

Las ecuaciones diferenciales ordinarias como signos de los tiempos

Juan E. Nápoles Valdes

Universidad de la Cuenca del Plata, Lavalle 50,
3400 Corrientes, Argentina

idic@ucp.edu.ar

y

Universidad Tecnológica Nacional, French 414,
3500 Resistencia, Chaco, Argentina

jnapoles@frre.utn.edu.ar

RESUMEN

En nuestro trabajo presentamos cómo se ha ido desarrollando el aparato conceptual y metodológico de la matemática actual, a raíz del desarrollo de las investigaciones propias de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO por brevedad), y cómo en éstas convergen ahora científicos de disciplinas afines (y no tan afines) como son la topología, el análisis funcional, la teoría de conjuntos y otras que se han compenetrado perfectamente con las propias de las EDO.

1. DE CÓMO LA TEORÍA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS TIENE TRAZAS DE SER UN RARO INVENTO

En el estudio de ciertos sistemas físicos resulta interesante y casi siempre necesario conocer propiedades (de las soluciones de la ecuación o sistema que modela tal sistema) tales como acotamiento, estabilidad, periodicidad, etc., sin tener que recurrir a la ardua y laboriosa tarea, que en muchos casos es impracticable, de encontrar expresiones analíticas para las soluciones. De este modo surgió el problema de investigar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial a partir de ‘su propia expresión’, dando lugar



a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, teoría que surge en la segunda mitad del siglo XIX y que fue abordada inicialmente por Jules Henri Poincaré (1854–1912) y Alexander Mijailovich Liapunov (1857–1918), aunque por motivos diferentes.¹

Como se ha repetido tantas veces, para Galileo el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático y, para explicar un fenómeno, es necesario leer sus caracteres: puntos, líneas, ... Esto significa que más que atribuir el movimiento de los objetos ‘graves’ —los que se dirigen al centro de la Tierra— a una causa, lo que se debe hacer es descubrir la regla que lo regula. Por ello, Galileo, al enunciar su solución al problema de la caída libre, lo hace diciendo que cualquier cuerpo, grande o pequeño, ligero o pesado, al caer libremente lo hace con una aceleración constante.

Con Newton el problema se resuelve suponiendo la existencia de una relación lineal entre la aceleración en cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Una vez conocida la expresión de la fuerza actuante y las condiciones iniciales, la trayectoria se puede calcular y, para sistemas que tengan sentido físico, esto significa que dado un estado del sistema los estados futuros quedan unívocamente determinados: este es el sentido del determinismo que Laplace creyó la mecánica de su tiempo había puesto al descubierto. La ciencia, se decía, mostraba que el mundo funcionaba como un mecanismo de relojería.

Y sin embargo, en la práctica había ciertos problemas que rehusaban someterse a este esquema, ya sea porque la ecuación diferencial no tenía solución en cuadraturas y había que conformarse con soluciones aproximadas, o porque la gran cantidad de ecuaciones involucradas hacía imposible el conocimiento de la solución del sistema. Esto apuntaba a que posiblemente nuestro conocimiento y predicción de los fenómenos podían estar vedados en ciertas situaciones que no correspondieran a simplificaciones de la realidad, lo cual ocurre en la mayoría de los modelos estudiados.

Así ocurrió con la astronomía y su intento de predecir con toda exactitud eclipses y movimientos de planetas (sirva como un buen ejemplo el problema de los N cuerpos). Afortunadamente, Poincaré apuntó, como ya dijimos, la dirección en que muchos de estos problemas debían ser tratados: la teoría cualitativa, o más generalmente, el estudio de los sistemas dinámicos, como se le ha venido a llamar en las últimas décadas.

Puntualizaremos que la historia toma, en ocasiones, el camino opuesto al indicado. Tal es el caso de la ecuación del péndulo libre, en la cual, el

¹El primero debido al estudio de figuras de equilibrio y de la estabilidad del movimiento: *Problème général de la stabilité du mouvement*, traducción francesa (1907) del original en ruso (1892) y *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation* (1906), y el otro debido a sus investigaciones en mecánica celeste: *Sur les courbes définies par une équation différentielle* (1880), *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* (1881–1886) y *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste* (1892–1899).

estudio cuantitativo precedió al cualitativo.

El primer estudio sistemático, utilizando técnicas cualitativas, para probar la existencia de soluciones periódicas de una ecuación diferencial, fue llevado a cabo por Poincaré, dando un método que lleva su nombre y que consiste en buscar puntos fijos para un cierto funcional, definido sobre un subconjunto de $\mathbf{R}^n$.

Posteriormente y usando técnicas del análisis funcional, se aborda el mismo problema consistiendo la esencia del método en determinar puntos fijos para un funcional definido en el espacio:

$$C = \{x: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n / x \text{ continua y } T \text{ periódica}\}.$$

Más recientemente, se trata el problema arriba aludido con técnicas de teoría de bifurcación, la cual surge al analizar la dinámica de sistemas físicos regidos por ecuaciones no lineales dependientes de un parámetro.

Por otra parte, el estudio de la existencia de soluciones se reduce, en ocasiones, a la búsqueda de los ceros de un determinado operador definido sobre un apropiado espacio de Banach. Este método tiene sus orígenes en los trabajos de Liapunov sobre la existencia y comportamiento de los estados de equilibrio de un fluido en rotación, en los de Poincaré sobre mecánica celeste y en los de E. Schmidt² sobre el estudio de la existencia de ecuaciones integrales no lineales.

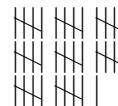
Hemos visto cómo las etapas anteriores del desarrollo de las EDO desembocan, hacia el último cuarto del siglo XIX, en el trabajo de Poincaré con el desarrollo de la Teoría cualitativa. Es a este eminente matemático, a quien le corresponde hacer una profunda reflexión del pasado, hacer algunos cambios radicales y proponer nuevas alternativas. En su comunicación al Congreso Internacional de 1908 Poincaré dijo: “... *En el pasado, una ecuación sólo era considerada soluble cuando se podía expresar la solución con ayuda de un número finito de funciones conocidas; pero esto es posible en una de cada cien. Lo que podemos hacer siempre, o casi siempre, es resolver el problema cualitativo, de obtener la forma general de la curva representando la función desconocida...*”³.

En el trabajo de Poincaré de 1881, encontramos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales:

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y);$$

²Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integral-gleichung und der Verzweigung ihrer Losungen (1908).

³Véase Hirsch, M. W., “The dynamical systems approach to differential equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **11** 1 (1984) pág. 19.



en lugar de la tradicional ecuación diferencial $dy/dx = Q/P$; la totalidad de las curvas definidas por esta ecuación constituyen el llamado *retrato de fases* de las soluciones. El método de Poincaré permite obtener las características generales de todas las curvas, de las cuales, él demostró, existen solamente dos tipos: las trayectorias cerradas o ciclos límites y las trayectorias que tienden a un ciclo límite o a un punto crítico en el que $P = Q \equiv 0$.

En el acercamiento de Poincaré encontramos dos puntos de vista centrales en la forma de concebir la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Por un lado, el que una solución esté descrita por una curva y no sólo por una expresión algebraica, y por otro, que una ecuación diferencial sea un proceso determinístico, no considera la solución sólo como una función de la variable independiente, sino como una función de las condiciones iniciales (con las contribuciones de Hadamard, ms adelante).

Estas ideas geométricas de Poincaré, así como los métodos numéricos de Runge y Kutta de principios de siglo, se comienzan a incorporar a los libros de texto después de la segunda mitad de este siglo, básicamente en los dedicados a los ingenieros. Asimismo, los métodos operacionales que se originan con Heaviside a fines del siglo pasado, los encontramos en muchos de los textos escritos en este siglo (en forma del operador D), como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales, más adelante en muchos libros es sustituido por el método de la transformada de Laplace, la cual es usada fundamentalmente para resolver ecuaciones diferenciales lineales, aunque se ha observado en estos años su utilización en diversas investigaciones puras.

Representemos a los puntos del plano euclidiano mediante pares de números reales, $\mathbf{x} = (y, z)$, convirtiéndose en el plano cartesiano $\mathbf{R}^2$. Un campo de vectores $\mathbf{F}$ en el plano define un sistema dinámico mediante la relación:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Una solución de (1) es un punto $\mathbf{x}(t)$ que recorre determinada región, parametrizado por un intervalo de los números reales t (casi siempre considerado el tiempo), de tal forma que en todo instante de tiempo su velocidad sea $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$, es decir, se satisface para todo t :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (2)$$

El problema clásico, tal y como lo hemos expresado es, dada una expresión en coordenadas del campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(y, z), F_2(y, z))$ en términos de funciones conocidas, dar la expresión analítica de la solución en términos de dichas funciones conocidas.

Esto como sabemos, no siempre es posible.

Poincaré aportó una nueva idea para atacar el problema de la solución de las ecuaciones diferenciales. Él comprendió que el problema como lo acabamos de plantear, no siempre es soluble, sin embargo, sí es posible dar una descripción geométrica-cualitativa del conjunto de todas las soluciones y, en la mayoría de los problemas, esta descripción es más satisfactoria que una expresión en términos de funciones conocidas o en serie.

Es conocido que un sistema dinámico es utilizado para denotar todo proceso de evolución temporal en el que el pasado nos brinda ‘datos’ para determinar el futuro; así, pudiéramos pensar que esta noción se refiere a procesos perfectamente determinados, donde el caos y el desorden no pueden existir. Sin embargo, nada más lejos de la realidad. Un sistema dinámico consta de dos conceptos esenciales: el de estado y el de dinámica. Una manera práctica de ilustrar la evolución de un estado es (como ya sabemos) por medio del espacio de fases, en el cual las coordenadas corresponden a las variables que describen el sistema. Por supuesto, la dimensión de este espacio es el número de variables que se consideran necesarias y suficientes para describir la evolución del sistema.

