

Análisis de la Estabilidad Teórica con Acción de Control aplicado a Prótesis Mioeléctricas

Carlos Alvarez Picaza, María Inés Pisarello, Julián Ignacio Veglia y Jorge Emilio Monzón
Universidad Nacional del Nordeste, cpicaza@gmail.com

Resumen—El trabajo que se presenta a continuación es un análisis alternativo para la optimización de energía en servomotores que alimentan a prótesis electromiográficas mediante el método de Ubicación de Polos y su consecuente estabilidad asociada. Este documento tiene por objeto encontrar nuevos elementos de trabajo del sistema servomotor mediante el uso de un regulador. Se aborda el desarrollo que se lleva a cabo desde el punto de vista de Ingeniería Biomédica teniendo en cuenta los distintos factores y parámetros a considerar para lograr el objetivo. Normalmente no se consideran los factores energéticos de alimentación de los servomotores; si éstos no son regulados, el gasto de batería es elevado y en un período corto esta solución (prótesis), se convierte en un problema mayor. Los resultados obtenidos indican que la utilización de esta herramienta mejora el rendimiento siempre que los parámetros sean ajustados para cada caso en particular.

Palabras clave—Espacio de Estados, Regulador, Estabilidad.

I. INTRODUCCIÓN

LA Ingeniería ha evolucionado, su participación en las ciencias de la vida ha generado relativamente nuevas disciplinas. Ingeniería en el área de la rehabilitación es el área biomédica que produce un mayor impacto. La contribución de la ingeniería biomédica a este problema es el diseño de dispositivos de gran utilidad para automatizar estas terapias y dar a los pacientes la autonomía necesaria para un mejor rendimiento [1]. Los dispositivos de ayuda y tecnologías tales como sillas de ruedas, prótesis, auxiliares de movilidad, audífonos, ayudas visuales, software y hardware especializado aumentaron la movilidad, audición, visión y capacidad de comunicación. Con la ayuda de estas tecnologías, las personas con una pérdida de funcionamiento son más capaces de vivir de forma independiente y participar en sus sociedades. Sin embargo, en muchos países de ingresos bajos y medianos ingresos, sólo el 5% al 15% de las personas que requieren dispositivos y tecnologías de apoyo tienen acceso a ellos [2]. El acceso a la rehabilitación y habilitación puede disminuir las consecuencias de la enfermedad o lesión, mejorar la salud y calidad de vida y disminuir el uso de los servicios de salud. Si bien los datos globales sobre la necesidad de rehabilitación y habilitación, el tipo y la calidad de las medidas previstas y las estimaciones de las necesidades no satisfechas, no existen; los datos a nivel nacional revelan grandes brechas en la provisión y el acceso a esos servicios.

Como ingenieros aplicamos las leyes matemáticas y la física para resolver los problemas, tales como los mencionados. A través de la teoría de control moderna es posible tratar cualquier situación problemática mediante ecuaciones de estado. Algunas reglas matemáticas, como el principio de superposición, presente en algoritmos recursivos están excluidos en este nuevo enfoque. La

consiguiente simplificación de los desarrollos se reflejan en nuevos hallazgos, dando valor a nuevos conceptos como el control y la estabilidad [3].

Este documento tiene por objeto encontrar nuevos elementos de análisis de la señal de trabajo del sistema de servomotor mediante el uso de un regulador, lo que permite un rendimiento más controlable y estable. El servomotor que aquí se presenta está diseñado para generar movimientos de la articulación de un brazo robótico diseñado para la rehabilitación del movimiento de un paciente.

II. MÉTODOS

Se considera el motor de corriente continua de la Figura 1 que impulsa una carga a través de un eje rígido. Si la corriente de campo es mantenida constante en un valor I_f o el flujo de campo proviene de un imán permanente esta máquina puede ser controlada únicamente por la tensión $v_a(t)$ aplicada a la armadura.

