

NUEVO FORMATO PARA LA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS CON FUENTES DE TENSIÓN IDEALES (FUENTES DE TENSIÓN DADA), APLICANDO EL MÉTODO DE NODOS

Autor: Gabriel Edgardo Sáez; Pje. 33 N°: 1294, 3500 Resistencia, Chaco, Argentina, c.e.: ge_saez@hotmail.com Instituto: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE (Av. Libertad; 5600, 3400 Corrientes, Corrientes, Argentina)

Resumen

La aplicación del método de nodos a la resolución de circuitos con fuentes de tensión ideales (de tensión dada o resistencia interna nula), se enseña tradicionalmente por el análisis de supernodo. Esta “escuela” de enseñanza nos viene generalmente del ámbito anglosajón, americano principalmente, como se puede ver en los textos de esa procedencia, al igual que su dual, el análisis de supermalla. El análisis de circuitos con fuentes ideales de corriente (de corriente dada o resistencia interna infinita) por el método de mallas efectuando el reemplazo por fuentes “ficticias” – no reales – de corriente, nos viene de la “escuela europea”, más precisamente de Rusia y su zona de influencia. Mi experiencia me ha demostrado que esta forma de enseñar el método de mallas resulta más comprensible y práctica que el de supermalla; sin embargo, para el método de nodos, directamente desaconsejan la resolución de circuitos usando el mismo cuando existen fuentes de tensión ideales. La investigación desarrollada permitirá, usando el método de nodos en circuitos con fuentes ideales de tensión, contar con las mismas ventajas del método de mallas con fuentes ideales de corriente cuando se los analiza reemplazándolos con fuentes ficticias de tensión.

Palabras claves: enseñanza; método de nodos; fuentes ideales de tensión; supernodos.

Introducción

Los métodos de resolución de circuitos eléctricos normalmente enseñados en las universidades argentinas, están en directa relación con la configuración eléctrica del circuito. Así por ejemplo, cuando se lo aborda por el método de mallas se releva el mismo a los efectos de identificar si existen fuentes ideales de corriente y de existir, se aplica uno de dos planteamientos formales; estos son:

- el reemplazo de la fuente de corriente por fuentes ficticias (no reales) de tensión.
- el análisis de supermalla.

Ambos métodos impactan en forma distinta en el estudiante: el análisis de supermalla implica, precisamente, efectuar un análisis topológico del circuito que involucra la rama con fuente de corriente y la escritura de las ecuaciones subsidiarias propias del método de mallas y las que surgen del análisis de supermalla para involucrar el efecto de la fuente de corriente sobre el circuito. En cambio, el método de reemplazo de la fuente de corriente por fuentes ficticias de tensión, transforma el circuito en otro equivalente que se resuelve por el método tradicional de mallas y luego se introduce en las ecuaciones subsidiarias la corrección del valor de la corriente de rama incluyendo el término dado por el valor de la fuente de corriente (solo en las ramas involucradas en la transformación equivalente). Por lo tanto el reemplazo de las fuentes de corriente por fuentes ficticias de tensión se adapta mejor a un formato sistemático de resolución de circuitos, el cual es además, el método tradicional de mallas, que siempre se enseña, con matices, de igual forma.

Cuando abordamos la resolución de un circuito por el método de nodos y del relevamiento del mismo surge la existencia de fuentes ideales de tensión, usualmente se procede de la siguiente forma:

- si solo existe una fuente ideal de tensión, entonces se elige alguno de los nodos a los que se encuentra vinculada y se lo toma como de referencia 0 V, de forma que el otro nodo toma el

valor de la fuente o su opuesto y por lo tanto solo se escriben las ecuaciones de los "n-2" nodos restantes, pues el valor de uno de ellos ha quedado determinado.

- ya sea que exista una o más fuentes ideales de tensión, el circuito siempre es solucionable efectuándose el análisis de supernodo. Del mismo basta comentar que requiere un relevamiento topológico del circuito y el análisis del mismo para involucrar el efecto que la fuente ideal de tensión realiza sobre el circuito.

