.

Fragmento 1

A6: ¡Profesor! En el c) tampoco, porque tengo que dividir...

P: en el c) ...

A6: Porque dice 5073 por 89, menos, o sea, hacemos lo mismo nomás, y me dio 57, o sea, –57 me dio... o sea.

P: ¿No se puede?

A6: No, no se puede, porque no es número entero...

P: ¿Cuál no es entero?

A6: El 57.

P: ¿No es entero?

A6: No.

P: ¿Cuáles son los enteros?

A6: 2, 4, 6, 8, 10...

P: 2, 4, 6, 8, 10?

Fragmento 2

P: ¿cuáles son los enteros? A ver, ¿cómo está formado el conjunto de los números enteros?

A6: Ah, decime enteros nomás, porque no entra... 87 y medio...

P: 87 y medio no es entero.

A6: Ah, ese no es entero... todos nomás son enteros

P: Todos ¿cuáles son todos?

A (varios): todos desde el 0.

La relación entre una operación y su inversa es fundamental para comprender las reglas de la operatoria en enteros y la resolución de ecuaciones. Resulta importante distinguir un signo operativo de uno predicativo, así como el uso de paréntesis. En este fragmento, una alumna considera el signo negativo del número como una resta, a pesar de que está explicito el "punto" de la multiplicación.

Con respecto al problema 3

Miriam: Este sería el número... –89 dé como resultado –5073. Entonces, el número que no encontramos sería la X (en la carpeta dice X. –89) multiplicado por -89. Y el resultado es –5073 (agrega el número a la ecuación, que queda x.–89= –5073)

Profesor: ¿Y entonces?

Miriam: Este pasa sumando (señala el –89)

Profesor: Hacé a ver, y fijate si satisface la igualdad. Si satisface la igualdad quiere decir que encontraste el valor, si no, tenés que revisar dónde está mal.

Miriam (a Edith): Profesora, ¿qué es la igualdad?

Edith: ¿mmm?

Miriam: ¿qué es la igualdad? Parecido o más o menos...

Edith: Esto. Que esto es igual a esto. Que esto es igual a esto.

Miriam: Ahhh.

(Los chicos trabajan, el docente recorre el salón)

Miriam: Profesora, ¿así es? este resultado me salió –5073 + 89 me dio –4984

Análisis de la escritura que estaba en el pizarrón

El profesor deja de lado el análisis de una escritura errónea sobre la resolución de una ecuación. Él se encarga de corregirla sin que los alumnos den cuenta del porqué del error. En x + 27 = –107, si se suma algún número entero (no nulo) en uno de los miembros de esa ecuación, la equivalencia entre las ecuaciones x + 27 = –107 y x + 27 = –107 – 27 no se mantiene. A diferencia de lo que sucede con x + 27 = –107 y x = –107 – 27, que tienen el mismo conjunto solución. En otras palabras cambia las condiciones iniciales del problema. Observamos que el sentido de la igualdad presente en los alumnos es a nivel aritmético, al igual que la resolución de las operaciones involucradas, pues lo realizan en forma de columna.

Hubiese sido importante analizar con los alumnos que si no existiera el error de cálculo, es decir si no hubieran escrito x + 27 = –107 – 27 = –134 como solución, la escritura de la ecuación no es correcta.

En la clase podríamos haber planteado: "como ya sabemos que –134 es solución del problema, reemplacen este valor en la ecuación x + 27 = –107 – 27 y veamos qué sucede. ¿Qué se obtiene? … Obtienen –134 + 27 ≠ –107 – 27; –107 en el primer miembro que es distinto de –134. En una ecuación al reemplazar por su solución y calcular las operaciones indicadas se debe obtener el mismo valor en ambos miembros de la igualdad. No deben olvidar que el objetivo es resolver la ecuación, despejando x, pero debemos tener en cuenta que en ese "despeje" se debe mantener el conjunto solución (o solución) de la ecuación. Por esta razón no podemos escribir al mismo nivel de la ecuación dada, restando 27. Del lado izquierdo de la ecuación, escribiremos x pero sin el más 27, pues queremos despejarla, añadimos el igual y escribimos… ¿qué vamos a escribir? … Escribimos –107 – 27. Los cálculos lo haremos aparte, separados de la ecuación que estamos resolviendo, ¿sí? Luego de realizar las operaciones indicadas, conviene, en otro paso, escribir la ecuación equivalente x = –134. Anoten en sus carpetas, siempre que resolvemos ecuaciones, buscamos ecuaciones equivalentes, es decir ecuaciones que mantienen su conjunto solución y que permitan, de esta manera obtener el valor de x".

P: Si pero, planteá la ecuación a ver cómo vas a resolver... (recorre los bancos) Vas a pasar vos (el alumno hace como que no con la cabeza) A ver Laura Vos... (Mira los trabajos)

P: A ver, para que quede bien el primero, entonces, para que quede bien el primero qué pasaba. Escribo de nuevo acá (escribe en el pizarrón) x + 27 = –107 ¿Cómo se resolvía esta ecuación? Vamos a resolver bien ésta porque acá quedó medio (...) (Señala la que está en el pizarrón)

$$x + 27 = -107 - 27$$

$$\underline{27}$$
$$80$$
$$-107$$
$$-\underline{27}$$
$$-134$$
$$\underline{27}$$
$$-107$$

Alumno: el que está sumando pasa restando.

P: es decir que en el primer miembro ¿qué queda?

Alumna: El por... la equis nomás.

P: (escribe a medida que dice) La x nomás, que es igual a –107 – 27 ¿Y entonces? Decimos que x es igual a –134. ¿Está?

(La ecuación en el pizarrón queda planteada):

$$x + 27 = -107$$
$$x = -107 - 27$$
$$x = -134$$

Conclusiones

El análisis del registro nos permitió reconocer que las ecuaciones en Z provocan nuevas dificultades no presentes en las ecuaciones con números naturales. Estos problemas presentados por el profesor no permitieron trabajar adidácticamente el planteo de las ecuaciones lineales, ya que los recursos aritméticos predominaron en la clase. Posiblemente, si los enunciados de los problemas no hagan hincapié en encontrar un número entero en particular, los alumnos plantearían una ecuación. Por ejemplo, para el problema 1, *¿hay algún número entero a que sumado a b dé como resultado c?* Muchos de los autores mencionados en esta investigación afirman que una forma de introducir el álgebra en la clase es a través de la generalización. De igual manera, los problemas propuestos dieron lugar a un espacio oportuno en la clase para tratar de salvar las rupturas que existen entre las ecuaciones en los conjuntos N y Z relacionadas con:

- Las operaciones en Z ya analizadas en el marco matemático:
  - Obtener un resultado menor que uno o los dos sumandos.
  - La diferencia puede ser mayor que el minuendo.
- Concatenación del doble singo.
  - Sumar un negativo equivale a restar.
  - Restar un negativo es equivalente a sumar.
  - Restar es sumar el opuesto del sustraendo.
- Asignar x a la incógnita directamente oculta los aspectos anteriores.
- Y por último, la noción de negativo como número.

Resumiendo, la complejidad del conocimiento matemático no se reduce a una acumulación de contenidos como la operatoria en Z y las ecuaciones en N. Es una tarea que requiere de ésta y otras actividades y del compromiso de los estudiantes y del docente para abordar las rupturas que existen.

CONCLUSIONES FINALES

El concepto de número cambió a través del tiempo para dar lugar a otros tipos de números que no fueron inventados para responder a problemas de la realidad. Pero al definirlos de determinada manera cumplían con las propiedades básicas de los naturales. Los antecedentes históricos de los números enteros nos permitieron afirmar que hubo una sorprendente lentitud en el proceso de construcción del concepto de número negativo. Su consideración como tal no fue hasta mediados del siglo XIX, gracias a los aportes de los matemáticos Peacock, De Morgan y Hamilton, Hermann Hankel y de Richard Dedekind. El conocimiento de este arduo proceso, nos evidencia las grandes dificultades similares a las que comúnmente se enfrentan nuestros alumnos.

El estudio de los números enteros a partir del conocimiento de los naturales y sus propiedades, nos permitió comprobar todo el desarrollo teórico que se encuentra detrás del concepto de número entero. Como ser su definición, compatible con las reglas operatorias de suma y producto (Principio de Permanencia de las Leyes Formales) y sus propiedades que dan lugar a su estructura algebraica.

En los estudios superiores, los números enteros son estudiados luego de la enseñanza y aprendizaje de los números reales, cuyas propiedades de este conjunto se “trasladan” a Z. En cambio en el nivel secundario, los alumnos aún no han construido el concepto del número real. La omisión de que los números negativos fueron creados como necesidad intrínseca de la matemática, en muchos casos, dificulta la justificación de las reglas operatorias en Z. Al exponer esta construcción formal de los números enteros, debemos dejar en claro que su objetivo no es proponerlo a los alumnos del Nivel Medio, sino más bien, otorga un papel fundamental en la formación y/o capacitación del profesorado. No solo por su valor histórico y cultural sino para que seamos conscientes de la existencia de algunos *obstáculos* en el proceso de aprendizaje de los alumnos, visibles a través de los errores.

En relación a las ecuaciones, podemos afirmar que una ecuación puede ser definida como una restricción del dominio de una función escalar $f(x) = 0$ o como una proposición entre dos expresiones. No la podemos definir como una igualdad porque no necesariamente se verifica para todos los elementos del conjunto de referencia. Lo que da lugar a una clasificación de las ecuaciones según su conjunto solución: una única solución, infinitas o ninguna, dependiendo del conjunto de referencia en el que se trabaje. En particular, consideraremos ecuaciones lineales en Z, a aquellas que tienen coeficientes y cuyo valor de la variable asume valores enteros. Lo cual no significa que una ecuación sin solución o con infinitas soluciones enteras no sea considerada como tal.

El libro de texto del nivel medio y el registro de clases ordinaria del mismo nivel, fueron analizados desde algunos conceptos extraídos de la Teoría de Situaciones Didácticas y los aportes de expertos en Didáctica de la Matemática. En relación a la teoría mencionada, ésta pone énfasis a la interacción entre el alumno y su relación con un *medio*, en el cual él es el encargado de construir un determinado conocimiento matemático. Sin embargo, el docente no está ausente en esa construcción, sino participa en la clase a través de preguntas orientadoras que no están relacionadas directamente con el saber en cuestión, actúa como moderador de la discusión entre los alumnos, etc.

En cuanto al Diseño curricular, no se encuentra evidencia respecto al uso de las técnicas para resolver ecuaciones y el salto - rupturas que existe entre las ecuaciones en N y las ecuaciones en Z se omite.

El análisis del artículo de investigación seleccionado nos favoreció en dos aspectos. En primer lugar, nos permitió conocer las dificultades, obstáculos presentes en los matemáticos de la antigüedad en relación a los números negativos y en un segundo lugar perfeccionar un futuro tratamiento didáctico de los negativos en las aulas. Como docentes debemos considerar los obstáculos epistemológicos de un objeto matemático a la hora de seleccionar actividades y planificar nuestra clase para los alumnos del nivel medio, ya que muchos de esos obstáculos epistemológicos subsisten en los estudiantes actuales. La labor realizada por Cid (2000), nos permitió elaborar posibles procedimientos de los alumnos respecto a los problemas del capítulo 5 y por otro, identificar aquellos obstáculos que posiblemente surgirán a raíz del planteo y resolución de ecuaciones lineales con enteros, como por ejemplo, que la incógnita no puede ser un número negativo. Este contexto algebraico será propicio para justificar las reglas de cálculo en Z, y de esta manera, superar aquellos obstáculos que están presenten en los alumnos referente al concepto de número entero, expresados en el análisis de este artículo.

En el libro de texto analizado, las ecuaciones no emergen como una herramienta para resolver problemas. El lenguaje algebraico/simbólico indispensable en este contenido no surge como necesidad, sino es impuesta por el autor del libro de texto, con carencias de significados para el alumno. Por tal motivo, el alumno no podría apropiarse de las ventajas que ofrecen las ecuaciones. Al respecto Sessa (2005) afirma que en la enseñanza del álgebra, en particular de las ecuaciones, lo fundamental es plantear situaciones en las que su uso fuera necesario, eficaz, más económico y la toma de decisiones del alumno juegue un rol importante. Lo que se contrapone con la intencionalidad de todas las actividades que presenta el autor, cuya resolución, en muchos casos, puede llevarse a cabo a través de los conocimientos aritméticos de los alumnos. Si bien no hace hincapié en el campo de referencia de las ecuaciones - el cual es Z - resulta importante resaltar que, al definir ecuaciones como una *igualdad*, el autor no solo considera ecuaciones con solución única, sino incluye a aquellas con infinitas y con ninguna solución en el conjunto Z. Pero en esta última, sólo propone ecuaciones cuya resolución da lugar a una contradicción, dejando de lado aquellas en las que el valor de la variable no pertenece a Z.

Podemos observar que en el video online analizado, el presentador no hace hincapié en la enseñanza de técnicas usuales para resolver las ecuaciones en Z. Sino pretende caracterizar a las ecuaciones a través de su conjunto solución. Asigna un estatus de objeto matemático a las ecuaciones y no el de una herramienta al servicio de la resolución de un determinado problema, en el cual la situación o el usuario es quien determina el conjunto de referencia. Aunque la variable de una ecuación asuma valores enteros no implica que el conjunto solución sea un número entero y aunque la solución no sea un número entero, la ecuación está definida en Z.

El análisis del registro de los alumnos de segundo año del Nivel Medio, nos permitió reconocer que las ecuaciones en Z provocan nuevas dificultades no presentes en las ecuaciones con números naturales. Estos problemas presentados por el profesor no permitieron trabajar adidácticamente el planteo de las ecuaciones lineales, ya que los recursos aritméticos predominaron en la clase. Posiblemente, si los enunciados de los problemas no hacen hincapié en encontrar un número entero en particular, los alumnos plantearían una ecuación. Por ejemplo, para el problema 1, *¿hay algún número entero a que sumado b dé como resultado c?* Muchos de los autores mencionados en esta investigación afirman que una forma de introducir el álgebra en la clase es a través de la generalización.

Aunque la producción de los alumnos nos demostró que el aprendizaje de las ecuaciones lineales en Z no es el producto del conocimiento de las ecuaciones en N y la operatoria de Z, los problemas propuestos por el docente otorgan un espacio oportuno en la clase para tratar de salvar las rupturas que existen entre las ecuaciones en los conjuntos N y Z relacionadas con:

- Las operaciones en Z ya analizadas en el marco matemático:
    - Obtener un resultado menor que uno o los dos sumandos.
    - La diferencia puede ser mayor que el minuendo.
- Concatenación del doble singo.
    - Sumar un negativo equivale a restar.
    - Restar un negativo es equivalente a sumar.

    - Restar es sumar el opuesto del sustraendo.
- Asignar x a la incógnita directamente oculta los aspectos anteriores.
- Y por último, la noción de negativo como número.

Estas dificultades emergen por la complejidad del conocimiento matemático y por las propias características de las ecuaciones en Z, muy diferentes a las ecuaciones definidas en N. Por lo tanto, aprender esta herramienta en Z es superar las rupturas que plantea su aprendizaje. Estas rupturas serán inevitables y es el profesor quien debe conocer cuáles son esas dificultades específicas y actuar en consonancia. En su actuación, será necesario generar un ambiente de resolución y discusión de problemas que permitan construir nuevos significados o resignificarlos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R., Vicenç F., Pochulu M. (2008). *Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones*. Santa Rosa, La Pampa, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Alonso F., Barbero C., Fuentes I., Azcárate A., Dozagarat J., Gutierrez S., Ortiz M., Riviere V. y Da Veiga C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra* (Matemáticas: cultura y aprendizaje). Madrid: Síntesis.

Ayres, F., Castaño, J. y Robledo Moncada, E. (2003). *Algebra moderna*. México: McGraw-Hill.

Bagazgoitia, A. (2007). La belleza en matemáticas. *Sigma: revista de matemáticas*, *31*, 133 - 152.

Boyer, Carl (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Ed. Alianza.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cantoral Uriza, R. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. 1st ed. Madrid: Diaz de Santos. Disponible en https://books.google.com.ar/books?id=l-RvCQAAQBAJypg=PA258ydq=Carnot+el+cuadrado+del+m%C3%A1s+grandeyhl=esysa=Xyved=0ahUKEwiy2aLmxtjSAhVBvJAKHehWDMsQ6AEIGjAA#v=onepageyq=Carnot%20el%20cuadrado%20del%20m%C3%A1s%20grandeyf=false

Castellanos Cruz, R. (s. f). *Una propuesta de enseñanza de solución de problemas con ecuaciones algebraicas de 1er. grado en alumnos con problemas de aprendizaje.* Disponible en http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias/at05/PRE1178063186.pdf

Castillo Angulo, C. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos*. [Tesis de maestría], Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ingeniería y Administración. Repositorio institucional Biblioteca Digital. Disponible en https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/53070

Cid, E. (2001). *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. Seminario matemático García Galeano, 31, 1 – 17.

Cid Castro, E. (2015). *Obstáculos Epistemológicos en la Enseñanza de los Números Negativos*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Zaragoza]. Archivo digital.

Courant, R. y Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos* (5.a ed., L. Bravo Gala, trad.). Aguilar. (Original publicado en 1955).

De Burgos Roman, J. (2007). *Álgebra lineal. Definiciones, teoremas y resultados*. España: García Maroto Editores.

Dorronsoro, J. y Hernández, E. (2007). *Números, grupos y anillos*. 1st ed. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana.

Esquinas Sancho A. (2008). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. Memoria para optar el título de Doctor, Facultad de educación. Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Gallardo, A. y Hernández, A. (2002). *Emergencia de los números negativos*. [conferencia], México. Disponible en: http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf

Gómez B. (2001): La Justificación de las reglas de signos en los libros de texto: ¿por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico *(Ed*). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Santa Rita. Disponible en http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/homenaje/00Indice.PDF

González, J. (1990). *Números Enteros*. 1st ed. Madrid: Síntesis.

Saiz, Irma Elena, Gorostegui, Edith, y Vilotta, Diego. (2011). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación matemática, 23*(1), 123-151. Disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttextypid=S1665-58262011000100006ylng=esytlng=es

Iriarte, M., Jimeno Pérez, M., y Vargas Machuca, I. *Obstáculos en el aprendizaje de números enteros. Suma (Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)*, *7*, 13 – 18

Macías Hernández, M. (s. f). Evolución Histórica del concepto de número. *Autodidacta* (Revista de los profesionales de la Educación Extremadura). Disponible en: http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/numero_1_archivos/r_m_hernandez_feb10.pdf

Larson, R. (2014). *Fundamentos de álgebra lineal*. 1st ed. Cengage Learning Editores.

Melisani E. (1999). Los Obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE, 13*, 1 – 26.

Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, D. y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,18,* (3), 329 – 358. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v18n3/2007-6819-relime-18-03-00329.pdf

Noriega, R. (1987). *Cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires: Docencia.

