# Un problema matemático de 3000 años aún actual

Circe Mary Silva da Silva,
y
Juan Eduardo Nápoles Valdés

Programa de Pós-Graduação em Educação,
Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil,
FACENA, UNNE, (3400) Corrientes, Argentina, y
FRRE-UTN, (3500), Resistencia, Chaco,
Argentina

cmdynnikov@gmail.com, jnapoles@exa.unne.edu.ar,
jnapoles@frre.utn.edu.ar

RECIBIDO: *7 de junio de 2010*
ACEPTADO: *22 de diciembre de 2010*

RESUMEN

En este trabajo, presentamos el curioso Problema de los Carteros, también conocido como Problema del Cartero Chino. Contaremos un poco de su historia, el contexto de la matemática china donde surge, y algunos de los tratamientos que ha recibido en trabajos matemáticos y en libros didácticos a lo largo de estos 30 siglos de vida. Al final del trabajo, presentamos algunas extensiones, generalizaciones y aplicaciones de este problema.

## Introducción

La historia de los problemas matemáticos, parte integrante de la Historia de la Matemática, fascina por su belleza y su valor lúdico. Develar sus misterios, involucrarse en los laberintos que tantas personas recorrieron para formular y resolver estos retos, es desafiante. Por otra parte, el conocimiento de esta historia tiene también su valor intrínseco, tanto didáctico como histórico, epistemológico y matemático[1]. Es particularmente interesante la historia de problemas antiguos, a fin de desarrollar estrategias para el desarrollo del pensamiento reflexivo en el aula que propicien un mejor aprendizaje y comprensión de la Matemática. Para Grugnetti[2], cuando se usan los problemas antiguos, tanto los profesores como los alumnos pueden comparar sus estrategias de resolución con las originales. Ese abordaje didáctico se torna interesante pues los alumnos entienden mejor la solución y la economía que los símbolos y los procesos posteriores les brindan cuando resuelven dichos problemas.

En este trabajo presentamos el curioso Problema de los Carteros, también conocido como el Problema de los Correos o Problema del Cartero Chino. Inicialmente contaremos un poco de su historia y el contexto de la matemática china en que surge, a fin de motivar la lectura y mostrar la "vida" de este problema que surge en China antes de Cristo y aún hoy está presente en manuales escolares de varios países. Incluiremos el abordaje de matemáticos como Newton, Lacroix y Borel, entre otros. Y daremos voz también, como dice Certeaux, a aquellos personajes menos conocidos, como son los autores de libros de texto y didácticos. Vamos a presentar el contexto dentro del libro didáctico en que el problema aparece, tanto como otras implicaciones y motivaciones paralelas que este problema generó: debate en torno al infinito, los números negativos y el cero. Algunos autores de la actualidad serán analizados también a fin de evidenciar su permanencia como problema escolar. Para finalizar, se presentan algunas extensiones y generalizaciones matemáticas.

## Breve historia del Problema de los Carteros

Este problema se engloba en una clasificación más amplia, la de situaciones hipotéticas. Por ejemplo, cuando se considera el desplazamiento de dos personas en la misma dirección y sentido contrario, que pueden encontrarse en un punto, o cuando se considera la persecución de animales. En la figura 1, se ve una antigua ilustración de un perro persiguiendo a una liebre. Si la liebre tiene una ventaja de 900 pasos, y 5 pasos del perro corresponden a 7 de la liebre: ¿cuándo el perro alcanzará a la liebre?

[1]Véase, por ejemplo, la conferencia dictada por el segundo autor: "A História da Matemática, vista através de seus problemas", en el *VIII SNHM*, Belém do Pará, Brasil, 5 al 8 de abril de 2009.

[2]Grugnetti, L., "Ancient Problems for the Development of Strategic Thinking", en John Fauvel, Jan Van Maanen (Org.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study, Dordrecht, Kluwer, 2000, pág. 78.



Contenido


FIGURA 1. Diseño de Filippo Calandri, en *Aritmetica*, 1491.

Según Topfke[3], los problemas de este tipo pueden ser caracterizados como problemas de entretenimientos o lúdicos. Ellos no aparecieron en papiros egipcios o tablillas babilónicas, ni entre los griegos. Comenzaron a surgir entre los chinos, y posteriormente en la India, el mundo árabe y Occidente. El más comentado de los textos chinos, *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, fue conocido cuando en el 236 Liu Hui escribió un comentario sobre él e incorporó nuevos problemas sobre el cálculo de distancias inaccesibles. Liu explica que el texto fue escrito 1000 años antes de Cristo y recopilado de nuevo alrededor del año 100 d.C.[4]

Inicialmente los enunciados eran simples y contemplaban dos mensajeros, pero con el tiempo, la variedad y complejidad de los enunciados mostró la riqueza de este tipo de problemas desde el punto de vista pedagógico. Más adelante presentaremos una muestra de los autores de libros de textos y matemáticos que dedicaron tiempo para su formulación y resolución.

A fin de facilitar la presentación y análisis, proponemos algunas caracterizaciones para este problema.

[3]Tropfke, J., "Geschichte der Elementarmathematik", *Band 1: Arithmetik und Algebra*, Berlín, Nueva York; Walter de Gruyter, 1980, pág. 588.

[4]Véase por ejemplo `http://www.malhatlantica.pt/mathis/china/nove.htm`. Es de destacar que ya en el año 656 se introdujo como libro de texto oficial para la formación de empleados oficiales de nivel superior del Imperio.



Contenido

**I.** Teniendo en cuenta los personajes que aparecen en los enunciados.

| *Personas* | *Vehículos* | *Animales* | *Plantas* |
|---|---|---|---|
| Mensajeros, carteros, viajeros, caminantes | Navíos, botes | Perros, liebres, zorros, caballos, aves | Sin especificación |

**Ejemplos:**

**1.** "Dos caballos, uno bueno y otro malo, parten de Chang'an para Qi. La distancia entre Chang'an y Qi es de 3000 li. El caballo bueno avanza el primer día 193 li, y en los días siguientes aumenta su recorrido en 13 li por día. El caballo malo avanza 97 li el primer día y disminuye continuamente su recorrido en medio li por día. El caballo bueno llega primero a Qi y después vuelve por el mismo camino y encuentra al caballo malo. ¿Al cabo de cuántos días se reencontraron los dos caballos y qué distancia recorrió cada uno? **Solución.** $15 + 135/191$ días hasta que se encontraron. El caballo bueno viajó $4534 + 46/191$ li y el caballo malo viajó $1465+145/191$ li". *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, Capítulo VII (Jiuzhang sunsh o Chiu Chang Suan Shu o 九章算術).

**2.** "Hay un muro de 9 chi de altura. Se siembra una planta en la cima, la cual crece hacia abajo 7 cun por día. Debajo se siembra otra planta que crece hacia arriba 1 chi por día. ¿Cuál es el número de días en que se encontrarán y cuánto es lo que cada una de ellas crece? *Solución.* $5+5/17$ días, la planta de la cima crece 3 chi $7 + 1/17$ cun; la de abajo crece 5 chi $2 + 16/17$ cun". *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, Capítulo VII (Jiuzhang sunsh o Chiu Chang Suan Shu o 九章算術).

**II.** En cuanto al tipo de movimiento.

| *Movimiento rectilíneo* | *Movimiento en un triángulo rectángulo* | *Movimiento circular* |
|---|---|---|
| • Una persona (animal, navío, etc.) se desplaza con la misma velocidad.<br>• Una persona (animal, navío, etc.) se desplaza con velocidad variada.<br>• Una persona (animal, navío, etc.) se desplaza con avances y retrocesos.<br>• Dos personas (animales, navíos, etc.) una detrás de la otra, persecución.<br>• Dos personas (animales, navíos, etc.) en direcciones contrarias. | Dos objetos móviles se desplazan en una trayectoria que forma un ángulo recto (vuelo de los pájaros). | Ejemplos en la astronomía, por la conjunción de los planetas. |

**Ejemplos:**

1. **Movimiento rectilíneo.** Carteros: "Un cartero parte de Madrid para Roma y no se sabe cuántas leguas camina por día; mas se sabe que otro cartero partió 4 días después de la misma villa de Madrid y fue por el mismo camino, para Roma y camina 20 leguas por día. Si alcanzó al primer cartero en 6 días. ¿Cuántas leguas camina el primer cartero cada día?" (Jerónimo Cortés, 1604).

2. **Movimiento en un triángulo rectángulo.** Aves: "A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A que distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?" (véase `http://www.librosmaravillosos.com/algebrarecreativa/capitulo02.html#p05`)

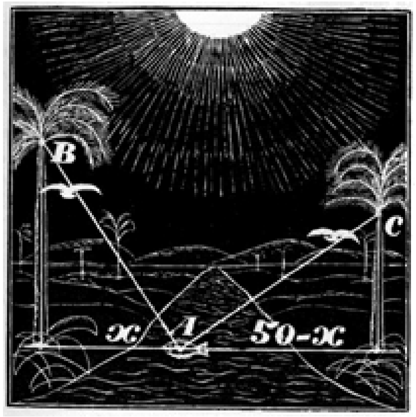



FIGURA 2. Ilustración del libro *Álgebra recreativa* de Perelman.

3. **Movimiento circular.** Personas: "Dos hombres corren alrededor de una ciudad redonda y amurallada. Los dos comienzan a correr al mismo tiempo y en el mismo lugar. Uno demora 4 horas en dar la vuelta y el otro necesita 5 1/2 horas. Los dos corren hasta que el más rápido alcanza al otro ¿En cuántas horas lo conseguirá?" (Zhang Quijian, siglo V).

## Contexto matemático chino en el que surge el problema

El desarrollo de los primeros conocimientos matemáticos en China tiene una rica historia de muchos siglos. Sin embargo, sigue siendo notable la disparidad y pobreza de la información fidedigna disponible; es más, hasta la segunda mitad del siglo XIX, en el mundo occidental se conocía muy poco sobre la matemática china[5]. Y no es por ausencia de resultados, pues, según

[5]Pueden consultar al respecto: Boyer, C., *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1996; Ríbnikov, K., *Historia de las Matemáticas*, Editorial Mir, Moscú, 1987; Wussing, H., *Conferencias sobre Historia de la Matemática*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1989, y, por supuesto, Martzloff, J. C., *A History of Chinese Mathematics*, Springer Verlag, 2006. En un contexto general del desarrollo de la ciencia china, son recomendables: Needham, J., *La Science chinoise et lOccident*, Seuil, 1969; y Temple,



Contenido

Ling Wang, estos conocimientos se remontan hasta el siglo XIV a.C., referidos principalmente al sistema decimal de cálculo, a la simbólica jeroglífica de los números[6], a la existencia de dispositivos auxiliares de cálculo[7], a diversas operaciones con regla, compás y escuadra, y a la resolución de problemas, entre otros.

En particular, los problemas de los trabajos matemáticos chinos antiguos, se pueden dividir en las cuatro categorías principales siguientes[8], dependiendo de la situación que tratan:

*i)* Problemas reales aplicados a específicas situaciones y que se usan directamente.
*ii)* Problemas pseudo-reales, dirigidos a situaciones de la vida real, pero no usables directamente.
*iii)* Problemas recreativos que usan datos ficticios de la vida real, a veces grotescos, pero siempre de una forma entretenida.
*iv)* Problemas especulativos o de matemática pura.

Debemos decir que esta división no es exhaustiva ni hermética, pues problemas de todos los tipos pueden llevar a preguntas y técnicas matemáticas, e inversamente se pueden aplicar estos resultados en problemas específicos, pseudo-específicos o recreativos.

En este contexto, entenderemos por regla resolutoria a cualquier secuencia de instrucciones o de directivas inequívocas que se puedan, en principio, utilizar para obtener la solución de una clase dada de problemas en un número limitado de etapas elementales. Así, las reglas resolutorias se pueden pensar como algoritmos, aunque este último término no se deba admitir en el sentido actual, puesto que las reglas chinas no son siempre totalmente explícitas. Más aún, las reglas resolutorias son "estratagemas dogmáticas de la acción", las que si se siguen mecánicamente debe llevar automáticamente al resultado previsto, pero en la práctica deben permitir un cierto grado de libertad de acción, puesto que no todas las etapas de los cálculos rigurosos se especifican. Por ejemplo, el método chino conocido

R., *Quand la Chine nous précédait*, Bordas, 1988.

[6]Desde el siglo II a.C., se difundió la llamada escritura de cifras de varilla o bambú, la cual se modificó en el siglo XIII.

[7]En particular el llamado *Suanpan*, literalmente tablero de cálculo, llamado posteriormente en Japón *Soroban*.