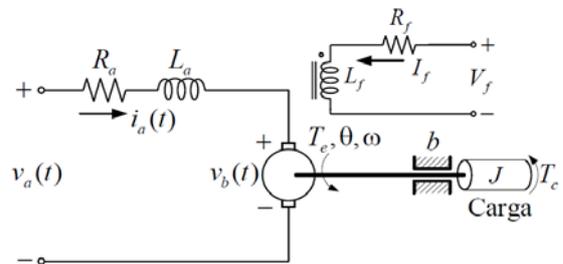


Figura 1. Modelo del Servomotor

La ecuación del par de torsión eléctrico puede ser escrita como:

$$T_e(t) = K_t i_a(t) \quad (1)$$

donde $K_t = KI_f$ es una constante.

Cuando el motor impulsa la carga, se desarrolla una fuerza contraelectromotriz en el circuito de armadura opuesta a la tensión aplicada $v_a(t)$. Esta tensión es linealmente proporcional a la velocidad angular desarrollada en el eje, o sea:

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2)$$

Aplicando la ley de Kirchoff de las tensiones a la malla del circuito de la armadura, se tiene:

$$v_a(t) = u(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) \quad (3)$$

Sea J el momento de inercia total de la carga, el eje y el rotor del motor; θ el desplazamiento angular de la carga; b el coeficiente de rozamiento viscoso y T_c el par producido por la carga.

El par que el motor debe desarrollar necesario para vencer la inercia, el rozamiento, y el par de reacción de la carga está dado por:

$$T_e(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + T_c \quad (4)$$

$$K_t i_a(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + T_c \quad (5)$$

Para este primer modelo no se considera T_c , la cual representaría la perturbación provocada por la carga sobre el eje del motor.

A. Método de asignación de polos

El método de polos y la colocación es colocar los polos en lugares deseados en bucle cerrado.

Se supone que todas las variables de estado son medibles y disponibles para la retroalimentación.

Sea un sistema de control,

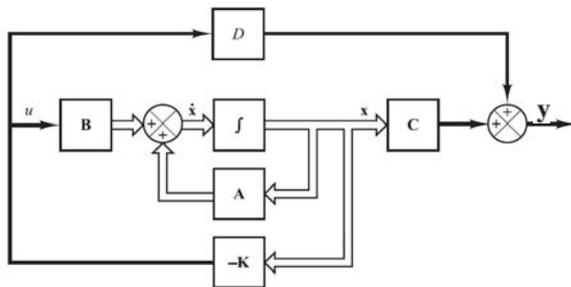


Figura 2. Sistema de control con realimentación y ganancia K

Matricialmente,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned} \quad (6)$$

Donde,

- $\dot{\mathbf{x}}$ → Vector de Estado; \mathbf{y} → Vector de Salida
- \mathbf{A} → Matriz de Estado; \mathbf{B} → Matriz de Entrada
- \mathbf{C} → Matriz de Salida; \mathbf{D} → Matriz de Transmisión Directa
- $-\mathbf{K}$ → Ganancia

La técnica de diseño comienza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados de la respuesta del sistema. La selección de una matriz apropiada para ganancias de realimentación de estado, hace posible que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, sólo si el sistema original es completamente controlable [4].

Se selecciona la señal de control como

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

Su objetivo es mantener la salida a cero. Como pueden existir perturbaciones, la salida se desviará de cero. Esta salida retornará a la entrada de referencia cero debido al esquema de realimentación. Un sistema de esta naturaleza se conoce como *sistema regulador*.

Al sustituir,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (8)$$

Los valores propios de la matriz se denominan polos del regulador. Los procedimientos de proyecto clásicos se basan en la función de transferencia del sistema, mientras que el proyecto por ubicación de polos está basado en el modelo de estado del sistema. Se asume también que todas las variables de estado del sistema pueden ser medidas y están disponibles para ser realimentadas. Esta técnica parte del principio de que si el sistema es completamente controlable, es posible ubicar un conjunto de polos del sistema en lazo cerrado, en ubicaciones deseadas, mediante la realimentación de los estados del sistema de forma a atender determinadas especificaciones de respuesta dinámica transitoria y de régimen permanente. Estas especificaciones pueden estar relacionadas a los parámetros característicos de la respuesta temporal transitoria frente a entradas en escalón o impulsivas.

El proyecto por ubicación de polos se resume en dos pasos:

- (i) Especificar la ubicación de las raíces deseadas de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado;
- (ii) El cálculo de las ganancias para poder ubicar estas raíces en los lugares determinados en el punto anterior.