De lo expuesto se obtienen dos conclusiones: 1) el análisis de supernodo es el dual del análisis de supermalla; 2) no existe en el método de nodos aplicado a un circuito con fuentes ideales de tensión, un formato de resolución que implique una sistematización, o dicho de otra manera, no existe un dual para el método de nodos del reemplazo por fuentes ficticias de tensión para el método de mallas. Podemos sintetizar lo dicho en el siguiente esquema:

Métodos de mallas y nodos					
Método de mallas	Sin fuente de corriente ideal	Método de mallas tradicional	Método de nodos	Sin fuente de tensión ideal	Método de nodos tradicional
	Con fuente de corriente ideal	Análisis de supermalla		Con fuente de tensión ideal	Análisis de supernodo
		Reemplazo de la fuente de corriente por fuentes ficticias de tensión y aplicación del método de mallas tradicional			---

Tabla N° 1:

Esquema comparativo de las resoluciones de circuitos por los métodos de mallas y nodos.

La experiencia recabada en años de enseñanza de clases prácticas de resolución de problemas por el método de mallas, me ha demostrado que para la mayoría de los estudiantes es más sencilla la resolución de circuitos con fuentes ideales de corriente reemplazando las mismas por fuentes ficticias de tensión, que efectuarlo utilizando el análisis de supermalla. Esto es así por la educabilidad^{[1],[2]} mostrada por el estudiantado argentino –de esta región y época– más habituado a la sistematización en la resolución de circuitos.

Por lo tanto nos planteamos el siguiente objetivo: la obtención de un formato de resolución de circuitos utilizando el método de nodos tradicional aun bajo el supuesto de la existencia de fuentes ideales de tensión. Esto no solo implicará llenar un vacío existente en la aplicación de este método sino también ajustar la enseñanza a la educabilidad de los alumnos.

Materiales y métodos

Aclaración: se supone conocidos los métodos y análisis mencionados: mallas^{[3],[4],[5],[6]}, análisis de supermalla^{[4],[5],[6]}, formato del método de mallas con reemplazo de fuentes ideales de corriente por fuentes ficticias de tensión^[3], nodos^{[3],[4],[5],[6]} y análisis de supernodo^{[4],[5],[6]} (ver referencias).

Supóngase un circuito eléctrico, en principio sin fuentes ideales de tensión, con "r+1" nodos; al establecer el sistema de ecuaciones lineales para su resolución obtendremos un sistema generalizado de "r" ecuaciones linealmente independientes^[7], como el de la expresión N° 1

[illegible]

Expresión N° 1:

Sistemas de ecuaciones lineales generalizado del método de nodos, para un circuito cualquiera.

donde:

U_p : potencial del nodo “p” referido a uno cualquiera considerado con potencial nulo (0 V).

g_{pp} : sumatoria de las conductancias de las ramas que concurren al nodo "p"

g_{pi} : sumatoria de conductancias que vinculan los nodos “p” e “i”

$\sum_p$ E.g: sumatoria algebraica de los productos de los valores de fuentes de tensión por la conductancia serie correspondiente, de las ramas que concurren al nodo “p”

$\Sigma_p I$: sumatoria algebraica de los valores de fuentes de corriente concurrentes al nodo “p”

siendo “r” la cantidad de nodos del circuito, menos uno, y “p” e “i” dos nodos cualesquiera del mismo.

Se entiende que para nodos no vinculados, la conductancia entre ambos es nula.

Supongamos ahora un circuito con una fuente ideal de tensión (podrían haber más, pero para simplificar se supone una). Destacamos en un gráfico la parte del circuito donde se aprecia esa fuente.

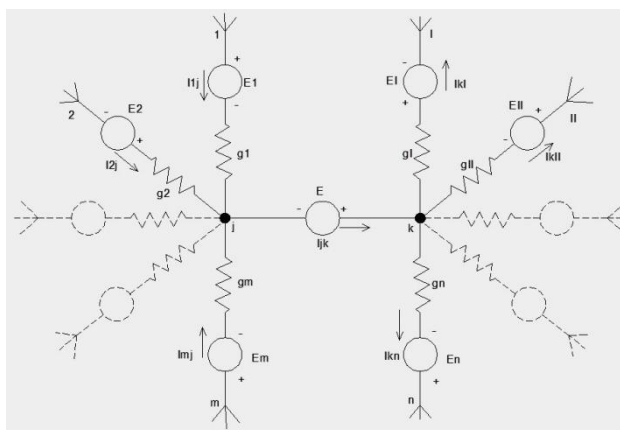


Gráfico N° 1:

Esquema circuital parcial de una rama con fuente de tensión ideal vinculada a los nodos “j” y “k” y las ramas concurrentes a dichos nodos.