[8]Más detalles sobre los problemas antiguos chinos, pueden ser consultados en Libbrechtu, lrich, "Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: the Shu-shu chiu-chang of Ch'zn Chiu-shao [Qin Jiushao]", *The MIT Press Rev.*, Cambridge (Mass.), 1973; Yabuuchi, K., *THG* **50** (1975), pp. 124–128; Sanford Vera, *The History and Significance of Certain Standard Problems in Algebra*, Nueva York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1927, pág. 416; Tropfke, Johannes, *Ob. Cit.*, revisada por Vogel, Kurt, Karin Reich y Helmuth Gericke. Berlín/Nueva York: Walter de Gruyter, 1980, pág. 514; Jens, Hoyrup, "Sub-scientific Mathematics: Undercurrents and Missing Links in the Mathematical Technology of the Hellenistic and Roman World", tomado de un preprint escrito para *Aufstieg und Niedergang der romischen Welt* **2** núm. 37, 3 (1990) (55 p.), ver p. 11 y Martzloff, Jean-Claude, *Ob. Cit.* (2006).



**Contenido**

hoy como *Ruffini-Horner* lleva siempre a evaluar el orden de magnitud de la raíz, aunque está claro que la misma observación se cumple también para todas las matemáticas medievales, chinas o no.

En los textos matemáticos chinos, la regla resolutoria aparece raramente aislada, por ejemplo como objeto de una teoría, pero a menudo en asociación con un problema específico al cual le proporciona la clave. Cuando este modelo no se sigue, los algoritmos se indican independientemente de cualquier situación específica y de una manera absolutamente general. Sin embargo, incluso en tal caso, problemas específicos muy a menudo acompañan el texto del algoritmo en sí mismo (solamente la formulación del algoritmo como tal no se relaciona con el contenido específico de los problemas). En tal caso el orden es el siguiente:

*Declaración del problema + Respuesta numérica + Regla resolutoria*

En general el término *shu* (prescripción) se utiliza generalmente para introducir la regla resolutoria, pero otros términos como *fa* (regla, método), *jue* (truco), *mzjue* (el truco secreto) y *ge* (canción), también se utilizan, con o sin mención de la consonancia musical correspondiente, para permitir al matemático cantar sus algoritmos (los tres últimos términos no son de uso general; aparecen sobretodo en las aritméticas populares del período Ming). Aunque no siempre ocurre así, algunas reglas tienen nombres exactos que pueden indicar su función explícitamente, por ejemplo *hefen shu* (regla para combinar partes o regla para agregar fracciones), *kai lzfang shu* (regla para extraer la raíz cúbica).

Sin embargo, algunos de estos nombres pueden indicar solamente cómo funcionan las reglas; por ejemplo, la versión china del método de Horner a menudo se llama la regla "adicionar-multiplicar", *zeng-cheng*. En otros casos, las reglas tienen nombres que son inusuales en matemáticas. Por ejemplo, la regla *dayan*, que es utilizada para solucionar problemas de residuo, toma su nombre de un método adivinatorio del Yijing. Sin embargo, esto no implica que la regla dayan tiene una conexión matemática con la adivinación. Las reglas pueden ser cortas o largas; su longitud no está directamente vinculada a su complejidad. La regla de substracciones alternadas que se utiliza para simplificar fracciones se indica en 33 caracteres escritos, mientras que la regla dayan, mencionada anteriormente, requiere 873 caracteres.

Desde el punto de vista algorítmico, ciertas reglas se describen de una manera lineal, aunque los procesos iterativos ("bucles") son a menudo también perceptibles; una regla complicada puede, en sí misma, referirse a otras reglas que desempeñan el papel de subprogramas, mucho antes de



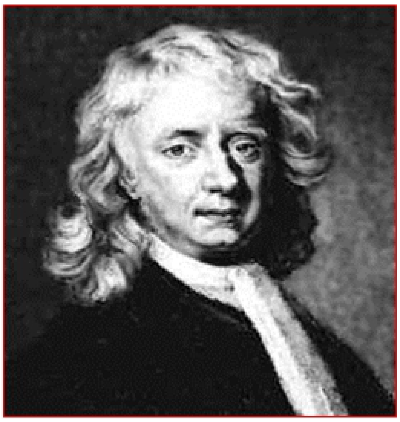
**Contenido**

la invención del término, aunque debemos decir que tales características nunca son objeto de explicación o teorización en los textos especializados.

Sin embargo, los matemáticos chinos a menudo encuentran necesario aclarar sus reglas desde varios puntos de vista, por ejemplo, para explicar el origen lógico de una regla al componer un comentario (zhu), o para rastrear la aplicación gradualmente usando los números determinados que aparecen en el texto, cuando la regla misma se formula de modo general, al dar lo que llaman los matemáticos chinos una solución áspera[9] (*cao*). Alternativamente el término *xicao* (literalmente, solución detallada) también se utiliza en vez de cao. Finalmente, para vigilar la corrección de los cálculos, a veces los cómputos se realizan en orden inverso. Esta técnica se conoce como la regla *huan yuan* (literalmente, “restitución del estado inicial”).

Es necesario puntualizar que, en el transcurso de muchos siglos, la Matemática china se desarrolló preferentemente con una orientación cálculo-algorítmica creó los elementos esenciales del proceder algebraico para la resolución de problemas. Esta tendencia estuvo condicionada (al igual que en otras civilizaciones no helénicas) por las condiciones socio-económicas en que se desarrollaron: los “matemáticos” eran funcionarios del Imperio, más como técnicos contables y administrativos (en obras de irrigación, transporte y defensa) que como especialistas en sí. Las preocupaciones constantes sobre el calendario y las cuestiones religiosas acrecentaron esta orientación hasta mediados del siglo XV.

## El Problema de los Carteros en el “Álgebra” de Newton



En el otoño de 1683, Newton[10] depositó en los archivos de la Universidad un registro permanente del curso que dictó aquel año en Cambridge. Era una copia manuscrita de 97 carillas sobre los fundamentos del álgebra y sus aplicaciones a la resolución de problemas en aritmética y geometría. El texto fue reproducido con correcciones y agregados por Willian Whiston, su sucesor, con el permiso de Newton, y fue publicado en 1707[11]. Para este trabajo hemos utilizado la versión inglesa de 1769[12].

[9]Llamado “áspero”, probablemente, porque los pasos de progresión de la resolución contienen raramente el funcionamiento detallado de cómputos complejos tales como los de la extracción de la raíz.

En la página 147 se inicia el tema ecuaciones subdivido en los ítems: formas de las ecuaciones, reducción; orden de la ecuación simple o final; transformaciones de dos o más ecuaciones para determinar las cantidades desconocidas; determinación de una cantidad desconocida por la igualdad de sus valores o determinación de una cantidad desconocida por la sustitución de sus valores en ella; determinación de una cantidad desconocida de varias dimensiones en cada ecuación; método de extraer cualquier número de cantidades de las ecuaciones, y cómo una cuestión puede ser traducida en una ecuación.

El pasaje de la lengua natural al simbólico en el último ítem es bastante comentada por el autor con sugerencias de cómo realizar tal tarea; entre los ejemplos resueltos se encuentra el Problema de los Carteros, cuyo tratamiento presentamos a continuación, así como su resolución y sus generalizaciones.

**Problema V (pp. 180–181).** Dos carteros $A$ y $B$, que están a 59 millas de distancia uno del otro, parten una mañana para encontrarse. El cartero $A$ recorre 7 millas en 2 horas y $B$ hace 8 millas en 3 horas, pero $B$ inicia su jornada una hora más tarde que $A$. Encontrar cuál es el número de millas que $A$ recorre antes de encontrar $B$.

*Resolución del autor.* Denominemos como $x$ el espacio recorrido. Entonces $59-x$ será el recorrido de $B$ en la jornada. Una vez que el viajero $A$ recorre 7 millas en 2 horas, él hará el espacio $x$ en $2x/7$ horas, porque 7 millas : 2 horas :: $x$ millas : $2x/7$ horas. Y así, una vez que $B$ recorre 8 millas en 3 horas, él recorrerá su espacio $59 - x$ en $(177 - 3x)/8$ horas y entonces usted tendrá $1 + (177 - 3x)/8 = 2x/7$ y por reducción $35 = x$. Por tanto, multiplicando por 8, usted tendrá $185 - 3x = 16x/7$. Entonces, multiplicando por 7 usted tendrá $1295 - 21x = 16x$ o $1295 = 37x$. Y, finalmente, dividiendo por 37, surge $35 = x$. Por tanto, 35 millas es la distancia que $A$ debe recorrer antes de encontrar a $B$.

**Primeros cuestionamientos.** ¿Qué aprendemos con esa exposición? ¿Es clara y didáctica la resolución del autor? ¿Resolveríamos ese problema actualmente con la misma estrategia? ¿El enunciado revela relación con la vida del siglo XVII? ¿Es sofisticado el lenguaje? ¿Es un problema de la vida

[10] Sir Isaac Newton (1642–1727), nacido en una familia de granjeros en la región de Woolsthorpe cerca de la ciudad de Cambridge (Inglaterra), recibió los más altos honores de la Corona Británica por sus logros científicos. Incluso, el Instituto Isaac Newton de Ciencias Matemáticas, el primero de su clase en el Reino Unido, se inauguró en esa Universidad el 3 de Julio de 1992.

[11] Silva, C., y Sad, L., *Uma abordagem pedagógica do uso de fontes originais em História da Matemática*, Coleção História da Matemática para Professores, Rio Claro; SBHMAT, 2007, pág. 12.

[12] *Universal Arithmetick or a Treatise of arithmetical Composition and resolution*, escrito en latín por Sir Isaac Newton, traducido por Ralphson, y revisado y corregido por Cunn. Londres, W. Johnston, 1769.



Contenido

o un problema escolar? ¿Qué podemos discutir en el contexto del aula con los alumnos de la enseñanza fundamental sobre tal fragmento histórico? ¿Continúan siendo actuales los textos de Newton?

La exposición clara y el lenguaje simple del autor llama la atención para un problema que necesita para su resolución ecuaciones de primer grado con dos variables. No presenta una visualización geométrica para ayudar la comprensión del enunciado. Sin embargo, explica paso a paso la resolución, introduciendo las variables $x$, y $y$, y colocando en forma de ecuación el problema. No se prolonga su discusión y no presenta otros casos particulares del mismo problema. Al contrario, después de su resolución, enuncia un caso más general para problemas de este tipo, con el título "El mismo más general".

**Enunciado general.** Dadas dos velocidades de dos cuerpos móviles $A$ y $B$, tendiendo al mismo lugar, junto con el intervalo o distancia de los dos lugares o tiempos, y el que ellos inician su movimiento, determinar el lugar de encuentro de ellos.

**Resolución del autor.** "Supongamos que la velocidad del cuerpo $A$ es tal que él pasa a cubrir el espacio $c$ en el tiempo $f$, y la del cuerpo $B$ es tal que pasa a cubrir el espacio $d$ en un tiempo $g$; y que el intervalo entre los espacios es $e$ y $b$ el tiempo en que ellos comienzan a moverse" (pág. 184).

A continuación él propone para esta situación dos casos posibles:

"Caso I. Entonces ambos tienden al mismo lugar (el mismo camino), y siendo $A$ el cuerpo que en el inicio del movimiento está más distante del lugar al que ellos tienden: llamemos a esa distancia $x$, y sustrayendo de esta distancia $e$, quedará entonces $x - e$, la distancia de $B$ al lugar para el cual ellos tienden. Y desde que $A$ pasa por el espacio $c$, en el tiempo $f$, el tiempo en el que el recorre el espacio será $fx/c$, porque el espacio $c$ está al tiempo $f$, como el tiempo está para $fx/c$. Y así, una vez que $B$ recorre el espacio $d$ en el tiempo $g$, el tiempo en que él recorre $x - e$ será $(gx - ge)/d$. Y por reducción, $(cge + cdb)/(cg - df)$ o $(ge + db)/(g - df/c) = x$. Mas, si $A$ comienza a moverse primero, aumenta $h$ para el tiempo $(gx - ge)/d$ y así tendremos $fx/c = h+(gx-ge)/d$ y por reducción $(cge-cdh)/(cg-df) = x$".

Para el segundo caso, si los cuerpos tienden para una dirección entre ellos, él considera la distancia $x$ recorrida por $A$ hasta el punto de encuentro y $e-x$ la distancia de $B$ hasta el encuentro. Resolviendo de manera semejante, llega a la expresión $(cge - cdb)/(cg + df) = x$ y si $A$ inicia antes el movimiento, llega a la expresión $(cge + cdh)/(cg + df) = x$.

Para el álgebra del siglo XVII que estaba aún en fase de construcción, las contribuciones de Newton son relevantes, pues él tiene la preocupación de generalizar las cuestiones, discutir sobre el grado de la ecuación, relacionar el grado de la ecuación con el número de raíces, discutir sobre los diferentes tipos de raíces de la ecuación y desde el punto de vista didáctico muestra cómo pueden ser resueltos algebraicamente los problemas de aritmética.