Panizza, M. (s.f.). *Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas*. pp.1 - 6. Disponible en: http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

Poole, D. (2011). *Algebra lineal. Una introducción moderna*. México: Cengage Learning Editores S.A.

Rojano Ceballos M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 75*, 5 – 20.

Rojo, A. (2001). *Álgebra I*. Vigésima ed. Buenos Aires: El Ateneo.

Rotela, R. (n.d.). *Operaciones en el conjunto de números enteros. La multiplicación: sus reglas de signos* (Tesis de Licenciatura en Didáctica de la Matemática). UNNE. Corrientes, Argentina.

Saiz, I; Vilotta, D; Gorostegui, E; (2014). Sobre la complejidad de la gestión en una clase de matemática: entre lo planificado y la realidad del aula. Modelización algebraica de problemas planteados en Z. *Educación Matemática,* 26, 41 – 72. Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40531694003

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra* (Formación Docente – Matemática). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

González Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. Suma (Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)*, 45, 17 – 28.

Soto Aguilar, A. (2011). *Elementos de álgebra moderna*. 1st ed. San José C. R.: EUNED.

Sullivan, M., González Osuna, M. and Hernández García, D. (2006). *Algebra y trigonometría*.México: Pearson Educación.

Tan, S. (2012). *Matemáticas Aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida*. 5th ed. México: Cengage Learning Editores.

Torres Lengifo, L. (2011, 26 al 30 de junio). *Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela*. [conferencia]. XIII Conferencia interamericana de educación matemática realizado en la Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2576

Torres Nihahuanca C. (s. f*.). Números Enteros: Origen e Historia*. Disponible en http://casanchi.com/mat/enteros01.pdf

Documentos y videos utilizados para su análisis

Cid, E. (2000). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm

Ministerio de Ecuación: Diseño Curricular Jurisdiccional Ciclo Básico de la Secundaria Orientada. Matemática. Corrientes. Disponible en http://www.mec.gob.ar/direcciones/otras/planeamiento/documentos/area-curricular

Eduweb20. Matemática Informal, (2015). *Primer año Ecuaciones en Z- Video 1- Qué es una ecuación en Z. En este video se enseña qué es una ecuación en "Z" y cómo se puede reconocer*. [video] Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=y3N6whDucSk [Fecha de consulta: 18 de octubre de 2016]

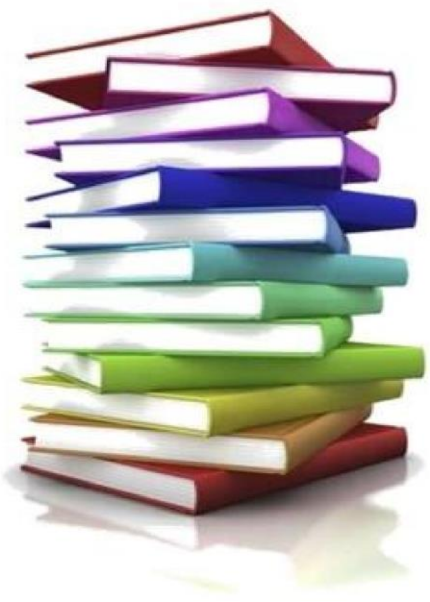
Effenberger, P. (2016). *Matemática II*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Kapelusz.

Gobierno Provincial

Ministerio de Educación

Diseño Curricular Jurisdiccional

Ciclo Básico de la Secundaria Orientada



Matemática

Marco Orientador

La evolución de la Matemática ha transitado por un largo camino en la búsqueda de los fundamentos, desde la intuición hasta llegar el formalismo, Hilbert de principios del siglo XX enmarca a la Matemática desde sus inicios hasta nuestros días:

".....la matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de las partes, los símbolos matemáticos son diagramas escritos, las figuras geométricas son fórmulas gráficas... en la medida que una rama de la ciencia ofrece abundancia de problemas está viva... Quien persigue métodos sin tener en mente un problema definido investiga en vano... la convicción de la resolubilidad de un problema matemático cualquiera es un poderoso incentivo para el investigador…"

Ideas y conceptos que la componen siguen vigente desde sus orígenes, muchos otros continúansu desarrollo. Losconocimientos que brinda socialmente reconocido en el marco de las teorías actuales, resultan valiosos como conocimiento Matemático y útiles para otras ciencias.

El origen de los conocimientos matemáticos se asocia, por lo general a cuestionamientos del hombre acerca de interpretar la realidad que los rodea en tiempo y espacio, problemas cotidianos, otros por la sola necesidad de formular ideas organizadas y desarrollar teorías abstractas que pudieran o no luego, ser aplicadas para solucionar problemas reales.

En definitiva, el "hacer matemática" está vinculado históricamente a la "resolución de problemas", pero esto tiene un gran número de significados, desde la aplicación matemática a cuestiones prácticas, hasta la utilización de un conjunto de situaciones con el propósito de que se construya o reconstruya un concepto o procedimientos, entre otras. Sin duda no es lo mismo la tarea del investigador a la del profesor de matemática, ni a la del alumno en clase de matemática, por lo tanto las propuestas de la didáctica de la matemática es lograr en el aula una "microsociedad científica".

El conjunto de conocimientos que se ha desarrollado en matemática a través del tiempo constituyen lo que hoy conocemos como: aritmética, geometría, álgebra, estadística, entre otras; es sobre esta base que se asienta la Educación Primaria en nuestro país en la actualidad, brindando a los niños y jóvenes las herramientas fundamentales para el desarrollo social y cultural.

Fundamentación

En las últimas décadas, especialistas dedicados a los procesos relacionados con la enseñanza de la matemática, han hecho hincapié en que "*Aprender matemática significa poder construir el sentido de los conocimientos*"… (CAMUYRANO, M. B. CRIPPA, A., DÉBOLI, y otros, 1998), y que esto se logra a través de la resolución de problemas. La resolución de problemas es un instrumento metodológico que permite aprender verdaderamente matemática, ya que al utilizarlo se investiga, se diseñan estrategias de acción relacionando conceptos y ampliando su campo de aplicación en diversos contextos.

El proceso de transposición, determina la elección del conjunto de conocimientos que se desea transmitir, y que serán considerados por los docentes en cada escuela, enunproceso de deconstrucción y reconstrucción de los diferentes elementos de los conocimientos, teniendo como objetivo que los mismos puedan ser "enseñables". La secuenciación que se llevará a cabo en las escuelas permitirá posteriormente a los estudiantes la construcción de sus propios conocimientos, brindándoles las herramientas necesarias para pensar el mundo que los rodea, en este proceso de formación y desarrollo de las nuevas generaciones de ciudadanos.

La formalización de los resultados, con rigor lógico y científico, no debe ser el punto de partida de los aprendizajes de la matemática, sino el objetivo a alcanzar; partiendo de la intuición, la exploración de diferentes situaciones, la formulación de hipótesis y conjeturas, la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, para luego elaborar conclusiones y generalizaciones.

En el Ciclo Básico de la Educación Secundaria Orientada se pretende iniciar progresivamente el proceso de formalización, en esta etapa el alumno comenzará a realizar inferencias y abstracciones, a formar un espíritu crítico y a practicar el razonamiento lógico para ir logrando mayor nivel de abstracción y formalización. En este sentido el Algebra, que juega un papel importante en esta etapa, presenta dificultades que están vinculadas a este proceso que debe ser paulatino y no impuesto, ya que la utilización de símbolos cargados de significados, debe ser el objetivo final del mismo.

El valor que se le ha dado a la Geometría en la escuela en los últimos tiempos debe ser orientado a un objetivo de carácter amplio y abarcador, relacionándola con otras ramas de la matemática, con otras ciencias, como también al arte, para así brindar una perspectiva o visión más completa de la realidad y del conocimiento abordado.

Estas son algunas consideraciones para ser tenidas en cuenta a la hora de secuenciar y diseñar las acciones para ser llevadas al aula, una buena y cuidadosaarticulación de las propuestas llevaría a alcanzar las metas deseadas a lo largo del ciclo.

1º Año

Expectativas de Logro

- Resolver situaciones problemáticas, utilizando las operaciones y comprendiendo las relaciones que realiza entre números naturales y racionales positivos, seleccionando el tipo de cálculo exacto o aproximado realizado con distintas herramientas, calculadora, computadora, según la situación demanda, desarrollando la confianza en las propias decisiones.

- Interpretar los resultados, comprobando su razonabilidad y planteo de nuevos interrogantes.
- Utilizar los símbolos y representaciones gráficas para expresar relaciones, en especial las funciones de proporcionalidad en situaciones concretas y en diversos contextos, iniciando gradual y paulatinamente el proceso de modelización matemática.
- Reconocer y usar las propiedades de las formas bidimensionales y tridimensionales aplicando los conceptos de medida, ubicación y transformación en situaciones problemáticas planteadas.
- Distinguir, usar y operar con magnitudes, y las unidades de medida correspondientes, acotando el error tanto como la situación requiera.
- Recolectar, organizar, procesar e interpretar estadísticamente información.
- Estimar y usar probabilidades, para la toma de decisiones, en situaciones concretas y sencillas.
- Comunicar las ideas, los conceptos, las propiedades y los procedimientos básicos de la matemática utilizando adecuadamente el lenguaje oral y escrito, para dar paso progresivamente al simbólico.
- Valorar las producciones propias y ajenas con actitud crítica y constructiva, reconociendo aciertos y errores, trabajando cooperativamente aceptando responsabilidades y respetando las normas acordadas, con vistas al desarrollo del razonamiento lógico y científico.
- Reconocer la necesidad del esfuerzo, la perseverancia y la disciplina para el quehacer matemático y para el desarrollo personal y social.

Organización de los Contenidos

La selección de los contenidos del presente documento se desprende del análisis y adecuación de los NAP (Núcleos de aprendizajes prioritarios) aprobados por Resolución CFE Nº 182/12, cuya organización se respeta y comparte en el desarrollo de este Diseño Curricular.

Este documento, hace hincapié en que el desarrollo de capacidades de razonamiento lógico y formal, es posible a través de la acción, formulación y validación de los conocimientos que se puede lograr a travésresolución de problemas, centrando la mirada en cada curso del Ciclo Orientado en cuatro relaciones fundamentales: los números y las operaciones, el álgebra y las funciones, la geometría y la medida, y la probabilidad con la estadística.

Las relaciones mencionadas se establecen por el vínculo directo entre las mismas, sin dejar de lado que a su vez se relacionan entre sí, y que serán abordadas a partir de la organización que realicen los docentes en cada institución.

Este Diseño Curricular Jurisdiccional presenta el punto de partida para pensar en las prácticas docentes, en pos del logro de las expectativas deseadas. Propone para la enseñanza de la Matemática el desarrollo gradual de los contenidos dependiendo de su complejidad.

Para el primer año se propone un trabajo más profundo en lo que respecta a las propiedades de los números naturales y sus operaciones, que permita establecer bases sólidas para un desarrollo paulatino en el pasaje de la aritmética al algebra. En cuanto a los números racionales positivos, la tarea permitirá establecer las relaciones necesarias para la medición.

Por otra parte, los conocimientos antes mencionados serán de gran utilidad en la resolución de situaciones sencillas de la práctica cotidiana, ligadas a la probabilidad y la estadística.

La resolución de situaciones sencillas, vinculadas al quehacer cotidiano del alumno, permitirá el abordaje de los contenidos con un alto nivel de significatividad para poder alcanzar con posterioridad la abstracción deseada.

Eje: En relación con el Número y las Operaciones

Reconocimiento y uso en deferentes contextos de los números naturales (N): La recta y los números naturales. Operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Divisibilidad, múltiplos y divisores. Potencias y raíces cuadradas exactas de números naturales.

Propiedades de las operaciones. Cálculo mental utilizando las propiedades de las operaciones como recurso. Reglas de usos de paréntesis.

Sistemas de numeración: sistemas posicional decimal y sexagesimal. Comparaciones. Descomposiciones polinómicas.

Interpretacióny usode las fraccionesy números decimales en diferentes contextos: Representación gráfica de fracciones.Problemas numéricos que involucren el uso de las representaciones gráficas de fracciones. Equivalencia y comparaciones entre fracciones. Pasajes de la forma fraccionaria a decimal y viceversa. Cálculo mental y escrito, exacto y aproximado, con y sin uso de la calculadora. Operaciones con números racionales positivos (Q^+).

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Interpretar, registrar, comunicar, comparar y encuadrar cantidades y números utilizando las representaciones más adecuadas.

- Argumentar sobre la equivalencia de diferentes representaciones de un número, usando expresiones fraccionarias y decimales finitos.
- Comparar la organización del sistema decimal con la del sistema sexagesimal.
- Establecer relaciones de orden entre números racionales positivos.
- Usar cuadrados, cubos y raíces cuadradas exactas de números naturales.
- Poner en juego el uso adecuado a los diferentes significados de las fracciones.
- Operar con cantidades y números seleccionando el tipo de cálculo (mental y escrito, exacto y aproximado, con y sin uso de la calculadora) y la forma de expresar los números involucrados que resulte más conveniente en función de la situación, evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Realizar cálculos combinando varias operaciones en relación, con o sin uso de la calculadora.
- Interpretar y explicitar los algoritmos de las operaciones y las estrategias de cálculo con números naturales, y con expresiones fraccionarias y decimales.
- Validar argumentando los procedimientos o resultados de los cálculos, mediante el uso correcto de las propiedades de la suma, la resta, la multiplicación y la división.
- Conjeturar acerca de las relaciones ligadas a la divisibilidad (múltiplos y divisores comunes) y sobre propiedades de las operaciones entre números.

Eje: En relación con el Álgebra y las Funciones

Expresión simbólica del conjunto de números naturalesy subconjuntos. Ej: elementos entre dos naturales. Generalización de propiedades de los números naturales con las operaciones definidas entre: conmutativa, asociativa, otras. Expresiones simbólicas de relaciones numéricas: múltiplos y/o divisores. Expresiones simbólicas en situaciones problemáticas en distintos contextos.Uso de fórmulas parael cálculo de perímetro,área y volumen. Ecuaciones lineales sencillas en N y Q^+.

Proporcionalidad directa e inversa. Distinguir situaciones de proporcionalidad de aquellas que no los son. Construcción e interpretación de las relaciones en distintas representaciones: tabla, gráfico cartesiano.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Explorar y explicitar relaciones entre múltiplos y/o divisores de un número, por medio de expresiones simbólicas que generen el conjunto de elementos deseados.
- Reconocer, usando distintas representaciones (tablas, gráfico cartesiano) relaciones directa e inversamente proporcionales, distinguirlas de aquéllas que no lo son;argumentando las afirmaciones.
- Estudiar, conjeturar y validar acerca de la variación de perímetros y áreas en función de la variación de diferentes dimensiones de figuras.
- Confeccionar e interpretar tablas y gráficos cartesianospara relaciones entre magnitudes discretas y/o continuas, en distintos soportes, en papel, con graficadores en computadoras.

Eje: En relación con la Geometría y la Medida

El reconocimiento de figuras (triángulos, cuadriláteros y círculos) y cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) y la producción y el análisis de construcciones explicitando las propiedades involucradas en situaciones problemáticas.

Construcciónde figuras a partir de informaciones (propiedades y medidas) utilizando compás, regla, transportador y escuadra, explicitando los procedimientos empleados y evaluando la adecuación de la figura obtenida.

Suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros.

Cálculo de perímetros y áreas de figuras, áreas laterales y volúmenes de cuerpos. La comprensión del proceso de medir, considerando diferentes unidades y sistemas, en situaciones problemáticas. Estimacióny medición devolúmenes, estableciendo equivalencias con la capacidad. Equivalencia de distintas expresiones para una misma cantidad, utilizando las unidades de longitud, área, volumen y capacidad del SIMELA y sus relaciones.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Estudiar las propiedades de las figuras (triángulos, cuadriláteros y círculos) y cuerpos (prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) para caracterizarlas y clasificarlas.
- Explorar y argumentar acerca del conjunto de condiciones (sobre lados, ángulos, diagonales y radios) que permiten construir una figura
  (triángulos, cuadriláteros y figuras circulares)

- Construir figuras a partir de la informaciónde propiedades y/omedidas, utilizando compás, regla, transportador y escuadra, explicitando los procedimientos empleados y validando los procedimientos utilizados.
- Conjeturar y argumentar acerca de las propiedades: triangular y de la suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros.
- Estimar y medir áreas de figuras, áreas y volúmenes de cuerpos, volúmenes, estableciendo equivalencias con la capacidad, eligiendo la unidad adecuada en función de la precisión requerida.
- Argumentar sobre la equivalencia de distintas expresiones para una misma cantidad, utilizando las unidades de longitud, área, volumen y capacidad del SIMELA y sus relaciones.
- Calcular volúmenes de prismas estableciendo equivalencias entre cuerpos de diferente forma mediante composiciones y descomposiciones.

Eje: En relación con la Probabilidad y la Estadística

La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas:

Recoleccióny organización de datos para estudiar un fenómeno y/o tomar decisiones.

Interpretación de tablas y gráficos (pictogramas, diagramas de barras, gráficos circulares, de línea, de puntos) y análisis desus ventajas y desventajas en función de la información que se quiere comunicar. Construcción de gráficos adecuados a la información. Cálculo de la media aritmética y analizar su significado en función del contexto.

El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- La interpretación y elaboración de información estadística, recolectando y organizando datos para estudiar un fenómeno y/o tomar decisiones
- Interpretar tablas y gráficos (pictogramas, diagramas de barras, gráficos circulares, de línea, de puntos) y analizar sus ventajas y desventajas en función de la información que se comunica.
- Confeccionar gráficos adecuados a la información a describir, seleccionando situaciones sencillas.
- Calcular la media aritmética e interpretar su significado en elcontexto.

- Determinarla probabilidad de diferentes sucesos, incluyendo seguros e imposibles, para espacios muestrales finitos.

2º año

Expectativas de Logro

- Resolver situaciones problemáticas, utilizando las operaciones estableciendolas relaciones necesarias entre enteros y racionales en sus distintas representaciones,seleccionando el tipo de cálculo exacto o aproximado que la situación que se planteen, desarrollando la confianza en las propias decisiones y respeto por las ajenas.
- Interpretar los resultados, comprobando su razonabilidad y planteo de nuevos interrogantes.
- Utilizar los símbolos y representaciones gráficas para expresar generalizaciones,relaciones yfunciones en diversos contextos, continuando progresivamente con el proceso de modelización matemática iniciado.
- Utilizar propiedades de las figuras planas y lugares geométricos, aplicando los conceptos de medidaen situaciones problemáticas.
- Operar con magnitudes y las unidades de medida correspondientes, estableciendo el grado de exactitud y error entanto la situación lo requiera.
- Recolectar, organizar, procesar e interpretar estadísticamente información y comprender, estimar y usar probabilidades, para la toma de decisiones, en situaciones concretas y sencillas.
- Comunicar las ideas, los conceptos, las propiedades y los procedimientos, utilizando adecuadamente el lenguajeoral – escrito y simbólico.
- Valorar las producciones propias y ajenas con actitud crítica y constructiva, reconociendo aciertos y errores, trabajando cooperativamente aceptando responsabilidades y respetando las normas acordadas, con vistas al desarrollo del razonamiento lógico y científico.
- Reconocer la necesidad del esfuerzo, la perseverancia y la disciplina para el quehacer matemático y para el desarrollo personal y social.