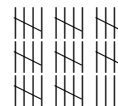
Utilicemos el movimiento del péndulo para ilustrar éstas y otras ideas. El estado quedará perfectamente determinado por los valores que toman la posición (el ángulo con respecto a la vertical) y la velocidad angular. De los datos iniciales (velocidad y posición inicial), y mientras el péndulo oscila, se obtiene una órbita o trayectoria que puede trazarse en el espacio de fases.

El caso más sencillo es el del péndulo sin fricción o simple —una varilla o hilo inextensible, fijado en un punto y del cual pende un peso— el cual presenta una órbita cerrada, dado que el movimiento se repite una y otra vez, siguiendo el mismo camino.

Cuando el péndulo se encuentre en alguna de sus dos posiciones extremas de máxima elevación, la velocidad será nula; por consiguiente, su cantidad de movimiento también. Por el contrario, al pasar por el punto más bajo de su trayectoria, la velocidad será máxima. Esto ocurrirá en dos situaciones: una para el movimiento de derecha a izquierda del péndulo y la otra para la situación inversa. En ambas, la cantidad de movimiento será máxima. Si se representan esas posiciones en el espacio de fases y se deja al sistema oscilar, la trayectoria será, como dijimos antes, una línea curva cerrada elíptica. Dependiendo del impulso inicial dado al péndulo, la elipse tendrá mayor o menor tamaño.

Un péndulo real, sin embargo, tiene fricciones y resistencia del aire; por ello, termina deteniéndose. La dinámica del sistema queda representada gráficamente en el espacio de fases bidimensional por una espiral que tras varios giros muere en el origen de coordenadas: velocidad y posición nulas. A ese punto del espacio de fases se le conoce como *atractor*⁴, ya que

⁴Usado primero por Stephen Smale (1930–?) y no por Rene Thom (1923–2002) como muchos señalan.



las trayectorias cercanas al origen tienden a él. Bajo estas condiciones, el sistema permanece en dicho régimen y por ello el origen se dice que es asintóticamente estable.

Los relojes actuales con apariencia analógica (tienen manecillas como los antiguos pero reciben el auxilio energético de una pila eléctrica y un cristal de cuarzo) constituyen péndulos ‘forzados’, es decir, compensan las pérdidas de energía por rozamiento con inyecciones de impulso mecánico. Así, no importa que el reloj desfallezca o se acelere en algún momento. El dispositivo electrónico incorporado se encargará de reanimarlo o relajarlo para que reencuentre su cadencia rítmica: el orden de la regularidad. En este caso, el atractor es una elipse con brazos espirales en el exterior y en el interior que terminan abrazándola y fundiéndose con ella en la intimidad más absoluta. Se trata de un atractor muy especial, llamado *ciclo límite estable*: un bucle cerrado hacia el cual convergen las trayectorias vecinas.

Ejemplos interesantes de ciclos límite lo constituyen los sistemas “presa-depredador”; por cierto, implantados natural o artificialmente en todo tipo de ecosistemas: biológicos, sociopolíticos, religiosos, etc. Con pocos depredadores, las presas viven a sus anchas. Los primeros se reproducen plácidamente aumentando su número, mientras que las presas van desapareciendo drásticamente. Los depredadores, en esa tesitura, comienzan a morir por falta de alimento y las presas comienzan a reproducirse hasta superpoblar el ecosistema. Y el ciclo comienza de nuevo. Aunque aparezca una enfermedad que les afecte o se incremente artificialmente alguna de las poblaciones, los científicos demuestran que la tendencia del sistema es recuperar el ciclo. Un ciclo límite.

Es sorprendente que el comportamiento aparentemente aleatorio de los seres vivos integrantes del sistema, pueda autoorganizarse de forma que resulte una estructura ordenada. Esto es, la génesis del orden a partir del caos. O, el sutil orden que subyace en el caos. Ahora bien, podría extrapolarse especulativamente el concepto al proceso evolutivo del ser humano. Factores psicológicos y ambientales, aparte de la configuración genética, podrían determinar en la infancia ciclos límites estables de carácter múltiple: individuos tendentes a ser felices o a no serlo, comportamientos cíclicos pacíficos o violentos, pautas de convivencia tolerantes o intolerantes, actitudes favorables o desfavorables hacia diversas formas de aprendizaje, etc. Todos los esfuerzos por modificar el ciclo, terminarían por consolidarlo. Entonces se podría pensar en transformar el contexto, lo cual, además de ingenuo resulta algo bastante improbable. O bien, inyectar ... caos.

En los espacios de fases de una y dos dimensiones los únicos atractores son las posiciones de equilibrio asintóticamente estable y los ciclos límites. Si el fenómeno requiere para su modelación de un espacio de fases de dimensión mayor, puede aparecer otro tipo de atractor: el toro; esto ocurre en la

situación en la cual el péndulo libre tiene dos movimientos independientes: oscila y gira alrededor de su punto de apoyo. Es interesante analizar el caso cuando este mismo péndulo, está sometido a fricción.

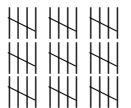
Es claro además, que estando en presencia de un ciclo límite, el sistema físico descrito, por ejemplo el péndulo, recibe energía externa suficiente para compensar los rozamientos y el amortiguamiento consiguiente. Las órbitas cercanas a un ciclo límite estable se acercan indefinidamente a este, lo que equivale, en el sistema físico, a que el movimiento del péndulo se acerca a un cierto régimen de trabajo.

Hemos hecho alusión al oscilador armónico simple, pues este ha jugado un importante papel en la teoría de las oscilaciones y puede compararse al que juega el ciclo límite en las oscilaciones no lineales y el de solitón en los sistemas ondulatorios no lineales. Además, es claro que fue el punto de partida, en muchos aspectos, de la teoría cualitativa en general y de la teoría de las oscilaciones en particular.

La observación simple muestra que algunas posiciones de equilibrio de sistemas sometidos a perturbaciones pequeñas son estables; pero otras posibilidades de posición de equilibrio son, en principio, imposibles de realizar desde el punto de vista práctico. Así, en el ejemplo del péndulo se tienen dos posiciones de equilibrio, si un péndulo ocupa su posición inferior, una perturbación puede provocar solamente su oscilación alrededor del punto de equilibrio.

El estudio del péndulo constituye, desde hace un buen número de años, un capítulo clásico de todo libro de texto de mecánica analítica. Mgr. Lemaitre, lo adelantó en sus conferencias en la Universidad de Louvain (Bélgica). Sus notas de conferencia son tituladas: *Lecciones de mecánica. El péndulo*, y podemos leer en su introducción: “*Una actitud intermedia que nosotros seguiremos consiste en retener de la historia de la ciencia la preeminencia dada a un problema particular, el movimiento del péndulo y, por tanto, presentar los conceptos fundamentales en el marco de este problema particular... Este problema del péndulo es uno de aquellos donde la ciencia de la mecánica fue surtida de una de sus mayores contribuciones a la edificación de las matemáticas modernas, porque él puede ser ampliamente identificado con el estudio de las funciones elípticas alrededor de las cuales fue construida la teoría de funciones de una variable compleja...*”.

Mucho más reciente, en la *Encyclopediae Universalis* francesa, en un artículo titulado *Systemes dynamiques differentiables*, A. Chenciner usa de nuevo el péndulo como un tema central, para iniciar al lector a la teoría moderna de sistemas dinámicos: el primer capítulo describe en detalle ejemplos conectados al péndulo e introduce más y más comportamientos asintóticos complejos cuyos análisis van a requerir los conceptos más



abstractos de la última parte; en el capítulo nueve de este artículo encontramos: *el péndulo sin fricción; un sistema hamiltoniano, el péndulo con fricción lineal: un sistema estructuralmente estable, perturbaciones periódicas de un péndulo friccionado y difeomorfismo que preservan el área en el plano.*

A pesar de sus precursores, Galileo es el primer científico asociado al estudio experimental y teórico del péndulo. Es conocida la historia —verdadera o falsa— de su descubrimiento en 1583 o 1584, del isocronismo de las oscilaciones del péndulo, observando una lámpara suspendida en la Catedral de Pisa.

El primer documento escrito de Galileo sobre el isocronismo del péndulo es una carta de 1602 a Guidobaldo del Monte: “*Ud. debe perdonar mi insistencia en mi deseo de convencerlo de la verdad de la proposición que los movimientos en el mismo cuadrante de un círculo son hechos a igual tiempo*”. En su famoso *Diálogo* escribió: “*El mismo péndulo hace sus oscilaciones con la misma frecuencia, o con poca diferencia, casi imperceptible, cuando éstas son hechas por una circunferencia mayor o sobre una muy pequeña*”. Esto es, por supuesto, un planteamiento erróneo o, en un camino positivo, podemos considerarlo como una manifestación muy primitiva de lo que es, posiblemente, la primera herramienta básica en la ciencia no-lineal: la linealización. Conocemos que el isocronismo no es una propiedad de las soluciones de la ecuación diferencial del péndulo con longitud l :

$$u'' + \left(\frac{g}{l}\right) \sin u = 0,$$

pero de su forma linealizada si

$$u'' + \left(\frac{g}{l}\right) u = 0.$$

La expresión precisa $T = 2(g/l)^{1/2}$ para el período de las soluciones de esta última ecuación, será lo primero dado por Newton en su *Principia*, en 1687.

Note que algunas aplicaciones del péndulo fueron ya presentidas por Galileo, en particular a la medición de un Pulsilogium para verificar el pulso de un paciente; a la navegación en la determinación de la longitud, y a la horología con la regulación de los relojes mecánicos.