Quedan dudas si la preocupación del autor es realmente aproximar al lector o aprendiz a problemas cotidianos, o si él quiere mostrar el poder del álgebra en la resolución de problemas hipotéticos, con alguna relación al mundo real.

*Un impasse histórico*

Quizás estas vacilaciones de Newton sean mal interpretadas, sin embargo para tener una mejor idea de la colosal tarea de éste, veamos el protocolo de rigor que imperaba a finales del siglo XVIII muchos años después de su muerte:

- Cada concepto matemático debía ser explícitamente definido en términos de otros conceptos cuya naturaleza era suficientemente conocida[13].
- Las pruebas de los teoremas debían ser completamente justificadas en cada una de sus etapas, o bien por un teorema anteriormente probado, por una definición, o por un axioma explícitamente establecido.
- Las definiciones y axiomas escogidos debían ser lo suficientemente amplios para que pudiesen cubrir los resultados ya existentes.
- La intuición (geométrica o física) no era un criterio válido para desarrollar una prueba matemática.

Las dos primeras caracterizaciones habían permanecido más o menos estables desde la época de Euclides. Las dos últimas, son un pronunciamiento en contra de concepciones matemáticas muy comunes hasta el siglo XVIII. Si a esto le sumamos que la fundamentación lógica, conceptual y filosófica del cálculo diferencial e integral era objetivamente imposible (pero absolutamente necesaria) sobre la base de los conceptos sobre los cuales aparecieron, entenderemos por qué los esfuerzos de Newton, Leibniz, Lagrange y otros, hasta los mismos comienzos del siglo XIX, terminaron en el fracaso. Así, en el desarrollo y finalización del llamado "Siglo de las Luces" subsistían graves insuficiencias en el desarrollo matemático[14]:

*Incorrecta comprensión del concepto de diferencial*: En Leibniz, L'Hospital, Euler y otros matemáticos del siglo XVIII, el concepto de diferencial se

[13]La argumentación reposa en un punto de partida conformado por razones consensuales para un grupo de "entendidos".

[14]Completamos a Sánchez F., C., *Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la matemática*, U.H., 1987.



Contenido

confundía en el incremento. Una aproximación suficientemente correcta del concepto de diferencial fue dada sólo por Lagrange (1765).

*Insuficiente comprensión del concepto de función*: De hecho hasta fines del siglo XIX los matemáticos partiendo de la intuición mecánica y geométrica, entendieron por fundamentación sólo las funciones analíticas representadas por una determinada fórmula (en algunos casos infinita como es el caso de las consideraciones de Fourier ligadas con su teoría del calor). Sólo con la aparición de las funciones discontinuas en problemas prácticos, los matemáticos prestaron atención a la formación lógica del concepto de función.

*Ausencia de un concepto claro de límite*: Los seguidores de Newton: Maclaurin, Taylor, Wallis y otros, mantuvieron una larga discusión sobre el hecho de que si la variable alcanza o no el límite. Este problema no era fácil, precisamente porque no había una definición precisa de límite y sólo se determinaba por razonamientos mecánicos y geométricos. Esta insuficiencia permaneció hasta Cauchy (1823).

*El concepto de continuidad funcional era intuitivo*: Esto se explica porque los matemáticos del siglo XVIII consideraban todas las funciones continuas y por eso no tenían la necesidad de precisar este concepto. Sólo a principios del siglo XIX se comenzó a pensar en este problema (otros detalles los puede encontrar en la última sección de esta conferencia).

*Concepto difuso de integral definida*: Relacionado ante todo con la ausencia de un teorema de existencia. Se consideraba por ejemplo, que la fórmula de Newton-Leibniz tenía un significado universal, es decir, que era válida para todas las funciones y en todas las condiciones. Los esfuerzos en la precisión del concepto hechos por Lacroix, Poisson y Cauchy pusieron en primer plano el concepto de límite y de continuidad. Pero el problema de la integral definida sólo halló una respuesta completa hasta fines del siglo XIX en los trabajos de Lebesgue.

*Se necesitaba tener una clara comprensión de lo que era un sistema numérico*: En particular, la estructura del sistema de los números reales, lo que no sucederá sino con las investigaciones de Dedekind y Cantor, entre otros; otra de las concepciones básicas relacionadas con este tema, era el concepto mismo de número (aquí, nuevamente debemos mencionar a los matemáticos del siglo XIX y a Frege en especial, para seguir con Russel, etc.).

De esta manera, el movimiento del análisis matemático en el siglo XVIII hacia su fundamentación puede describirse completamente en el sistema *teoría-práctica*, esto es, como interrelación dialéctica entre estos momentos.

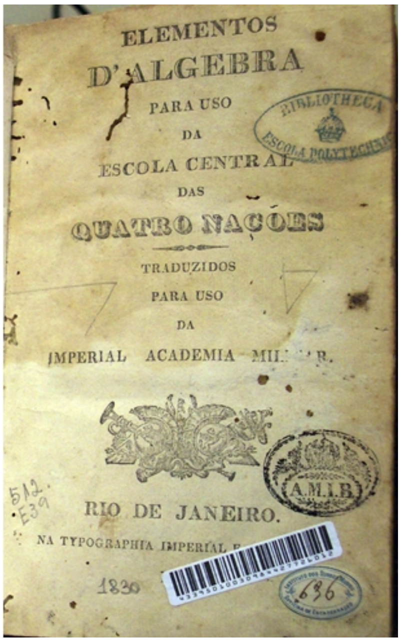


**Contenido**

La necesidad del cálculo de áreas y volúmenes y del hallazgo de máximos y mínimos entre otros problemas concretos conllevó a la creación del algoritmo del cálculo diferencial e integral. La aplicación de estos algoritmos a nuevos problemas inevitablemente conllevó a la generalización y precisión de los algoritmos. En última instancia, el análisis se formalizó como lógicamente no-contradictorio, como un sistema relativamente cerrado y completo.

## El Problema de los Carteros en Lacroix

Silvestre F. Lacroix (1765–1843), autor francés de libros didácticos, obtuvo con sus textos gran influencia en la enseñanza de la matemática en el siglo XIX, no tanto en Francia como sí en otros países europeos y EUA[15]. En Brasil sus libros comenzaron a ser traducidos y utilizados al crearse la Academia Militar de Río de Janeiro, y colocada en Carta de Lei, del 4 de diciembre de 1810, la recomendación de usar este autor. Durante todo el siglo XIX, en Brasil, la enseñanza superior usó ampliamente los libros de Lacroix, tanto en la versión francesa, como en sus traducciones.




Traducción brasilña de 1830 de *Elémens d'Algebre* de Lacroix.

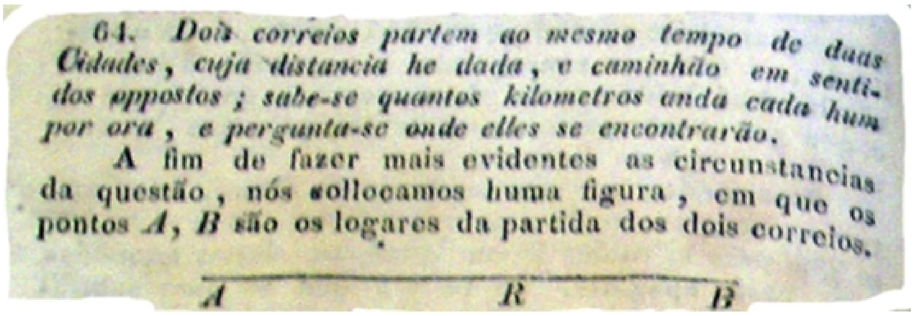
En nuestro análisis utilizamos la versión francesa de 1812 (segunda edición) y la traducción portuguesa de 1830.

Lacroix (1812) utiliza varios epígrafes para abordar el problema de los carteros (desde el §64 hasta el §76). Su estilo de presentación es didáctico, pues comienza siempre por el enunciado más simple (cada cartero está en un posición y ambos caminan en sentidos opuestos) y que siempre tiene solución. El problema inicial reza así: "Dos carteros parten al mismo tiempo de dos ciudades, cuya distancia es dada, y caminando en sentido opuesto; se sabe cuantos kilómetros anda cada uno por hora, y se pregunta donde ellos se encontrarán" (véase la figura siguiente).

[15]Quizás el más prolífico escritor de libros de textos de los tiempos modernos si nos guiamos por las múltiples ediciones hechas de sus obras. Por ejemplo, en 1848 apareció en París la vigésima edición de su *Traité elémentaire d'arithmétique* y la sexagésima de sus *Elémens de géométrie*. La vigésima de sus *Elémens dalgbre* fue publicada en París en 1858, y la novena edición del *Traité élémentaire de calcul* en 1881. Y estos números no incluyen el gran número de ediciones en otras lenguas.



Contenido


64. Dois correios partem ao mesmo tempo de duas Cidades, cuja distancia he dada, e caminhão em sentidos oppostos ; sabe-se quantos kilometros anda cada hum por ora, e pergunta-se onde elles se encontrarão.

A fim de fazer mais evidentes as circunstancias da questão, nós collocamos huma figura, em que os pontos $A$, $B$ são os logares da partida dos dois correios.



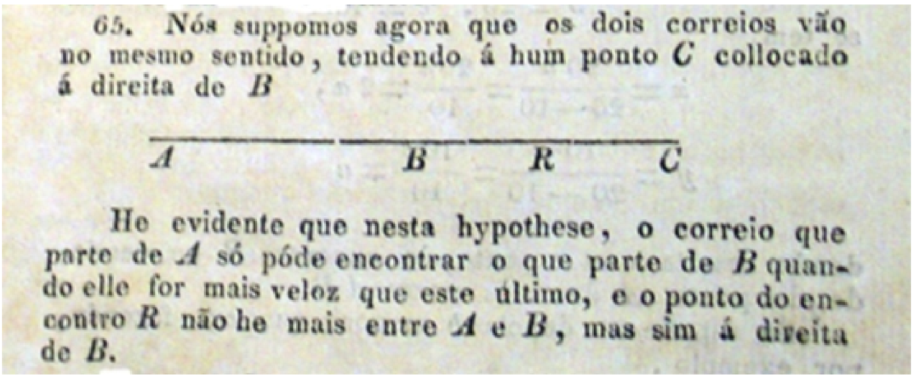
Fragmento de la página 76, versión de 1830.

En este caso, el autor comienza con una ilustración, que según él permite hacer más evidente el enunciado. Para las incógnitas y elementos conocidos él sugiere las letras minúsculas:

- Para la distancia entre los puntos de partida $A$ y $B$, él escribe $a$;
- Para el número de kilómetros que recorre en una hora el cartero que parte de $A$, él escribe $b$;
- Para el número de kilómetros que recorre en una hora el correo que parte de $B$, él escribe $c$;
- El camino $AR$ lo denomina $x$;
- El camino $BR$ lo denomina $y$;
- $AR + BR = AB$, pues $R$ está entre $A$ y $B$ y es el punto de encuentro de los dos carteros;
- Como $AR + BR = AB$, tendremos $x + y = a$.

Después de colocar en letras los datos conocidos y desconocidos, él establece las demás relaciones. “Advirtiendo que los caminos $x$ y $y$ son recorridos al mismo tiempo, se notará que el primer cartero, que anda en una hora un número $b$ de kilómetros, andará el espacio $x$ en un tiempo designado por $x/b$” (pág. 76). De manera semejante, el otro cartero andará un espacio $y$ en un tiempo $x/c$. Luego $x/b = x/c$. Las ecuaciones serán dos: $x + y = a$ y $x/b = x/c$. Por manipulaciones algebraicas se llega a $x = ab/(b + c)$.

Luego de esta resolución, el autor dialoga con el lector diciendo que, como en esta última fórmula no aparece ningún signo negativo, la cuestión siempre tendrá respuesta y los carteros deben encontrarse. Más adelante, en el §65 él tratará el caso más interesante en que no siempre los carteros se encuentran. La formulación exacta es la siguiente “Supongamos ahora que los carteros van en la misma dirección, tendiendo a un punto $C$ colocado a la derecha de $B$” (véase la figura siguiente).


65. Nós suppomos agora que os dois correios vão no mesmo sentido, tendendo á hum ponto $C$ collocado á direita de $B$



He evidente que nesta hypothese, o correio que parte de $A$ só póde encontrar o que parte de $B$ quando elle for mais veloz que este último, e o ponto do encontro $R$ não he mais entre $A$ e $B$, mas sim á direita de $B$.

Fragmento pág. 77, 1830.

La resolución del autor se apoya en la precedente. Usando la misma simbología, él concluye que $AR - BR = AB$, o que $x - y = a$. La segunda relación es la misma de la cuestión anterior $x/b = x/c$. Por manipulaciones algebraicas, él llega a la expresión $x = ab/(b - c)$. Para que esta ecuación dé un valor positivo, $b$ debe ser mayor que $c$.