En el gráfico N° 1 podemos ver que al nodo “j” concurren “m” ramas que lo vinculan con los nodos numerados de 1 a “m”, además de la rama con fuente ideal de tensión. Al otro vínculo, nodo “k”, concurren “n” ramas que lo vinculan con los nodos numerados de 1 a “n”. Como somos libres de suponer un sentido para las corrientes de rama elegiremos todas las corrientes de las ramas 1 a “m” con sentido entrante al nodo “j” y todas las corrientes de las ramas 1 a “n” con sentido saliente al nodo “k”; para la corriente de la rama con fuente ideal de tensión elegimos el sentido “de j a k”. Para

simplificar las expresiones suponemos que no existen fuentes de corriente que estén concurriendo a los nodos “j” y “k”.

Sabido es que para establecer las ecuaciones de nodos se escriben las relaciones establecidas por la ley de Ohm para cada rama y se despejan de las mismas las corrientes. Entonces, para las “m” ramas concurrentes al nodo “j” y para las “n” ramas concurrentes al nodo “k” (gráfico N° 1), tendremos:

$$\begin{array}{l} U_1 \cdot g_1 - U_j \cdot g_1 - E_1 \cdot g_1 = I_{1j} \\ U_2 \cdot g_2 - U_j \cdot g_2 + E_2 \cdot g_2 = I_{2j} \\ \dots\dots\dots \\ U_m \cdot g_m - U_j \cdot g_m - E_m \cdot g_m = I_{mj} \\ U_k \cdot g_l - U_l \cdot g_l - E_l \cdot g_l = I_{kl} \\ U_k \cdot g_{ll} - U_{ll} \cdot g_{ll} + E_{ll} \cdot g_{ll} = I_{kll} \\ \dots\dots\dots \\ U_k \cdot g_n - U_n \cdot g_n + E_n \cdot g_n = I_{kn} \end{array}$$

Expresión N° 2:

Corrientes en las “m” ramas concurrentes al nodo “j” y en las “n” ramas concurrentes al nodo “k” obtenidas de las relaciones establecidas por la ley de Ohm.

Al establecer la ecuación que por ley de Ohm corresponde a la rama con fuente ideal de tensión, en la misma no figurará la corriente I_{jk} por no existir una caída de potencial en conductancia alguna, ya que el concepto de fuente ideal de tensión implica la existencia de una conductancia infinita. Escribamos para esta rama la expresión dada por la ley de Ohm:

$$U_i + E = U_k$$

Expresión N° 3:

Ley de Ohm aplicada a la rama con fuente ideal de tensión.

Lamaré al nodo “j” “nodo auxiliar de referencia” y al nodo “k”, “nodo referido”. La elección de nombres hace alusión a que el potencial del nodo “k” queda en función del nodo “j” por la expresión N° 3. Reemplacemos ahora en las ecuaciones de la expresión N° 2, el valor “ U_k ” por el dado en la expresión N° 3; luego de reagrupar términos las expresiones de las corrientes de las ramas concurrentes al nodo “k” tomarán la forma:

$$\begin{array}{l} U_j \cdot g_I - U_l \cdot g_l - E_l \cdot g_l + E \cdot g_l = I_{kl} \\ U_j \cdot g_{II} - U_{II} \cdot g_{II} + E_{II} \cdot g_{II} + E \cdot g_{II} = I_{kII} \\ \dots\dots\dots \\ U_j \cdot g_n - U_n \cdot g_n + E_n \cdot g_n + E \cdot g_n = I_{kn} \end{array}$$

Expresión N° 4:

Reemplazo del potencial de nodo “ U_k ” en la expresión N° 2, según lo establecido en la expresión N° 3.

Con las ecuaciones de la expresión N° 4 y las que no han sufrido variación de la expresión N° 2 (corrientes en las ramas concurrentes al nodo “j”), armemos el sistema generalizado de “i” ecuaciones linealmente independientes (expresión N° 1) del método de nodos procediendo, como es usual, al reemplazo de las corrientes en las ecuaciones de la regla de Kirchhoff de los nodos –sumatoria de corrientes en los nodos igual a cero*– por los valores de las expresiones N° 2 y N° 4 y procediendo luego a reagrupar los términos:

*Nota: se adopta el criterio de: corrientes entrantes al nodo negativas y salientes, positivas

[illegible]

Expresión N° 5:

Sistemas de ecuaciones lineales generalizado del método de nodos, para el circuito en estudio.