En el presente trabajo se utilizó la fórmula de Ackermann. La sentencia "acker" (MatLab) [5] para encontrar los componentes de la matriz de ganancias \mathbf{K} .

El diagrama del sistema a considerar es,

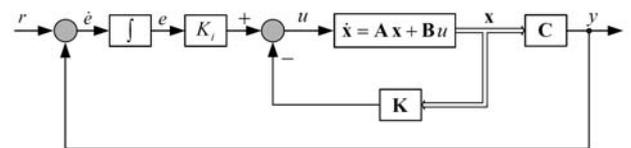


Figura 3. Sistema Servomotor

Considerando que los polos de lazo cerrado están ubicados en posiciones tales que el sistema resulte asintóticamente estable, la salida $y(\infty)$ tenderá al valor constante r y la señal de control $u(\infty)$ tenderá a cero.

Elegimos como variables de estado de este sistema a,

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta(t) \\ x_2 &= \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ x_3 &= i_a(t) \end{aligned} \quad (9)$$

x_1 es la posición angular, x_2 la velocidad angular y x_3 la corriente de armadura.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0$$

En el Espacio de Estados la representación matricial del funcionamiento del motor queda determinada con las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} .

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u(t) \quad (11)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i_a \end{bmatrix}$$

La técnica de diseño empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria y/o especificaciones de la respuesta en frecuencia, al igual que los requisitos en estado estacionario. Seleccionando una matriz de ganancias **K** apropiada para realimentación de estado, es posible hacer que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea completamente controlable.

Del diagrama en bloques de la Figura 3 se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ u(t) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_i e(t) \\ \dot{e}(t) &= r(t) - y(t) = r(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Se asume que la planta es dada por $\dot{\mathbf{x}}(t)$ controlable y no posee un cero en el origen para evitar que el mismo cancele el polo del integrador.

Asumiendo que la referencia es una función escalón, la dinámica del sistema puede ser descrita como una combinación lineal de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ y $\dot{e}(t)$.

Las ecuaciones de estado correspondiente al sistema completo queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) & \mathbf{B}\mathbf{K}_i \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (13)$$

B. Criterios de Estabilidad

En general siempre vamos a desear que los sistemas no se aparten demasiado de su punto de operación, es importante entonces, antes de poner en funcionamiento un sistema, hacer un análisis para prever si el sistema tendrá variables que diverjan o no (que no diverja es un indicio de que el sistema es “estable”).

Si la energía total de un sistema es continuamente disipada, entonces el sistema (lineal o no) debe eventualmente llegar a un punto equilibrio.

La ecuación,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (14)$$

es conocida como Ecuación de Lyapunov. El criterio de estabilidad se basa en encontrar **P** de esta ecuación, eligiendo previamente **Q**. Generalmente se utiliza **Q = I**.

Sea $x_e = 0$ el estado de equilibrio del sistema lineal invariante descrito por la ecuación,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (15)$$

El estado x_e es asintótica y globalmente estable si y sólo si todos los autovalores de **A** tienen parte real negativa.

La forma cuadrática $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, llamada *Función de Lyapunov*, es la que se busca y debe cumplir con el criterio de Sylvester [9] y ser positiva definida.

La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control esta en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema esta sujeto a una condición inicial. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema esta sujeto a una condición inicial. La incorporación del regulador es fundamental para poder controlar el sistema y asegurar su estabilidad.

III. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los datos para la simulación del servomotor fueron obtenidos de un motor real (el modelo RE 40-40 mm de Maxon® [6] frecuentemente utilizado para accionar prótesis antropomorfas mioeléctricas [7].

Del catálogo del fabricante se tomaron los siguientes valores:

- R_a = Resistencia de la armadura = 1,16Ω.
- L_a = Inductancia de la armadura = 0,329 mH.
- K_t = Constante del par motor = 60,3 mNm/A.
- K_b = Constante de la velocidad = 158 rpm/V.
- b = Coef. rozamiento de los cojinetes = 3,04 rpm/mNm.
- J = Momento de inercia motor y carga = 138 gcm².

Para que un sistema sea controlable, se requiere que la matriz de dimensión $n \times nr$,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{n \times nr} \quad (16)$$

posea rango = n , o lo que es lo mismo, que contenga n vectores linealmente independientes, o bien que el determinante de la matriz $\mathcal{C} \neq 0$ [8].