Organización de los Contenidos

Continuando con los criterios establecidos para primer año, en esta etapa la propuesta de trabajo con los números amplía su campo de acción con la presentación de los números negativos, partiendo desde los enteros y continuando con los números racionales (Q), los que serán los elementos esenciales en la resolución de situaciones sencillas problemáticas, ligadas a los diversos contextos.

En el desarrollo de la capacidad de abstracción esperada en este nivel, con relación al álgebra las ecuaciones, las funciones, las relaciones de proporcionalidad, relaciones geométricas, jugarán un papel preponderante. La labor del docente en la selección de situaciones significativas para el alumno vinculadas a los contenidos mencionados, permitirá el logro de las expectativas.

En el ámbito de la probabilidad y la estadística, se pretende continuar con un proceso de adquisición de herramientas para el análisis de situaciones cotidianas relacionadas con ellas, que son muy frecuentes visualizarlas en los medios de comunicación, que contribuirán a la comprensión de la realidad que nos rodea.

Eje en relación con el Número y las Operaciones

El reconocimiento y uso de los números racionales en situaciones problemáticas en diferentes contextos:

Números enteros, reconocimiento y uso. Comparación. Representación en la recta numérica. Distancia entre dos números enteros. Uso de los números enteros en diferentes contextos. Algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división de números enteros. Potencias y Raícesde base entera y/o de exponente entero. Jerarquía y propiedades de las operaciones. Uso de paréntesis corchetes y llaves.

Números primos, múltiplo común menor y divisor común mayor. Teorema Fundamental de la Aritmética y su aplicación en el cálculo de múltiplo común menor y divisor común mayor.

Expresiones fraccionarias y decimales. Interpretación en diferentes contextos.

Correspondencia entre fracciones y expresiones decimales exactas o periódicas.

Notación científica. Representación en la recta numérica. Encuadramiento de números racionales entre otros dos. Algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división de números enteros. Potencias y Raíces.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Interpretar, registrar, comunicar y comparar números enteros en diferentes contextos: como número relativo (temperaturas, nivel del mar) y a partir de la resta de dos naturales (juegos de cartas, pérdidas y ganancias).

- Comparar números enteros y hallar distancias entre ellos, representándolos en la recta numérica.
- Definir el número racional como cociente entre dos números enteros.
- Usar diferentes representaciones de un número racional (expresiones fraccionarias y decimales, notación científica, punto de la recta numérica, entre otras), argumentando sobre su equivalencia y eligiendo la representación más adecuada en diferentes contextos.
- Analizar diferencias y similitudes entre las propiedades de los números enteros (Z) y los racionales (Q) (orden, discretitud y densidad).
- Modelizar el significado de la suma, resta, multiplicación, división y potenciación en Z.
- Analizar las operaciones en Z y sus propiedades como extensión de las elaboradas en N.
- Usar y analizar estrategias de cálculo con números racionales seleccionando el tipo de cálculo (mental y escrito, exacto y aproximado, con y sin uso de la calculadora) y la forma de expresar los números involucrados que resulten más convenientes y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Usar la jerarquía y las propiedades de las operaciones en la validación de los cálculos.
- Explorar y enunciar propiedades ligadas a la divisibilidad en N (suma de dos múltiplos, si un número es múltiplo de otro y éste de un tercero, el primero es múltiplo del tercero).

Eje: En relación con el Álgebra y las Funciones

Determinación de conjuntos de racionales a partir del lenguaje simbólico: Ecuaciones e inecuaciones lineales sencillas. Expresiones simbólicas de laspropiedades de las operacionescon números racionales: conmutativa, distributiva, otras (comparación con las propiedades de naturales). Exploración y enunciado de propiedades vinculadas con la divisibilidad (coloquial y simbólica).

Funciones: Análisis de variación del perímetro, área y volumen. Construcción e interpretación de las funciones numéricas endistintas representaciones: simbólica, tabla, gráfico cartesiano.

Razones y Proporciones. Cálculo de elementos de una proporción. Proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos y representaciones: simbólica, tabla, gráfico cartesiano.

Distinguir situaciones de proporcionalidad de aquellas que no los son.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos (regularidades numéricas, proporcionalidad directa e inversa).
- Modelizar variaciones uniformes y expresarlas eligiendo la representación más adecuada a la situación.
- Explorar, conjeturar y validar sobre las propiedades de las funciones de proporcionalidad directa (variación uniforme, origen en el cero)
- Analizar las variaciones de perímetros, áreas y volúmenes, en función de las dimensiones de figuras y cuerpos, conjeturando y validando las fórmulas obtenidas como resultado de dicho análisis.
- Enunciar fórmulas para representar regularidades numéricas en N y analizar sus equivalencias.
- Enunciar y analizar afirmaciones sobre propiedades de las operaciones o criterios de divisibilidad,avanzando desde su expresión oral a su expresión simbólica, y argumentar sobre su validez.
- Expresar algebraicamente de diferentes maneras, estableciendo posteriormente las equivalencias que definen la situación concreta, diferenciándolas de las que derivan de las propiedades numéricas establecidas.
- Expresar el conjunto solución por medio de ecuaciones lineales con una variable y analizar el campo de solubilidad de las mismas (solución única, infinitas soluciones, sin solución).

Eje: En relación con la Geometría y la Medida

El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas. Construcción de circunferencias, círculos, mediatrices y bisectrices como lugares geométricos. Congruencia de triángulos. Construcción depolígonos utilizando regla no graduada y compás a partir de diferentes informaciones, y justificar los procedimientos utilizados en base a los datos y/o a las propiedades.

Relación entre ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una transversal.

Relaciónentre lados de triángulos cuyas medidas sean ternas pitagóricas e interpretar algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras.

La comprensión del proceso de medir y calcular medidas en situaciones problemáticas.

Estimación y cálculo de cantidades, eligiendo la unidad y la forma de expresarlas que resulte más conveniente en función de la situación.

Relaciones entre cuerpos con igual área lateral y distinto volumen o con el mismo volumen y distintas áreas laterales.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Determinar lugares geométricos: circunferencias, círculos, mediatrices y bisectrices, como conjunto de puntos que cumplen con ciertascondiciones a las que el problema hace referencia.
- Construirtriángulos que posibiliten la exploraciónde condiciones necesarias y suficientes para alcanzar dicho objetivo.
- Construir polígonos utilizando regla no graduada y compás a partir de diferentes informaciones, y justificar los procedimientos utilizados en base a los datos y/o a las propiedades de las figuras.
- Formular conjeturas sobre las relaciones entre distintos tipos de ángulos a partir de las propiedades del paralelogramo y producir argumentos que permitan validarlas (opuestos por el vértice, adyacentes y los determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal).
- Analizar afirmaciones acerca de propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez, reconociendo los límites de las pruebas empíricas.
- Analizar las relaciones entre lados de triángulos cuyas medidas sean ternas pitagóricas e interpretar algunas demostraciones del teorema de Pitágoras basadas en equivalencia de áreas.
- Estimar y calcular cantidades, eligiendo la unidad y la forma de expresarlas que resulte más conveniente en función de la situación y de la precisión requerida, y reconociendo la inexactitud de toda medición.
- Explorar las relaciones entre cuerpos con igual área lateral y distinto volumen o con el mismo volumen y distintas áreas laterales.

Eje: En relación con la Probabilidad y la Estadística

La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas con conjuntos de datos discretos y acotados para estudiar un fenómeno.

Comunicación de la información y/o toma de decisiones, analizando el proceso de relevamiento de los mismos.

Identificación de variables (cualitativas y cuantitativas), organización de los datos y construcción de gráficos adecuados a la información.

La media y el modo para describir los datos en estudio, interpretacióndel significado de cada una.

El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas, comparando las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Organizar conjuntos de datos discretos y acotados para estudiar un fenómeno, comunicar la información y/o tomar decisiones, analizando el proceso de relevamiento de los mismos.
- Identificar diferentes variables (cualitativas y cuantitativas), organizar los datos y construir gráficos adecuados a la información a describir.
- Determinar einterpretar el significado de la media y el modo para describir los datos en estudio.
- Determinar y comparar las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmula.

3º año

Expectativas de Logro

- Reconocer y utilizar propiedades de los números racionales.
- Resolver problemas, utilizando las operaciones estableciendolas relaciones necesarias entre enteros y racionales en sus distintas representaciones,seleccionando el tipo de cálculo exacto o aproximado que la situación que se planteen, desarrollando la confianza en las propias decisiones y respeto por las ajenas.

- Interpretar los resultados, comprobando su razonabilidad y planteo de nuevos interrogantes.
- Explorar regularidades, argumentar sobre la validez de las fórmulas que dan cuenta de dichas regularidades.
- Modelizar las variaciones lineales expresadas mediante gráficos y/o fórmulas, en situaciones problemáticas de diferentes contextos.
- Recolectar, organizar, procesar e interpretar estadísticamente información y comprender, estimar y usar probabilidades, para la toma de decisiones, en situaciones concretas y sencillas.
- Comunicar las ideas, los conceptos, las propiedades y los procedimientos, utilizando adecuadamente el lenguaje oral – escrita y simbólica, tablas y gráficos.
- Valorar las producciones propias y ajenas con actitud crítica y constructiva, reconociendo aciertos y errores, trabajando cooperativamente aceptando responsabilidades y respetando las normas acordadas, con vistas al desarrollo del razonamiento lógico y científico.
- Reconocer la necesidad del esfuerzo, la perseverancia y la disciplina para el quehacer matemático y para el desarrollo personal y social.

Organización de los Contenidos

En este ciclo finaliza la sistematización de las características del sistema de numeración y se profundiza el trabajo específico con los diferentes conjuntos numéricos y sus operaciones, se pretende una mayor jerarquización de la geometríaen relación con las mediciones y operaciones que con ellas se realizan utilizando tanto enel cálculo como en la geometría las herramientas tecnológicas disponibles, calculadora, software educativos de cálculo (Excel, Geogebra entre otros), y construcciones geométricas, como así también lograr la utilización correcta del álgebra y las funciones en contextos cotidianos que pueden ser modelizados. Por otra parte el reconocimiento de la estadística y probabilidades como metodología en la toma de decisiones, jugará un papel activo en el mundo real.

Alcanzar las metas propuestas para este ciclo equivale a lograr pequeños distanciamientos de los procesos empíricos dándole sentido a la práctica matemática.

Eje: En relación con el Número y las Operaciones

El reconocimiento, interpretación y uso de números racionales (Q), en diferentes situaciones problemáticas y en diversos contextos.

Correspondencia entre fracciones y expresiones decimales exactas o periódicas. Propiedades en Q, discretitud ydensidad.

Uso de razones numéricas en la resolución de problemas de proporcionalidad, densidad, peso específico, entre otros. Cálculo exacto y aproximado. Error absoluto y relativo. Redondeo y truncamiento. Notación científica.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Usar y analizar estrategias de cálculo con números racionales (Q), seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados, evaluando la razonabilidad del resultado e incluyendo su encuadramiento.
- Analizar las operaciones en Q y sus propiedades como extensión de las elaboradas para los números enteros.
- Explorar y enunciar las propiedades de los distintos conjuntos numéricos (discretitud, densidad) estableciendo relaciones de inclusión entre ellos.

Eje: En relación con el Álgebra y las Funciones

Expresiones algebraicas de las propiedades de las operaciones: distributiva, factor común.

Cuadrado de un binomio. Diferencia de cuadrados.

Determinación de conjunto de racionales a partir del lenguaje simbólico: ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas sencillas en Q, en diferentes contextos. Expresiones simbólicas de lasfunciones en situaciones problemáticas de distintos contextos. Construcción e interpretación de las funciones numéricas endistintas representaciones: simbólica, tabla, gráfico cartesiano. Análisis de la variación.

Funciones lineales: Interpretación de los parámetros en una función lineal.

Proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos y representaciones. Distinguir situaciones de proporcionalidad de aquellas que no los son.

Sistemas de funciones lineales en situaciones concretas y numéricas. Resolución analítica (por función lineal) y gráfica.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Explorar regularidades que verifican colecciones de números racionales que cumplen con ciertas características identificando o produciendo la o las fórmulas que dan cuenta de dichas regularidades.
- Argumentar sobre la validez de afirmaciones que incluyan expresiones algebraicas.
- Transformar expresiones algebraicas usando diferentes propiedades al resolver ecuaciones de primer grado.
- Expresar algebraicamente por medio de ecuaciones lineales para ser resueltos.

- Interpretar gráficos y fórmulas que modelicen variaciones lineales y no lineales.
- Modelizar y analizar variaciones lineales expresadas mediante gráficos y/o fórmulas, interpretando sus parámetros (la pendiente como cociente de incrementos y las intersecciones con los ejes).
- Escribir ecuaciones lineales con una o dos variables para el análisisdel conjunto solución.
- Establecerrelaciones entre dos rectas y su intersección, con el conjunto solución de sus correspondientes ecuaciones.

Eje: En relación con la Geometría y la Medida

El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas. Lugar geométrico para justificar construcciones (rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás, circunferencia que pasa por tres puntos, mediatrices y bisectrices, entre otras). Semejanza de figuras: Condición necesaria y suficiente. Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras.

Variación que puede sufrir una figura (triángulos o cuadriláteros) al aplicarle algunas transformaciones isométricas en el plano, recurriendo a sus propiedades y al uso de recursos tecnológicos.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Asociar la noción de lugar geométrico para justificar construcciones (rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás, circunferencia que pasa por tres puntos, entre otras) y resolver problemas geométricos en otros contextos.
- Construir figuras semejantes a partir de diferentes informaciones e identificar las condiciones necesarias y suficientes de semejanza entre triángulos.
- Estudiar las condiciones de aplicación del teorema de Tales e indagar y validar propiedades asociadas.
- Formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con ángulos interiores, bisectrices, diagonales, entre otras) y producir argumentos que permitan validarlas.
- Utilizar la relación pitagórica como propiedad que se verifica para cualquier triángulo rectángulo.
- Explorar las variaciones que puede sufrir una figura (triángulos o cuadriláteros) al aplicarle algunas transformaciones isométricas en el plano, recurriendo a sus propiedades y al uso de recursos tecnológicos.

Eje: En relación con la Probabilidad y la Estadística

La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas.

Organización de datos para estudiar un fenómeno y/o tomar decisiones analizando el proceso de relevamiento de los mismos y los modos de comunicar los resultados obtenidos. Identificación de variables (cualitativas y cuantitativas, discretas y continuas).

Organización de los datos para su agrupamiento en intervalos y construcción de gráficos adecuados a la información a describir. Medidas centrales (media, mediana y modo),interpretación y análisis desus límites para describir la situación en estudio y para la elaboración de inferencias y argumentos para la toma de decisiones.

El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas. Determinación de la frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación real o simulada, y compararla con la probabilidad.

Proponer situaciones problemáticas que requieran:

- Organizar datos para estudiar un fenómeno y/o tomar decisiones analizando el proceso de relevamiento de los mismos y los modos de comunicar los resultados obtenidos, identificando previamente el tipo de variables (cualitativas y cuantitativas, discretas y continuas) para su tratamiento.
- Interpretar el significado de las medidas centrales (media, mediana y modo) en los diversos contextos y analizar sus límites para describir la situación en estudiopara la elaboración de inferencias y argumentos para la toma de decisiones.
- Determinar la frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación real o simulada y compararla con la probabilidad.

Orientaciones Didácticas

La resolución de problemas como *estrategia heurística* será el marco esencial pero no único para el aprendizaje en la construcción de los conocimientos de Matemática en el aula.

Este Diseño, hace hincapié en que es posible el desarrollo de capacidades de razonamiento lógico y formal a través de la acción, formulación y validación de los conocimientos que se puede desarrollar con la resolución de problemas, por medio de ella, los alumnos podrán construir el significado de los distintos conceptos y procedimientos,permitiendo que lo aprendido tenga sentido en diferentes contextos.

En la definición de un problema es necesario considerar tres características esenciales: existe una persona que ha de resolver la actividad (resolutor), existe un punto de partida y una meta alcanzar, y existe un cierto bloqueo o resistencia que no permite acceder a la meta inmediatamente. Por cuanto se resalta el hecho de que lo que resulte un problema para alguno podría no serlo para otros, en este último caso solo sería un ejercicio.

Esta es una propuesta a partir de la cual los docentes, podrán secuenciar los contenidos pertenecientes a los cuatro ejes y estableciendo entre los mismos las relaciones que permitan lograr mayores niveles de abstracción y formalización. Los docentes realizarán la organización que consideren más adecuada de acuerdo con losgrupos de alumnos a su cargo, seleccionando situaciones acorde a los contenidos, al medio socio-cultural, respetando los proyectos institucionales escolares.

Para hablar sobre evaluación es necesario tener en cuenta las condiciones en que se ha generadoel proceso enseñanza y aprendizaje sin dejar de tener en cuenta cada uno de sus componentes e interrelaciones, al decir de Gimeno Sacristán y otros 1993 *"Considerar la evaluación como práctica implica considerar toda la pedagogía que se practica"*

Por otro lado Carreño, 1986 enuncia *"Evaluar el proceso de Enseñanza– Aprendizaje significa ponderar (colectiva e individualmente, total o parcialmente) los resultados obtenidos de la actividad que conjunta a profesores y alumnos en cuanto al logro de los objetivos de la educación"*

Cabe señalar, que es reconocido por todos los especialistas que la evaluación es una práctica compleja puesto que requiere coherencia entre todos los componentes del ámbito escolar, supuestos y fundamentos teóricos de cada docente para llevar a cabo esta tarea.

Evaluar es por lo tanto un proceso de búsqueda de información acerca del objeto realizando descripciones y mediciones, luego la valoración o emisión de juicios sobre la información, en particular en Matemática si consideramos la estrategia de la resolución de problemas será fundamental, poner la mirada en las fortalezas y debilidades como resolutor de problemas, y no solos en la adquisición puntual de algún contenido, utilizando instrumentos tales como: lista de cotejo, rubricas, portafolios y diarios.

Algunas pautas de evaluación que podemos considerar son, el nivel alcanzado por los alumnos en:

- Comprensión y análisis de reconocimiento de los datos, organización de los mismos.
- Aplicación de estrategias adecuadas para la resolución de situaciones problemáticas.
- Aplicación de los elementos matemáticos en el proceso de cálculo: operaciones, propiedades de las operaciones en diversos conjuntos, divisibilidad, entre otros.
- Destreza en la construcción de figuras geométricas.
- Destreza en la utilización de herramientas informáticas.
- Elaboración de fundamentaciones.

Por lo expuesto, es preciso resaltar, que para eléxito en este proceso de enseñanza y aprendizaje será fundamental, propiciar espacios institucionales para alcanzar acuerdos que permitan elaborar proyectos que promuevan acciones, tendientes al logro de los propósitos de esta disciplina y de la Educación Secundaria en la formación del ciudadano.