Una prueba de la independencia del desarrollo matemático con respecto a las exigencias de la práctica social está en el hecho de que este problema del isocronismo, todavía es objeto de estudio por parte de diversos matemáticos

en el mundo. Así, sea la ecuación diferencial:

$$y'' + f(y) = 0, \quad (3)$$

donde la función $f(y)$ es continua, $yf(y) > 0$ si $y > 0$. Supóngase que la función $F(y) = \int_0^y f(s) ds$ satisface la relación $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = \infty$, entonces, toda solución de (3) es oscilatoria y periódica. El problema de isocronismo para esta ecuación es el siguiente: ¿Bajo cuáles condiciones todas las soluciones de (3) tendrán el mismo período? En un trabajo de A. Elbert⁵ este problema se extiende al caso de la ecuación diferencial más general:

$$y'' + \mu f(y)g(y') = 0, \quad (4)$$

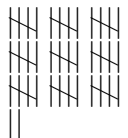
donde la función f satisface los requerimientos anteriores para (3) y g es una función que satisface las siguientes condiciones:

- i) $g(t)$ es continua y positiva sobre $\mathbf{R}$.
- ii) Los límites $\int_{\pm 0} \frac{z dz}{g(z)}$ existen.
- iii) La función $G(z) = \int_0^z \frac{s ds}{g(s)}$ satisface la relación $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = \infty$, con μ un parámetro positivo.



Si Guidobaldo del Monte expresó en 1602 un buen grado de escepticismo al llamado isocronismo de Galileo, fue un astrónomo belga, Wendelin, el primero en mostrar experimentalmente que el período de las oscilaciones crece con las amplitudes de las oscilaciones, y da tablas exactas en su *Luminacarni Eclipses Lunares* de 1644. Este hecho fue entonces deducido matemáticamente por Huggens en su famoso *Horologium* de 1673, y él mismo también observó los fenómenos no-lineales de ‘sincronización’ en dos péndulos fijados sobre una misma cuerda delgada. Doscientos quince años después, Van der Pol y Appleton⁶ descubrieron un fenómeno análogo en circuitos eléctricos.

⁵ “Isochronism Problems for Nonlinear Second Order Differential Equations”, *Public. Mathematicae*, **34**, Debrecen (1987), pp. 163–167.



La relación matemática entre el período T y la amplitud A fue expresada por Euler en 1736 en su *Mecánica* por la serie:

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{A}{2} \right) \right], \quad (5)$$

y Poisson, en 1811⁷, analizó la ecuación del período usando un método de desarrollo en series de potencia de un parámetro pequeño. La relación (5) fue formulada por Legendre en 1825 y por Jacobí en 1829⁸ para integrales y funciones elípticas.

La teoría cuantitativa del péndulo libre fue completada por la expresión de las soluciones de la ecuación (3) en términos de funciones elípticas. Debemos a Poincaré, en 1881, el estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales no-lineales, particularmente en el caso de la ecuación (3), la descripción topológica de las órbitas $(u(t), u'(t))$ de las soluciones de (3), en el plano de fases (u, u') . El retrato correspondiente, con el equilibrio estable $(2k\pi, 0)$, centros, el equilibrio inestable $((2k+1)\pi, 0)$, puntos de sillars, las soluciones periódicas no constantes (órbitas cerradas) sobre las que Poincaré apuntó: “*Lo que hace que estas soluciones periódicas sean tan apreciadas es que son, por así decirlo, la única brecha por donde podemos intentar penetrar en un lugar considerado hasta aquí inabordable*”, las soluciones rotatorias y las separatrices conectadas con el equilibrio inestable (órbitas heteroclínicas u órbitas homoclínicas, si identificamos, módulo 2π , el equilibrio inestable, *i.e.*, si trabajamos sobre la variedad natural cilíndrica de fases). Como tantas veces, la historia tomó el camino opuesto con respecto a la metodología de Poincaré en el ‘ataque’ de las ecuaciones diferenciales no-lineales: el estudio cuantitativo del péndulo libre había precedido al cualitativo.

El acercamiento cualitativo es particularmente útil a la discusión de la ecuación del péndulo libre amortiguado:

$$u'' + cu' + \left(\frac{g}{l}\right) \operatorname{sen} u = 0,$$

cuyas soluciones no pueden ser expresadas en términos de funciones conocidas, lo cual también es cierto para la ecuación:

$$u'' + cu' + a \operatorname{sen} u = b,$$

⁷ *Traite de Mécanique*.

⁸ En sus clásicos *Traite des fonctions elliptiques* y *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, respectivamente.

que aparece en el estudio de motores sincrónicos (con las contribuciones de Edgerton, Fourmarier, Tricomi).

En el caso de una ecuación diferencial de la forma:

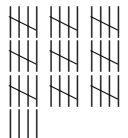
$$x'' + Ax' + Bx = F, \quad (5')$$

donde A , B y F no son necesariamente constantes, el retrato de fases de ésta son curvas en el plano xx' . Este puede ser obtenido tanto, cuando la ecuación (5') sea lineal o no-lineal. Con el plano de fases obtenidas, el próximo paso es normalmente el análisis del comportamiento del sistema físico, donde la palabra 'análisis' significará un número de diferentes hechos dependientes de la circunstancias. Algunos de los aspectos del análisis puede incluir uno o más de los siguientes pasos:

1. Cálculo de la respuesta exacta transitoria para un conjunto de condiciones iniciales.
2. Predicción del tipo de respuesta transitoria (oscilatoria o monótona) para un cierto rango de condiciones iniciales.
3. Estimado del 'exceso' en la respuesta a la entrada de un paso de magnitud dada.
4. Predicción de la estabilidad del sistema.
5. Predicción de la existencia y la amplitud de ciclos límites (oscilación no lineal de amplitud constante).
6. Predicción de la existencia de varios modos de operación.
7. Estudio del efecto de un tipo dado de no-linealidad sobre el comportamiento del sistema, comparado con el sistema lineal, con un sistema no lineal, con un tipo diferente de no-linealidad, o con un sistema el cual es no-lineal en el mismo sentido, pero con un grado diferente.
8. Ensayar la respuesta a preguntas como:
 - ¿Esta no-linealidad mejora el comportamiento?
 - ¿Qué cambios se pueden hacer para suprimir el ciclo límite?
 - ¿Cómo podemos ajustar este sistema y hacer que satisfaga a las especificaciones?
 - ¿La no-linealidad es continua o discontinua?

En el primer caso, el plano de fases puede constar de dos, tres o más hojas, y en el segundo, las líneas de conmutación originan una quiebra en las trayectorias de fases.
9. Análisis de la influencia de los parámetros y de la existencia de bifurcación en las soluciones periódicas de (5') en casos de existir estas.

Por tanto, es realmente claro que el retrato de fases debe ser obtenido como condición, sino indispensable, por lo menos muy importante en el análisis del sistema.



Volviendo al problema clásico del péndulo, tenemos que si después de aumentar la perturbación se logra, en algún momento, detener el péndulo en la posición superior, entonces hasta un pequeño golpe provoca su caída. En este ejemplo, el estudio sobre la estabilidad, o mejor aún, sobre las oscilaciones, se resuelve de manera elemental pero, y siempre hay un pero, la realidad no tiene por qué acomodarse a nuestros intereses: si en el péndulo, que además de rotar, oscila, se le adapta un resorte que lo una a un motor que le transmite impulsos, el movimiento que se engendra produce en el espacio de fases —ahora de tres dimensiones— una curva localizada en una región finita del espacio, pero que no la invade completamente. Esto es, sería una curva de longitud infinita, encerrada en una región finita y que nunca se corta a sí misma. Seguir la trayectoria produce la sensación de estar contemplando un movimiento aleatorio, un movimiento que parece no seguir ningún patrón y que, claramente, difiere de las formas habituales. Por esto, y por quedar confinado a una región finita del espacio, se dice que la órbita da lugar a un *atractor extraño*⁹.

David Ruelle¹⁰ y Floris Takens¹¹, físico-matemático el primero y matemático el segundo, crearon el término atractor extraño como una zona bien delimitada del espacio de fases en la que las líneas de la trayectoria del sistema nunca se cortan. Líneas de longitud infinita confinadas en área finita, describiendo órbitas no periódicas.

Ni Ruelle ni Takens lo habían visto nunca, pero presagiaron su existencia; ese monstruo matemático, según ellos, habría de ser fractal. Lorenz, lo encontró casualmente en 1963¹². Un atractor extraño con una forma de alas de mariposa que jamás se cortaba a sí mismo. Un complejo infinito de

⁹Vid. R. Martínez y R. Bulajich, “Caos. Memoria antigua, realidad moderna”, *Ciencia* **XVIII** 105 (1990) pp. 12–31.

¹⁰Profesor en el Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette, Francia, desde 1964, Honorario desde el 2000. Nació el 20 de Agosto de 1935 en Ghent (Bélgica).

¹¹Editor de la célebre colección Springer Lecture Notes in Mathematics. Nació el 11 de diciembre de 1940 en Zaandam, Holanda.

¹²En su famoso paper de 1963, *Deterministic nonperiodic flow*, Edward Lorenz propuso como modelo de la dinámica de un flujo hidrodinámico disipativo una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes que resulta en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Las ecuaciones, ahora llamadas ‘ecuaciones de Lorenz’ son:

$$\frac{dx}{dt} = s \cdot (y - x), \quad \frac{dy}{dt} = r \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z.$$

Lorenz analizó este sistema para $s = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ y encontró que las soluciones presentaban propiedades sorprendentes. En particular, es posible encontrar una superficie que encierre al flujo implícito, de forma que las trayectorias quedán confinadas en su interior y, sin embargo, puede demostrarse que no existen puntos fijos estables, ni ciclos límite. ¿Qué ocurre entonces con las trayectorias? Las trayectorias son atraídas por un fractal, un conjunto con volumen cero y área infinita, que exhibe una asombrosa complejidad y sobre el cuál puntos muy cercanos pueden presentar una extraordinariamente rápida divergencia. En un artículo muy reciente (2002), W. Tucker resolvió uno de los famosos problemas de Smale, demostrando que la estructura de este atractor es la de un atractor extraño.

superficies separadas como en un dulce de hojaldre. Un insólito espectáculo geométrico.