Polos del sistema: [-1,77+j14,4 ; -1,77-j14,4 ; 0 ; 0]

Polos deseados: [-8 ; -8 ; -4 + j4 ; -4 - j4]

Ganancias obtenidas utilizando ubicación de polos:

K(polos)=[771,7286 10,3801 6,7320 -1,5439e+003]

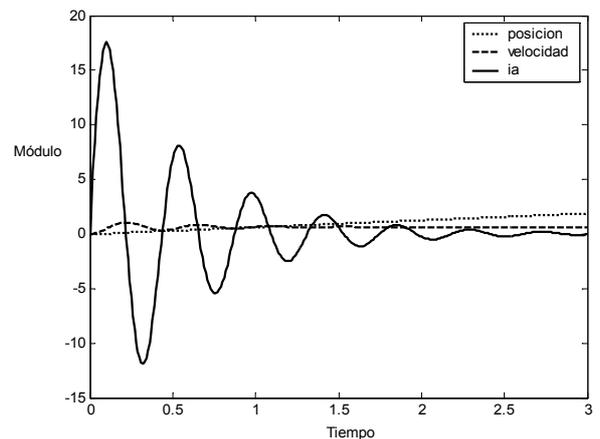


Figura 4. Evolución Sistema Original

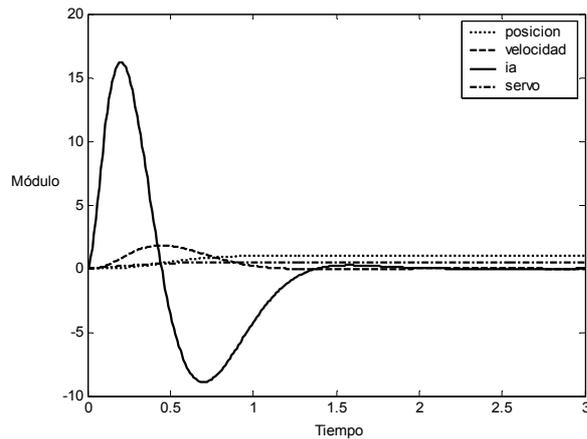


Figura 5. Evolución Sistema Ubicación de Polos

A partir de este nuevo sistema dinámico, cuya orden se incrementa en el orden del integrador, es posible proyectar las matrices de ganancias \mathbf{K} y K_i de forma tal que el sistema resulte asintóticamente estable y que $\mathbf{x}(\infty)$, $\mathbf{e}(\infty)$ y $u(\infty)$ tiendan a valores constantes respectivamente.

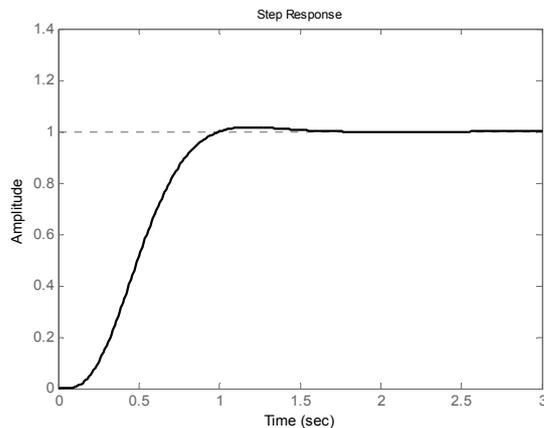


Figura 6. Respuesta del Sistema Servomotor

Se observa en la Figura 6 que la salida atiende los requisitos de diseño preestablecidos, y un tiempo de pico de aproximadamente 1,02 seg.