Bibliografía

- ALONSO, F. BARBERO, C., FUENTES, I. Y otros (Grupo Azarquiel)(1993) - *Ideas y Actividades para la enseñanza del Álgebra*- Editorial Síntesis- Madrid.
- ALSON, P- (1996)-*Métodos de Graficación*, Erro - Caracas .
- APÓSTOL, T. M. -(1965) – *Calculus-Volumen I Introducción con vectores y geometría analítica* - Barcelona , España . ED. Reverté S.A.
- BLOCK, D. (2006) – *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*- Tesis Doctoral del Departamento de Investigaciones Educativa s del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional México.
- BOSCH, M., GASCÓN, J.,(2003) - *25 años de transposición didáctica*- Entrevista en la voz de Galicia 04/04/2003- Velásquez Montalbán, M.
- BOYER, C.- (1986) - *Historia de la Matemática*-. (Versión española de Martínez Pérez, M. Madrid, Alianza Editorial1996).
- BROUSSEAU, G. (1976) - *Epistémologie et Didactique*. *Recherches en Didactique Des Mathématiques*. Vol.10 Nº 23. (Traducción de María Fernanda Espitia Olaya) en Artigue, M. 1990.
- BROUSSEAU, G.(1972) - *Fundamentos y Métodos de da Didáctica de las Matemáticas* (traducción ED por los M.C Villalba – Hernandez 1986).
- BROUSSEAU, G (2000) - El medio en la Teoría de Situaciones, como instrumento de análisis didáctico del artículo “el peso de un recipiente”, (Traducción al castellano de Orús- Bort en su trabajos, R.D.M Vol 9 nº 3).
- CAMUYRANO, M. B. CRIPPA, A., DÉBOLI, y otros(1998).-Matemática. *Temas de su Didáctica* – Prociencia Conicet-Buenos Aires-Argentina.
- CHEVALLARD, Y. ; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (*1997*) – *Estudiar matemática- El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje-Ice- Horsori*.

- COLLETTTE, J. P(*1991) – Historia de la Matemática- Tomo I y II - España, Siglo XXI Editores de España,.*
- DOUADY, R. Y PARZYSZ, B.(1998) - *La geometría en el salón de clases*- Lectura de apoyo 12 Unidad III: Geometría Analítica, traducción de Hernández M, V. y Villalba G, Martha, para fines estrictamnnte académicos, tomado de ICMI Study Perspectives on the Teaching of Geometry for 21th Century. Capítulo 5 PP159-192(Eit) Mammana, C y Villani, V., Kluwer Academis Publishers.
- FABRA LASALVIA, M DEULOOFEU PIQUET, JORDI(2000) - *Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos*-Trabajo de investigación presentado en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática
  Educativa, julio, año/vol 3, número 002, Comité Latinoamericano de
  Matemática Educativa, Distrito Federal, México pp.207-230
- GODINO, J.D., RODRÍGUEZ WILHELMI, M., BENCOMO, D.(2002)- *Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática: Aplicaciones a una experiencia de enseñanza de la noción de función*. Trabajo de Investigación en el marco de los proyectos: MCYT-BSO2002-02452, Resolución nº 1.109/2003 de 13 octubre de la UPNA y MCYT-HA 2002-0069.
- GODINO, J, BATANERO; C. ROA, R (2002)– *Medida de Magnitudes y su didáctica para maestros*. Matemática y su didáctica para maestros. Manual para el Estudiante – Proyecto Edumat – Maestro.
- GUELMAN, N.;ITZCOVICH, H; PAVESI, L; RUDY, M. (1998)- *El libro de la Matemática 8* - Buenos Aires, Argentina , ED. Estrada.
- LACASTA ZABALZA, E y PASCUAL BONIS, J. R (1998) – *Las funciones en los gráficos Cartesianos* - España ; Madrid, - ED.Síntesis.
- LACASTA ZABALZA, E. Y RODRÍGUEZ WILHELMI, M. (2002) -El gráfico cartesiano de funciones como “medio” material: El paso de la representación gráfica a la analítica, con especial interés en el problema de las escalas, trabajo de Investigación -
- MORA, M. L. , FORTUNY AYNEMI, J. M. (1990)– *Proporcionalidad Directa, la forma y el número*, Madrid, España, ED. Síntesis.
- PARRA, C., SADOVSKY, P. SAIZ , I. (2002) *Enseñanza de la Matemática,*
  Selección bibliográfica II del Programa de Transformación de la Formación Docente, 1993.
- POCHULU, M, RODRIGUEZ, M. (2012)– *Educación Matemática – Aportes a la Formación docente desde distintos enfoques teóricos*- Editorial Universitaria de Villa María.

- REY PASTOR, J. BABINI, J. (1977)– *Historia de la Matemática* – Vol. II ED. Barcelona, España,Gedisa S. A.
- SIERPINSKA, A y LERMAN, S (1996) - *Epistemologies of mathematics and of mathematics education.* En A. J. Bishop et al (eds) International Handbook of mathematics education (PP.827-876) Dordrcht HL Kluwer, A.P. (Traducción Parcial, Juan D. Godino).
- SADOVSKY, P. (2005) – *Enseñar Matemática Hoy*- Buenos Aires, Argentina,ED. Libros del Zorzal.
- SESSA, C.(2005) -*Iniciación al estudio didáctico del Algebra*. Buenos Aires, Argentina,ED. Libros del Zorzal,.
- STRUIK, D. J – *La matemática sus orígenes y su desarrollo*- ED. Siglo Veinte. Buenos Aires. (Traducción del inglés de MIRANDA, Renato)

•

ANEXO II: Copia del Artículo de Investigación

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Eva Cid
Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Resumen

En esta ponencia se comentan algunos aspectos de un trabajo en fase de realizacion.El objetivo del mismo es utilizar la noción de obstáculo epistemológico definida en el marco de la teoría de situaciones didacticas para terciar y, en la medida de lo posible, zanjar la polémica sobre la existencia de obstáculos en la historia de los números negativos y su influencia en la enseñanza actual, polémica surgida hace ya años pero que sigue sin resolverse. En la ponencia se presentan algunos aspectos del estado de la cuestión y ciertas aportaciones al tema.

1.La noción de obstáculo epistemológico

La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard, 1938), fue retomada por Brousseau en 1976 y redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas.

En dicha teoría se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación.El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de resolución. La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha nocion está implicada.

Ahora bien, en la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones en las que ésta interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas, un subconjunto de situaciones.Y esa elección puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos referentes a la noción matemática que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones y para determinados valores de sus variables didácticas, pero que no son eficaces e, incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones o al modificar las variables didácticas de situaciones consideradas. Una concepcion tiene, por tanto, un campo de problemas en el que funciona y otro campo de problemas en el que no permite resolver o, al menos, dificulta la resolución. De manera que la ampliación del campo de problemas va a obligar a la concepción a evolucionar, modificando alguno de sus aspectos, para adaptarse a las nuevas situaciones.

Pero, dentro de esta perspectiva y desde un punto de vista teórico, pueden plantearse otras alternativas a la evolución de concepciones. Por ejemplo, podría darse el caso de que, acerca de una misma noción matemática y en un mismo sujeto, aparecieran dos concep- ciones contradictorias ligadas a dos subconjuntos de situaciones diferentes, lo que, tarde o temprano, obligaría al sujeto a integrar las dos concepciones limando los aspectos contra- dictorios o a rechazar una de ellas. También podríamos encontrarnos con una concepcion a la que ya no fuera posible hacer evolucionar para que asumiera nuevos campos de pro- blemas, en cuyo caso no quedaría más alternativa que el rechazo de la concepción y su sustitucion por otra.

En estos casos, en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitucion de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente de hacerla evolucionar lo menos posible, se dice que la concepción es un obstaculo.Y esa concepción obstaculo se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce errores que no seran fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes.

Brousseau expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstaculo en diferentes artículos (1980, 1981, 1983, 1988, 1989a, 1989b). Entre ellas figura una clasifi- cación de los obstáculos atendiendo a que su origen se situe en uno u otro de los polos del sistema didactico-alumno, profesor y saber- o en la sociedad en general, lo que le permite distinguir entre obstáculo ontogenético, didactico, epistemológico o cultural. En particular, califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matematicos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo.En este caso, el rechazo explícito del obstaculo forma parte del saber matematico actual.

Por otro lado, Duroux (1982) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstaculo a una concepcion. Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau, es la siguiente:

a)Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta deconocimiento.

b)Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.

c)Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Unarespuesta correcta y uni- versal exigeunpunto de vista notablemente diferente.

d)Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

e)Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brousseau, 1989a, p. 43)

Como podemos ver, en la teoría de situaciones la nocion de obstaculo epistemológico queda englobada en una categoría más amplia, la de obstaculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Ademas, la definición de obstaculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber trasmitido. Esto induce a extender el concepto de concepción utilizandolo también como significante del estado de conocimiento propio de los matemáticos de otras épocas.

Aparece así el término ‘concepción historica’ para referirse a la concepcion que determinado matemático de otra época ha podido tener de una cierta noción matemática, siempre que esa concepción sea relevante, es decir, que represente la forma de pensar de una parte significativa de la comunidad de matemáticos de su tiempo. La determinación de estas concepciones históricas se hace a partir de la lectura de la obra escrita del matemático considerado.

2. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: la aportación de Glaeser

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos aparece en un artículo de Glaeser publicado en 1981. En él, el autor manifiesta su intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprension y aprendizaje de los números negativos.Para ello, y haciéndose eco de la “sorprendente lentitud” del proceso histórico de construccion del concepto de número negativo[1], busca los vestigios de esos obstáculos en el pasado, analizando, mediante una técnica de comentario de textos, lo que los matemáticos de distintas épocas[2] dijeron sobre dichos números.

---

[1] La lectura de los textos citados por Glaeser muestra que desde la primera formulación de la regla de los signos, hecha por Diofanto, hasta mediados del siglo XIX, se utilizan de continuo unos entes, los ahora llamados números negativos, que eran necesarios en muchas ramas de las matemáticas (álgebra, análisis, geometría analítica, trigonometría, etc.), pero que la comunidad matemática no sabía como encajar dentro de su cuerpo teórico. Los números negativos se usaban con profusión y sin dificultad, pero uando los grandes matemáticos se veían obligados a dar explicaciones sobre su naturaleza, lo hacían en unos términos difícilmente concebibles hoy en día.

[2] Se citan textos de:Diofanto, Stevin, Descartes, Mc Laurin, Clairaut, Euler, Cramer, D’alembert, Carnot, Laplace, Cauchy y Hankel.

Ahora bien, aun cuando Glaeser empieza su artículo refiriéndose a la noción de obstaculo en Bachelard y Brousseau, enseguida aclara que considera prematuro precisar demasiado el término ‘obstaculo’ y que lo utiliza con un sentido amplio, equiparándolo a ‘dificultad’, ‘umbral’, ‘síntoma’, etc.En estas condiciones, el autor considera que en la evolucion historica de la nocion de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstaculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.* Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enun- ciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.* En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D’Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las “ven” y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

- *Dificultad para unificar la recta real.* En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D’Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: “lo negativo” neutralizaba, se oponía a “lo positivo”, pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto.Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

- *La ambigüedad de los dos ceros.*Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matematicos (Stevin McLaurin, D’Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran “menos que nada”[3]

- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.*La superacion de los obstaculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. El problemade justificar la regla de los signos lo resolvi´ó definitvamente hankel en 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de R^+ a Rrespetando un principio de permanencia que conservara determinadas “buenas propiedades” de la estructura dalgebraica de los reales positivos. Esto, a juicio de Glaeser, supone un cambio total de perspectiva en la resolución del problmea

[3] Hay que tener en cuenta, como muy bien señala Glaeser (1981, p.239), que el establecimiento de las escalas de temperatura Celsius o Réaumur, uno de los hechos que pudo contribuir a la aceptación de un cero origen y de cantidades por debajo de cero, fue bastante tardío. Réaumur realizó susprimeros termómetros en 1730 y Celsius en 1742,perotardaron casiunsiglo en popularizarse.

Ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que "expliquen" los números enteros de un modo metafórico.Estos números ya no son *descubiertos*, sino *inven- tados*, *imaginados*. (Glaeser, 1981, p. 337)

Se trata, por el contrario, de una justificación puramente formal basada en necesidades internas de las matemáticas.

Al hecho de creer que una noción matemática debe tener un referente en el mundo físico que le dé sentido y a partir del cual se puedan justificar sus propiedades, es a lo que Glaeser parece llamar "estadio de las operaciones concretas". Esta creencia se relaciona, según el autor, con una corriente ideológica muy amplia que se inicia en los *Elementos* de Euclides e impregna todo el pensamiento matematico hasta fines del siglo XIX.Se caracteriza por suponer que los objetos matematicos son objetos del mundo físico que han sido suficientemente idealizados para poder insertarlos en un discurso hipotético-deductivo, lo cual permite que allí donde ese razonamiento deductivo no alcanza, pueda recurrirse al "pensamiento natural", el "sentido común" o la "intuición" como medio de justificacion del discurso matemático. Pero esta forma de entender las matemáticas, que posee indudables ventajas, también tiene serios inconvenientes, como el que se plantea cuando a través del razonamiento deductivo se demuestran propiedades que repugnan a la "razón natural". Glaeser atribuye a matemáticos como Stevin, Euler, D'Alembert, Carnot y Laplace este tipo de ideología, mientras que la postura de Hankel representa la superación del obstaculo.

- *Deseo de un modelo unificador.*Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura adi- tiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos. Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstaculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la enseñanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, solo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa. También aquí la obra de Hankel ha supuesto la superación del obstáculo al rechazar la búsqueda de un modelo explicativo de los enteros.

Glaeser concluye diciendo que sería necesario realizar experiencias con los alumnos para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio historico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales.Añade también que su investigacion pone de manifiesto que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstaculo para la comprensión de su estructura multiplicativa.

3.Obstáculos epistemológicos en los números negativos: otras aportaciones

Son varios los autores que, a raíz del trabajo de Glaeser, discuten el tema de los obstaculos epistemológicos en los números negativos.Entre ellos, Duroux (1982) hace hin- capié en que la definición de obstaculo epistemológico propuesta por Brousseau exige que el obstáculo sea un conocimiento, no una falta de conocimiento.Teniendoesto en cuenta, Durouxconsidera que los dos primerosobstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser la “falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas” y la “dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas”, no debieran ser considerados como tales pues sólo indican un déficit de conocimiento.

Sin embargo, la “dificultad para unificar la recta real”, puede ser, según Duroux, un síntoma de una posible concepción obstaculo caracterizada por considerar a los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos.Añade, ademas, que la concepción del número como expresión de la medida de una cantidad de magnitud, concepción trasmitida por la enseñanza elemental, puede estar en la base de la diferente consideracion de positivos y negativos, dado que entonces el número negativo sólo puede interpretarse como una medida “a la inversa”, como un objeto compuesto de dos partes:el signo − y una medida mientras que el positivo representa, sin más, una medida.Esto puede llevarnos a interpretar los números enteros negativos como algo radicalmente distinto de los números naturales y no como su prolongación.

Brousseau (1983) argumenta en la misma línea que Duroux, insistiendo en que hay que distinguir entre un “obstáculo” y una “dificultad”, sugiriendo que lo que propone Glaeser son “dificultades” que pueden servir como punto de partida para la búsqueda de los verdaderos “obstaculos”:

> Muy a menudo, es entre las “dificultades” donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un obstáculo es un cono- cimiento, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la “dificultad” que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto. . .). (Brousseau, 1983, p. 190)

Pero ademas es necesario establecer, no sólo los errores, dificultades y resistencias que ese obstáculo produce, sino también el dominio donde se revela eficaz:

> Y hay que hacer notar que no basta con identificar las dificultades y los fracasos del conocimiento-obstáculo, sino también, y sobre todo, sus éxitos. (Brousseau, 1983, p. 192)

En el intento de encontrar el obstáculo u obstaculosque puedanestardetrás de esas dificultades, Brousseau(1983, p. 191) hace la hipótesis de que el empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de “positivo”o “negativo” a las medidasde las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación. Porejemplo,dependiendo delasituación, laentrada ysalidadeproductos enunco- mercio puede notarsepositivao negativamente. Esos números, considerados aisladamente son números sin signo, puesto que representan medidas de magnitudes; el signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción. Así pues, el caracter “relativo” de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptacion y suponer un obstaculo a una concepcion que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

También retomala propuesta de Duroux,respecto a que la concepción de los números negativoscomo objetosde naturaleza distinta a los positivospudoser un obstáculoa la homogeneización de los dos tipos de números y su inclusionenuna únicaclase:lade los enteros,peroadviertede que,tanto la“relatividad de positivosy negativos”como “la diferente naturaleza de los negativos respecto a los naturales”, son sólo candidatos a obstaculo y que su aceptacion como tales exige probar la resistencia de esas concepciones a evolucionar y los errores repetidos que produjeron. Brousseau piensa que en el intento de probar el carácter de obstáculo de estas concepciones es muy probable que se haga evidente la existencia de un obstaculo todavía más antiguo: “la concepcion del número como medida”, es decir, la idea de que un objeto matemático sólo puede recibir la consideración de número si representa o puede representar la medida de una cantidad de magnitud.

Schubring (1986, 1988) realiza un trabajo parecido al de Glaeser, pero analizando, sobre todo, textos escritos por matemáticos alemanes.A la hora de explicar la difícil emergencia del número negativo, recurre también al término ‘obstaculo’, pero con un sentido distinto al usado por los autores anteriores. Así dice (1986, pp. 22-24) que las principales causas de impugnacion de los números negativos como objeto plenamente matemático pertenecen a tres grandes categorías:

- *Obstaculos internos a las matemáticas.* Dentro de esta categoría señala la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número.Historicamente, el concepto básico de las matemáticas ha sido el de cantidad, pero, hoy en día, ese término ha dejado de representar una noción matemática precisa, siendo sustituido por el de número. A juicio de Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciacion entre número, cantidad y magnitud que revela la lectura de textos matemáticos franceses.Según él, se trata de un fenómeno localizado que no puede extenderse a otros países como, por ejemplo, Alemania, donde un desarrollo temprano del concepto de número, separado de los de cantidad y magnitud, evitó parte de las dificultades observadas en el país vecino.

- *Obstaculos epistemológicos.* Considera como tales, los que se refieren a:

> Las epistemologías subyacentes a la trasmisión del saber científico a la sociedad en general. Por “epistemología” se puede entender las concepciones sobre las condiciones de “existencia” de las entidades matemáticas. Estas epistemologías se presentan con la siguiente alternativa:
>
> - una epistemología sustancialista (u ontológica), según la cual los conceptos se justifican por educción a unos entes a los que se concede una existencia semejante a la del mundo físico;
>
> - una epistemología sistémica, donde la existencia está justificada por la coherencia del campo conceptual y los conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas. (Schubring, 1986, p. 23)

En opinión del autor, la opción por una u otra de estas alternativas puede ser responsable de alguna de las rupturas descritas en el ámbito de los números negativos.Se observa aquí una cierta coincidencia entre Schubring y Glaeser respecto a un posible obstáculo, aun cuando le dan nombres distintos: el primero le adjudica el término genérico de ‘obstaculo epistemológico’, mientras que el segundo le llama ‘estancamiento en el periodo de las operaciones concretas’.