Él ejemplifica con casos numéricos:

- Si $b = 20$ y $c = 30$, el valor de $x$ es $2a$ y el de $y = a$;
- Si $b = 10$ y $c = 20$, el valor de $x$ es $a$ y el de $y = -2a$.

El segundo caso lo explica de la siguiente forma (página 79): "estos resultados estando afectados del signo muestran que la cuestión no se puede resolver en el sentido del enunciado; es absurdo suponer que el cartero que parte de $A$ pueda encontrar al que parte de $B$, yendo el primero menos veloz y después del otro" (véase el gráfico utilizado por Lacroix en la imagen siguiente).

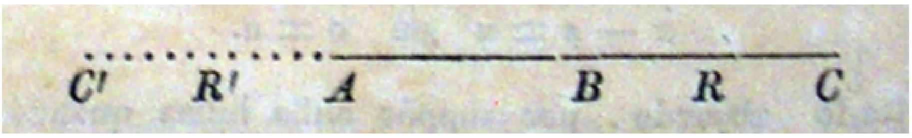



Figura pág. 79, Lacroix (1830).

En el §66, Lacroix afirma que los valores negativos encontrados cuando se sustituyen en la ecuación la resuelven. No obstante, ellos no son tan "legítimos" como los positivos, aunque ellos verifiquen las ecuaciones. En este caso él propone un cambio del enunciado del problema "si tuviésemos supuesto que el cartero que parte de $B$ va después del otro. Este cambio en el enunciado produce un cambio en la dirección de los caminos de los carteros, pues ellos no tienden más al punto $C$, sino a $C'$, como se representa en la figura" (pág. 79).

Según el autor, el encuentro no sucedería en el punto $C$ sino en $R'$. De eso resulta que $BR' - AR' = AB$ y se puede escribir $y - x = a$. Como la otra ecuación se mantiene $x/b = x/c$, se llega por manipulaciones algebraicas a $x = a$ y entonces $y = 2a$, ambos valores positivos y que resuelven la cuestión.

En el §67, él presenta la situación que considera *enteramente absurda*, cuando se supone que los dos carteros van a la misma velocidad. En este caso nunca se encontrarán. Diferente del caso anterior, el autor alerta que ninguna modificación en el enunciado podrá resolver esa situación. La larga explicación que sigue es interesante porque envuelve el concepto de infinito. Veamos tal y como aparece en el texto.

De manera peculiar, el autor concibe el infinito matemático como una *idea negativa* una vez que surge de una imposibilidad. Al mismo tiempo en que afirma que una cantidad en el denominador de una fracción nunca podría llegar a ser cero, acaba concluyendo que toda expresión de la forma $m/0$ se considera como símbolo del infinito. El dilema del autor es visible y, para conformar la situación, él propone en el §69, que si los carteros parten del mismo punto, con velocidades iguales, ellos no se encontrarán en ningún punto particular, pues el encuentro tendría lugar durante todo el recorrido. Si los puntos $A$ y $B$ coinciden, se llega a las ecuaciones $x = 0 \cdot b/0$, $y = 0 \cdot c/0$. La expresión $0/0$ es interpretada como símbolo de una cantidad indeterminada. El autor llama la atención al hecho que esta expresión no tiene el mismo origen que la precedente, o sea, $m/0$.

## El Problema de los Carteros en el "Álgebra" de Borel[16]

Cuando Émile Borel (1871–1956) escribió este libro, era profesor adjunto de la Sorbonne y de la Escuela Normal Superior. Fue encaminado, según los programas oficiales, para la enseñanza secundaria en 1905. Con diez capítulos, inicia el primero con una revisión (con énfasis en el simbolismo y los números negativos), siguiendo con elementos de cálculo algébraico, ecuaciones e inecuaciones de primer grado, problemas de primer grado; variaciones del binomio de primer grado: representación gráfica; ecuaciones de segundo grado: estudio del trinomio, problemas de segundo grado; estudio y representación gráfica de las variaciones de la función homográfica, nociones sobre derivadas, progresiones y logaritmos: interés compuestos.

En el cuarto capítulo, el autor presenta una interesante discusión sobre cómo resolver problemas usando el álgebra. Él sugiere cuatro pasos: *1*) esco-

[16]Borel, Emile, *LAlgèbre*, París, Bibliotheque Armand Colin, 1905.



**Contenido**

ger las desconocidas; *2*) colocar el problema en ecuación; *3*) resolver y discutir las ecuaciones; *4*) discutir el problema. Cada paso es ejemplificado a través de un problema. El problema escogido para el segundo paso pertenece a la temática que estamos tratando.

"Dos viajeros se ubican sobre la ruta de París a Lyon; los dos están entre Pariś y Lyon, el primero está a 35 km de Paris y el segundo a 30 km de Lyon. El primero va en dirección a Lyon con una velocidad de 20 km por hora y el segundo se dirige a Paris a una velocidad de 4 m por segundo; se necesita saber en cuánto tiempo se encontrarán ellos, sabiendo que la distancia de París a Lyon es de 500 km" (pág. 122).

La discusión es extensa y detallada. "Nosotros colocaremos como desconocido el tiempo $x$, que será el momento del encuentro; este tiempo será calculado positivamente en relación al futuro y expresado en horas: escogeremos así un origen de los tiempos, un sentido positivo para el tiempo y una unidad de tiempo. Mas nuestro enunciado encierra también un espacio. Así escogeremos un origen del espacio, por ejemplo, París, un sentido positivo, por ejemplo de París para Lyon, y una unidad de espacio, por ejemplo, en kilómetros. Con estas unidades la posición del primer viajero queda definida por el número $+35$ y su velocidad es $+20$; en cuanto al segundo viajero, su posición queda definida por $500 - 30 = 470$, pues Lyon está a 500 km de París y él se encuentra a 30 kms de Lyon en dirección a París; en cuanto a su velocidad, es preciso observar que está dada por 4 m por segundo, pues él recorre en 1 minuto $4 \times 60$ m y en una hora $4 \times 60 \times 60| = 14400$ m, esto quiere decir 14.4 km, él se dirige de Lyon para París, esto significa en sentido negativo. Su velocidad es entonces $-14.4$ como las unidades de espacio y velocidad escogidas. Esos cálculos preliminares realizados para colocar en ecuación son inmediatos; es suficiente escribir que tenemos como objetivo el tiempo $x$ de los dos viajeros para el mismo punto, o sea, cuando las distancias a París son iguales, según la ecuación del movimiento uniforme, la distancia del primer viajero a París en el tiempo $x$ es $35 + 20x$ y la distancia del segundo $470 - 14.4x$; la ecuación del problema es entonces $35 + 20x = 470 - 14.4x$" (pp. 122–123).

En ese momento, el autor no resuelve la ecuación. El objetivo era apenas ejemplificar paso a paso como *ecuacionar un problema*[17]. Retoma un problema semejante en el mismo capítulo. Curiosamente la versión del problema de los carteros aparece en la forma de una persecución a un ladrón de bicicleta.

"Problema IV. Un ladrón se apoderó de una bicicleta y siguió una ruta con una velocidad de 20 km por hora. En su persecución, 3 minutos después

[17]Según sus propias palabras.



Contenido

partió otro ciclista a una velocidad de 22 km por hora. ¿En cuánto tiempo él alcanzará al ladrón?" (pág. 127–128).

La solución presentada por el autor es la siguiente: "Designemos por $x$ el tiempo buscado, expresado en minutos y contado a partir del momento en que el ladrón partió. Cuando el ciclista lo alcanza, él tendrá recorrido el mismo camino, el primero habiendo circulado durante $x$ minutos con una velocidad de 20 km por hora y el segundo habiendo circulado durante $x-3$ minutos con una velocidad de 22 km por hora. Como el camino recorrido durante un minuto es 60 veces menor que el camino recorrido en una hora, la ecuación del problema será $20x/60 = 22(x-3)/60$. Multiplicando ambos miembros por $30^{10x=11(x-3)}$, de donde $x = 33$. El ladrón será alcanzado 33 minutos después de su partida. El alumno verificará este resultado".

Este fue el único ejercicio con resolución encontrado sobre el tema, aunque en la relación de ejercicios propuestos sobre este capítulo se encuentra, por ejemplo, el siguiente:

"245. Dos cuerpos se mueven a lo largo de una circunferencia, en el mismo sentido, a partir de dos puntos diferentes. La menor distancia que los separa, medida a lo largo de la circunferencia, es de 16 m; uno de los cuerpos alcanza al otro en 32 segundos si ellos se mueven en un sentido o en 40 segundos si ellos se mueven en sentido opuesto. Al paso que uno hace una vez en torno a la circunferencia, la distancia recorrida por el otro excede en 4.50 m el recorrido de la circunferencia. ¿Cuál es este recorrido y con cuál velocidad se mueven los cuerpos?" (pág. 379).

## Problema de los Carteros en libros didácticos brasileños

A continuación, presentamos una breve mirada sobre libros didácticos brasileños publicados en los siglos XIX y XX y en los cuales se destaca el problema de los carteros. Escogemos las siguientes obras para el análisis:

| *Título* | *Autor(es)* | *Local/Editor/Año* |
|---|---|---|
| *Álgebra Elementar* | Antonio Trajano | Río de Janeiro, Companhia Typográfica do Brasil, 1905 (5a edição) |
| *Elementos de Álgebra* | João Borges e Gomes Cardim | São Paulo, N. Falcone, 1903 |

Antonio Trajano fue un autor de libros didácticos muy popular en Brasil. En el libro señalado arriba, presenta tres versiones del problema. Comienza con el problema de la persecución de animales: "Una liebre huye de un perro que la persigue a 60 metros de distancia, el perro corre 40 metros por



Contenido

minuto, y la liebre corre 36, ¿en cuántos minutos el perro alcanzará a la liebre?” (pág. 110).

La solución presentada por el autor sigue una metodología semejante a la de Newton, en el que la solución es explicitada en dos columnas, una con el lenguaje corriente y en la otra en el lenguaje simbólico.

| | |
|---|---|
| Sea $x$ el número de minutos. El perro andando 40 metros por minuto, en $x$ minutos anda $40x$. Por idéntica razón la liebre anda $36x$. Para que el perro alcance a la liebre, es necesario que él cubra los $36x$ que anda la liebre, y además los 60 metros que lo separan de ella. Por las condiciones del problema, la ecuación debe ser | $40x = 36x + 60$ |
| Resuelta la ecuación, vemos que el número de minutos requerido es 15. | $40x - 36x = 60$<br>$4x = 60$<br>$x = 15$ |

Ése parece ser un problema de motivación, pues el autor prefiere generalizar el problema. Así, los valores 60, 40 y 36 son sustituidos por las letras $a$, $m$ y $n$. La ecuación del problema se convierte en $mx = nx + a$, cuya resolución permite llegar al valor de la incógnita $x = a/(m - n)$.

Luego aplica la generalización a tres problemas particulares.

“Del puerto de Río de Janeiro sale un vapor navegando 12 millas por hora, cuando ya había alcanzado una distancia de 72 millas, salió del mismo puerto otro vapor en el mismo rumbo, navegando 16 millas por hora, ¿en cuántas horas el último vapor alcanzó al primero?

Solución: $\dfrac{a}{m-n} = \dfrac{72}{16-12} = \dfrac{72}{4} = 18$ horas”.

“Un halcón viendo a una paloma que estaba a 80 metros de distancia, voló para alcanzarla, en el mismo instante la paloma huyó del halcón; volando el halcón en cada minuto 8 metros más que la paloma, ¿en cuántos minutos la alcanzará?

Solución: $\dfrac{a}{m-n} = \dfrac{80}{8} = 10$ minutos”.



Contenido

"Entre dos viajeros que siguen la misma dirección en la misma calle, hay una distancia de 56 km, el que camina al frente anda a 6 kilómetros por hora, y el otro 10, ¿en cuántas horas éste alcanzará al otro?

Solución: $\dfrac{a}{m-n} = \dfrac{56}{10-6} = \dfrac{56}{4} = 14$ horas".

Además de los ejercicios resueltos y propuestos, el autor propone que se discutan los problemas y explica lo que él entiende por discusión de los problemas.

"Cuando aparece un problema generalizado, es decir, cuando sus cantidades conocidas están representadas por letras, nos podemos preguntar ¿cuáles serán los diversos resultados de la solución de este problema, si asignamos a esas cantidades valores particulares o imaginarios. Discutir un problema es asignar valores particulares a sus cantidades generalizadas y luego interpretar los resultados".