Los atractores extraños se generan como producto de la convivencia de dos situaciones, aparentemente incompatibles: órbitas muy cercanas entre sí se separan rápidamente o, lo que es lo mismo, el comportamiento del sistema depende, con extrema fineza, de las condiciones iniciales. Por otra parte, como el sistema es amortiguado, un conjunto de condiciones iniciales que ocupan un cierto volumen del espacio de fases, se contrae. Contracción y separación, lógicas antagónicas y sin embargo, coexistentes. Como el conjunto atractor tiene un cierto tamaño, las órbitas no se pueden separar más allá de cierta distancia y deben, por lo tanto, doblarse una y otra vez y, sin cruzarse, ir formando láminas que se entrelazan de la manera más complicada que se pueda imaginar. Característica esencial que ya fue destacada: ante observaciones cada vez más detalladas siempre se obtiene la complejidad del conjunto, casi llenan una región y, sin embargo, siempre hay huecos, revelando así su estructura fractal.

Después de este necesario preámbulo podemos declarar que estamos interesados en ilustrar, no con un ejemplo particular como lo es el péndulo, sino con el propio desarrollo de las EDO, cómo se ha ido desarrollando el aparato conceptual y metodológico de la matemática actual, a raíz del desarrollo de las investigaciones propias de las EDO, y cómo en éstas convergen ahora científicos de disciplinas afines (y no tan afines) como son la topología, el análisis funcional, la teoría de conjuntos y otras que se han compenetrado, perfectamente, con las propias de las EDO¹³. Destacando de paso, que esto es un rasgo de la matemática actual, el desarrollo de sus métodos a partir de investigaciones de campos específicos; rasgo que empieza a ser evidente a mediados del siglo pasado y que es algo que en estos momentos (dado el nivel de integración de las diferentes disciplinas matemáticas) no puede ser obviado.

Las relaciones entre la matemática y sus diferentes campos vienen siendo un asunto muy discutido por más que a veces lo puesto en cuestión sea la existencia misma de alguna relación (en una u otra dirección) entre ellas. Desde luego, no faltan en la literatura diversos intentos de distanciarlas con demarcaciones o contraposiciones del tipo: matemática pura/matemática aplicada. Pero también existen lugares de cruce donde alguna suerte de relación parece obligada —aunque, por lo general, el tratarse de una cita inevitable no vuelve más claro su sentido, ni más previsible su desenlace—.

¹³Para otros puntos de vista, puede consultar J. E. Nápoles y C. Negrón, “De la mecánica analítica a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Algunos apuntes históricos”, *Revista LLULL (España)*, **17** 32, 1994, pp. 190–206 (un resumen del cual fue publicado en el *Bol. Soc. Mat. Comp.*, **15**, 1993, pp. 1–9) y los trabajos del autor “Ecuaciones diferenciales y contemporaneidad” y “Cien años de teoría cualitativa. Algunos apuntes”, dados a publicar.



Uno de estos lugares de cruce es la ‘teoría cualitativa’; en ella, desde fines del siglo diecinueve, las EDO han tenido que verse las caras con la matemática.

Estos cruces pueden verse como lugares de encuentro o como lugares de despedida. Así la teoría cualitativa, en cuyo origen mismo ya se habían entrecruzado motivos diversos (filosóficos, dialécticos, matemáticos), representa hoy en día un cruce principal de los caminos de la matemática.

Por ejemplo, desde un punto de vista filosófico, es un lugar tanto de confluencia como de bifurcación entre la llamada matemática pura y la aplicada. Desde un punto de vista histórico, también hay unas relaciones un tanto inciertas —medio de alejamiento, medio de aproximación— entre las teorías de las EDO y su objeto paradigmático de referencia, los modelos matemáticos. Desde un punto de vista técnico, atraviesan por un trance semejante la integración de los marcos geométrico, analítico y numérico en el estudio de un fenómeno determinado. En cualquier caso, las convergencias y divergencias de nuestras vías de análisis del desarrollo de la teoría cualitativa, convierten la relación EDO-matemática en un interesante núcleo de problemas. Nos limitaremos a clarificar algunos de ellos, en particular, los referidos al caos, los fractales y la teoría de las catástrofes¹⁴. Y puesto que caos y atractores extraños son manifestaciones distintas de una misma realidad, ahí va la receta que Ian Stewart proporciona para obtener un caos succulento “*350 gramos de espacio de fases, 1 cucharada sopera de condiciones iniciales, estirar y doblar repetidamente, y sazonar al gusto*”. Le aseguro, amable lector, un exquisito plato impredecible.

2. EL CAOS

Durante las últimas décadas, físicos, biólogos, astrónomos y economistas crearon un modelo teórico que les sirviera para comprender la complejidad que podemos observar en la naturaleza. La nueva disciplina, llamada *ciencia del caos* o *teoría del caos*, ofrece un método para descubrir orden y concierto donde antes sólo se veía el azar, la irregularidad, lo impredecible,

¹⁴En un marco general sobre las perspectivas actuales en filosofía e historia de las matemáticas sobre el conocimiento matemático, se deben destacar los ensayos de Morris Kline, “Matemática. La pérdida de la certidumbre”, *Siglo XXI*, Madrid, 1985, y de R. Hersh, “Experiencia matemática”, *Labor*, Barcelona, 1988, así como los trabajos de Mark Steiner, “Mathematical Knowledge”, *Cornell University Press*, Ithaca, 1975, por su agudeza crítica; Raymond L. Wilder, “Mathematics as a Cultural System”, *Pergamon Press*, Nueva York/Oxford, 1981, una visión próxima (aunque un tanto superficial) a un sentir hoy común sobre los aspectos culturales, sociales e históricos del desarrollo de las matemáticas; Philip Kitcher, “The Nature of Mathematical Knowledge”, *Oxford University Press*, Nueva York/Oxford, 1983, como perspectiva general del campo temático con singular atención a algunos puntos (*e.g.*, la discusión del presunto estatuto *a priori* del conocimiento matemático, el cambio histórico en matemáticas, la rigORIZACIÓN) y Mary Tiles, “Mathematics and the Image of Reason”, *Routledge*, Londres/Nueva York, 1991, una síntesis histórica-filosófica apropiada.

en una palabra, lo caótico. Como dice Douglas Hofstadter¹⁵, uno de los matemáticos que más intensamente se ha ocupado del tema: “*Sucede que una misteriosa clase de caos acecha detrás de una fachada de orden y que, sin embargo, en lo más profundo del caos acecha una clase de orden todavía más misterioso*”.

La ciencia del caos traspasa las disciplinas científicas tradicionales enlazando tipos de desorden y de irregularidad que aparentemente no tienen nada que ver entre sí: desde la turbulencia del tiempo meteorológico hasta los complicados ritmos del corazón humano, desde los torbellinos de agua que se forman detrás de una piedra en un arroyo hasta las misteriosas fluctuaciones de los mercados de valores.

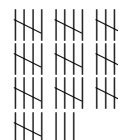
A diferencia de los fenómenos de los que se ocupan la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, los sistemas que ahora se describen como caóticos pueden observarse sin telescopios ni microscopios. Y es que, a pesar de haber surgido de un arduo esfuerzo matemático, la teoría del caos es un saber de lo cotidiano, de cosas que incluso intrigan a los niños: ¿cómo se forman las nubes? o ¿por qué el viento produce remolinos de arena?

Todos estos procesos aparentemente desordenados presentan ciertas características cuantificables: su desarrollo en el tiempo depende muy sensiblemente del estado actual, es decir, de cómo están distribuidas las variables en el instante en que se comienza la observación del fenómeno en cuestión, razón por la cual, aun no siendo aleatorio, lo parece. Pero ¿para que sirve descubrir las leyes que subyacen a los sistemas dinámicos supuestamente impredecibles? Precisamente uno de los padres de la teoría del caos, Edward N. Lorenz, inventó en 1960 el primer simulador informático de la atmósfera. Pues bien, experimentando con él, y a pesar de su simplicidad en comparación con los potentes simuladores meteorológicos actuales, Lorenz logró desentrañar una de las principales leyes del caos: el efecto mariposa¹⁶.

Resulta que en un sistema dinámico —y la atmósfera lo es, aunque a una enorme escala— cambios pequeñísimos en una de las variables pueden resultar amplificados y provocar efectos grandísimos. Por eso, al menos en teoría, el aleteo de una mariposa en una selva de Borneo podría desencadenar un huracán en la península de Florida, en la otra punta del planeta. Pero claro, sería imposible demostrarlo. Eso también enseñó a Lorenz que,

¹⁵Uno de los matemáticos y filósofos contemporáneos más destacados, recomendamos su “Gödel, Escher, Bach: Un eterno y gracil bucle”, *Tusquets*, Barcelona, 1987 (título original “Gödel, Escher y Bach: An eternal Golden Braid”, 1979), donde la pregunta ¿puede un sistema comprenderse a sí mismo? se investiga y da lugar a una aventura que recorre la matemática, la física, la biología, la psicología y muy especialmente, el lenguaje. Sorprendentes paralelismos ocultos entre los grabados de Escher y la música de Bach nos remiten a las paradojas clásicas de los antiguos griegos y a un teorema de la lógica matemática moderna que ha estremecido el pensamiento del siglo XX: el de Kurt Gödel. Todo lenguaje, todo sistema formal, todo programa de computadora, todo proceso de pensamiento, llegan, tarde o temprano, a la situación límite de la autorreferencia: de querer expresarse sobre sí mismos. Surge entonces la emoción del infinito, como dos espejos enfrentados y obligados a reflejarse mutua e indefinidamente.