-*Arquitectura de las matemáticas.*Se refiere con esto a una tercera categoría de obstaculos que tienen que ver con la importancia que en cada época se ha concedido a las distintas ramas de las matemáticas, en particular, al álgebra y a la geometría. El hecho de que las dos tenganigualimportancia favorece a nociones,como la de cantidad, integradorasde los dos ámbitos, lo que perjudicael proceso de diferenciación entrenúmero y cantidad; si se considera a la geometría como la ramamás importante de las matemáticas, la cantidad se convierteen la nociónbasicade las matemáticasy la de númeroes una nocionsubsidiaria; porúltimo,si es el álgebrala disciplinafundamental y la geometría uncampode aplicacióndel álgebra,se tieneentoncesla concepciónque sostuvoel pro- ceso llamadode ‘aritmetización de las matemáticas’ con el número como noción básica. Schubring considera que muchas rupturas conceptuales pueden explicarse en términos de concepciones sobre la arquitectura de las matemáticas.

Es evidente que la concepcion de obstaculo que maneja Schubring está muy alejada de la propuesta de Brousseau.Pareceque entiendepor obstáculosciertosconocimientos meta-matemáticos que son, según él, las causas últimasdelasrupturas observadas en el procesode evolucióndel estatuto matemáticode ciertasnociones;rupturas que,por otra parte, queda sin definir en qué consisten y cómo se reconocen. Únicamente enla primeracategoría de obstaculosque propone,los “obstáculos internos”, hace referenciaa conocimientospropiamente matemáticos y no de epistemología de las matemáticas, pero enseguida añade que esta categoría no parece habersido la causa principalde las rupturas e, incluso, parece habercontribuido al lento progreso del estatuto matemático del número negativo,dejandoen manos de las otrasdos categorias:los “obstáculos epistemológicos” y la “arquitectura de las matematicas”, la responsabilidad de las tales rupturas.

Por otro lado, Brousseau califica de “epistemológicos” a los obstáculos encontrados en la enseñanza de las matemáticas si se constata que en alguna época histórica la co- munidad matematica tuvo que franquear ese mismo obstaculo y las huellas de ese hecho pueden encontrarse en el discurso matemático actual.Sin embargo, Schubring utiliza dicho calificativo para referirse, como ya hemos dicho, a ciertas concepciones filosóficas sobre las condiciones de existencia de los objetos matemáticos que, a su juicio, impregnan los procesos de transmisión del saber matemático a la sociedad.

Todo esto nos permite constatar que la discusion sobre los obstaculos epistemológicos en los números negativos tiene una dimension mas profunda:la discrepancia sobre la naturaleza y utilidad de la noción de obstaculo epistemológico en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.

4.Resumen del estado de la cuestión

Aun cuando la polémica de la que hemos dado cuenta en los apartados anteriores se produjo hace ya bastantes años, no ha habido desde entonces ninguna contribución importante al tema.De hecho, la situación en el momento actual podría resumirse en los siguientes términos:

1) La noción de obstáculo epistemológico ha seguido recibiendo interpretaciones diversas y, en general, bastante alejadas del sentido inicial definido por Brousseau (Sierpinska, 1989; Artigue, 1990; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), mientras que en otros casos se ha sustituido por nociones consideradas más apropiadas (Léonard y Sackur, 1990). Sin embargo,el obstáculo epistemológico talcomo lo concibe Brousseauno ha sido contrastado

experimentalmente -la mayor parte de los investigadores que lo han utilizado lo han hecho dandole un significado distinto del propuesto por él-, ni tampoco se han hecho objeciones que justifiquen su abandono o sustitución por otro concepto.

2) La propuesta de Glaeser sobre posibles obstáculos en la historia de los números negativos a tener en cuenta en la enseñanza actual, al margen de las críticas ya comentadas, no ha vuelto a discutirse.Los trabajos posteriores sobre epistemología del número negativo, o bien no se expresan en términos de obstáculos, o bien hacen una utilización ambigua el término en la que caben sinónimos como 'dificultad', 'ruptura', etc., o bien repiten con pequeñas matizaciones lo ya dicho por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring, pero sin aportar pruebas que justifiquen su postura. Por consiguiente, en estos momentos no hay acuerdo sobre la existencia o no de obstaculos en la historia de los números negativos, ni sobre cuáles son éstos, supuesto que existan.

3) La determinacion de obstaculos en la historia de las matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su pervivencia en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos actuales.Un obstáculo epistemológico es, ante todo, una concepción detectable en un número significativo de alumnos que puede ser puesta en relación con ciertas concepciones históricas. Sin embargo, no existen apenas investigaciones que relacionen las concepciones de los alumnos sobre los números negativos con las investigaciones sobre obstáculos en la historia de dichos números. Es más, de hecho apenas existen investigaciones sobre errores de los alumnos que se analicen en términos de concepciones. La mayor parte de los cuestionarios pasados a los alumnos se limitan a aspectos muy puntuales y no permiten relacionar entre sí los errores relativos a diferentes aspectos del número negativo.

Únicamente Coquin-Viennot (1985) e Iriarte et al. (1991) analizan los errores de los alumnos en términos de obstaculos: la primera usando el concepto propuesto por Brousseau y las segundas dandole un sentido parecido al de Glaeser. Pero sus deducciones no han sido confirmadas ni rechazadas por ninguna investigación posterior.Otros investigadores como Peled (1991) o Gallardo (1996) intentan también encontrar una coherencia en los errores de los alumnos que los acerca a la búsqueda de concepciones, pero sin tener en cuenta la posibilidad de los obstáculos.

4) Las conclusiones que se desprenden de los estudios sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos hacen sospechar que una introducción de los mismos o, más en particular, de los números enteros, por medio de modelos concretos[4], que es la opcion mas elegida hoy en día, puede resultar poco conveniente.Para empezar, no sólo es evidente que, aun cuando dichos modelos justifican bastante satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto, sino que hay que afrontar la posibilidad, comentada entre otros, por Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985) y Gobin et al. (1996), de que dichos

[4] Son muchos los modelos concretos que se utilizan o se proponen en la enseñanza de los números enteros (deudas y haberes, temperaturas, fichas de dos colores, móviles que recorren un camino, etc.). Básicamente, pueden clasificarse endostipos: modelos deneutralización enlos quedosnúmeros enteros opuestos representan fuerzas que se neutralizan y modelos de desplazamiento en los que los números enteros representan desplazamientos a lo largode uncamino, en unou otrosentido.

modelos sean incluso un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa de los números enteros.

Por otro lado, la hipótesis de que varios de los obstáculos definidos por Glaeser son manifestaciones de un obstaculo más general:el de la concepción del “número como medida”, hipótesis formulada por Duroux (1982) y Brousseau (1983) y asumida, posterior- mente, por otros varios autores (Coquin-Viennot, 1985; Schubring, 1986; Iriarte et al.,

1991, entre otros), plantea también dudas sobre si la utilización de modelos concretos está en consonancia con el tratamiento didáctico que debe recibir un obstáculo. Sin embargo, la posibilidad de que los modelos concretos resulten ser un obstáculo didáctico o contribuyan a reforzar un obstáculo epistemológico tampoco ha sido estudiada en profundidad y, desde luego, la bibliografía que se dedica a buscar y proponer esos modelos concretos, se olvida o desconoce dicha posibilidad.

Una vez hecho el resumen del estado de la cuestión, podemos pasar, sin más dilacion, a exponer los objetivos de nuestro trabajo. Son los siguientes:

- Investigar los obstáculos en la historia de los números negativos utilizando para ello el concepto de obstáculo epistemológico que propone Brousseau.
- Constatar si dichos obstaculos historicos perviven en los alumnos actuales.
- Analizar en qué medida afectaría la existencia de obstáculos epistemológicos a las prácticas habituales de enseñanza del número negativo y a las nuevas propuestas didácticas.
- Verificar si el uso del concepto de obstáculo epistemológico que propone Brousseau nos lleva a obtener resultados que por otras vías no se han conseguido, lo que, de paso, nos permitiría decidir si dicho concepto resulta útil en la investigación didáctica.
- Profundizar en las condiciones históricas que hicieron necesaria la aparición y posterior evolucion de los números negativos, información que consideramos relevante de cara al diseño de posibles génesis escolares de la noción.

5.Algunas aportaciones al tema

Entre las aportaciones que, hasta el momento, creemos haber hecho al tema de los obstaculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, podemos citar las siguientes:

1) Sobre la metodología precisa para determinar obstáculos en la historia de las matematicas

El concepto de obstaculo epistemológico propuesto por Brousseau requiere ciertas adaptaciones para poder ser utilizado en la historia de las matemáticas. De entrada, un obstaculo es una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos y saberes que lleva a un individuo a dar respuestas válidas en un cierto campo de problemas, pero falsas o poco adecuadas en otro.Esta formulación permite distinguir concepciones en los alumnos por medio de cuestionarios que ponen de manifiesto los errores que cometen y las dependencias que se establecen entre ellos. Sin embargo,las concepciones de los matemáticos del pasado sólo pueden determinarse estudiando sus obras, y en ellas, como consecuencia del fenómeno de la transposicion didáctica, apenas quedan huellas de los errores, vacilaciones, dificultades o fracasos propios del proceso de creación matemática.

Así pues, la detección de errores no puede constituirse en el eje alrededor del cual se establezcan las concepciones históricas, sino que habrá que buscar los indicios que nos permitan deducir las dificultades o fracasos que no suelen evidenciarse en los textos históricos. Uno de estos indicios es el campo de problemas que aborda la obra matematica considerada y las técnicas que utiliza para resolverlos. Los límites de ese campo y las características de las técnicasempleadaspuedenindicarzonas de dificultad, zonas dondela concepciónno es eficaz, lo que nos ayudará a definirla.

Ahora bien, un obstáculo es además una concepción que se resiste a evolucionar o a ser sustituida por otra, incluso cuando se hace patente su fracaso. Establecer el carácter de obstaculo de una concepcion historica exige algo más que comprobar su eficacia o ineficacia en un cierto campo de problemas, exige comprobar que, a pesar de las repetidas dificultades que producía, la comunidad matemática se resistió por largo tiempo a abandonarla. Y en este punto hay que tener en cuenta varios aspectos:

- El hecho de que un determinado campo de problemas no se aborde puede deberse, bien a que los matemáticos de la época considerada lo han intentado, pero su concepción no les permite afrontar con éxito su resolucion, o bien a que ese campo de problemas no forma parte de las preocupaciones matematicas de dicha época.Hay que distinguir estos dos casos porque en el primero nos podríamos encontrar ante una concepcion obstaculo, mientras que en el segundo caso es más dudoso.

- La distincion entre conocimiento y saber. Cuando se estudian las obras matemáticas nos encontramos con que determinados conocimientos están en la base de algunas de las técnicas usadas para resolver los problemas, pero no se explicitan, no se tratan como un saber.La existencia de conocimientos que "se usan" pero de los que "no se habla", puede indicar que la concepción tiene dificultades para integrar conocimientos necesarios para resolver nuevos campos de problemas, lo que es un sintoma de obstaculo.

- Otra idea importante para caracterizar obstáculos en la historia de las matemáticas la aporta Gascon (1993) cuando propone que un obstáculo epistemológico debe buscarse en los orígenes de una bifurcación, entendiendo por tal un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, tanto en lo referente a sus técnicas como al campo de problemas que aborda. De esta manera liga y, por consiguiente, limita la existencia de obstáculos epistemológicos a los momentos de ruptura producidos en la evolución historica de las matemáticas.

Por consiguiente, a la hora de caracterizar las concepciones históricas hemos tenido en cuenta las siguientes variables:campo de problemas, objetos de referencia, conocimientos, saberes, límites de la concepción y relacion de la misma con las matemáticas de su época y de épocas anteriores y posteriores.

2) Sobre los obstaculos en la historia de los números negativos

En primer lugar, hay que decir que, hasta ahora, las aportaciones epistemológicas al tema se han hecho desde el punto de vista de estudiar la "historia de los números negativos". SolamenteBrousseau(1983) y Lizcano (1993) hablande algo que nos parece fundamental:

no se puede interpretar la historia de las nociones matemáticas en términos de una sucesión de estados intermedios, defectuosos o incompletos, respecto a un ideal que se alcanza en nuestra época. La conflictiva emergencia de los números negativos pone de manifiesto la existencia histórica de diferentes formas de negatividad matemática que, ni fueron, en su momento, entendidas como números, ni pueden interpretarse como un proceso continuo que desemboca, inevitablemente, en el número negativo actual.Esto nos lleva a utilizar, siguiendo a Lizcano, los términos ‘negatividad’ o ‘formas de negatividad’ para indicar lo que habitualmente se consideran antecedentes historicos del número negativo.

Por tanto, nosotros no hablamos de concepciones históricas de los ‘números negativos’ sino de concepciones históricas de la ‘negatividad matemática’, sin establecer a priori una identificación entre las formas de negatividad que esas concepciones revelan y los números negativos actuales.Esta precaución nos ha permitido darnos cuenta de que esos “antecedentes” no lo son sólo del número negativo, sino también de otras varias nociones de las matemáticas actuales:traslaciones, vectores, recta real, segmentos orientados, etc.

El estudiode diferentesconcepciones historicassobre la negatividad[5]pone de mani- fiesto, a nuestrojuicio, la existenciade dos concepciones obstaculo:la primera, aparecida en la matemática griega clásica, se organizaalrededorde la diferencia entrecantidades en- tendida como operacion de “sustraer de lo que previamente existe”; la segunda se establece definitivamente en el siglo XVII, cuando se asume una interpretación de la diferencia entre cantidades en términos de variaciono diferencia orientada o relativa.

Los objetos de referencia de la primera concepción obstaculo son, por una parte, los números naturales y las razones de números naturales, entendidos ambos como medidas absolutas de cantidades de magnitud, es decir, medidas en las que el cero representa la ausencia de cantidad de magnitud y, por otra, la diferencia de números naturales o de sus razones con minuendo mayor o igual que el sustraendo, entendida como “sustracción”. El campo de problemas qu aborda es el de los problemas aritméticos en Q^+ o R^+, resueltos con técnicas algebraicas en las que intervienen operaciones con diferencias o con sumandos y sustraendos. No se asume la existencia de una diferencia con minuendo menor que el sustraendo, ni la existencia de un sustraendo aislado y el álgebra está subordinada a la aritmética y es simplemente una herramienta de resolución de los problemas aritméticos.

Enla segundaconcepción obstaculolos objetosde referenciason,porunlado,los números con signo entendidos como medidas relativasde cantidades de magnitud -medidas referidasa unaciertacantidad de magnitud tomada como origen a la que se adjudicala medidacero-, o entendidos como medidasorientadas -medidas a las que se añade un signo quereflejaunaciertacualidadbivalentede la magnitud-; porotrolado,las diferencias de números positivoscon minuendomayor,menoro igual que el sustraendo, entendidas comovariacioneso “diferencias” orientadas. Esta concepcion permite “dar sentido” y, en consecuencia, aceptar las soluciones negativas de las ecuaciones, lo que autoriza el desarrollo de la teoría de las ecuaciones algebraicas, pero no justifica la estructura ordinal ni multiplicativa de R.

[5] Concretamente se estudian las queaparecen en la *Arithmetica* de Diofanto (sigloIII d.C.), los *Nueve ~~Capítulos del Arte Matemático~~* ~~de~~ Liu Hui (siglo III d.C.), el *Triparty en la science des nombres* de Chuquet (1484), el *Treatise of Algebra* de McLaurin (1748)y *A treatise onAlgebra* de Peacock (1830).

3) Sobre la necesidad de tener en cuenta los obstáculos historicos en la enseñanza de los números negativos

Los modelos concretos que se utilizan para introducir el número entero funcionan como metáforas o analogías: se supone que el modelo "se parece" al número entero y, como consecuencia, las reglas de funcionamiento del modelo, supuestamente familiares al alumno, pueden extenderse al sistema de los números enteros[6]. Ahora bien, los objetos que componen esos modelos concretos, o bien son magnitudes orientadas o relativas que se neutralizan, o bien son desplazamientos o posiciones en uno u otro sentido de recorrido. Por consiguiente, las propuestas de enseñanza de los números negativos basadas en modelos concretos, aun cuando pueden ser adecuadas para franquear el primer obstáculo episte- mológico, refuerzan a cambio el segundo obstáculo epistemológico, precisamente, aquel que fue necesario superar para construir el concepto actual de número negativo.

Pero ademas, historicamente la negatividad surge en el contexto del álgebra y son las necesidades del cálculo algebraico las que determinan las reglas de manejo de los números con signo. De manera que en las distintas concepciones historicas sobre la negatividad no son los aspectos semánticos los que determinan la sintaxis de dichos números con signo, sino las exigencias de las técnicas de cálculo algebraico.Sin embargo, en la enseñanza actual los números enteros se introducen en un contexto aritmético, tanto en las situaciones que presenta como en las técnicas que utiliza para resolverlas, contexto en el que no son necesarios como estrategia de resolución. En consecuencia, el establecimiento de sus reglas de cálculo queda totalmente a merced del modelo concreto que se utilice para introducirlos, y este tratamiento didáctico contribuye todavía más a agravar el obstaculo epistemológico.

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1990), 'Epistémologie et didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241-286.

BACHELARD, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophi- que J. Vrin, París, 1986.

BROUSSEAU, G.(1980), 'Problèmes de l'enseignement des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.

BROUSSEAU, G.(1981), 'Problèmes de didactique des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 37-127.

BROUSSEAU, G. (1983), 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathé- matiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

BROUSSEAU, G. (1988), 'Les obstacles épistémologiques dans la conception des de- cimaux', *manuscrito*.

[6] Esta forma de entender la relación entre unsistema y su modelo en términos de "parecido", es decir, el modelo "representa" o es "una imagen" del sistema que modeliza, ha sido descrita por Chevallard (1992) quienla designa conel término de 'ilusión representacionalista'.

BROUSSEAU, G. (1989a), 'Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs.Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.

BROUSSEAU, G. (1989b), 'Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique'.En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 277-285.

CHEVALLARD, Y. (1992), 'Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J.(1997), *Estudiar matematicas.El eslabon perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori, Barcelona.

COQUIN-VIENNOT, D. (1985), 'Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hierarchie de conceptions a propos des relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(2/3), 133-192.

DUROUX, A. (1982), *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*, memoria de DEA, Publications de l'IREM, Burdeos.

GALLARDO, A. (1996), 'Qualitative analysis in the study of negative numbers', *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, vol. 2, 377-384.

GASCON, J. (1993), 'Desarrollo del conocimiento matemático y analisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), pp. 295-332.