La ecuación (1) de la expresión N° 5 es la que se obtiene al reemplazar en la ecuación de la regla de Kirchhoff del nodo “j” los valores de corrientes correspondientes dados por la expresión N° 2. La ecuación (2) de la expresión N° 5 es la que se obtiene al reemplazar en la ecuación de la regla de Kirchhoff del nodo “k” los valores de corrientes correspondientes dados por la expresión N° 4. Las ecuaciones (3), (4) y (5) de la expresión N° 5 son las que se obtienen para los nodos “I”, “II”... “n”.

En la ecuación (2) de la expresión N° 5 despejamos la corriente “ I_{jk} ”; reemplazamos en la (1) y reagrupamos términos:

$$\begin{aligned}
& -U_{1\cdot}g_1 - U_{2\cdot}g_2 - \cdots - U_{I\cdot}g_I - U_{II\cdot}g_{II} - \cdots + U_{j\cdot}(g_1 + g_2 + \cdots + g_m + g_I + g_{II} + \cdots + g_n) - \cdots \\
& \quad \cdots - U_{m\cdot}g_m - U_{n\cdot}g_n = \sum_m E_{\cdot}g + \sum_n E_{\cdot}g - E_{\cdot}g_I - E_{\cdot}g_{II} - \cdots - E_{\cdot}g_n
\end{aligned}$$

Expresión N° 6:

Ecuación del nodo auxiliar de referencia.

La expresión N° 6 se obtendría por el método de nodos en una transformación del circuito efectuada de la siguiente forma: con los nodos “j” y “k” se arma un solo nodo, cortocircuitándolos y eliminando la fuente ideal de tensión y se conecta en paralelo a las “n” ramas concurrentes al nodo “k” (eliminado), fuentes de corriente de valor “ E_{gI} ”, “ E_{gII} ”... “ E_{gn} ” y direcciones todas salientes del nodo (ver gráfico N° 2).

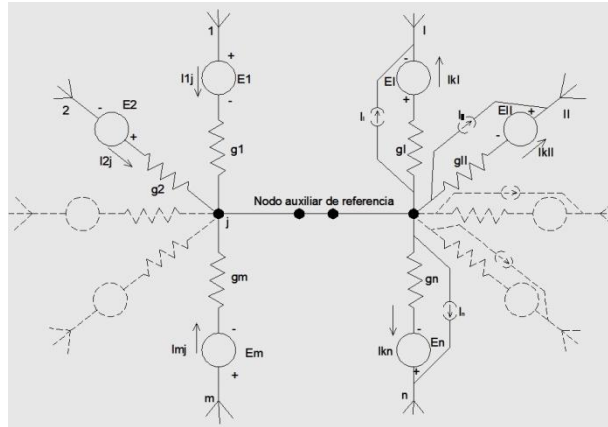


Gráfico N° 2:
Esquema circuital parcial transformado.

La expresión N° 5 tomará la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1.g_{11}-U_2.g_{12}-\dots-U_p.g_{1p}-\dots-U_r.g_{1r}= \sum E.g + \sum I \\ -U_1.g_{12}+U_2.g_{22}-\dots-U_p.g_{2p}-\dots-U_r.g_{2r}= \sum_1 E.g + \sum_1 I \\ \\ -U_1.g_1-U_2.g_2-\dots-U_I.g_I-U_{II}.g_{II}-\dots+U_j.g_{jj}-\dots-U_m.g_m-U_n.g_n= \sum_{m;n} E.g - \sum_n I \\ \\ -U_1.g_{1I}-U_2.g_{2I}-\dots+U_I.g_{II}-\dots-U_j.g_I-\dots-U_r.g_{Ir}= \sum_I E.g + \sum_I I + I_I \\ -U_1.g_{1II}-U_2.g_{2II}-\dots+U_{II}.g_{III}-\dots-U_j.g_{II}-\dots-U_r.g_{IIr}= \sum_{II} E.g + \sum_{II} I + I_{II} \\ \\ -U_1.g_{1n}-U_2.g_{2n}-\dots+U_n.g_{nn}-\dots-U_j.g_n-\dots-U_r.g_{nr}= \sum_n E.g + \sum_n I + I_n \\ \\ -U_1.g_{1r}-U_2.g_{2r}-\dots-U_p.g_{pr}-\dots+U_r.g_{rr}= \sum_r E.g + \sum_r I \end{array} \right.$$

Expresión N° 7:
Sistemas de ecuaciones del circuito transformado.