En la siguiente tabla, damos el resumen de las expresiones algebraicas de las diversas soluciones:

| | |
|---|---|
| Solución positiva, $x = n$ | Solución cero, $x = \dfrac{0}{n}$ |
| Solución negativa, $x = -n$ | Solución indeterminada, $x = \dfrac{0}{0}$ |
| Solución infinita, $x = \dfrac{n}{0} = \infty$ | Solución absurda, $0 = n$ |

Para ejemplificar sobre una discusión de problema, él toma el problema de los carteros: "Dos mensajeros parten simultáneamente desde dos lugares $A$ y $B$ que distan $a$ millas de distancia uno del otro, ambos siguiendo la misma dirección, uno andaba $m$ millas por hora y el otro $n$ millas, ¿en cuántas horas uno alcanzó al otro?"

Según el autor, hay muchos modos de resolver el problema aunque él presenta la más fácil.

| | |
|---|---|
| Sea $x$ el número de horas requerido; como un cartero anda $m$ millas por hora, en $x$ horas él andará $mx$; por semejante razón el otro cartero andará $nx$. Como ignoramos los valores de $m$ y $n$, vamos a suponer $m > n$. El cartero que anda $mx$ para alcanzar al otro precisa vencer la distancia $a$, y aún la distancia $nx$ que el otro cartero anda. La ecuación debe ser por tanto | $mx = nx + a$ |
| | $mx - nx = a$ |
| El resultado | $x(m - n) = a$ |
| | $x = \dfrac{a}{m - n}$ |

La respuesta, que es el número de horas requeridas en el problema, es de la forma $a/(m - n)$. Esto implica cinco resultados o formas diversas de solución.

**1ª** Las tres cantidades son positivas y $m > n$, en este caso el valor del cociente será positivo, *solución positiva*. En este caso, la interpretación de la solución es que los carteros se encontrarán.

**2ª** Si $m < n$, en este caso $m - n$ será menor que cero y la *solución es negativa*. La interpretación de esta solución es dada por el autor: "Pero cuando el valor de la incógnita aparece negativo, muestra que en el problema hay un defecto que debe ser corregido. En esta suposición de los valores, el defecto es evidente, porque si el correo que va adelante, camina más rápido del que va detrás, es claro que éste nunca podrá alcanzarlo para estar juntos, y cuanto más caminen, más grande será la distancia que los separa. En este caso la solución es negativa y demuestra que el problema debe ser modificado para tener una solución positiva. Por la simple lectura del problema, comprendemos que los dos carteros seguían la dirección:

$$m \ldots n \ldots \rightarrow$$

pero el problema no está diciendo cuál de ellos iba delante o detrás, no nos permite pensar así, por lo que podemos modificar el sentido de la dirección haciéndolos ir en sentido contrario:

$$\leftarrow \ldots m \ldots n$$



Contenido

y de este modo la solución se tornará positiva, porque, siendo $n > m$, la diferencia $(n - m)$ será positiva" (pág. 119).

**3ª** Si $m = n$, entonces $a/(m - n) = a/0 = \infty$ y la *solución es infinita*. Él explica el significado de esta expresión diciendo: "Se dice que los dos carteros estarán juntos a una distancia infinita del punto de partida. Sin embargo esta expresión significa simplemente en el lenguaje común, que ellos nunca se encontrarán, o que es imposible encontrarse. Son de esta naturaleza todos los casos que, en álgebra, presentan una solución infinita" (pág. 120).

**4ª** Si $a = 0$, y $m - n \neq 0$. En este caso la solución es cero. Para el: "Este resultado es evidente una solución, porque, si no hay distancia entre los dos carteros, es porque ellos están juntos, y si están juntos no hay necesidad de que se junten" (pág. 120).

**5ª** Si $a = 0$ y $m = n$ entonces el número de horas será indeterminado, porque la solución $0/0$ es símbolo de la indeterminación. La *solución es indeterminada*. La explicación dada por el autor: "Este resultado es evidente, si los dos carteros están juntos y caminan con igual velocidad, es cierto que desde la partida ellos estarán juntos, por eso cualquier número de horas satisface las condiciones del problema" (pág. 121).

Vemos en las discusiones de las posibles soluciones para este problema emerger una interesante cuestión respecto al significado de los números negativos y el infinito. El número negativo como solución de una ecuación algébrica no representa ninguna dificultad de interpretación, así como operar con los números negativos: "menos veces menos da más", eran reglas conocidas. Mas como en un problema que contiene una posible situación de la realidad el número negativo no tiene sentido, hubo algún "defecto" o "error" en la formulación del problema. El autor sugiere que se reformule el problema a fin de encontrarse una solución positiva, esta sí con legitimidad para ser una solución del problema. Aunque el infinito sea admitido como solución y su interpretación es de imposibilidad, no se requiere una reformulación del problema. Habría una imposibilidad de encontrarla en el mundo finito, mas podría encontrarse en el infinito. Aquí la intuición parece venir de la geometría: andando paralelamente, nunca se encontrarían; mejor aún, entonces se encontrarán en un punto infinito.

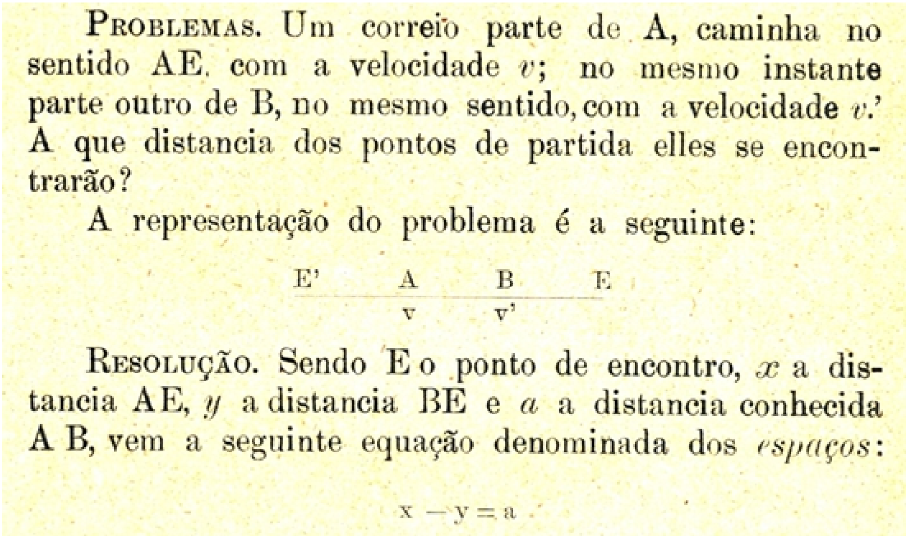
João Borges y Gomes Cardim, presentan el problema de los carteros en el sexto capítulo, que trata sobre aplicaciones de sistemas de ecuaciones con el título "Problema dos correios". Los autores introducen el problema con una interesante discusión: "El problema del espacio, conocido con el nombre de problema de los carteros, ofrece en su discusión, principalmente, cinco valores, como demostraremos a continuación. Debemos, sin embargo, tener en cuenta que en lugar del problema de los carteros, podríamos decir



Contenido

problema de los buques, de las bicicletas, etc., pero es conveniente guardar el nombre consagrado por el uso" (pág. 96).

El peso de la tradición es visible en el discurso de sus autores, ya que ellos mismos reconocen que el nombre del problema no es tan apropiado, puesto que particulariza una situación más bien amplia, aunque decidieron mantenerlo y enuncian el problema de la siguiente manera: "Un cartero parte de $A$, camina en el sentido $AE$, con velocidad $v$; en el mismo instante parte otro de $B$, en el mismo sentido, con velocidad $v'$. ¿A qué distancia de los puntos de partida se encontrarán ellos?" (Véase la figura siguiente donde se presenta un fragmento de la página 97 con el enunciado del problema).


PROBLEMAS. Um correio parte de A, caminha no sentido AE, com a velocidade $v$; no mesmo instante parte outro de B, no mesmo sentido, com a velocidade $v$.' A que distancia dos pontos de partida elles se encontrarão?

A representação do problema é a seguinte:

E' A B E
v v'

RESOLUÇÃO. Sendo E o ponto de encontro, $x$ a distancia AE, $y$ a distancia BE e $a$ a distancia conhecida A B, vem a seguinte equação denominada dos *espaços*:

$$x - y = a$$

Fragmento de la página 97.

Por un razonamiento análogo, si los carteros parten en el mismo instante y llegan juntos al punto $E$, tendrán tiempos iguales, de aquí que $x/v = y/v'$.

Manipulando algébricamente las dos expresiones, los autores obtienen un sistema de dos ecuaciones $x = av/(v - v')$ y $y = av'/(v - v')$. A partir de aquí ellos establecen cinco hipótesis:

**1.** Si $v > v'$ y $a > 0$, la solución es positiva y los carteros se encontrarán frente a frente.
**2.** Si $v < v'$ y $a > 0$, la solución es negativa y significa que los carteros se encontrarán pero al lado de atrás.
**3.** Si $a = 0$, $v < v'$ o $v > v'$, la solución es nula e indica que los carteros se encontrarán en el punto de partida.
**4.** Si $v = v'$ y $a > 0$, la solución es infinita pues $v - v'$ será igual a cero e indica que los carteros nunca se encontrarán.



Contenido

**5.** Si $a = 0$ y $v = v'$, la solución es indeterminada e indica que los carteros se encontrarán siempre.

Después de todas esas discusiones, se presentan aplicaciones numéricas para las cinco situaciones posibles.

Comentarios sobre las hipótesis 3, 4 y 5 nos permite saber un poco más sobre las concepciones de de estos autores sobre el cero, el infinito y las indeterminaciones.

En la hipótesis 3, como la solución es 0, no hay muchos problemas operacionales ya que la división de dos números puede dar cero. ¿Cuál es el significado de ese cero como solución del problema propuesto? Para los autores, eso significa que ellos sólo se encontrarán en el punto de partida, ya que, si salen del mismo punto y andan a igual velocidad, sólo estarán juntos en el origen.

En la hipótesis 4, ellos presentan el problema como teniendo *solución infinita*. Éste es el primer problema que hace surgir el concepto de infinito en el libro. El símbolo para el infinito, dicho por los autores, símbolo de la imposibilidad "$\infty$", fue presentado en la primera página del primer capítulo. Éste sólo aparece nuevamente cuando ellos resuelven el "problema dos correios" ya mencionado.

Una vez que tenemos $v - v' = 0$, esto implica que si representamos $av$ por $m$ y $av'$ por $m'$ se siguen las expresiones $x = m/0 = \infty$ y $y = m'/0 = \infty$. Según los autores: "Es la solución infinita y tal situación indica que los carteros nunca se encontrarán y por tanto, indica una imposibilidad". Se ve aquí el uso del símbolo del infinito para indicar la división por cero. Ellos operan como si fuese un número que resulta de la división por cero. ¿Qué es exactamente el infinito? En ese caso, como $m$ es cero, es un número, pues la división de dos números debe ser un número. Por tanto, el infinito es asumido como número. Mas, ¿cuál es el significado de ese resultado? Esta solución es interpretada por los autores como la imposibilidad de que los carteros se encuentren.

En la quinta hipótesis, cuando $a = 0$ y $v = v'$ aparecen las expresiones: $x = (0/0)y$ y $y = 0/0$, según ellos, es una solución indeterminada. La interpretación de esa indeterminación en el problema sería que los carteros se encontrarán siempre, o sea, si ellos parten juntos y tienen velocidades iguales, es claro que caminan juntos.

En las últimas páginas del libro, los autores proponen una parte práctica. Son 27 problemas propuestos con respuesta. Entre ellos, se encuentran 2 que se encuadran en la modalidad "problemas de movimiento":

"Un zorro es perseguido por un perro y está a 60 saltos delante de él. El zorro da 9 saltos, mientras el perro da 6, sin embargo, en el perro en 3 saltos recorre tanto como el zorro en 7. ¿Cuántos saltos dará cada uno antes que el perro alcance al zorro? Resp. 72 y 108".

"Dos caballos corren la distancia de una milla. El ganador invirtió 2 minutos y 54 segundos y ganó por 2 segundos. ¿Cuántas yardas en la partida debemos darle al segundo para que empaten en la carrera, asumiendo que mantienen la misma velocidad y siendo una milla igual a 1760 yardas? Resp. 20".

## El Problema en otros textos

Tomemos el caso de un libro de texto ruso (ver la portada en la figura siguiente). Un análisis de dicho libro, destinado a los primeros años de la enseñanza fundamental, deja entrever que problemas clásicos como el que tratamos aún continúan siendo parte de la propuesta didáctica de los autores. El libro contiene muchas actividades con ilustraciones y presupone, para su resolución, una cierta familiaridad con el álgebra.

El problema que identificamos es el número 144 de la página 28 y está enunciado de la siguiente forma: "De dos pueblos parten dos carteros uno al encuentro del otro. El primero lo hace con una velocidad de 200 metros por minuto y el segundo viaja 20 metros menos por minuto. Ellos viajan 50 minutos. Encontrar la distancia entre los pueblos donde se encontrarán".