GLAESER, G. (1981), 'Epistémologie des nombres relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

GOBIN, C. et al. (Groupe 1er cycle) (1996), *Les nombres relatifs au collège*, IREM de Poitiers.

IRIARTE, M.D., JIMENO, M. y VARGAS-MACHUCA, I. (1991), 'Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros', *Suma*, 7, 13-18.

LÉONARD, F. y SACKUR, C. (1990), 'Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 205-240.

LIZCANO, E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática*, Editorial Gedisa, Barcelona.

PELED, I.(1991), 'Levels of knowledge about signed numbers:effects of age and ability', *Proceedings of the 15th International Conference of PME*, Assisi (Italia), 145-152.

SCHUBRING, G. (1986), 'Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs', *Petit x*, 12, 5-32.

SCHUBRING, G.(1988), 'Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et francais de mathématiques entre 1795 et 1845'. En C. Laborde(ed.),*Actesdu premierColloque Franco-allemand de*

Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble,
137-145.

SIERPINSKA, A. (1989), 'Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle
épistémologique'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs.Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 130-147.

ANEXO III: Copia del Libro de Texto

Capítulo 2

Ecuaciones, sistemas e inecuaciones

- Lenguaje coloquial y simbólico.
- Ecuaciones con números enteros.
- Conjunto solución de una ecuación.
- Ecuaciones con potencias y raíces.
- Sistemas de ecuaciones.
- Inecuaciones con números enteros.

Lenguaje coloquial y simbólico

Teoría

El **lenguaje coloquial** es el que se utiliza cotidianamente y está compuesto por palabras.
El **lenguaje simbólico** es el utilizado por la Matemática para expresar propiedades o fórmulas y está compuesto por números, letras, operaciones, relaciones, conectivos, etc.

Lenguaje simbólico		Lenguaje coloquial
$8 > 5$	$\leftrightarrow$	Ocho es mayor que cinco.
$9 - 7 = 2$	$\leftrightarrow$	La diferencia entre nueve y siete es dos.
$20 : 4 = 5$	$\leftrightarrow$	El cociente entre veinte y cuatro es cinco.
$3^2 = 9$	$\leftrightarrow$	El cuadrado de tres es nueve.

En el lenguaje simbólico, las letras representan números en general.
a) La suma de dos números es trece: $a + b = 13$
b) El producto de dos números es negativo: $m \cdot t < 0$
c) La raíz cúbica de un número es ocho: $\sqrt[3]{e} = 8$

1 Traducir al lenguaje simbólico y resolver.

a) La suma entre ocho y menos quince.

b) La diferencia entre seis y catorce.

c) El producto entre siete y el opuesto de cuatro.

d) El cociente entre treinta y menos seis.

e) El triple de la diferencia entre cinco y nueve.

f) La suma entre la mitad de diez y menos doce.

g) El cuadrado del anterior a catorce.

h) El siguiente del doble de menos trece.

i) El anterior de la cuarta parte de cien.

j) El triple del siguiente de menos nueve.

2 Hallar la mínima expresión.

a) $a \cdot a =$

b) $m + m =$

c) $r - r =$

d) $t : t =$

e) $5s - 3s =$

f) $6b \cdot 2b^2 =$

g) $n \cdot n^3 =$

h) $2w^4 + 6w^4 =$

i) $20h^6 : 5h =$

3 Marcar con una **X** la expresión correcta.

a) La mitad del siguiente de un número
- $n + 1 : 2$ ☐
- $n : 2 + 1$ ☐
- $(n + 1) : 2$ ☐

b) El triple del anterior de un número
- $r - 1 \cdot 3$ ☐
- $3r - 1$ ☐
- $3(r - 1)$ ☐

c) El siguiente de la cuarta parte de un número
- $a : 4 + 1$ ☐
- $(a + 1) : 4$ ☐
- $a + 1 : 4$ ☐

d) El anterior del doble de un número
- $2s - 1$ ☐
- $2(s - 1)$ ☐
- $s - 1 \cdot 2$ ☐

e) El cuadrado del siguiente de un número
- $e^2 + 1$ ☐
- $(e + 1)^2$ ☐
- $e + e^2$ ☐

f) La diferencia entre un número y su quíntuplo
- $c - c : 5$ ☐
- $5c - c$ ☐
- $c - 5c$ ☐

4 Expresar en lenguaje coloquial.

a) $3(p+1) \longrightarrow$

b) $m:2-1 \longrightarrow$

c) $4t+1 \longrightarrow$

d) $a+a+1 \longrightarrow$

e) $h.(h-1) \longrightarrow$

f) $s-s^2 \longrightarrow$

5 Escribir tres pares de números que cumplan con cada condición.

a) $a+b<0$

a = ☐ b = ☐ a = ☐ b = ☐ a = ☐ b = ☐

b) $m-n=-4$

m = ☐ n = ☐ m = ☐ n = ☐ m = ☐ n = ☐

c) $r.s<-6$

r = ☐ s = ☐ r = ☐ s = ☐ r = ☐ s = ☐

d) $-4<t:h<0$

t = ☐ h = ☐ t = ☐ h = ☐ t = ☐ h = ☐

6 Completar con el número que corresponda en cada caso.

a) $a+b=6 \wedge a=-4 \Rightarrow b=$ ☐

b) $m-n=0 \wedge m=-3 \Rightarrow n=$ ☐

c) $|r|=8 \wedge r<0 \Rightarrow r=$ ☐

d) $s.t=0 \wedge t=-7 \Rightarrow s=$ ☐

e) $h^2=1 \wedge h<0 \Rightarrow h=$ ☐

f) $d:e=-2 \wedge e=5 \Rightarrow d=$ ☐

7 Colocar **V** (verdadero) o **F** (falso) según corresponda.

a) $2x+3x+x=6x$ ☐

b) $x-x=1$ ☐

c) $0x=0$ ☐

d) $(x+2)^2=x^2+4$ ☐

e) $x:x=0$ ☐

f) $6x:6=x$ ☐

g) $2x-x=x$ ☐

h) $x+x=x^2$ ☐

i) $x.x.x=3x$ ☐

j) $3(x+2)=3x+2$ ☐

k) $x(x+1)=x^2+x$ ☐

l) $x^2+x=x^3$ ☐

8 Escribir todos los valores de **a** que cumplen con cada condición.

a) $-4<a\leq 0$

b) $0<a-5<6$

c) $|a|<3$

d) $a^2=4$

e) $a^2<10$

f) $(a+1)^4=81$

Desafío

9 Calcular el resultado de las operaciones.

a) $a+b=7 \Rightarrow 5(a+b)=$

b) $d-e=3 \Rightarrow e-d=$

c) $m.p=20 \Rightarrow m.p:(-5)=$

d) $g:n=1 \Rightarrow g-n=$

e) $h+z=-5 \Rightarrow 3(-h-z)=$

f) $2x+2y=8 \Rightarrow 3x+3y=$

Ecuaciones. Conjunto solución

Teoría

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay por lo menos un valor desconocido (incógnita).

a) $x + 6 = 11$ b) $2.(x - 1) = -10$ c) $x^2 + 1 = 50$ d) $\sqrt[3]{x+2} = -2$

El **conjunto solución** de una ecuación es el o los valores de la incógnita que verifican la igualdad.

En a) $x = \mathbf{5}$ porque $\mathbf{5} + 6 = 11 \rightarrow$ El conjunto solución es $S = \{5\}$ o $\mathbf{x = 5}$

En b) $x = \mathbf{-4}$ porque $2.(-4-1) = -10 \rightarrow$ El conjunto solución es $S = \{-4\}$ o $\mathbf{x = -4}$

En c) $x = \mathbf{7}$ o $x = \mathbf{-7}$ porque $\begin{cases} 7^2 + 1 = 50 \\ (-7)^2 + 1 = 50 \end{cases} \rightarrow$ El conjunto solución es $S = \{-7\,;\,7\}$ o $\mathbf{x = \pm 7}$

En d) $x = \mathbf{-10}$ porque $\sqrt[3]{-10+2} = -2 \rightarrow$ El conjunto solución es $S = \{-10\}$ o $\mathbf{x = -10}$

10 **Unir cada ecuación con el valor que la verifica.**

a) $3(x+1) = 2x - 3$

b) $(2-x)^2 = 36$

c) $2x^3 + 4x^2 = 0$

d) $\sqrt{7-3x} + x = 1$

e) $(x+3)(x-1) = 12$

$x = -4$ $x = -1$ $x = -2$ $x = -6$ $x = -5$ $x = -3$

Teoría

- Hay ecuaciones que **no** tienen solución, es decir, no existe ningún valor que las verifique.
  $x = x + 2 \rightarrow$ El conjunto solución es $\mathbf{S = \varnothing}$
- También hay ecuaciones que cualquier valor las verifica.
  $x + x = 2x \rightarrow$ El conjunto solución es $\mathbf{S = Z}$

11 **Plantear la ecuación y decidir si no tiene solución o cualquier valor la verifica.**

a) Un número es igual a su siguiente.

b) El doble de un número es igual a la suma de su siguiente y su anterior.

c) La diferencia entre un número y su anterior es uno.

d) El producto de un número y su siguiente es igual a la suma de su cuadrado y su anterior.

e) El cociente de dos números iguales es cero.

f) La suma de un número, su anterior y su siguiente es igual al triple del número.

g) La diferencia entre un número y su siguiente es uno.

h) El anterior del cuadrado de un número es igual al producto de su anterior y su siguiente.

Ecuaciones de primer grado

Teoría

Para resolver una ecuación con números enteros, se aplica la ley uniforme.

a) $x+9=5$
$x+9-9=5-9$
$\mathbf{x=-4}$

b) $x-5=-8$
$x-5+5=-8+5$
$\mathbf{x=-3}$

c) $-2x=-10$
$-2x:(-2)=-10:(-2)$
$\mathbf{x=5}$

- De una ecuación que **no tiene solución**, se obtiene una contradicción.
  $x+3=x$
  $x-x+3=x-x$
  $3=0 \rightarrow$ FALSO
  $\mathbf{S=\varnothing}$
- De una ecuación que **se verifica para cualquier valor**, se obtiene una igualdad.
  $x+x=2x$
  $2x-2x=0$
  $0=0 \rightarrow$ VERDADERO
  $\mathbf{S=Z}$

12 Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $4x+15=7$

b) $1-3x=19$

c) $-2x+17=3$

d) $5x+3=x-7+4x$

e) $-4+2x=5x+8$

f) $-x+6+3x=6-2x$

g) $2(x+4)-5x=23$

h) $9-3(x-2)=x-1$

i) $4(3-2x)+3x=2(3-x)$

13 Plantear la ecuación y hallar el número que cumple con cada condición.

a) La suma con su anterior es treinta y siete.

b) El doble de su anterior es setenta y seis.

c) La diferencia entre su quíntuplo y su doble es veintiuno.

d) La cuarta parte de su triple es quince.

e) El anterior de su tercera parte es nueve.

f) El consecutivo de su cuádruplo es el cuadrado de siete.

Desafío

14 Aplicar propiedades y encontrar las soluciones de cada ecuación.

a) $(x-5).(x+2)=0$

b) $x.(x-1)=6$

c) $(x+4)^2=49$

15 Expresar en lenguaje simbólico y resolver.

a) La tercera parte del anterior a menos veinte:

b) El siguiente del doble de menos catorce:

c) La mitad de la diferencia entre tres y quince:

d) El producto entre el anterior y el siguiente de menos seis:

e) El cociente entre cuarenta y el cubo de menos dos:

f) El cuádruplo del cuadrado del siguiente de cinco:

g) La raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de diez y diecinueve:

16 Completar la tabla.

m	-6					
$m+3$		-7				
$m-6$			-8			
$2m+1$				-7		
$m:2+9$					3	
$-m+7$						21

17 Traducir al lenguaje coloquial las siguientes expresiones.

a) $k+1=13 \longrightarrow$

b) $2(r-1)=12 \longrightarrow$

c) $(m+1):3=8 \longrightarrow$

d) $a^2-1=24 \longrightarrow$

e) $(b+1)^3=27 \longrightarrow$

f) $k.(k+1)=20 \longrightarrow$

g) $k+k+1+k+2=33 \longrightarrow$

18 Plantear el cálculo y resolver.

a) $a=-5 \wedge b=-3 \Rightarrow 4(a-b)=\boxed{}$

b) $c=-4 \wedge d=6 \Rightarrow (c+d)(c-d)=\boxed{}$

c) $e=7 \wedge g=-4 \Rightarrow (-e-g)^3=\boxed{}$

d) $h=-12 \wedge k=-5 \Rightarrow \sqrt{h^2+k^2}=\boxed{}$

19 Encontrar el número que cumpla con todas las condiciones.

- Su opuesto es primo.
- Su anterior es menor que -11.
- La suma de las cifras de su siguiente es 7.
- Su cuadrado es menor que 300.

20 Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $-17x + 15 + 6x - 23 = 10 - 8x$

b) $13 - 19x + 9 + 7x = x - 4 - 13x$

c) $-8 + 8x - 6 - 11x + 1 = 5 + 3x$

d) $9x + 12 - 14x - 5 = x - 6 - 10x - 7$

e) $3(x + 5) + 6 = 5 + 5(x + 2)$

f) $8x - 3(2 + 5x) = 2(7 - x)$

g) $5(3x - 7) - 3(x - 9) = 4(3x - 2)$

h) $2(x + 5) - 3(4 + x) - 4x = 2x - 23$

21 En un rectángulo, la base es el triple de la altura disminuida en dos unidades.
Hallar la expresión.

a) Del perímetro del rectángulo.

b) Del área del rectángulo.

c) **Calcular la base y la altura del rectángulo si el perímetro es de 52 cm.**

22 Plantear la ecuación y hallar el número que cumple con cada condición.

a) La tercera parte de su siguiente es igual al anterior de menos diez.

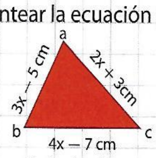
b) El cuádruplo de su anterior es igual al cubo de menos cuatro.

c) La diferencia entre su doble y su quíntuplo es igual al cuadrado de seis.

d) El producto de su siguiente y menos tres es igual al anterior a cuarenta.

23 Plantear la ecuación y calcular la longitud de cada lado en las siguientes figuras.

a)



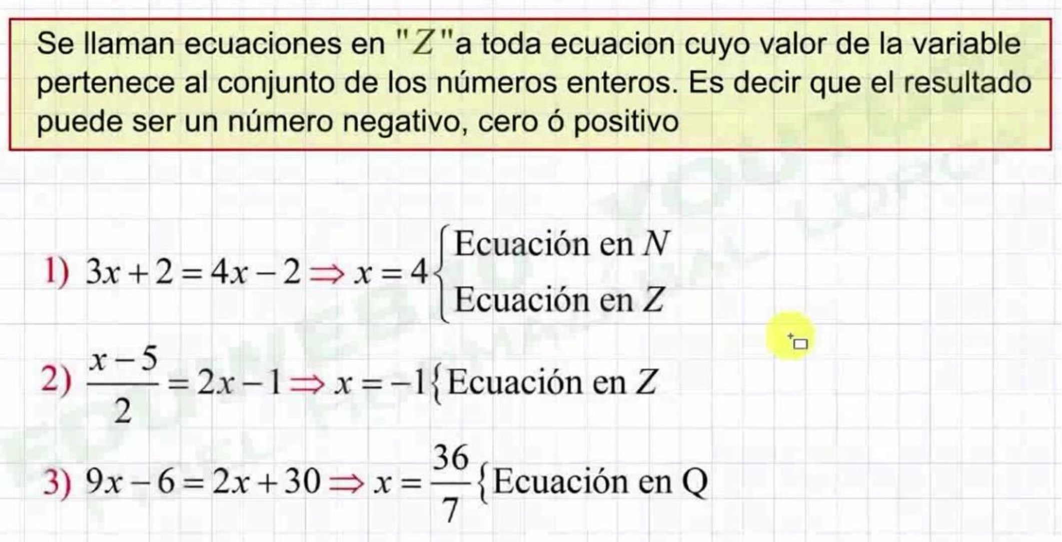
Perímetro: 27 cm

b)

Perímetro: 74 cm

ANEXO IV: Transcripción del video online

Primer año Ecuaciones en Z Video 1 ¿Qué es una ecuación en Z?



Captura de pantalla del video online

0:00

En este vídeo, vamos a ver qué es una ecuación en Z y como reconocerla.

0:05

Se llaman ecuaciones en Z, a toda ecuación cuyo valor de la variable

0:10

Pertenece al conjunto de los números enteros.

0:14

Es decir que el resultado puede ser, un número negativo, cero

0:19

O positivo.

0:21

Si a mí me preguntan si esta ecuación (3x + 2 = 4x – 2) es en Z, mi respuesta sería no sé, primero

0:26

Tengo que resolverla

0:28

Lo mismo con ésta $\left(\frac{x-5}{2} = 2x - 1\right)$, si me dicen que esta ecuación es en Z, primero tengo que resolverla

0:34

Esto quiere decir que no se puede saber

0:37

Si una ecuación es en N, en Z , o en Q, sino después

0:42

De resolverla, primero hay que resolverla para saber

0:45

A qué conjunto pertenece.

0:48

Por ejemplo, esta ecuación (3x + 2 = 4x - 2) es en Z, veamos cuánto da x, x vale 4

0:54

Entonces podemos decir dos cosas de esta ecuación, que pertenece a N

0:59

Ya que N incluye los positivos y también a Z.

1:03

Esta ecuación entonces es al mismo tiempo, en N

1:07

Y en Z.

1:09

Veamos la segunda ecuación,$\left(\frac{x-5}{2} = 2x - 1\right)$ ¿esta ecuación es en Z?, no se primero Hay

1:14

Que resolverla

1:16

En este caso x vale-1, un número negativo, esta ecuación sí es en Z,

1:22

ya que Z incluye los negativos, los naturales no tienen negativos.

1:28

Tercera ecuación, veamos si esta ecuación (9x – 6 = 2x + 30) es en Z, hay que resolverla

1:33

Después de resolverla, nos damos cuenta que x es igual a una fracción $\left(\frac{36}{7}\right)$, entonces

1:38

no pertenece a Z,

1:40

Pertenece

1:41

al conjunto Q,

1:43

Que es el conjunto de las fracciones.

1:46

Entonces

1:47

No se puede saber

1:49

A qué conjunto pertenece una ecuación

1:52

sino después de resolverla.

1:57

Recuerda suscribirte al canal, hacer clic en 'me gusta' y dejar tu comentario.

ANEXO V: Registro de clases

Registro de clase – Martes 21 de junio de 2011
Curso: 2º División:4º
Horario de clase: 09:40 a 11:10 hs
Cantidad de alumnos presentes: 24.

09:43

Profesor: Empezamos a trabajar.

"Resolver las siguientes situaciones, justificando tus respuestas:

1) ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado -107?

2) ¿Existe algún número entero que sumado a -27 de como resultado -107?

3) ¿Es posible hallar algún número entero que multiplicado por -89 de como resultado -5073?

4) Existe algún número entero que multiplicado por 74 de como resultado -9475?

5) ¿Hay algún número entero que al dividirlo por 126 de como resultado -478?