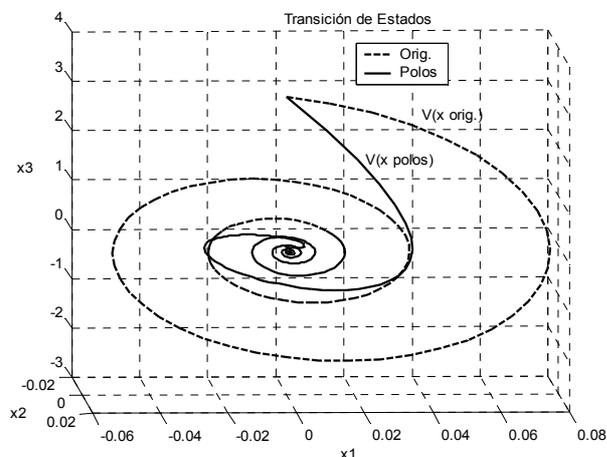


Figura 7. Transición de estados. Funciones de Lyapunov

La Figura 7 nos muestra la estabilidad y la correspondiente convergencia de todo el sistema servomotor aplicando Ubicación de Polos (línea continua) al punto x_e , en comparación con el sistema original (línea

punteada). Lo cual se consigue trabajando con el conjunto de polos deseados.

IV. CONCLUSIONES

Es importante señalar que la matriz \mathbf{K} no es única para un sistema determinado, sino que depende de las posiciones deseadas de los polos en lazo cerrado (los cuales determinan la velocidad y el amortiguamiento de la respuesta). Se debe tener en cuenta que la selección de los polos en lazo cerrado deseados, o de la ecuación característica deseada, es un compromiso entre la rapidez de la respuesta y la sensibilidad ante perturbaciones y ruido en la medida. Es decir, si se incrementa la velocidad de respuesta, por lo general se incrementan los efectos adversos de las perturbaciones y del ruido en la medida. Por tanto, al determinar la matriz de ganancias de realimentación de estado para un sistema determinado, es conveniente examinar mediante simulaciones en un computador las características de respuesta del sistema para varias matrices \mathbf{K} diferentes (basándose en algunas ecuaciones características deseadas distintas) y elegir aquella que ofrezca mejor comportamiento global del sistema.

Las limitaciones aún no resueltas de las prótesis antropomorfas controladas por señales electromiográficas refieren al accionamiento de los servomotores que utilizan fuentes externas de energía, las que requieren carga y mantenimiento frecuentes [10].

Al hacer uso de los criterios de estabilidad, el sistema acorta notablemente la trayectoria desde un estado genérico cualquiera, es decir, asegura su convergencia a su estado de equilibrio.

REFERENCIAS

- [1] El libro blanco de la robótica en España Investigación, tecnologías y formación. Ministerio de Ciencia e Innovación. Gobierno de España. CEA comité español de automática. 1ª Edición. (2011).
- [2] [Http://Www.Who.Int/Mediacentre/Factsheets/Fs352/Es/Discapacidad Y Salud Nota Descriptiva N°352 Septiembre De 2013.](http://Www.Who.Int/Mediacentre/Factsheets/Fs352/Es/Discapacidad Y Salud Nota Descriptiva N°352 Septiembre De 2013.) [on line].
- [3] Cortes Reyes F. (2011). Robótica, control de robots manipuladores. Editorial: Alfaomega Grupo EDITOR.
- [4] Ogata K. (2003). Ingeniería de Control Moderna. 4ta Edición Ed. Pearson.
- [5] Matlab, Toolbox User's Guide. Natick: Massachusetts: The MathWorks Inc., 2006.
- [6] RE 40 \varnothing 40mm, Graphite Brushes, 150 Watt. Catálogo. [On line. Fecha de acceso 4/2017]. http://www.maxonmotor.com/medias/sys_master/root/8816798990366/15-142-EN.pdf.
- [7] Au SK, Weber J, and Herr H 2007 Biomechanical Design of a Powered Ankle-Foot Prosthesis. IEEE International Conf. on Rehabilitation Robotics Pp 298-303.
- [8] Alvarez Picaza C., Pisarello MI., Monzón JE. (2013). "Análisis de la estabilidad de la dinámica de la pared cardíaca basado en la teoría de control moderno". XIX Congreso Argentino de Bioingeniería. VIII Jornadas de Ingeniería Clínica. SABI 2013.
- [9] Alvarez Picaza C., Pisarello MI., Monzón JE. (2016). "Analysis of the stability control of motors used in biomechanical prostheses". VII Congreso Latinoamericano Ingeniería Biomédica. CLAIB 2016.
- [10] Loaiza Bernal JL 2012 Diseño y simulación de un prototipo de prótesis de mano bioinspirada con cinco grados de libertad. Tesis. Universidad Nacional de Colombia Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica Bogotá, Colombia.