*Matemática 4º Grado*, 2ª parte. Autores: Moro, M. I., Bantova, M. A., Beltiukova, G. V., Stepanova, S. I., Voltova, S. I. Editora "Educación", Escuela de Rusia, Moscú, 2008.

Otros problemas similares se encuentran en este mismo texto.

En otros libros latinoamericanos, también encontramos el problema, sirvan como ilustración los siguientes:

"13°) Un aeroplano va de la Habana a Miami y regresa en 100 minutos. A causa del viento el viaje de ida demora 12 minutos más que el de regreso.



Contenido

¿Cuántos minutos demora cada viaje?"[18]

"De un punto $O$ parten simultáneamente, por un mismo camino, dos móviles $A$ y $A'$, con velocidades $v$ y $v'$ respectivamente. Hallar el momento y el punto en que ambos se encuentran."[19]

Si bien debemos indicar que en el primer caso, es un problema más, en el segundo texto sirve de introducción al epígrafe *267. Ejemplos de planteamiento y discusión de problemas*, y la conclusión mucho más interesante en este caso "hay infinitos momentos de coincidencia, pero solamente $h - 1$ puntos de encuentro", es resultado de una diferenciación de casos realizada por el autor.

## Extensiones y conexiones en la matemática actual

Uno de los problemas más conocidos en la Historia de la Matemática es el Problema de los Siete Puentes de Konigsberg resuelto por Euler (1707–1783) hace 275 años. Estudiando la configuración de los puentes y las calles que los unían (como una red, conjunto de arcos y nodos), encontró que no existe una solución factible y estableció un grupo de condiciones para hallar todos los "recursos" existentes en una red dada (matemáticamente las propiedades o atributos de dicha red)[20]. Así, se ha definido como *circuito euleriano* a toda ruta (camino) continua que cubra cada arco de la red al menos una vez y regrese al punto de partida. Si los arcos no son unicursivos (en una sola dirección) se pueden utilizar reglas muy sencillas para saber si hay un circuito euleriano, si el número de vértices en la red es impar, existe un circuito euleriano, si es par, no lo es y algunos arcos deben ser recorridos más de una vez.

Fue en una revista china de matemáticas donde por primera vez se planteó una solución óptima a un circuito euleriano[21]. Describiendo las actividades de un cartero al recorrer su ruta postal (la ruta del cartero chino), aquí la ruta buscada es la que reduce la distancia viajando a lo largo de las calles (arcos), cruces con otras calles (nodos o vértices), un sentido único y regreso a la oficina postal, es denominado el Problema del Cartero Chino, PCC[22].

---

[18] González, M. O., y J. D. Mancill, *Álgebra elemental moderna*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1962, pág. 152.

[19] Pastor, J. R., *Elementos de análisis algebraico*, Edición Argentina, Buenos Aires, 1948, pág. 292.

[20] Mayores detalles pueden encontrarse en *De las cavernas a los fractales. Conferencias de Historia de la Matemática*, disponible en `http://www.edutecne.utn.edu.ar`y en "La Fórmula de Euler y la Topología", *Revista Eureka* **19**(2002), pp. 16–57, ambas del segundo autor.

[21] Kwan, Mei-Ko, "Graphic Programming Using Odd or Even Points", *Chinese Mathematics* **1** (3) (1962), pp. 273-277. En algunas referencias aparece como Guan Mei Gu el autor.

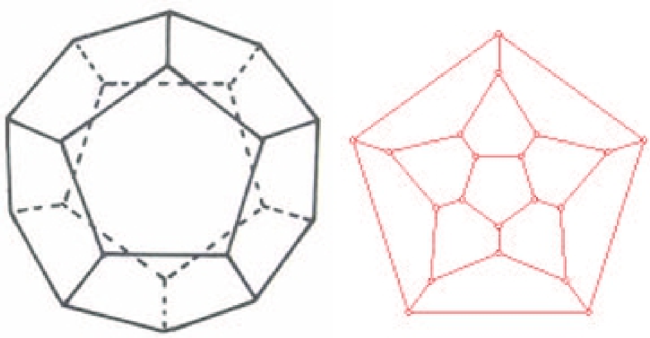
[22] Una extensión del PCC es el conocido como el k-PCC, el cual modela mucho mejor diversas situaciones del mundo real, pues en general, se usan varios empleados en la solución de un problema dado. El

Matemáticamente una red es llamada un grafo; más adelante se verá la utilidad de las siguientes definiciones. Un camino que contiene todos y cada uno de los vértices del grafo es llamado un camino hamiltoniano, similarmente un ciclo hamiltoniano es un ciclo que contiene cada vértice del grafo. Un grafo es hamiltoniano si contiene un ciclo hamiltoniano.

Veamos ciertas cuestiones conexas, muy conocidas en la Historia de la Matemática.

### El juego del dodecaedro

En 1857, es decir, 122 años después de los trabajos de Euler, el matemático William Hamilton[23], inventa y presenta su *Juego icosiano* (*The Icosian Game*), y posteriormente una variante del anterior con los nombres de *Dodecaedro del viajero*, *Un viaje alrededor del mundo*, en los que de nuevo aparecen los grafos. Por lo tanto, es preciso esperar más de un siglo desde el inicio de la teoría de grafos, para que ésta volviera a la actualidad científica. De todas formas, hay que decir que Hamilton ideó este juego intentando ilustrar un tipo curioso de cálculo, el cual era muy similar a su teoría de los cuaternios o cuaterniones, precursora del moderno análisis vectorial.



Mientras que la cuestión de Euler había sido, ante todo, una cuestión lúdica, durante el siglo XIX se presenta un desarrollo de la teoría de grafos mucho más concreta.

Se dice que Hamilton presentó en una reunión de la *British Association* en Dublín, un curioso pasatiempo que consistía en buscar un recorrido que diera la vuelta al mundo, representado por un dodecaedro, visitando cada ciudad, correspondiente a un vértice del dodecaedro, una sola vez. Solamente se podía desplazar de una ciudad a otra si los vértices correspondientes del dodecaedro estaban unidos por una arista.

---

nombre de PCC como tal lo propuso Alan J. Goldman a Jack Edmonds, quien es el que lo divulga en Occidente, cuando este último estuvo con Goldman en su *Operations Research Group* del *U.S. National Bureau of Standards* (ahora NIST). El propio Goldman dice que fue indirectamente influenciado por la novela de misterio de Ellery Queen llamada *El Misterio de la Naranja China*.

[23]Que William Rowan Hamilton (en adelante, Hamilton) nació el día 4 de Agosto de 1805 en Dublín (Irlanda) puede no ser considerado del todo correcto por varios historiadores. Es ciertamente curioso el hecho de que Hamilton naciera justamente a la medianoche entre los días 3 y 4, de ahí la discrepancia. Murió en la misma ciudad el 2 de septiembre de 1865. Véanse más detalles en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Hamilton.html`y en Bell, E. T. (Simon and Schuster, ed.), "An Irish Tragedy: Hamilton", *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*, New York, 1986, pp. 340–361.

Recordemos que un dodecaedro es uno de los cinco poliedros regulares existentes, formado por doce pentágonos regulares iguales, y tiene pues, 12 caras, 20 vértices y 30 aristas. Además, es importante notar que el hecho de que Hamilton designara a su juego con el nombre de "icosiano" no fue debido a que utilizara un icosaedro en su desarrollo (otro de los cinco poliedros regulares, formado por veinte triángulos equiláteros iguales), sino que Hamilton tomó el prefijo "ico" (que en griego significa veinte) en alusión al número de vértices del dodecaedro.

En la versión original, Hamilton situó una ciudad en cada uno de los veinte vértices del dodecaedro, asignándole su letra inicial correspondiente: $B$, Bruselas; $C$, Cantón; $D$, Delhi; $F$, Frankfurt; $G$, Ginebra, y así sucesivamente hasta $Z$, para Zanzíbar. La $X$ servía para Xerés, Jerez.

El Juego icosiano, estaba formado por una tablilla de madera sobre la que se había dibujado el dodecaedro plano, es decir, la figura de la derecha arriba. Los vértices estaban perforados con agujeros en los que se colocaban peones numerados o testigos del recorrido. Por lo demás, el juego no difiere del anterior.

El juego de Hamilton puede realizarse también con caminos trazados sobre las superficies del resto de poliedros regulares, como el cubo, el tetraedro, etc. Hamilton vendió su juego en 1859 a un comprador en Londres por 25 libras; fue luego distribuido en diferentes versiones, tanto en Inglaterra como en otros países de Europa. Su biógrafo nos advierte que ése fue el único dinero que Hamilton recibió en su vida de forma directa por un descubrimiento o publicación.

Otra de las formas de jugar consistía en intentar realizar la ruta considerada siguiendo las instrucciones previamente determinadas por otro jugador. Así, este otro jugador podía indicar una serie de letras iniciales, por ejemplo $BCPNM$, y pedirle al primer jugador que completase una ruta de este tipo en la que se pasase en primer lugar y consecutivamente por las ciudades cuyas iniciales correspondiesen a las dadas. En caso de disponer de tiempo, cosa poco probable, el profesor podría comentarle a los alumnos que existe una teoría matemática, llamada *Teoría de grafos*, en la que una ruta de este tipo se denomina ciclo hamiltoniano, explicándoles además los aspectos más elementales de la misma, que son muy asequibles y de fácil comprensión para los alumnos. Otra manera de jugar sería preguntarse cuántas rutas de este tipo empiezan por otra serie de iniciales dadas, por ejemplo, por $JVTSR$.

Otra variante del juego sería encontrar también un camino que empezase y terminase, respectivamente, por determinadas letras dadas, por ejemplo, que empezase por las letras $BCD$ y que terminase en $T$, utilizando como siempre cada letra una sola vez.

Sin embargo, a pesar de lo divertido y ameno que podía parecer el juego, hay que indicar que su comercialización fue un rotundo fracaso, debido a que resultaba demasiado sencillo, incluso para los niños[24]. Es claro que son diferentes variantes del PCC, donde encontrar la ruta óptima era demasiado fácil en este caso.

El problema de decisión consistente en determinar si un grafo es hamiltoniano, es un problema de la clase NP-completo. Explicar brevemente y de una manera informal la clasificación de los problemas de decisión en las clases P (problemas para los cuales se conoce un algoritmo de coste polinómico que los resuelve) y la clase NP (problemas para los cuales la verificación de la solución, una vez dada, puede hacerse en tiempo polinómico aunque la búsqueda de la misma pueda suponer un coste exponencial). Claramente la clase P está contenida en la clase NP pero no se sabe si dicha inclusión es estricta, aunque la creencia generalizada es que sí, dentro de la clase NP existe una subclase de problemas especialmente intratables, desde el punto de vista computacional. Dicha clase se conoce con el nombre de problemas NP-completos y se caracteriza por el hecho que el hallazgo de un algoritmo polinómico para uno de dichos problemas supondría que todos los problemas de la clase NP pueden resolverse en tiempo polinómico ya que cualquier problema de la clase NP puede reducirse (en tiempo polinómico) a uno de la clase NP-completo y todos los de esta clase son equivalentes por lo que se refiere a su complejidad[25].

Varios problemas topológicos pueden ser formulados en el lenguaje de grafos y su solución implica la obtención de una cierta ruta óptima como la del PCC, uno de ellos, *El Problema de los Cuatro Colores*, ha devenido en fuente constante de resultados matemáticos de diversos tipos; una de sus variantes, *El Problema de los Tres Colores*, se ha demostrado como equivalente al PCC que hemos venido estudiando.