¹⁶Véase la nota número 12.



por muy potentes y veloces que sean los ordenadores del futuro, jamás se podrá vaticinar el tiempo que hará mañana con un cien por ciento de seguridad: un pájaro, una mariposa, o incluso una mosca podrían desbaratar los cálculos más meticulosos. . .

En realidad, la historia es así. Lorenz usaba su ordenador *Royal McBee* para desentrañar la maraña matemática que él mismo había creado con sus doce ecuaciones para predecir el tiempo atmosférico en el *Massachusetts Institute of Technology*. Era el año 1960.

Su pasión por el pronóstico atmosférico le vino durante la Segunda Guerra Mundial. Tras su graduación en Matemática pura en el *Dartmouth College* en 1938, participó en la contienda diagnosticando el tiempo para las fuerzas aéreas. Transcurrida la guerra optó por dedicar sus esfuerzos matemáticos aplicándolos a la meteorología.

La predicción del tiempo se debía regir por ecuaciones, al igual que las órbitas de los planetas, satélites y galaxias, quizá más complicadas, pero ecuaciones al fin y al cabo. Para ello escogió 12 funciones, unas establecían el vínculo entre velocidad y viento, otras entre presión y temperatura, y así unas cuantas variables más. No le promovía sólo un interés meramente físico sino también matemático.

Su trabajo fue de boca en boca por el MIT, llegando a tal punto que se organizaban apuestas sobre los pronósticos que darían las ecuaciones de Lorenz.

Hojeando los rollos y rollos de papel con datos numéricos que arrojaba su impresora, Lorenz ideó un método para que el ordenador señalara cada minuto el paso de un día imprimiendo una hilera de números.

En 1961, Lorenz, cansado de observar ese vaivén numérico salido de la impresora de su ordenador, intentó atajar partiendo de una sucesión anterior pero al traspasar los dígitos sólo tecleó 3 en vez de los 6 originales, esperando que el comportamiento no cambiaría. Los resultados obtenidos trajeron de cabeza a Lorenz pues no eran los esperados y revisó el *software* y *hardware* hasta darse cuenta finalmente, que el error lo cometió al truncar el valor inicial de la función cambiando la entrada de 0.506127 a 0,506.

No creyó que una variación tan pequeña pudiera comportar un cambio tan radical de la función al cabo de unas cuantas iteraciones.

Había dado con “el efecto mariposa”. Este redondeo insignificante era el aleteo de la mariposa en el Amazonas; y el comportamiento anómalo, o digamos inesperado, de la función el huracán que se produciría el próximo mes en las costas bretonas.

Cualquier pronóstico climatológico se deteriora rápidamente por culpa de un viento, de una entrada de aire caliente, por una bajada de presión, por una tormenta inesperada. . . , ese error va creciendo geométricamente y la realidad al día siguiente no es la esperada sino otra totalmente distinta:

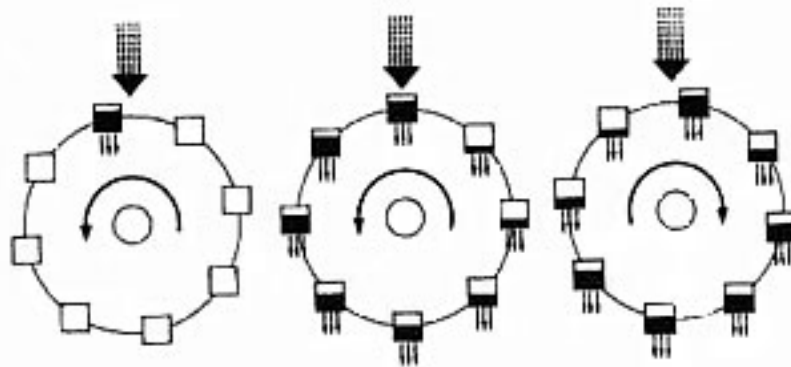
donde haría sol, llueve; donde llovería, luce el sol; donde se podría ir a la playa, se encierran en el sótano hasta que pase el huracán; etcétera.

A su descubrimiento lo llamó Lorenz “*Dependencia sensitiva de las condiciones iniciales*” y con ello creó la base de una nueva ciencia: el caos, ciencia que no resurgiría hasta bien pasados los años, cuando los colegas de Lorenz dejaron de ver su descubrimiento como simple distracción matemática y se cercioraron de la grandeza de su trabajo. Fue entonces cuando el *boom* del caos se produjo en el *status* científico, y todos pretendían verlo, incluso en lugares donde no existe.

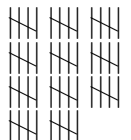
Lorenz, animado por su descubrimiento, decidió comenzar a experimentar con sus resultados en el campo de las corrientes de fluidos y sus 12 fórmulas se vieron reducidas a 3 simples ecuaciones no lineales.

Las ecuaciones lineales expresan relaciones proporcionales y su representación gráfica es siempre una recta, adoptando la forma $f(x) = ax + b$. Las no lineales no son tan simples e intervienen una serie de factores a veces en mayor y otras en menor medida como puede ser el rozamiento, cuyo valor depende de la clase de firme, del peso y velocidad del móvil.

Sus tres ecuaciones respondían al funcionamiento de una noria de agua cuyo suministro de agua dista de ser idóneo. El aparentemente sencillo comportamiento de tan simple sistema mecánico se transforma en sorprendentemente complicado cuando el suministro de agua supera al deseado y por los cajones de la noria no se desagua lo suficiente para superar la fricción y seguir con su movimiento y velocidad uniforme.



La velocidad de la noria aumenta y los cajones no se llenan por igual con lo cual llegará un momento en que el peso de los cajones que faltan por llenarse vencerá la fricción y la rueda comenzará a girar en sentido contrario y seguirá repitiéndose este proceso de cambio de sentido pero sin una pauta determinada ni predecible. Es decir, podrá cambiar 5 veces en



10 minutos como estar otros 10 minutos sin cambiar, o cambiar 5 veces en los 3 minutos siguientes.

Esta aparente azarosidad, depende de:

- El aumento de la velocidad de giro de la rueda.
- El caudal suministrado.
- Reducción del tiempo de llenado de los cajones.
- Los cajones que no se han llenado vencen a la velocidad de giro.

Lorenz representó gráficamente los resultados obtenidos con sus 3 ecuaciones en una gráfica tridimensional, asignando el valor obtenido de cada ecuación a una de las 3 dimensiones del plano euclídeo.

La línea de la gráfica no se tocaba jamás, el desorden era total pues ningún punto se repetía ya que no había intersecciones, pero se vislumbró un nuevo tipo de “*desorden ordenado*”: el *caos*.

3. EL MUNDO FRACTAL

Intentaremos presentar, concisamente, una definición comprensible de lo que llamamos fractales, llevada al caso de la recta real.

Después de la famosa tesis de Frechét¹⁷ de 1906, las investigaciones sobre métricas y espacios métricos crecieron exponencialmente. Uno de los principales investigadores del tema fue el matemático alemán Hausdorff¹⁸, una de cuyas direcciones de trabajo relaciona los conceptos de medida y dimensión¹⁹. Sea p un número real no negativo arbitrario, $0 \leq p < +\infty$ y, dado $\alpha > 0$, consideremos:

$$\mu_p^a = \text{extrinf}_{d(X_k) < \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} [d(X_k)]^p,$$

¹⁷Maurice René Frechet. Matemático francés, nacido el 2 de septiembre de 1878 en Maligny, Yonne, Bourgogne, y muerto el 4 de junio de 1973 en Paris. Discípulo de Hadamard, desarrolló bajo su dirección la tesis antes mencionada en la que, además de introducir el concepto de espacio métrico, estudió ecuaciones funcionales en este tipo de espacios y definió una noción abstracta de compacidad. Fréchet realizó importantes aportes a la topología, el análisis funcional (fundamentando la teoría de espacios abstractos) y realizó notables contribuciones a la estadística, las probabilidades y el cálculo. En 1907 presentó su teorema de representación de funcionales lineales en términos de operador integral. Este resultado fue obtenido independientemente por Riesz y es conocido como el *Teorema de representación de Riesz*. Mayores informaciones pueden ser consultadas en <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Frechet.html>

¹⁸Felix Hausdorff nació el 8 de noviembre de 1868 en Breslau (hoy Wrocaw, Polonia); se suicidó el 26 de enero de 1942, junto a su esposa y la hermana de ésta, en repudio a la estrategia nazi antisemita. En <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hausdorff.html> pueden ser consultados detalles adicionales.

¹⁹Véase P. R. Halmos, “Measure Theory”, *Van Nostrand Cía, Inc.*, 1961.

donde $X = \cup X_k$ es una descomposición finita o infinita numerable cualquiera de X , en subconjuntos X_k de diámetro $d(X_k)$ menores que α .

Cuando $\alpha \rightarrow 0$, el número $\mu_p^\alpha(X)$ tiende en forma monótona creciente a un determinado límite (finito o infinito) $\mu_p(X)$. Esta medida puede servir para definir la dimensión de un conjunto, debido a que un conjunto puede tener medida p -dimensional finita y no nula, a lo sumo para un sólo valor p .