6) ¿Cuál es el número entero que al multiplicarlo por -5 y sumarle 434 da como resultado -772?"

09:45

P: Bueno, arrancamos.

A1: Profesor, ¿cómo puede ser que hay algún número entero que sumado... que sumado a 27 dé como resultado -107.

P: Te está preguntando.

A2: ¿Y no nos puede decir sí o no nomás?

P: Resolvé con tu compañero. No, si hay, encuentren.

A3: ¿Y si no hay?

A2: ¿Y no nos puede decir sí o no nomás?

P: Resolver dice Gabriel.

A2: Pero cómo puede ser sumado.

P: Y bueno, vamos a discutir.

A2: si le (...) resolver.

A1: No entiendo.

A4: ni yo tampoco.

A5: Profesor, muy difícil es.

(Pausa, los alumnos leen y releen el cuestionario, conversan entre ellos)

09:50

P: ¿cuál era la pregunta? A ver, escuchamos. Tienen que... dice: Resolver las siguientes situaciones, justificando las respuestas. Entonces la primera. ¿Hay algún número entero- o sea, nosotros estamos trabajando con números enteros, está?- que sumado a 27 dé como resultado -107? bueno entonces, si hay, si encuentran, díganme cuál es, y si no digan por qué, o sea, eso significa que justifiquen, ¿Está?

A6: profesor yo ya encontré el número ese.

Profesor: ¿encontraste el número?

A6: sí. Yo le saco todo mental.

A7: Profesor, no hay.

P: ¿No hay?

A6: si hay profesor, ¿le puedo decir?

P: Esperá, no digas todavía. Dejale que él trabaje y después vemos. Trabajá con tu compañero, trabajá con tu compañera, y si no hay decí por qué no hay: pensá (...) y después vemos cómo.

A6: ¿La respuesta le hacemos en una hoja profesor?

(...)

P: Bueno, anotá, hacé la cuenta. Quiero ver tu (...)

A6: Profe, yo (...) yo soy más de la mente, no me gusta mucho escribir

P: No, pero escribí.

(...)

P: Si, hagan, en su hoja, en su carpeta.

A6: en cualquier lado...

A6: ¿puede ser profesor?

P: Puede ser.

A6: Cómo que puede ser...

P: Puede ser. Hacé (...)

A7: Hace calor profesor.

A7: Abran la puerta.

P: Pensá.

A6: El b no profesor.

(El docente recorre los grupos y da indicaciones)

P: anotá la cuenta.

Alumna (desde el fondo): ¡profesor!

(...)

A1: profesor, cómo “sumado” 27 el resultado es menos 107 encima.

P: cuál es tu duda.

A1: el menos.

P: y por qué tiene otro (menos) ese.

A1: el número 27, entero, sumado. No entiendo sumado. Qué tenemos que buscar... cómo es que tiene que ser.

A3: Si es más 27.

P: Si, trabajen entre las dos. Si es más 27 te da 127, o sea...

A3: Ah, que boluda... Espere...

A2: puede ser que… No entiendo pues que dice ahí... Hay algún número entero...

A3: Hay algún número entero que sumado a 27 de como resultado -107.

A2: tenemos que hacer una operación con el número 27 que nos dé -107 (...)

A6: ¡Profesor! En el c tampoco, porque tengo que dividir...

P: en el c...

A6: porque dice 5073 por 89, menos, o sea, hacemos lo mismo nomás, y me dio 57, o sea, -57 me dio... o sea.

P: ¿no se puede?

A6: No, no se puede, porque no es número entero...

P: ¿Cuál no es entero?

A6: El 57.

P: ¿No es entero?

A6: No.

P: ¿Cuáles son los enteros?

A6: 2, 4, 6, 8, 10...

P: 2, 4, 6, 8, 10?

A6: No, mentira. Los que se pueden multiplicar por sí mismos... ¿o no?

P: No... ¿Cuáles son los enteros?

A6: No sé yo...

P: Enteros, lo que estamos trabajando ahora.

(...)

P: ¿Cuáles son los enteros? si dijiste hoy en el primero podía ser un número entero o cualquier número. Encontraste el del primero, ¿era un número entero o no? ¿Qué número era?

A6: -134

P: entonces, el del primero, -134 era un número entero?

A6: Si.

P: y bueno. ¿El 57 no es entero?

A6: Si es entero.

P: entonces ¿cuáles son los enteros?

A6: 57... (se ríe) Yo sé que sí... yo sé los números enteros...

P: ¿Cuáles son?

A6: el 57 y -134 (se ríe) ¿Esos son o no? Son...

P: Pero ¿cuáles más? ¿Cuáles son?

A6: No sé, no me acuerdo... Perá (chequeo...) Ahora le aviso.

P: Bueno. Seguí trabajando. Hacé en tu hoja.

A6: Profesor... no puedo escribir, ya le dije yo...

P: ¿Tu carpeta?

A6: No tengo, me robó Rafa... Rafa devolvé mi carpeta...

10: 03

P: A ver, vamos a hablar del primero porque hay (...) todavía no están...

A6: Profesor yo ya terminé ya.

P: A ver.

(En una carpeta se lee: -134 + 27 = -161)

P: ¿Pudieron encontrar?

As (varios): No.

P: ¿Están buscando?

As (varios): sí.

P: Bueno pero.

A8: Yo llegué hasta la c profesor.

A6: Yo ya le dije profesor.

10:07

P: bueno, ahora justifiquen cómo sacaron y después vamos a hacer otra.

A6: Sacamos en la cabeza profesor. De la cabeza de (...) Tiene muchas cosas ahí.

(En la carpeta se lee 134-27= -107)

A2: ¡Profesor!

P: (mirando la carpeta) sumarle 27 (…)

A6: Profesor, venga pues.

P: Ya voy. (A la alumna) Mariela: es lo mismo sumarle 27 que sumarle -27?

A1: No hice nada todavía

A6: ¿Ese es?

P: No sé... (A otro grupo) a ver

A8: (...) la suma de todo (...) ¿o la suma hay que hacer?

P: te tiene que dar la suma. Cuánto te da la suma.

A8: 161.

P: pero entonces no cumple lo que está diciendo.

A8: no, pero le digo, le pongo el resultado que me da en la suma...

P: cuál hiciste, cuál es tu número entero.

A8: 134.

P: que sumado a 27 te dé como resultado -107.

A8: Ajam.

P: Y bueno, entonces si vos decís que si hacés la suma no te da -107...

A8: si, me da...

P: Bueno, entonces por qué me decís si ponés...

A8: No, yo digo la suma de 134 + 27 me da 161. Pero la suma original sería si es menos, entonces me da -107.

P: O te da -107 o te da 161.

A8: -107.

P: y entonces la otra suma por qué.

A8: no, la otra suma es sin el menos.

A6: Acá le sumó y acá le restó.

A8: La otra suma es sin el menos.

P: Ah, y cuál es la diferencia.

A8: El menos... la suma con el menos.

P: Entonces qué es... cuál es tu conclusión

A8: Que me da 107 pues.

P: Entonces cumple... satisface la…

10:11

P: (desde el pizarrón) A ver, vamos a empezar a ver, para ayudarle a algunos de los chicos que todavía no están encontrando. A ver quién me puede decir... pasá. Bueno, Maxi, pasá a hacer el primero.

P: Vamos a ver lo que hace Maxi y vamos a preguntarlelo que no hace.

A3: Yo ya encontré.

P: “¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado -107?”

(Maxi termina de escribir en el pizarrón134-27= -107)

A8: Ese es profesor.

P: ¿Cuál es?

A8: 134.

P: Bueno, la mayoría de los que encontraron, encontraron ese número. Hay gente que todavía no encontró. ¿Cómo llegaste a ese?

A8: Haciendo la suma profesor.

P: Haciendo la suma... pero cómo fuiste buscando.

A8: Me fui fijando qué número sumado a -27 da 107

P: ¿Cuánto te tienen que dar?

A8: 107.

P: -107.

A3: -107.

P: Bien. ¿Hay alguna otra manera de dar más fácil esto?

As (varios): No

A3: No profesor, no hay. O sea, para mí no hay.

P: ¿Y cómo vamos a hacer?

A3: ¿Eh?

P: ¿Cómo vamos a dar? ¿Cada vez que necesitemos tenemos que buscar nomás así?

A3: Y yo busqué.

A6: Y no va a venir solo el número corriendo profesor. Hay que buscar nomás.

P: pero yo vi que alguien estaba haciendo de otra manera. (...) ¿Vos querés demostrar cómo estabas haciendo?

10:15

P: Pero además este problema no vieron así porque sí hoy, nomás cayeron. Tiene que ver con lo que venían trabajando. ¿Qué venían trabajando?

A1: Números.

A5: Ecuaciones.

P: Ecuaciones. Entonces ¿Se puede plantear una ecuación acá?

Algunos alumnos dicen siotros no.

P: A ver, ¿cómo plantearíamos la ecuación?

(...)

P: Hacé Maxi, cómo plantearías la ecuación.

A8: No sé profesor,si yo hice de esa manera.

P: Bueno, a ver.

A1: no va a dar.

10:16

P: Bueno, sentate. Ahora lo que van a hacer es buscar cómo podemos escribir eso, o sea, cómo podemos plantear la ecuación para encontrar la manera más fácil de resolver. ¿Está? Entonces, vamos a plantear la ecuación ahora que sabemos esto que escribió Maxi acá, entonces, vamos a plantear la ecuación para ver si podemos resolver de una manera más fácil.Dale, escribimos...

A6: ¿Y qué escribimos?

P: Lo que vamos a hacer en el punto uno es tratar de plantear una ecuación, buscando una manera más fácil, es decir, una expresión que nos permita hallar ese valor más fácil.

A2: Profesor, ¿este papelito es para nosotros?

P: Sí.

(Una alumna busca en su carpeta una hoja con ecuaciones, la saca para trabajar)

P: ¿qué pasa?

(...)

P: No, tienen que trabajar ahora, tienen que escribir cómo pueden escribir esto como una ecuación

A9: (...)

P: Dale, resolvé y trabajá en tu hoja.

A9: Nop.

P: Dale. Quiero ver en sus hojas el trabajo. El 1.

A8: Ya está el 1!!!

(...)

P: Dale, avancen.

A8: Profesor, terminé.

(El docente trabaja con un grupo adelante)

(Aumenta el nivel de barullo, y el docente recorre los bancos pidiendo a los chicos que trabajen)

P: Dale, hacé tu tarea.

A8: ehh ya terminé ya.

P: A ver.

A10: Na.

A6: ¿Cómo le planteamos profesor?

(El docente recorre el aula mientras los chicos dicen cualquier cosa. Se acerca al mismo grupo de adelante. La mayoría de los chicos no parece estar trabajando. Se acerca a una alumna que le dice que no entiende nada)

SOBRE EL 80 COMO NÚMERO BUSCADO (diálogo en un grupo)

P: La pregunta es: ¿hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado -107?

A10: (...) 80

P: ¿Te da -107?

A10: me da 107.

P: Y acá dice -107.

A10: (...)

P: Entonces cómo hacés para que te de -107.

A10: (Sonríe)

P: Y eso te pregunta.

A10: (se rie)

P: ¿Qué número le podés sumar a 27 para quete de -107?

(Se ríe y se pone a trabajar)

A11: Puede ver acá un poquito profesor (...)

P: Eh.

A11: (...) después dividimos así hasta que me da -107

(...)

A11: ¿Así tenemos que armar?

P: Claro, cómo sería la ecuación para que sea más fácil resolver

(Pausa, mira la carpeta)

P: pero acá no te da 107. Hay algún número que sumado a 27...Pero esto no es 27

A11: (piensa y se pone a trabajar) 30-8 = 27-8

10:19

P: Bueno, a ver. Vamos a mirar cómo podemos plantear la ecuación. Lo que pregunta es... Agustín, escuchamos. La Pregunta dice¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado -107? Acá Maxi encontró. Pero Maxi fue tanteando hasta que encontró el número. Pero no podemos seguir buscando así al tanteo cuál es el número. Para eso, entonces, vamos a plantear la ecuación de este tema. Cuando yo digo ¿Hay algún número? qué estamos diciendo ahí...

As (varios): Equis.

P: estamos buscando un valor de equis. O sea, a ese que no sabemos le llamamos x

Alumnos: Sí.

P: Y después dice “que sumado a 27”...

A (varios): Más 27.

P: Más 27... dé como resultado, dé como resultado...

A10: -107.

P: -107 (Escribe en el pizarrón: X+27= -107)

P: Bien, tiene alguno, ¿ya tenían esto escrito?

A6: Yo ya sabía profesor... No quería decir nomás.

P: Bueno, entonces, lo que hay que hacer ahora qué es.

A6: Despejar.

A6: Pasar.

P: ¿Qué hago?

A6: Pasar

A10: Más 27 al menos.

P: O sea que, pasar... Agustín.

(...)

10:20

P: Pasá Miriam.

A10: Usted me ayuda profesor.

(Escribe -27 al lado del -107 y encierra estas dos cifras en un círculo)

(...)

P: Bueno, hacé

(Mira la pizarra, buscando una solución. Los compañeros le gritan 134 y 80)

A10: Bueno, cállense.

(Hace una resta en el pizarrón: -107-27=80)

P: A ver, ella dice que es 80, que 80 es el valor de equis. Quiere decir que yo lo reemplazo acá y te tiene que dar ¿cuánto? Te tiene que dar -107. 80+27 ¿me da -107?

A (varios): No.

A8: Sí, le da menos 107 pero positivo profesor.

P: Me da 107 positivo, o sea que 80 no puede ser.

A8: 134 es el número.

P: O sea, ¿qué está pasando?

A8: La hizo mal, porque tenía que pasar al de la suma, tenía que sumar los dos negativos, y ahí tenía que sumar y le da 134(esto muestra que Maxi= A8 tampoco sabe que es -134)

P: ¿Entendés lo que te dice él?

A10: No.

A (varios): Yo tampoco.

P: Lo que él te dice es que estás sumando mal esto: -27-107 (da vuelta la suma porque era -107 -27)

A8: Estás sumando mal, le tenés que cambiar el más.

A11: Ah, hay que sumarle.

A8: Qué, ¿querés dividirle?

A10: son dos negativos...

A8: Si pe.

A11: Hay que sumarle esos dos pero es resultado positivo. Es más.

A8: Menos, menos... o sea, menos... 107-27+ te da todo negativo...

A11: 107…

A6: -107+27 ahí te da.

A8: -107-27.

(se ríen)

A10: --107... y después?

A8: -27

P: Es lo que te quedó acá.

A8: Y bueno, ahí tenés que sumarle. Y eso es. ¿O no es así?

P: ¿Es igual a 134?

A8: Y si, así tiene que ser.

A11: -134.

A8: Ah, sí, -134

P: Bueno, ahora, si ponemos acá -134 + 27 tiene que ser igual a -107. ¿Cumple o no?

A (varios): No.

P: ¿No?

A (varios): Si.

P: Sí me dicen, de los dos lados. Sì este es el valor al que habíamos llegado... Bueno, ahora vamos a hacer el segundo.

10:22

A8: Ah, ese es el más fácil profesor.

A6: Profesor el segundo es más fácil.

P: Bueno, hagan el segundo a ver.

A8: Ya está, ya terminé.

P: ¿Ya está? Ya paso a mirar.

A9: Profesor, ¿el 80 es número entero?

P: Allá, Encina está teniendo problemas con los números enteros. Él dice si 80 es un número entero. Pregunta él.

A8: Partido es (se ríe)

P: Él pregunta si 80 es un número entero. ¿Es entero? No está sabiendo cuáles son los números enteros dice.

A6 (...) del cero al...

P: Cuáles son los enteros entonces.

A6: Del 1 al infinito.

P: ¿Desde el 1 hasta el infinito? ¿Desde el 0 hasta el infinito?

A6: No, del 1.

P: ¿cuáles son los enteros? A ver, ¿cómo está formado el conjunto de los números enteros?

A6: Ah, decime enteros nomás, porque no entra... 87 y medio...

P: 87 y medio no es entero.

A6: ah, ese no es entero... todos nomás son enteros.

P: Todos ¿cuáles son todos?

A (varios): todos desde el 0.

P: ¿Desde el 0 al infinito?

A6: Desde el 1.

P: ¿Desde el 1? ¿el 0 no es entero?

A9: No.

A6: El cero no es ningún número, es para terminar un espacio nomás.

A9: Pero está el -1.

P: Entonces el -134 ¿no es entero?

A (varios): Sí...

P: Pero vos me decís que...

A6: Ahhh, si, desde el -1 hasta el infinito...

A8: Desde el infinito negativo hasta el infinito positivo.

P: Ah, bueno, considerando todos los...

A6: Todos los números. Exactamente.

P: No todos, porque si decís que 74 y medio no...

A8: Desde el infinito negativo hasta el infinito positivo.

A6: (...) pan comido yo.

P: Un medio está entre el infinito negativo y el infinito positivo. Un medio ¿es entero?

A6: No, cómo va a ser entero si está por la mitad.

P: Bueno, entonces no es... el dice desde el infinito...

A6: Sos Maxi, eh.

P: Entonces, si se ubican en la recta numérica cuáles serían. Desde el 0 a la derecha cuáles serían...

A10: ¿negativos serían profesor?

P: Hacia la derecha, no. Hacia la derecha positivos.

A6: Un cero a la izquierda es Maxi.

P: Bueno, entonces, 0, 1, 2...

A10: ¿Los positivos a la izquierda?

P: (se ríe) al revés.

A9: ¿entonces profesor?

P: Entonces, si nos ubicamos en la recta numérica cuáles eran los enteros. Del 0 hacia la derecha quienes están.

A6: Positivos.

P: ¿Pero qué positivos?

A6: enteros positivos

P: ¿Cuáles son esos números?

A6: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y me olvidé el resto.

P: ¿Y a la izquierda?

A8: 1 negativo, 2 negativo...

P: Entonces, esos son los enteros ¿está? Ahora seguimos. Vamos a resolver...

A6: Profesor, es más fácil.

A8: El 2 es 80 negativo.

P: ¿Por qué?

A8: Porque 80 negativo, sumado a 27 negativo, da 107 negativo.

A8: 80 negativo más 27 negativo es 107 negativo. Qué capo que soy.

P: 80 negativo, sumado a 27 negativo... da... Bueno, a ver quién plantea esta ecuación

A6: Es lo mismo nomás, le cambiás la X por el...

P: ¿Podemos pasar? Pasá Agustín... Dale Agustín.

A8: Que pase Rafa profesor.

P: Rafa, guardá ese celular

A1: Ya es la hora.

P: No, falta todavía, y veinte es recién.

A6: Profesor, más fácil es de todos. Profesor, ¿el de 57 positivo?

P: No, esperá, veamos al 2.