Podemos apreciar en la expresión N° 7 que el sistema de ecuaciones se ha visto reducido a “ $r-1$ ” ecuaciones al desaparecer el nodo referido (nodo “ k ”) por la transformación efectuada en el circuito. En las ecuaciones de la expresión N° 7: “ g_{ij} ” es la sumatoria de las conductancias de las ramas que concurren al nodo auxiliar de referencia luego de cortocircuitarlo con el nodo “ k ”; “ $\Sigma_{m,n} E.g$ ” es la sumatoria algebraica de los productos de los valores de fuentes de tensión por la conductancia serie correspondiente de las ramas que concurren al nodo auxiliar de referencia luego de cortocircuitarlo con el nodo “ k ”; “ $\Sigma_n I$ ” es la sumatoria de las fuentes de corriente de valor “ $I_I = E.g_I$ ”, “ $I_{II} = E.g_{II}$ ”... “ $I_n = E.g_n$ ” introducidas en paralelo a las “ n ” ramas que concurrían al nodo “ k ” eliminado (todas salientes). En las ecuaciones de los nodos “ I ”, “ II ”... “ n ” figurarán las nuevas fuentes de corriente “ I_I ”, “ I_{II} ”... “ I_n ” (todas entrantes).

Resultados y Discusión

Al resolver el sistema de ecuaciones de la expresión N° 7 obtenemos el potencial de todos los nodos del circuito original, menos uno. Obsérvese que el potencial del nodo faltante (el nodo referido [nodo "k"]), lo obtengo con la expresión N° 3 y por lo tanto he llegado al objetivo planteado en la "Introducción".

Si bien de por sí el presente es un aporte valorable intrínsecamente (nótese que llena el hueco dejado en la tabla N° 1), discutamos el aporte que pueda efectuar al proceso enseñanza aprendizaje. El abordaje que se hará es en el campo de las teorías de la educación.

El concepto "educabilidad" que en sus orígenes estuvo vinculado a las cualidades naturales (físicas) del alumno para poder aprender y aprehender conocimientos, desde hace ya un tiempo se lo hizo extensivo a los adquiridos previamente y que sirven de soporte para fijar otros nuevos. Estos conocimientos previos están relacionados con la ubicación espacio temporal del estudiante, o sea el "alumno de determinado lugar y época".

Por lo tanto todo estudiante con cualidades naturales que permitan educarlo en algún concepto en particular, reaccionará de manera diferente ante el impulso educativo en un lugar u otro, en una época u otra. Entonces contar con distintas herramientas que favorezcan el proceso enseñanza-aprendizaje es fundamental ya que el proceso es dinámico.

Por último, además de cualidades, lugar y época aplicados a un grupo de estudiantes, no debemos perder de vista al individuo, o sea a "determinado alumno", el cual podrá elegir distintas formas de aplicar un saber aprendido, entre aquellas con la cual se sienta más cómodo.

Conclusiones

Podemos enunciar el siguiente Teorema*:

Todo circuito con fuentes ideales de tensión entre nodos puede resolverse por el método de nodos transformándolo en otro equivalente en el cual se coloca en paralelo a las ramas concurrentes a uno de los dos nodos vinculados por la fuente ideal considerada (llamado nodo referido), fuentes ficticias (no reales) de corriente cuyo valor es el de la fuente ideal por la conductancia de la rama en paralelo, y su sentido saliente o entrante según la polaridad positiva de la fuente esté vinculada o no al nodo referido, y se cortocircuita la fuente formando con el otro nodo (llamado nodo auxiliar de referencia) uno solo equipotencializado.

y el siguientes Corolario*:

El potencial hallado para el nodo equipotencializado es el del auxiliar de referencia, y el del nodo referido se obtiene de aquel por incremento o decremento del mismo en un valor igual al de la fuente ideal de tensión cortocircuitada y según la polaridad de la misma respecto de los nodos.

*Nota: se entiende "Teorema" y "corolario" en el sentido usual de la Ingeniería y no formal de la Matemática.

Una primer conclusión intrínseca al tema desarrollado es que el teorema previamente escrito y su corolario son el dual del método de mallas aplicado a un circuito con fuentes ideales de corriente resuelto por reemplazo de las mismas por fuentes ficticias de tensión.