Observemos que la dimensión de Hausdorff de un conjunto no es necesariamente un entero; por ejemplo, la dimensión del conjunto ternario de Cantor (véase la sección 50-2, nota 3 del texto citado en la referencia 17) es $\ln 2 / \ln 3 = 0,63093$, como se demuestra en la memoria original de Hausdorff²⁰.

Esta no es la única definición de fractal usada, puede utilizarse también la de Minkowskii, aunque desde el punto de vista técnico es más engorrosa (no obstante, ha mostrado su utilidad en diversos estudios actuales, cuando se le pensaba ‘olvidada’²¹). La dimensión de Hausdorff–Besicovich describe cómo el ‘volumen d -dimensional’ de un objeto se comporta bajo cambios de escala; la dimensión de Minkowski, en contraste, describe el comportamiento de los puntos cerca del objeto en sí; esta posee algunas aplicaciones en problemas de vibración, como las partes de un tambor que vibran cerca de la corona y no la corona misma²².

En el desarrollo de la matemática figuran varios desengaños sucesivos, cuyo desenlace puede citarse en la ‘pérdida de la certidumbre’ —como reza el título del libro de Kline ya aludido. Parafraseando a Vega, las matemáticas han pasado, desde mediados del siglo XIX, entre otros, por estos trances²³:

1° La pérdida de arraigadas evidencias y certezas físico-matemáticas, sobre todo a partir del desarrollo de las geometrías no-euclidianas. Con ello se fue diluyendo la fe del pensamiento moderno de los siglos XVII y XVIII en una suerte de armonía preestablecida entre la geometría euclidea y bien la configuración real del espacio físico o la confirmación mental de nuestra percepción del espacio; tan es así, que la asimilación de los conjuntos fractales aún hoy en día no es ni siquiera satisfactoria.

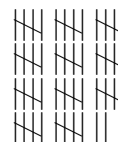
2° La quiebra de las aspiraciones a cimentar la solidez lógica y/o teórica del edificio deductivo de la matemática clásica. Se pensó, por ejemplo,

²⁰ “Dimension und Asseres Mars”, *Math. Ann.* **79** (1919) pp. 157–179.

²¹ Véase M. Lapidus y J. Fleckinger-Pellé, “Tambour fractal: vers une résolution de la conjecture de Weyl–Berry pour les valeurs propres du laplacien”, *C.R. Acad. Sci. Paris* **306**, série I, 1988, pp. 171–175, donde se prueba una importante conjetura sobre las frecuencias de vibración de objetos que tienen fronteras fractales, utilizando la menos familiar dimensión de Minkowski.

²² Es lectura obligada *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982, de Benoit Mandelbrot.

²³ L. Vega, “¿Está en crisis la idea clásica de demostración matemática?”, *Actas COMPUMAT’96*, Universidad de Holguín, Septiembre de 1996.



que las investigaciones en el campo de la existencia y la unicidad de las soluciones, para ecuaciones diferenciales definidas sobre espacios infinito-dimensionales, podían seguir el mismo esquema que en el caso de espacios de dimensión finita, el ejemplo típico de que tal camino es incorrecto es el debido a Dieudonné²⁴. Un señalamiento similar puede hacerse a las primeras extensiones a B -espacios de la teoría de la estabilidad.

Después de estos y otros descalabros, es claro que la integración de teorías, a veces disímiles, permitirían obtener las nociones, los resultados y los métodos matemáticos por diferentes vías prácticas e intuitivas, antes de saltar al plano de la abstracción teórica y de la demostración sistemática en que se mueven los matemáticos puros.

4. LA TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES

Volvamos a algunos de los puntos tratados anteriormente. No es casual que la propiedad fractal resulte ser una medida de la complejidad de la órbita. Lo interesante radica en que dicha complejidad, aunque asociada a un sistema completamente determinado por una regla matemática, hace que sea prácticamente imposible predecir el comportamiento del sistema a largo plazo. Recordemos que en 1955 el matemático americano Hassler Whitney (1907–1989) publicó el artículo *Mappings of the Plane into the Plane*, donde expuso las bases de una nueva teoría matemática —*La teoría de singularidades de aplicaciones suaves*. A mediados de los años 60 comienza a hablarse del libro de René Thom (1923–2002), *Stabilité Structurale et Morphogénese*, que apareció en forma acabada en 1972 y que rápidamente despertó la atención e interés de todos por una teoría conocida ahora como *Teoría de las catástrofes*. Thom propuso utilizar la teoría topológica de los sistemas dinámicos para la modelación de diversos fenómenos de crecimiento y desarrollo en diversas ramas, principalmente la biología. Él señaló que bajo algunas condiciones exigidas, se deduce que el estudio de diversos sistemas se puede describir, localmente, mediante algunas formas elementales estándares llamadas *catástrofes elementales*.

Desde los años setenta este discurso de Rene Thom que apuntaba a una nueva ciencia, a la que él llamó *Semiofísica*, la física de las formas significantes, cobró gran impulso, sobre todo porque buscó dotar de sentido al observador que contempla la evolución de las formas que ocurren en la naturaleza: seres estables —o formas emergentes— y entidades no visibles, las llamadas *pregnancias*, especies de semillas de donde surge la forma. Esta metodología hace una crítica a la ruptura galileana, acusándola de

²⁴ “Deux exemples singuliers d’équations différentielles”, *Acta Sci. Math.* **12B** (1950), pp. 38–40.

haber abandonado algunas intuiciones fundamentales que formaban parte importante del discurso científico de los antiguos²⁵.

Algunos consideran que la teoría de las catástrofes es una parte de la teoría de las singularidades, mientras otros afirman lo contrario. Es una disputa bizantina. Aplicaremos el término *teórico de las catástrofes* (siguiendo a Arnold), a cualquiera que trabaje sobre la teoría de las catástrofes, concebida como uno de los términos singularidades, bifurcación o catástrofe.

De acuerdo con Thom, el término teoría de las catástrofes es debido a su discípulo E. C. Zeeman²⁶. Desde un punto de vista de trabajo, podemos decir que la teoría de las catástrofes no es más que la teoría de la bifurcación desde un punto de vista topológico, o sea, es el estudio, desde un punto de vista cualitativo, de las formas en que las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden variar. La primera información sobre esto apareció, por primera vez en la prensa occidental, hace alrededor de 30 años. En 'Newsweek' reportaron una revolución en las matemáticas, comparable quizás, al descubrimiento del cálculo diferencial e integral. Afirieron que la nueva ciencia, la teoría de las catástrofes, era mucho más importante que el análisis matemático: mientras éste sólo considera procesos suaves, continuos, la otra provee un método universal para el estudio de todas las transiciones de salto, discontinuidades y cambios cualitativos súbitos. Aparecieron cientos de científicos y publicaciones sobre el tema y sus aplicaciones a variados campos que van desde el estudio del corazón al estudio de la teoría de partículas elementales, pasando por el estudio de los desórdenes mentales y la censura policial a la literatura erótica.

El punto 'filosófico' es que el conjunto de los puntos catástrofes K son los que contienen el comportamiento significativo del proceso, es decir, donde se trabaja es el lugar geométrico de los puntos de equilibrio del sistema. Él es el esqueleto del cual el resto de la morfología depende.

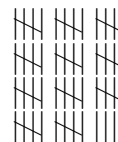
Consideremos un sistema dinámico gradiente:

$$\frac{dx}{dt} = -\text{grad}_x F(x, a),$$

donde x y a son vectores de números reales (posiblemente unidimensional) y F es infinitamente diferenciable, o suave. Llamemos a x variable de estado y a la variable de control.

²⁵Vale la pena reproducir las palabras de Thom en la Introducción (p. 26): "... De hecho, todas las intuiciones fundamentales sobre morfogénesis eran conocidas ya por Heráclito; mi único aporte es el haberlas puesto dentro de un marco geométrico y dinámico, que algún día las hará más accesibles a un análisis cuantitativo...".

²⁶"The Geometry of Catastrophe", *Tiems Lit. Supp.* (1971) pp. 1556–1557.



Busquemos los puntos de equilibrio, así tenemos:

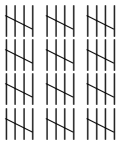
$$\text{grad}_x F(x, a) = 0. \quad (6)$$

El problema matemático es cómo varían las soluciones x de (1) con a , para una F general. Si al resolver esto desde un punto de vista topológico, diferentes funciones F tienen el mismo comportamiento (local), se dicen que son equivalentes. Una clase de equivalencia de tales funciones F es llamada una *catástrofe elemental*.

Para una familia de funciones $f: R^n \times R^2 \rightarrow R$, es decir, con n variables de estado, y con k parámetros de control, si $n \leq 2$ y $k \leq 5$, Thom estableció la existencia de formas canónicas, a las que hacíamos referencia antes. A ellas son reducibles las funciones en estudio, si cumplen con la restricción antes citada y otra que se comentará más abajo.

En las catástrofes elementales, que listamos a continuación, las componentes $x_1, x_2, \dots$ de x han sido reemplazadas por $x, y, \dots$ y $a_1, a_2, \dots$ por $a, b, \dots$

<i>Nombre</i>	$F(x, a)$	<i>Denominación</i>
Pliegue	$\frac{x^3}{3} + ax$	A_2
Cúspide	$\pm \frac{x^4}{4} + a \frac{x^2}{2} + bx$	A
Cola de milano	$\frac{x^5}{5} + a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx$	A_4
Mariposa	$\pm \frac{x^6}{6} + a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^3}{3} + c \frac{x^2}{2} + dx$	$A_{\pm 5}$
	$x^7 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$	A_6
Ombligo elíptico	$x^2y - y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_{-4}
Ombligo hiperbólico	$x^2y + y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_4



Nombre	$F(x, a)$	Denominación
Ombligo parabólico	$x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$	D_5
	$x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_6
	$x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_{-6}
	$x^3 \pm y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + dx + ey$	$\Sigma_{\pm 5}$

Estos nombres son escogidos por una gran variedad de razones y deben ser tratados meramente como mnemotécnicos, las siglas de la última columna son las denominaciones de cada una de estas catástrofes elementales²⁷.