10:25

(Los chicos discuten y preguntan la hora. Timbre de recreo)

Segunda parte del registro

Profesor: Si pero, planteá la ecuación a ver cómo vas a resolver... (recorre los bancos) Vas a pasar vos (el alumno hace como que no con la cabeza) A ver Laura Vos... (mira los trabajos)

Profesor: A ver, para que quede bien el primero, entonces, para que quede bien el primero qué pasaba. Escribo de nuevo acá (escribe en el pizarrón) X + 27 = -107 ¿Cómo se resolvía esta ecuación? Vamos a resolver bien esta porque acá quedó medio (...) (Señala la que está en el pizarron:

X + 27 = -107 - 27

27

80

-107

-27

-134

27

-107

Alumno: El que está sumando pasa restando.

Profesor: Es decir que en el primer miembro ¿qué queda?

Alumna: El por... la equis nomás.

Profesor: (escribe a medida que dice) La x nomás, que es igual a -107-27- ¿Y entonces? Decimos que x es igual a -134. ¿Está?

(la ecuación en el pizarrón queda planteada:

x + 27 = -107

x = -107 - 27

x = -134

Profesor: Vamos a plantear la que está en el punto 2. Laura, ¿tenés hecho la número 2?

Laura: No (se ríe)

Profesor: A ver (a un alumno) ¿tenés vos? el 2. Oriana, ¿vos?

(Recorre los bancos)

Rafa: ¿Cuál es profesor? ¿el b o el c?

Profesor: El 2. Pasá vos a hacer la ecuación.

Rafa: Estoy cansado profesor.

Profesor: Dale, pasá.

(insiste, el alumno se niega)

Alumno: Profesor, él dijo que iba a pasar.

Rafa: Ah sí, Barrientos Agustín.

Profesor: (a Agustín) el 2. Pasá a hacer.

Agustín: (se niega)

Profesor: (se acerca) ¿Tenés resuelto el 2? (mira el trabajo de Agustín) No, -27-107 no da eso. A ver el tuyo... (Mira el de otro alumno) No, el mismo error. Pasá a hacer. Pasá, vamos a ver

2)X + -27 = -107

= -107 - 27

X= -80

Profesor: A ver, vamos a mirar lo que hizo Leandro. El pone. Dice: ¿Existe algún número entero que sumado a -27 dé como resultado -107? Entonces, el número entero que estamos buscando ¿cómo se llama?

A: 80

Profesor: Bien, pero ¿cómo le llamamos en principio?

A: Menos.

Alumna: Negativo.

Profesor: O sea, al número entero que estamos buscando, desconocido, le llamamos

Al: x

Profesor: x. Bueno, a ese número entero le sumamos -27, da como resultado -107. Él escribió eso ahí. A ver: él dice que el resultado es -80. Pero fíjense, a ver, qué pasó acá. En el primer paso escribió la ecuación, planteó la ecuación. Y en el segundo paso ¿qué hizo?

A: Resolvió.

Profesor: ¿Qué resolvió?

A: Eso

Profesor: ¿Cómo lo solucionó?

Al: Está mal profe porque tenía que estar sumando, sin embargo tiene que quedar 27 positivo ahí. Porque está 27 negativo y tiene que pasar positivo. Y ahí me doy cuenta que el positivo le saca el (...)

Profesor: ¿Y acá qué me queda? -107-27 ¿a qué es igual?

Al: 80... no... a 300... a 134.

Profesor: -107-27 ¿a qué es igual?

Al: 134.

A2: 80.

A3: 80.

Profesor: ¿134?

Al: -107 – 27.

Profesor: Eh.

Al: Es 134.

Profesor: ¿134?

A5: ¿Menos puede ser profe?

Al: Pero ¿27 positivo o negativo?

A5: Negativo.

Profesor: Él dice que -107 -27 es igual a -80.

A: No pue.

Alumna: -107-27...me da 134...

Profesor: Es igual a -134.

Al: Y bueno, qué es lo que estoy diciendo yo...

Profesor: Pero vos decís 134... estamos en enteros. O sea, es -134, es números enteros.

Al: Ah, si

Profesor: Entonces, esto que está acá es -134, no me da -80,

Al: Ahí está negativo tiene que pasar a positivo profesor. El 27... el 27 es positivo. 107 menos.

Al: Tiene que ser -27 + 107 profesor.

Profesor: Bueno, pasá.

Ala: Ah, na, na...

Profesor: Pasá (toni)

Tony: Estoy cansado.

Profesor: Bueno, llevo tu deber

Tony: Ah, bueno profesor. No lleva el deber de él...

Profesor: Si, voy a llevar.

Tony: ¿Va a llevar mi deber?

Profesor: Pasá. 1 te voy a poner sino...

Tony: (...) (cambia el - por un + en la ecuación del pizarrón) Listo

Profesor: Bueno, ¿ahí es que queda correcta?

Tony: Sí.

Profesor: Bueno, entonces -80 + -27 ¿cuánto te da (Leandro)?

(Señala en el pizarrón X+-27= -107)

Leandro: 80.

Profesor: -80. O sea, el valor de X es -80

Tony: Ah, 107.

Profesor: O sea, -80+-27=-107. Bien. ¿Alguien todavía no entendió cómo se está planteando la ecuación?

Alumno x: Yoooo...

Profesor: Bueno, ahora Laura ¿Qué parte no entendiste?

Laura: Todo profesor.

Profesor: A ver, ¿quién le puede explicar a Laura? Explicale Agustín.

Agustín: Se ríe.

Al: Dale, explicale Agustín.

Laura: Dale, explícame.

Profesor: Explicale a ver.

(no se anima)

Profesor: Explicale Rafa a ver.

Rafa: Que quiere saber.

Profesor: No entendió cómo se hace.

Rafa: Profesor, usted dijo que iba a llevar mi deber...

Laura: Profesor, y por qué no me explica usted nomás.

X: Mirá, lo que tenés que hacer es (explica, no seentiende lo que dice)

Profesor: Pasá a ver.

X: Tiene que copiar nomás lo que está en el pizarrón, porque está bien.

Profesor: No, (...) A ver, Yo leo el problema y vos decís cómo se resuelve la ecuación. El punto 2 dice: "¿Existe algún número entero que, sumado a -27 de como resultado-107?

Alumno: Si.

Profesor: ¿Por qué? Explicale a Laura cómo se resuelve, cómo tiene que hacer...

Alumno: Hay que escribir los números...

Tony: Dale, explicale cuál es ya.

Profesor: Pasá y mostrale.

Tony: (escribo) un número, o sea X. Un número decile, le está diciendo el número exacto...

Alumno: (...) que no sabés qué número, que es X +-27 que es igual a 107... eh... bajás 107, el 27 tenés que hacer +27 y eso es igual a -80...

Alumox: Profesor, me perdí en la X (se ríe)

Tony: No entendió nada...

Profesor: Explicale vos, que es tu... a ver, explicale Maxi...

Maxi: Diga el número...

Profesor: Si existe algún número entero que sumado a -27 de como resultado -107.

Maxi: Sería... que diga si existe algún número entero... si existe algún número, vos no sabés cuál es, entonces tenés que poner la X o cualquier otra letra que represente el número que vos no sabés. Después, sumado a 27 te dice... 27 es el número que tenés que sumar para que te dé resultado 107. Eso nomás.

Tony: Ahí le complicaste peor.

(...)

Profesor: Lo que él dice, vamos a ver de nuevo, Laura. Lo que él dice es "hay algún número entero", la pregunta es si existe un número entero, no sabemos si existe ese número entero, entonces lo vamos a llamar...

Tony: X

Profesor: X o le ponen la letra que quieran.

Tony: Z, H

Profesor: Que, sumado a -27... entonces, si no le querés llamar equis ponemos un casillero así (dibuja □ en el pizarrón) y decís, acá hay un número que no sabemos quién es... que, sumado a -27... sumado a -27... (agrega el +-27 al lado del cuadro) Acá hay un número, no sabemos quién es, que sumado a -27 da como resultado -107. (En el pizarrón queda planteado □+-27=-107)

Maxi: Es lo que yo le dije profesor.

Profesor: Es lo que está diciendo Maxi, yo le estoy traduciendo lo que vos dijiste. ¿Está? Entonces ahí quedaría planteada la ecuación ¿está? Ahora, ¿cómo se resuelve la ecuación? Primero ¿qué es una ecuación? A ver ¿qué es una ecuación?

Al: Objeto indirecto.

Profesor: ¿Qué es una ecuación?

Al: Colón descubrió América...

Profesor: ¿Qué es una ecuación?

(...)

Profesor: A ver, es una igualdad... después... es una igualdad en la que figuran qué... ¿qué figuran? En la que aparecen qué.

Al: Números.

Profesor: Sí, pero qué es lo importante de una ecuación, porque si no, porque si están todos los números sería una operación. ¿Qué aparece? ¿Cómo se llama?

Al: Equis.

Profesor: ¿Y cómo se llama eso?

Al: Letra.

Profesor: Si, pero tiene un nombre...

Tony: Dígito.

Al: Cifra.

Profesor: Incógnita.... en la que aparecen una o más incógnitas, en este caso una incógnita ¿está? Entonces, una incógnita sería un valor, un número que no conocemos. Entonces, acá tenemos planteada la ecuación. Ahora ¿qué hay que hacer? resolver esta ecuación. ¿Cómo se resuelve esta ecuación? Laura, estabas resolviendo ecuación la clase pasada. Estábamos resolviendo ecuaciones, estabas vos también resolviendo ecuaciones, ahora ¿cómo se resuelve esta? Ahora, si querés le llamamos X a esto (dibuja la X en el □) a este número que está acá le llamamos X. ¿Cómo se resuelve? (encierra el primer miembro en una llave) A esto se le llamaba... ¿Cómo se llama esto? Lo que antecede al singo igual, ¿cómo se llama?

Al: Término.

Profesor (señalando los términos) No, esto sería el un término, dos términos. ¿Y esto? Primer miembro. ¿Y esto? Segundo miembro. Bien. Entonces, ¿qué hacíamos para hallar el valor de X?

Rafa: Vamos a trabajar con la computadora.

Profesor: Rafa guardá eso. Lo que hicimos es, entonces: este que está acá (dibuja la X y el = debajo del primer miembro) este que está acá, -27 que está restando, ¿cómo pasaba al segundo miembro? Sumando (escribe -107 + 27) Y ahí les va a dar el resultado que le dio a Leandro. ¿Está?

Profesor: Bueno vamos a hacer ahora el punto 3. Vamos a hacer el punto 3. O sea, el -80 es el número que estaba acá, escondido. -80+-27, ¿a qué es igual ahora?

Laura: -107

Profesor: Quiere decir que ¿está bien o está mal esto? ¿Está bien resuelto? ¿Encontrastedónde te habías confundido o no?

Laura: Si.

Profesor: ¿Satisface la igualdad o no?

Tony: Si.

Profesor: Entonces ahora vamos a hacer el punto 3

(Los alumnos leen en silencio)

Profesor: ¿Es posible hallar un número entero que multiplicado por...? dale, trabajamos... que multiplicado por... dale

Alumno: ¿Cuál es?

Profesor: Punto 3.

Tony: Sí profesor.

Profesor: A ver.

Tony: Es 57 positivo.

Profesor: ¿Por qué?

Tony: Porque 57 positivo multiplicado por -89 y multiplicando +x- da negativo.

Rafa: Ese no dijo el profesor, ese es la computadora que está usando desde hoy profesor.

Tony: Dividí -5073 por -89...

Alumno: Vos hiciste en la netbook

Profesor: (...) Dale, sigan trabajando. A ver... dale Maxi, dale chicas...

Rafa: 74 (se ríe)

Al (otro): 200 por ahí... 200 o más. ahí tenés que (...)

Rafa: Profesor, es fácil, no sé cómo puede ser tan fácil. ¿Quiere que le diga la 4?

Profesor: No, hacé bien en tu hoja. Planteá la ecuación Polo...

Alumno: Eh, profesor... eh, profesor... le entra agua... (Se ríe) Profesor... profe (insiste, el docente está con Laura)

Profesor: Bueno, hallá. Hallá y fijate si satisface la igualdad.

Laura: (escribe en su carpeta: -5073 /-89 y no consigue resolver)

Miriam: Este sería el número... -89 dé como resultado -5073. Entonces, el número que no encontramos sería la X (en la carpeta dice X. -89) multiplicado por -89. Y el resultado es -5073 (agrega el número a la ecuación, que queda X.-89= -5073)

Profesor: ¿Y entonces?

Miriam: Este pasa sumando (señala el -89)

Profesor: Hacé a ver, y fijate si satisface la igualdad. Si satisface la igualdad quiere decir que encontraste el valor, sino, tenés que revisar dónde está mal.
Miriam (a Edith) Profesora, ¿qué es la igualdad?
Edith. ¿Mhm?
Miriam: ¿Qué es la igualdad? Parecido o más o menos...
Edith: Esto. Que esto es igual a esto. Que esto es igual a esto
Miriam: Ahhh
(Los chicos trabajan, el docente recorre el salón)
Miriam: Profesora, ¿así es? este resultado me salió -5073 + 89 me dio -4984
(En la carpeta se ve X.-89=-5073-89
X=-4984)
Edith: ¿Y por qué le sumaste ahí?
Miriam: Porque lo que acá está restando (señala el -89) pasa sumando (señala el +89 en el segundo miembro)
Edith: Pero viste que esto era un número que multiplicado... en realidad este le está multiplicando...
Miriam: ¿Y cómo sería?
Edith: Pará, que tu profe vea.
Miriam: Profesor, venga un ratito (borra lo que había hecho) Profesor, este pasas sumando ¿verdad? (señala el -89) negativo...
Profesor: No sé...
Compañera de Miriam: Pasa dividiendo.
Miriam: ¿Por qué? (al profesor) ¿Dividiendo pasa?
Profesor: Fijate, si pasó sumando qué te queda ahí. Como resultado ¿qué te queda?
Miriam: Me quedó que X es igual a -4984
Profesor: Entonces, si vos reemplazás acá te quedaría -4984 por 89 ¿te va a dar esto?
Miriam: A ver, voy a probar.
Profesor: Probá, y si te da quiere decir que está bien, sino está mal.
Compañera de Miriam: ¿Y está bien? (el profesor no responde) ¡Ay qué fantástico que es profesor!
(El profesor se sienta a trabajar con una alumna y su compañera, pero no se oye. Laura lo llama)
Laura: 58 me dio.
Profesor: A ver... ¿Qué hiciste? ¿Para qué todas esas cuentas que hiciste?
Laura: 58 me dio.
Profesor: Y ese 58 ¿satisface la igualdad?
Laura: No sé. En la carpeta se lee X.-89=-5073

X=-5073:89
X=58
Profesor: ¿Satisface? ¿Si vos multiplicás por esto (-89) te da esto (-5073)?
Laura: No sé
Profesor: Y fijate: si satisface quiere decir que está bien. (Comienza a escribir la multiplicación, la cámara se va hacia otro lado)
(La cámara recorre los bancos, pero en muchos casos no se llega a leer lo que toma de las carpetas)
En una carpeta: X.89=-5073
X=-5073:89
X=-57
Profesor: Bueno, acá (Melina) va a pasar a hacer el 3.
Rafa: Está mal. Multiplicado dice.
Melina: Callate.
Profesor: Vamos a esperar a que termine.
Rafa: Multiplicado dice. Está mal, está re mal.
(Varios repiten)
Profesor: Vamos a dejarle que termine y después le preguntamos por qué hizo así
Melina: Yo hice por hacer.
Maxi: ¿cómo que hice por hacer?
Rafa: Paso yo.
Profesor: Esperá, vamos a ver qué hace ella...
(Bochinche)
Profesor: A ver, Melina.
Rafa: (se levanta) Hago yo profe.
Profesor: Pará que ella va a defender su trabajo. Contanos por qué hiciste así
(los chicos siguen diciendo que está mal)
Profesor: A ver ¿Es posible hallar algún número entero que multiplicado por -89 de como resultado -5073?
En el pizarrón se lee:
X+-89= -5073
= -5073+-89
X= 5162
Rafa: ¿Por qué 5162? está mal porque...
(Hablan todos juntos)
Rafa: Profesor, es multiplicación y después pasa a ser división
Débora: Sí, porque el + el -(...)

Profesor: Débora dice que el + y el - están mal ahí, que tiene que ¿hacer qué?
Alumno: Débora dice que…
Profesor: ¿Que tiene que poner qué?
Rafa: Profesor, ese, el + (...)
(Pasa Maxi al pizarrón y cambia los signos de las operaciones de la fórmula:
X.-89=-5073
= -5073/-89
X=5162
Profesor: Pero además una cosa, Verónica, si vos tenés 5162 sumados, va a dar, pero tiene que ser multiplicados. ¿entendés lo que dice? Pero para que puedas... mirá. Si este número multiplicado por -89 ¿te da -5073? El número que vos tenías, 5162. (...) 5162 multiplicado por -89 ¿Te da -5073?
Verónica: Si.
Profesor: ¿Multiplicado?
(...)
Profesor: Bien, entonces ¿Cómo quedaría esto?
Rafa: 57.
(Barullo de alumnos trabajando y conversando)
Profesor: La otra dice que le da 58.
Alumnos: (gritan) Si.
Profesor: 58... Si el valor de X es 58 tiene que satisfacer la igualdad, que quiere decir, si hacemos la prueba a va a quedar... 58.-89 te da este valor.
(Laura en el frente hace como que no con la cabeza)
Profesor: ¿No te dio?
(...)
Profesor: Claro, 57 es. A ver. Ahora, el 57... o sea, acá ella dice que hizo la prueba pero que no le dio. Entonces qué valor es... está haciendo mal la división nomás... ¿Cuánto te da?
Alumna: 57 profesor.
Profesor: Entonces, 57, si hacemos la prueba, vamos a hacer la prueba (escribe en el pizarrón) 57.(-89) (tiene que ser igual a) =-5073. Hagan la prueba a ver si da. Hacé la prueba Laura a ver si da.
Alumno: Profesor, nosotros nos retiramos ya...
Profesor: ¿Por qué?
Alumno: 11 y 10 ya son...
Profesor: 57 por - .. ahora, el 57 es ¿positivo o negativo?
Alumno: Negativo.

Tony: Positivo

Profesor: ¿Por qué?

Tony: Porque si vos ponés negativo se multiplica el menos por el menos y se hace positivo. Sin embargo, si vos decís que es positivo, multiplicás positivo por negativo y te da negativo igual.

Rafa: Si si si si, así como dice Tony.

Profesor: Con el tema de los signos entonces no hay problema, entonces habría que ver si da 57 por -89, si da eso quiere decir que está bien. ¿Está?

Alumnos: Si si.

Alumnos: Está bien.

Profesor: Bueno, vamos a pasar al punto 4 ¿Existe algún número entero que multiplicado por 74 de como resultado -9475?

Alumno: Ya nos vamos ya profesor.

Profesor: Hagan la cuenta. Faltan 5 minutos. Trabajen, dale

(Los alumnos siguen negándose y el profesor insiste)

Alumna: Dale Débora, ¿qué hora es?

Débora: 11 y 9

(Ruido)

Profesor: A ver, acá.

Débora: Y 10

Profesor: Bueno, mañana vamos a continuar con ecuaciones.