Veamos dos casos particulares:

1) Estrella de fuentes ideales de tensión:

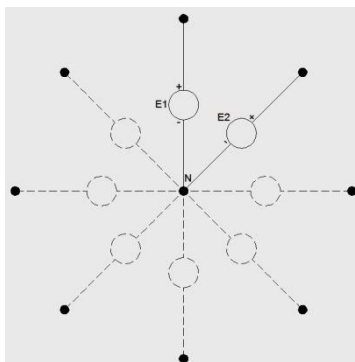


Gráfico N° 3:
 Estrella de fuentes ideales de tensión.

Nos referimos como estrella de fuentes ideales de tensión a una disposición como la del gráfico N° 3. Es fácil ver que nos vemos forzados a elegir como nodo auxiliar de referencia el centro de la estrella y como nodos referidos sus puntas. En el sistema de ecuaciones lineales habríamos obtenido una ecuación basada en la regla de Kirchhoff de los nodos en la cual no se efectúan reemplazos algunos de las corrientes por las expresiones basadas en la Ley de Ohm y en dicha ecuación deberíamos reemplazar los valores de corrientes procediendo para cada una de ellas de la misma forma que la realizada para obtener la expresión N° 6.

2) Guirnalda de fuentes ideales de tensión

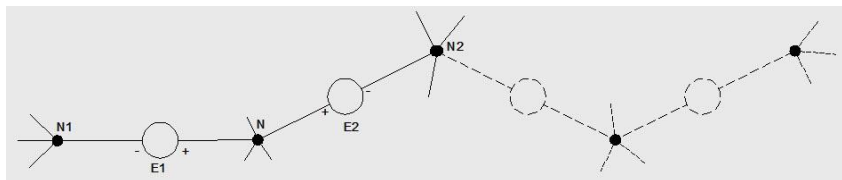


Gráfico N° 4:
 Guirnalda de fuentes ideales de tensión

Nos referimos como guirnalda de fuentes ideales de tensión a una disposición como la del gráfico N° 4. En este caso podemos tomar cualquier nodo como el auxiliar de referencia. Cada nodo referido agregará el valor de una fuente de tensión ideal, transformando la expresión N° 3 en una sumatoria algebraica de fuentes ideales de tensión sumada al nodo auxiliar de referencia y por lo tanto, en cada nodo referido se colocarán las fuentes ficticias de corriente en paralelo a las ramas con conductancia no infinita con un valor igual al de la sumatoria de las fuentes (hasta ese nodo) por la conductancia de la rama paralela y sentido saliente o entrante según el resultado de la sumatoria sea positivo o negativo, respectivamente.

Por último, desde el punto de vista pedagógico y considerando la discusión efectuada podemos sacar como conclusión que los teoremas, corolarios y casos especiales tratados previamente no tienen la intención de anular, reemplazar o ignorar las otras posibilidades de resolución de estos tipos de circuito, sino de complementarlas.

Agradecimientos

Al ingeniero Jorge Omar Sosa, responsable de la asignatura Electrotecnia I de Fa.C.E.N.A. UNNE, bajo cuya tutela me formé como docente.

A la ingeniera Fiorella Francescutti por la confección de los gráficos.

A David Lazarte, compañero de trabajo, sin cuyos conocimientos informáticos hubiese tardado mucho en transformar imágenes “.CAD” a “.JPG”.

Referencias

- 1) NASSIF, R. (1974). Pedagogía General. Editorial Kapelusz; Buenos Aires. p. 135-141
 - 2) BAQUERO, R. (2001). Cuaderno de Pedagogía Universidad Nacional de Rosario: año IV N° 9. Imprenta Universitaria; Rosario. p. 71-85.
 - 3) ZEVEKE, G. V.; IONKIN, P. A. (1984). Principios de Electrotecnia 1. Grupo Editor de Buenos Aires; Buenos Aires. p. 33-42.
 - 4) BOYLESTAD, R. L. (1998). Análisis Introductorio de Circuitos (8° edición). Prentice Hall; México y otras. p. 239-261.
 - 5) VAN VALKENBURG, M. E. (1999). Análisis de Redes (3° edición). Limusa Noriega Editores; México y otras. p. 81-96.
 - 6) DORF, R. C. (1998). Circuitos Eléctricos; Introducción al Análisis y Diseño (2° edición). Alfaomega; México. p. 116-128 y 132-142.
 - 7) ROJO, A. O. (1998). Álgebra II (14° edición). El Ateneo; Buenos Aires. p. 181-188
-