Estas catástrofes elementales poseen una propiedad de estabilidad muy fuerte: la *estabilidad estructural*. Esta noción, como sabemos, se remonta al trabajo de Andronov y Pontriaguin de 1937²⁸, concepto desarrollado posteriormente, en conexión con la topología dinámica, por Smale²⁹. Esta es una propiedad muy deseada y Thom (junto a nombres como Lefschetz y Arnold) la trata como un requerimiento esencial.

Es importante destacar que la estabilidad estructural debe considerarse en un *contexto determinado*. El contexto comprende: *a*) una clase de sistemas matemáticos C , *b*) una clase de perturbaciones P , *c*) una relación de equivalencia R . En este contexto, un sistema es estructuralmente estable si demostramos que toda perturbación en P , lleva a un sistema en C que es equivalente, con respecto a R , al original.

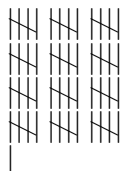
Un péndulo simple, por ejemplo, considerado como un oscilador no forzado, es un sistema estructuralmente inestable (en el modelo usual) si la clase de perturbaciones incluye la posibilidad de términos de amortiguamiento. Restringiendo las perturbaciones al caso no disipativo solamente, es posible restaurar la estabilidad estructural.

Si consideramos la existencia de simetría, debemos restringir las clases P y C consecuentemente, y así de manera sucesiva.

²⁷Puede consultar V. I. Arnold, *Catastrophe Theory*, Springer-Verlag, 1986, e I. Stewart, "Elementary Catastrophe Theory", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **cas. 30** 8 (1983) pp. 578–586.

²⁸"Sistèmes grossiers", *DAN* **14**, pp. 247–251.

²⁹"Differentiable Dynamical Systems", *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967) pp. 747–817.



Sea $f: R^n \rightarrow R$, el carácter de los puntos críticos de esta función puede establecerse mediante el determinante de la matriz Hessiana H_f , también conocida como matriz de estabilidad por razones que se harán claras más adelante. Si el determinante de esta matriz es no nulo:

$$\det H_f \neq 0,$$

en los puntos críticos r , entonces estos son no degenerados. Se tratará de máximos, mínimos o puntos de sillan. Por el Lema de Morse³⁰, se puede reducir a una forma cuadrática en la vecindad del punto crítico:

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Entre otras razones, los puntos críticos de una función son importantes debido a que definen su forma cualitativa y, por tanto, el comportamiento en general del fenómeno real que representan.

Cuando la matriz de estabilidad es singular para algún punto crítico B , se tiene un punto crítico degenerado. En estas condiciones poco se podría decir respecto a las características de los puntos críticos si no se utilizara la teoría de las catástrofes. El Lema de Morse no es aplicable y en principio no se cuenta con una forma canónica a la que fuera reducible la función.

Una propiedad de gran interés, que depende del tipo del punto crítico (sea degenerado o no), es la de estabilidad estructural a la que volveremos a continuación. Se dice que una función $f: R^n \rightarrow R$ es estructuralmente estable si, para toda perturbación suficientemente pequeña $p: R^n \rightarrow R$, la función perturbada $f + p$ es equivalente a la función f , es decir, si existe un difeomorfismo que aplique f en $f + p$.

Topológicamente, lo anterior equivale a decir que la función $f + p$ conserva el mismo número y tipo de puntos críticos que la función original f ; o sea, que es cualitativamente la misma.

Las funciones con puntos críticos no degenerados, o Morse, son estructuralmente estables; por el contrario, las que tienen puntos críticos degenerados son estructuralmente inestables.

Físicamente, el concepto de inestabilidad estructural implica que la función, el fenómeno real mismo, puede modificarse significativamente con una pequeña perturbación.

Este tipo de comportamiento fue identificado por Birkhoff³¹, quien en-

³⁰M. Morse, "The Critical Points of a Functions of n Variables", *Trans. American Math. Soc.* **33** (1931) pp. 72–91.

³¹G. Birkhoff, *Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press, 1950.

tonces establecía que debe reconocerse la posibilidad, en mecánica de los fluidos, de que ‘causas arbitrariamente pequeñas puedan producir efectos finitos’.

La condición de equilibrio:

$$\nabla f(x_i, c_i) = 0,$$

define la superficie de equilibrio, o de estado, de cada función de catástrofe. Estas superficies son de especial importancia debido a que en ellas se puede establecer y modelar el comportamiento de histéresis y discontinuidad. La proyección de la superficie de equilibrio sobre el plano formado por los parámetros de control (que se conoce como plano de control) permite identificar al conjunto bifurcación, es decir, la región donde la solución de la ecuación de equilibrio se bifurca.

5. EL AZAR Y LA CAOLOGÍA

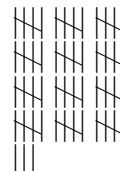
Ya en 1903 Poincaré postulaba acerca de lo aleatorio y del azar en los siguientes términos: “*El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre*”, reconociendo a la vez la existencia de innumerables fenómenos que no eran completamente aleatorios —que simplemente no respondían a una dinámica lineal—, aquellos a los que pequeños cambios en las condiciones iniciales conducían a enormes cambios en el resultado.

Se establece así lo que más tarde Edward N. Lorenz llamará *dependencia sensible*.

Podemos considerar esta observación de Henri Poincaré como el embrión de un nuevo paradigma científico: la creación de una nueva Ciencia como reconoce Gleick en el título de uno de los libros iniciales y más ilustrativo de la teoría³².

De este modo podemos anunciar esta teoría como el primer intento en la búsqueda de las leyes que gobiernan los innumerables fenómenos tan desconocidos en su dinámica y tan naturales y cotidianos a la vez —el clima, el movimiento de las nubes, el aire que se desplaza sobre el ala de un avión, la sangre cuando fluye a través del corazón y todo su sistema dinámico (el infarto como la transición de un estado de regularidad a un estado caótico), las turbulencias en general, las formaciones geológicas, la manera en que las flores silvestres aparecen en un campo, la bandera que ondea, el humo de un cigarrillo, el movimiento de una hoja al caer, las epidemias, los conflictos bélicos, los congestionamientos de tráfico, el comportamiento

³²Gleick, James, *Chaos-Making a New Science*, Penguin Books Ltd, Harmondsworth, Middlesex, 1987.



de la bolsa... — que no son susceptibles de control con las herramientas calculistas de las que nos provee la matemática y la física actual.

La ciencia ha tenido tendencia a confundir —no se sabe si por ignorancia como nos adelantaba H. Poincaré— el contenido determinista o de azar asociado a un fenómeno atendiendo a su predicibilidad o no. Así, una gran cantidad de fenómenos —generalmente naturales— no predecibles se incorporaban sutilmente al mundo de lo azaroso, quedando así estacionados sin ser sometidos a tratamiento alguno.

¿Son los fenómenos anteriores fenómenos de azar? La respuesta es no.

Los fenómenos de azar (completamente de azar) —lanzar un dado legal— no son deterministas, pues no podemos predecir de antemano su resultado, pero ésta no es una condición suficiente para que un fenómeno sea completamente aleatorio; es decir, existen fenómenos de los que no podemos predecir su comportamiento y no son de azar. Es ésta una primera característica, según Edward N. Lorenz, de los fenómenos caóticos.

Así, Lorenz utiliza el término caos para referirse a un conjunto de procesos o fenómenos que ‘parecen’ comportarse de acuerdo con el azar aunque, de hecho, su desarrollo esté determinado por leyes bien precisas.

Siguiendo en términos de una exposición no rigurosa, volvamos a los sistemas dinámicos.

Un sistema dinámico, digamos del tipo (1), podemos considerarlo como una colección de partes que interactúan entre sí y se modifican unas a otras a través del tiempo.

El movimiento regular de los objetos, planetas en órbita, péndulos, resortes, bolas que ruedan... , son fenómenos que se sitúan en lo que llamamos una dinámica lineal, sus comportamientos se describen mediante ecuaciones lineales y las matemáticas resuelven este tipo de ecuaciones fácilmente. Decimos que sistema dinámico es lineal, cuando pequeños cambios en las condiciones iniciales del sistema no originan grandes cambios en el proceso y resultado final del mismo.

Cuando, por el contrario, la dependencia interactiva entre las partes que configuran el sistema es muy sensible —pequeñas variaciones en las condiciones iniciales provocan cambios substanciales en el resultado final (efecto mariposa)— decimos que la dinámica que rige el sistema es no lineal, o que el sistema está sujeto a una dinámica caótica.

Una consecuencia inmediata de la dependencia sensible en cualquier sistema es la imposibilidad de realizar predicciones perfectas, ni siquiera mediocres.

Es esta dependencia sensible otra característica que incorporar en la descripción de los fenómenos caóticos; así, podemos decir que un fenómeno es caótico cuando, pareciendo comportarse como un fenómeno aleatorio,

no lo es, las partes que lo conforman sufren dependencia sensible o son sensiblemente dependientes.