---

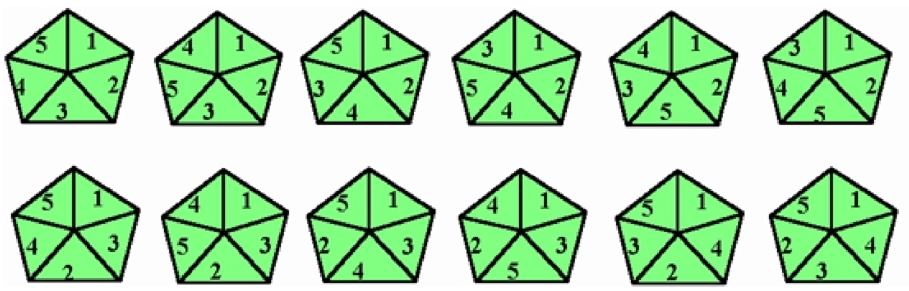
[24]No obstante y en honor a la verdad, no puede decirse que esta idea de encontrar un camino que pase una única vez por cada vértice de una figura geométrica haya sido original de Hamilton. De hecho, no sólo existe un claro precedente en el estudio de Euler sobre el problema del caballo de ajedrez, sino que, además, dos años antes de que Hamilton introdujera su juego, otro matemático, Thomas Penyngton Kirkman (inglés, quien nació el 31 de marzo de 1806 en Bolton, cerca de Manchester, y murió el 4 de febrero de 1895 en Bowdton; puede consultar mayores detalles en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Kirkman.html`), planteó el mismo problema explícitamente en un documento que él mismo transmitió a la *Royal Society* sobre la antes citada Teoría de Grafos: "dado un grafo de un poliedro, ¿'xiste un ciclo que pase una vez por cada vértice?" ¿Por qué entonces la paternidad del Juego icosaédrico es atribuida a Hamilton y no a Kirkman, cuando este último llegó incluso a publicar la idea? Hay que decir que a veces una misma idea, en este caso matemática, es descubierta independientemente por dos personas, casi al mismo tiempo. Sin embargo, su paternidad suele atribuírsele, normalmente, al más conocido o famoso de ellos en su tiempo. Y ésta fue la desgracia de Kirkman, que Hamilton tuviese mucho más protagonismo en aquella época que él. No obstante, es interesante notar que a pesar de esta situación, ambos autores siempre se profesaron mucho respeto y admiración mutua. Hamilton visitó a Kirkman en la *Croft Rectory* en agosto de 1861 y de la correspondencia entre ellos se desprende la estima mutua que existía entre ambos. Kirkman le escribió a Hamilton diciéndole que "su buena fortuna había sido la de estar cerca de cada matemático como tú", a lo que Hamilton le respondió, diciéndole que "sería muy difícil para mí expresar, sin tener aires aduladores, cuánto admiro tu genio matemático y tus descubrimientos".

[25]Véase Garey, M. R., y D. S. Jonson, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, 1979.

## Un rompecabezas dodecaedro-quintominó

John Horton Conway (Liverpool, 1937)[26] define los "quintominó" como pentágonos regulares cuyos lados (dibujados como segmentos triangulares) han sido coloreados de cinco tonos distintos, uno en cada lado. No contando como distintos los deducidos de otros por giro o simetría, existen 12 quintominós. Representando los cinco colores por 1, 2, 3, 4 y 5, los doce quintominós pueden simbolizarse como siguen:

| | | |
|---|---|---|
| *a*) 12345 | *e*) 12534 | *i*) 13425 |
| *b*) 12354 | *f*) 12543 | *j*) 13524 |
| *c*) 12435 | *g*) 13245 | *k*) 14235 |
| *d*) 12453 | *h*) 13254 | *l*) 14325 |



Elegido uno de los posibles sentidos de recorrido del contorno, las cifras indican el orden cíclico del borde del pentágono. En 1958, Conway se planteó si sería posible colorear las aristas de un dodecaedro regular, de forma tal que cada uno de los 12 quintominós apareciera en una de las doce caras pentagonales del sólido, y descubrió que era realmente posible.

Para facilitar la tarea y obtener las tres soluciones de Conway[27], se puede usar el diagrama de Schlegel[28] para el dodecaedro, que no es sino el esqueleto deformado del sólido, con la cara posterior dilatada, convirtiéndola así en el contorno exterior de la figura. Los lados han de ser numerados (o coloreados) de forma que cada pentágono (incluido el delineado por el perímetro pentagonal) sea un quintominó distinto. Evidentemente, cada solución admite una simétrica respecto a un plano (reflejada en un espejo); pueden además

[26] Quizás más conocido por los números suprareales y su *Game of Life*; véanse mayores detalles de su vida y obra en Nápoles, J. E., "El Juego de la vida: geometría dinámica", *Foro RED-Mat* **14** (4) (2003) (`http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol014/volfourteen_4.html`).

[27] Publicadas inicialmente en la revista británica *Eureka* (octubre de 1959), pág. 22.

[28] Victor Schlegel (1843–1905). Matemático alemán, publicó sus diagramas (véase página siguiente) en "Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde", *Nova Acta der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher* **44** (4), (1883) pp. 337–459 (*plus plates*), que pueden ser consultados además en "Ueber Projectionsmodelle der regelmässigen vier-dimensionalen Körper", Waren, 1986.

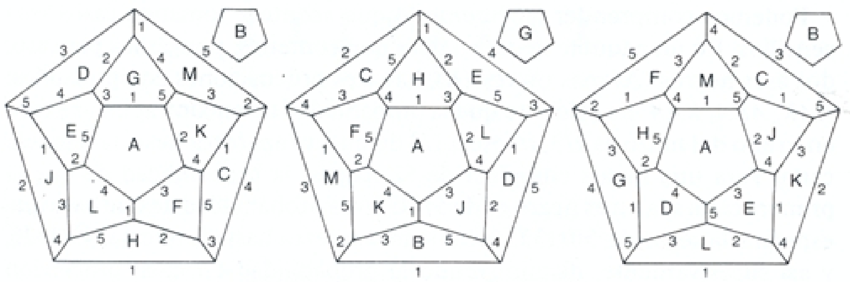


Contenido

intercambiarse los colores sin alterar la configuración básica. Las letras se corresponden con las previamente asignadas a los 12 quintominós. La letra situada en el exterior de cada diagrama, denota el quintominó de la cara trasera del sólido, que en la figura está representada por el perímetro del diagrama. Conway descubrió empíricamente que siempre que las aristas de las 11 caras se encontraban correctamente rotuladas, la duodécima quedaba automáticamente rotulada con el quintominó restante. No ha demostrado que tenga que suceder siempre así.

Por ser el dodecaedro regular dual del icosaedro regular, el problema es equivalente al de colorear las aristas de un icosaedro regular, de modo que en sus 12 vértices, las permutaciones de colores se correspondan con las permutaciones de colores de los 12 quintominós.

En la figura siguiente, vemos las tres soluciones esencialmente distintas que admite el rompecabezas quintominó-dodecaédrico, dibujadas sobre otros tantos diagramas de Schlegel.



## Análisis de redes eléctricas

Kirchhoff[29] estudió los grafos conexos de medida mínima, es decir, sin ciclos (llamados árboles) con el objetivo de desarrollar un método efectivo para el análisis de redes eléctricas, entendido dicho análisis como el cálculo de la intensidad y la diferencia de potencial de cada elemento de la red (resistencia, bobina, condensador, fuente de tensión, etc.). En realidad, conocidas las características físicas de un elemento (resistencia, inductancia o capacidad, según corresponda), las dos variables $i_k(t)$ y $v_k(t)$ están relacionadas por una ley física (Ohm, etc.). Además, por el hecho de estar interconectados deben cumplir los postulados conocidos como leyes de Kirchhoff:

- La suma algebraica de las intensidades (corrientes) asociadas a los arcos

[29]Gustav Robert Kirchhoff (nació en Königsberg, Rusia, en 1824 y murió en Berlín, en 1887), físico alemán, estrecho colaborador del químico Robert Bunsen, aplicó métodos de análisis espectrográfico (basados en el análisis de la radiación emitida por un cuerpo excitado energéticamente) para determinar la composición del Sol.

incidentes a un vértice dado ha de ser 0 (CP) (no se acumula intensidad en ningún nodo).

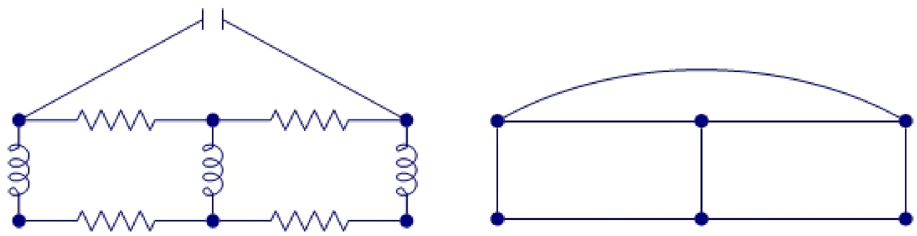
- La suma algebraica de los voltajes asociados a los arcos de cualquier ciclo ha de ser 0 (VP) (la diferencia de potencial ha de ser 0).

El término “suma algebraica” tiene el significado siguiente:

– (CP): Se suma (resta) si corresponde a un arco adyacente desde (hacia) el vértice en cuestión;
– (VP): Se asigna una orientación arbitraria al ciclo y, según ésta, se suma (resta) un voltaje si la orientación del arco asociado coincide (difiere) con la del ciclo.

Las leyes de Kirchhoff dependen del grafo de un circuito, pero no de los componentes presentes en el mismo. Dos circuitos distintos pueden tener el mismo grafo, correspondiéndoles las mismas expresiones.

Aplicando los postulados anteriores a cada uno de los nodos y ciclos del dígrafo que modeliza la red eléctrica se obtiene un sistema de ecuaciones lineales a solucionar[30]. El trabajo de Kirchhoff consistió en determinar un sistema equivalente y reducido de dichas ecuaciones. Tal reducción se obtiene considerando únicamente las ecuaciones asociadas a un sistema fundamental de ciclos y cortes asociado a un árbol generador del grafo subyacente que, en total, da lugar a un sistema de tantas ecuaciones lineales como elementos eléctricos hay. Dado un árbol generador $T$ de un grafo $G$ de orden $n$, un ciclo fundamental asociado a $T$ se obtiene añadiendo a $T$ una cuerda, es decir, una arista de $G$ no perteneciente a $T$. De este modo pueden obtenerse $m-(n-1)$ ciclos distintos, donde $m$ es la medida de $G$. Por otro lado, un corte fundamental está formado por el conjunto de arcos que unen pares de vértices situados en las dos componentes conexas que resultan de suprimir en el árbol generador una de sus aristas. Así en total, hay $n-1$ conjuntos de corte fundamentales[31].



[30]Es curioso cómo un par de demostraciones de la Fórmula de Euler se basa en las leyes de Kirchoff. Véase *El Teorema de Euler y la Topología*, ya mencionado.

[31]Véase Comellas, F., J. Fabrega, O. Serra y A. Sánchez, *Matemática Discreta*, Ediciones UPC, 1994, y L. R. Foulds, *Graph Theory Applications*, Springer-Verlag, 1992.



**Contenido**

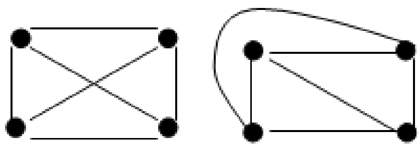
Generalizaciones sucesivas han llevado a la formulación de diversos problemas que se conocen bajo el nombre de Problemas de Red Eléctrica, pues las funciones de una red dependen solamente de dos cuestiones:

- La naturaleza y valor de los elementos que forman la red.
- La forma en que están conectados (la topología).

De ahí que el estudio de estos problemas se reduce al estudio de la topología de la misma y uno de las soluciones posibles es la utilización de la ruta óptima en estos grafos.

## Enumeración de isómeros químicos

Cayley[32] estudió el problema (desde 1857) de la enumeración de los isómeros de los hidrocarburos saturados $C_n\ H_{2n+2}$ fijado el número $n$ de átomos de carbono. Es decir que se trataba de determinar el número de compuestos químicos con idéntica composición (fórmula), pero distinta estructura molecular (disposición distinta de los enlaces). Para ello representó cada hidrocarburo mediante un árbol donde los vértices representaban los átomos (de grado uno los de hidrógeno y cuatro los de carbono) y donde las aristas indicaban la existencia de enlaces químicos. De este modo su problema equivalía a la enumeración (excepto isomorfismos) de los árboles con grados de sus vértices igual a 1 o 4. Antes de resolver su problema, consiguió hallar el número de árboles con raíz, el número de árboles con grado máximo menor o igual que 4 y finalmente cerró su problema inicial[33].



Por ejemplo, los siguientes grafos son isomorfos y ambos representan $K_4$[34].

## Problemas Recreativos

El PCC ha demostrado ser la fuente de múltiples y variados estudios, matemáticos y de otras ciencias, así como de innumerables aplicaciones. Por

[32]Arthur Cayley nació en Richmond, Reino Unido, el 16 de agosto de 1821 y murió en Cambridge, el 26 de enero de 1895. Es uno de los fundadores de la escuela británica moderna de matemáticas puras. Véase su trabajo "On the Mathematical Theory of Isomers", *Phil. Mag.* **47** (1874).

[33]Véase Harare, F., *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.

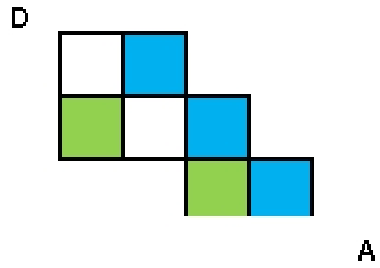
[34]Según se recoge en Foulds, L. R., *Graph Theory Applications*, Springer-Verlag, 1992, el termino grafo, como sistema de incidencia de un conjunto de puntos y líneas proviene de la expresión *graphic notation*, introducida por primera vez en química por E. Frankland y posteriormente adoptada por A. Crum Brown (1884). Dicha notación hacía referencia a la representación, mediante un grafo, de los enlaces entre los distintos átomos de una molécula.

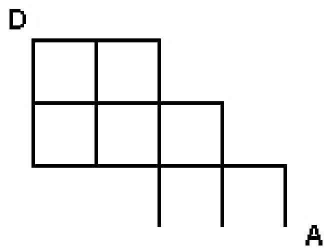
supuesto que a esto no puede escapar la Matemática recreativa (ya presentamos un ejemplo tomado de uno de los libros de Perelman), pero es claro que este es sólo una posibilidad, pues existen muchas más, como lo demuestran los siguientes dos ejemplos.

*La hormiga paseante*[35]

Partiendo del punto $D$, una hormiga quiere llegar al punto $A$ tomando un camino lo más corto posible. ¿Entre cuántos caminos, lo más corto posibles, puede elegir la hormiga?

Un camino es un recorrido entre los vértices $D$ y $A$ realizado sobre los lados de los cuadrados de la figura. El camino más corto es aquel que recorra el menor número posible de esos lados; su medida será el total de lados recorridos. Para ello es necesario que el recorrido no vuelva sobre sí mismo, lo cual se consigue yendo siempre hacia la derecha o hacia abajo. Está prohibido, por tanto, ir hacia la izquierda o hacia arriba. El camino más corto es de 7 unidades. Pero se puede recorrer de varias maneras diferentes. El problema pide determinar esos caminos diferentes, de longitud 7, que se pueden realizar entre $D$ y $A$.




Otro aspecto importante es darse cuenta de que los caminos se cruzan en los vértices de los cuadrados, pero no en todos. Salvo en los vértices de salida y llegada, los cruces deberán tener, al menos, tres caminos concurrentes. Eso quiere decir que hay cinco vértices que no suponen cambio de camino; son los que se encuentran en la parte superior de los cuadrados azules y en la parte inferior de los cuadrados verdes.

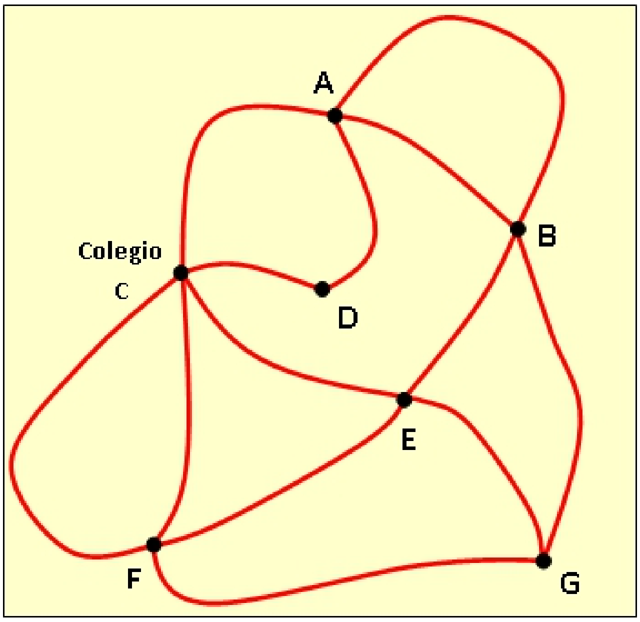
A cada vértice que es cruce de caminos se puede llegar desde dos vértices anteriores. El total de caminos por el que se puede llegar a él es la suma de los caminos que pueden llegar a cada uno de ellos. Procediendo a ese recuento, vértice a vértice, a partir del vértice $D$, llegaremos al vértice $A$ con el total de caminos que llegan a él.

Respuesta. La hormiga podrá elegir, por tanto, entre 24 caminos.

[35] Tomado de "NUMEROS", *Revista de didáctica de la matemática* **71** (2009), pp. 125–131 (disponible en `http://www.sinewton.org/numeros`)

*Día de las Puertas Abiertas*

Un colegio está planeando un Día de las Puertas Abiertas, Para ello, planean que el colectivo del colegio pase por cada casa a recoger a los interesados que irán a tan importante evento. Debemos tener en cuenta las calles a recorrer y los puntos de intersección de las mismas, tal y como se indica en la figura.




El Director quiere entregar un prospecto a las casas y comunicarle a los residentes sobre la actividad, disculpándose por las molestias ocasionadas.

¿Cuál es la forma más eficiente para que una persona entregue esos prospectos?

¿Usted cree que es posible entregar los prospectos a las casas de esas calles sin cortar dos veces la misma calle?

Intente usted mismo trazando las rutas sobre el mapa, comience desde el Colegio.

## A modo de conclusión: el Problema del Cartero Chino a nuestro alrededor

El PCC posee más aplicaciones que las que hemos presentado antes, por ejemplo, análisis del DNA al enrutamiento de robots[36]. Las aplicaciones convencionales del PCC están relacionadas con enrutamientos más generales que el de un cartero, como el de la recogida de basura o el de mantenimiento de las calles, en una pequeña ciudad; para este último caso, es claro que la solución óptima depende del relativo costo de usar cada arco (calle).

Imaginemos ahora que usted trata de entender su teléfono móvil. Presionando los botones su teléfono deriva a un nuevo estado, lo que correspondería a una calle de un único sentido. Después de considerable trabajo, y

[36]Pevzner, P. A., H. Tang y M. Waterman, "An Eulerian path approach to DNA fragment assembly", *Proceedings of the National Academy of Sciences* **98** (17), 2001, pp. 9748-9753.

no poco tiempo, usted obtiene un "mapa" de cómo trabaja su teléfono. La pregunta es, entonces, ¿es este mapa correcto?

Desafortunadamente, el mapa puede ser complejo y difícil de comprobar sistemáticamente. Dado el mapa, encontrar la ruta del cartero puede proveer un *test* para evaluar sistemáticamente cada transición a una nueva etapa.

Esa ruta óptima nos dará el mejor *test* posible, las instrucciones que nos permitirán entender cualquier comportamiento no esperado del móvil. La longitud de este camino óptimo es, por tanto, una medida de la complejidad del móvil[37]. Como un ejemplo concreto, tomemos el caso del Nokia 2110 (bastante atrasado al día de hoy), que poseía un submenú de 88 ítemes y 273 acciones[38]; la ruta óptima de éste significaba presionar 515 botones más 79 "toques" (en el lugar adecuado) para revisar que nada malo pase, o sea, un total de 594 operaciones (algunos estados poseen menos opciones que los botones existentes; cada botón no usado en un estado corresponde a un lazo en el grafo); por supuesto, en la vida diaria casi nunca probamos todas las operaciones de nuestro teléfono, "cuando pasa, pasa". En comparación, el menor camino que visita cada vértice al menos una vez, por ejemplo para revisar cada función de un menú dado, es de sólo 98 toques. Así es mucho más fácil revisar la funcionalidad de usar la interface. Es claro que los *test* de utilidad de cada usuario real son, como dijimos, muy alejados de ser exhaustivos, aun cuando el usuario no cometa errores en el proceso. De hecho la interfaz del Nokia 2110 es engorrosa, una corroboración de la dificultad de mejorar el uso de un *test* efectivo[39].

Es notorio que los sitios *web* comúnmente tienen enlaces "caídos", pero posiblemente es peor cuando este enlace lleva al usuario a una página equivocada. Un sitio *web* de un autor puede revisar la corrección de cada enlace de un sitio, si se ha proveído la información legal correspondiente. Puesto que cada enlace es descriptivo y requiere la comprensión de su propósito, ellos pueden ser revisados manualmente para comprobar si cada enlace nos lleva a la página correctamente. Por supuesto, siguiendo un enlace, el evaluador humano está ahora en otro sitio.

El camino óptimo del PCC nos da una ruta alrededor de un sitio (o de otro recurso multimedia) que revisa cada enlace con el mínimo esfuerzo.

Para sitios *web* bien diseñados, no es necesario revisar cada enlace explícitamente. Por ejemplo, el sitio *web* de la Casa de Benjamin Franklin[40] posee 66 páginas y 1191 enlaces hace ya unos años. Su ruta óptima es de

[37]Thimbleby, H. W., y I. H. Witten (H. R. Hartson y D. Hix, eds.), "User Modelling as Machine Identification: New Methods for HCI", *Advances in Human-Computer Interaction*, 1993, V: 58-86.

[38]Nokia Mobile Phones, *Nokia 2110 Users Guide, Issue 5*, 1996.

[39]Thimbleby, H. W., "Visualising the Potential of Interactive Systems", *The 10th IEEE International Conference on Image Analysis and Processing*, ICIAP99, 1999, pp. 670677.

[40]Marsden, G., y H. Thimbleby, `Benjamin Franklin Centre` (1998).

2248 pasos, excesiva para un humano sin ayuda; sin usar la ruta óptima el usuario se verá imposibilitado de garantizar todos los enlaces. Idealmente, los autores del sistema deben proveer mecanismos que ayuden a revisar los sitios (por ejemplo, cuando el evaluador humano debe tomarse un descanso); en unión a esto, puede usar la ruta optima para minimizar trabajo. En efecto, el sitio de Benjamin Franklin fue generado compilando 78 páginas (12 diseñadas por plantillas) que necesitaban solo 201 enlaces explícitos (muchos de ellos revisados por el compilador mismo). La ruta óptima de este sitio posee 241 pasos, incluyendo los enlaces que el compilador puede revisar por sí mismo[41].

Encontrar un mapa de un teléfono móvil, de un grabador de video o de un sitio *web*, en primer lugar, debemos decir que no es tarea fácil, si es realizada por ingeniería reversa. Este problema es equivalente al problema del robot explorador móvil. El robot explora cada arco y cada vértice de la red y debe recorrer la mínima distancia. Para una red de $m$ arcos, se encontró un algoritmo que toma al menos $m\phi^{O(\log \phi)}$ pasos[42], donde $\phi$ es la deficiencia del grafo, un término que significa la medida de usar fácilmente un sistema: está relacionada con la dificultad de funcionamiento de un mecanismo, o de una red, por ejemplo, sistema experto usado en educación.

La utilización de grafos en diversos problemas aplicados permite que la solución del problema dado pueda expresarse en términos de la solución del PCC. Una muestra adicional, además de los antes citados, son los que resumimos en el siguiente cuadro.

| *Situación* | *Representación (grafo o dígrafo)* | |
|---|---|---|
| | *Elementos (vértices)* | *Relación (aristas o arcos)* |
| | | Compatibilidad |
| Control de semáforos en un cruce | Itinerarios | Accesos |
| Plano de una planta de un edificio | Espacios | Jugadas lícitas |
| Juego progresivo finito | Estados del juego | Transiciones |
| Cadena de Markov (finita) | Estados | Compatibilidad |
| Conectividad del paisaje | | |
| El problema de los horarios | Itinerarios | Compatibilidad |

[41] Thimbleby, H. W. (S. Lobodzinski y I. Tomek, eds.), “Distributed Web Authoring”, *WebNet97, World Conference of the WWW, Internet, & Intranet*, Toronto, 1997, pp. 1056-1083, Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).

[42] Albers, S., y M. R. Henzinger, *Exploring Unknown Environments*, Digital Systems Research Center, SRC Technical Note 1997-014.



Contenido

Por supuesto que los ejemplos y vínculos presentados a lo largo del trabajo, ilustran las razones por las que éste problema se incluye en tal variedad de textos. Creemos que todo eso podemos resumirlo en los siguientes tópicos:

**1º.** El vínculo de éste con diferentes tópicos matemáticos (puros y aplicados) que son objeto de investigación actualmente (problemas de rutas y los llamados problemas *picking* en logística, de optimización, la eulerización de un grafo, etcétera).

**2º.** Las posibilidades de situaciones didácticas que brindan la consideración de las diferentes variantes de este problema. Lo que hace que sea un excelente medio de aprendizaje para procesos de generalización, para considerar casos particulares, para debate de situaciones límites, etc., lo que conlleva a una educación más "rica" en cuánto al desarrollo de habilidades de los estudiantes y la presentación de nuevos contenidos.

**3º.** El valor lúdico de éste. Lo ilustramos con el Juego del icosaedro, pero diversas situaciones particulares, por ejemplo, tomando pocas ciudades, pueden ser tomadas como base para un juego de estrategia en el aula.

## Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al árbitro, al corrector de estilo y al editor, por las sugerencias y observaciones realizadas al trabajo que permitieron mejorarlo considerablemente.

## ABSTRACT

In this paper we present the Postmans Problem, also known as the Chinese Postman Problem. We tell about its history, its historic context in the Chinese mathematics and some of mathematical treatments and didactic books in its 30 centuries of life. At the end of the paper some mathematical extensions and generalizations, as well of some of its applications, are presented.



**Contenido**