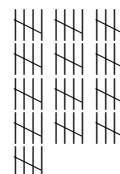
La Fractalidad, como veremos enseguida, es otra cualidad inherente a los procesos caóticos. Desde los comienzos de la creación de la ciencia en Grecia, como cuerpo de doctrina que pretenderá explicar el ser y el comportamiento de nuestro universo, la cultura occidental se ha visto prisionera de la geometría euclídea para la explicación de los fenómenos que acaecen, acarreado con ello una cultura heredada de la idea de que los puntos, las líneas, los círculos, los cubos... son de alguna manera ‘más naturales’ que la propia naturaleza. El mundo platónico, el mundo de las ideas, era el universo en donde estas formas euclídeas, formas perfectas, permanecieran como ideales. Para el mismo Platón, el universo de lo humano se caracterizaba precisamente por lo contrario, la imperfección; el universo humano era una imagen imperfecta del universo utópico basado en las formas de la geometría que Euclides postulaba.

Es de esta manera como hasta nuestros días la cultura y la forma de hacer del hombre siguen intentando presas de la idea platónica y siguen intentando cambiar lo que la naturaleza nos da en sus formas por otras ‘ideales’; así, el hombre es arquitecto de formas generalmente cúbicas, las ruedas han de ser redondas, los jardines rectangulares o a lo más circulares... Puede que sea esta cultura euclídea de nuestro universo lo que nos lleve a la destrucción de las formas naturales, fomentando el impulso por la creación de ciudades cada vez más cuadrículadas tanto en el plano como en el espacio, en todo caso ¿más humanas?

Lo cáustico de esta situación es el uso de la geometría euclídea para modelar la naturaleza, de manera que, cuando el modelo no se ajusta a ser explicado con dicha geometría, la ciencia oficial pone en entredicho a la propia naturaleza en vez de a la geometría que utiliza. Puede decirse que es Mandelbrot el creador de la *geometría fractal*, también conocida como *geometría de la naturaleza*. Después de un periplo profesional bastante largo y variado, Mandelbrot ingresa en la *École Normale* (París), en el período ‘histórico’ en el que nace y se desarrolla en Francia y se exporta a las matemáticas de todo el mundo el fenómeno “Bourbaki”. Su dominio en la *École Normale* fue tan absoluto, e insoportable para Mandelbrot, que huyó de aquella escuela y, diez años después, por la misma razón, de Francia.

Mandelbrot, con su huída, nos suministra una herramienta imprescindible para el estudio del Caos, el objeto fractal, la dimensión fractal, la fractalidad.

Una meta inicial de la nueva geometría fractal es la de descubrir, desde fuera, la forma de diversos objetos, para posteriormente estudiar una de las características principales de cualquier objeto fractal, su dimensión, que no será más que un índice del grado de irregularidad e interrupción que posee.



Así, al contrario de las dimensiones habituales (enteras) a las que nos tiene sometidos la geometría euclídea, la dimensión de un objeto puede ser muy bien una fracción simple como $1/2$ o $5/3$ e incluso un número irracional. No obstante, existen objetos fractales, irregulares o interrumpidos, que satisfacen dimensiones enteras 1, 2 y sin embargo no se parecen en nada ni a rectas ni a planos. El término “fractal” nace del adjetivo latino *fractus*, que significa interrumpido o irregular.

La geometría elemental no enseña que un punto aislado o un número finito de puntos, constituyen una figura de dimensión 0; que una recta, así como cualquier curva estándar, constituyen figuras de dimensión 1; que un plano o cualquier superficie ordinaria, son figuras de dimensión 2; que un cubo, o una esfera, posee dimensión 3. En la nueva geometría fractal, existen curvas planas muy irregulares para las que su dimensión se encontrará entre 1 y 2, podrá hablarse también en esta geometría de ciertas superficies muy hojaldradas de dimensión intermedia entre 2 y 3, o podremos definir puntos sobre la recta que generan objetos de dimensión comprendida entre 0 y 1.

Como hemos dicho, la dimensión fractal de un objeto es la medida de su grado de irregularidad, considerada a todas las escalas, y puede ser algo mayor que la dimensión geométrica euclídea de un objeto. La dimensión fractal es afín a lo rápido que la medición estimada del objeto aumenta según disminuye el tamaño del instrumento de medida. Una dimensión fractal mayor quiere decir que el fractal es más irregular y que la medición estimada aumenta con mayor rapidez. Para objetos de la geometría euclídea (líneas, curvas, ...) la dimensión del objeto y su dimensión fractal coinciden.

El Espacio de Fase nace como una herramienta en la física actual, considerado como un espacio hipotético que posee tantas dimensiones como el número de variables necesarias para especificar un estado de un sistema dinámico dado. Las coordenadas de un punto en el espacio de fase son un conjunto de valores simultáneos de las variables. De esta manera, cualquier estado del sistema parado durante un instante vendrá representado como un punto en el espacio de fase. Cuando el sistema cambia, el punto se moverá a otra posición del espacio de fase, y si el sistema se modifica sin tregua de tiempo (con continuidad), el punto determinará una trayectoria a la que denominamos *órbita*. Un ejemplo sencillo para ilustrar este concepto de espacio de fase, lo constituye un péndulo que oscila sin fricción. Una variable sería la posición y otra la velocidad; las dos cambian continuamente; podemos considerar como espacio de fase un sistema cartesiano en el que cada eje representa a cada una de las variables. La gráfica que obtendríamos será de una curva más o menos cerrada, la cual se repite una y otra vez siempre.

La perspectiva de sistemas dinámicos pone mucho énfasis, como hemos dicho, en la noción de espacio de fases. Hay que entender fase como el *estado*: el espacio de fases es un espacio de estados en el que las coordenadas

de un punto deben darnos toda la información sobre el estado de todo el sistema. Por ejemplo, toda la información ‘mecánica’ sobre una partícula que se mueve en R^3 la dan su posición y su momento, vectores de tres componentes cada uno. Entonces, el espacio de fases es un espacio 6-dimensional tal que cada punto se corresponde con un estado y su especificación aporta toda la información necesaria para, utilizando las ‘ecuaciones de evolución’ (generalmente, ecuaciones diferenciales) calcular la trayectoria del sistema (en este caso una partícula) por el espacio de fases, es decir el ‘proceso físico’ (sucesión de estados).

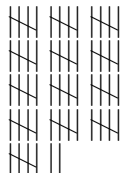
En lo que sigue, y ya que la topología permite una variedad aterradora de comportamientos en un espacio de fases $3D$ o más, restringiremos nuestro estudio al plano de fases, que se corresponde, en la analogía anterior, con la especificación completa del estado de movimiento de una partícula en una recta: posición y velocidad en esa recta, $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv \dot{x}$.

Un dibujo en el espacio (t, x_1, x_2) es una *curva solución* o una *curva integral* del sistema, pero cuando se dibuja sólo en (x_1, x_2) se tiene una *trayectoria* o una *órbita* del sistema dinámico (hemos proyectado sobre el plano (x_1, x_2)).

El dibujo de las trayectorias en el plano de fases se llama *mapa de fases*. De curva integral a trayectoria el tiempo ha pasado de ‘variable’ a ‘parámetro’. En la curva integral o solución ‘no hay’ flecha puesto que la información sobre el sentido ya viene dada por la coordenada t . Sí hay flecha en la órbita, donde la información sobre el sentido del tiempo se ha de expresar mediante una evolución en las trayectorias.

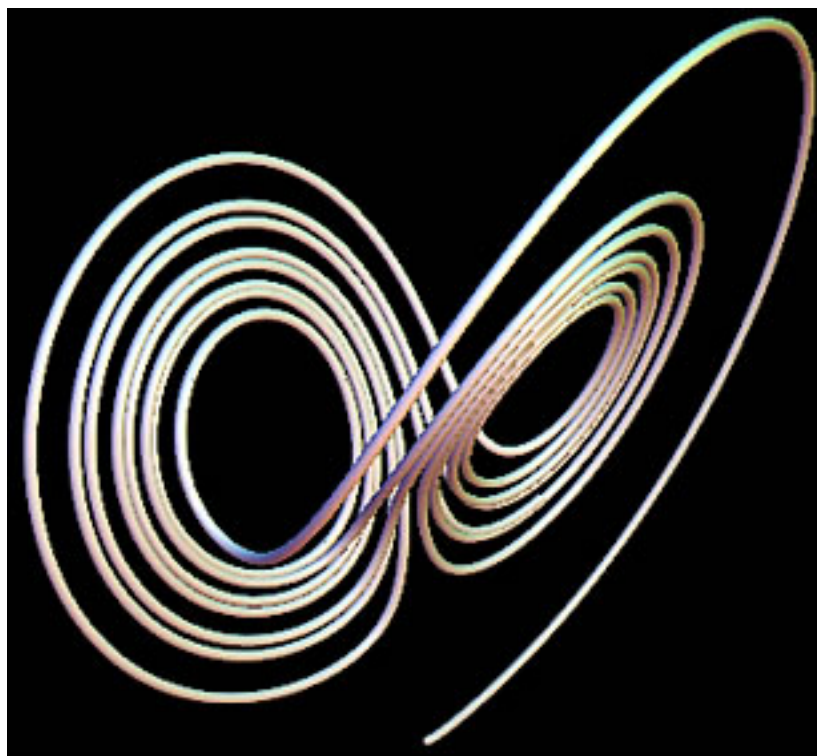
<i>Variables</i>	$t, \{x\}_i = 1^n$	$\{x_i(t)\}_{i=1}^n$
Nombre del espacio	Espacio de soluciones	Espacio de fases
Proceso	Lugar geométrico de puntos	Curva parametrizada por t
Nombre del proceso	Curva integral, curva solución	Trayectoria, órbita
Principio de determinación	$\forall t, x_1(t) \neq x_2(t)$	Las trayectorias no se cortan, sólo en el caso de sistemas autónomos
Descripción de los procesos	Gráfico de soluciones	Mapa de fases

Si tomamos el péndulo expuesto a fricción, no son necesarias las ecuaciones del movimiento para conocer el resultado final: el péndulo perderá constantemente energía a causa de la fricción, y las trayectorias (órbitas) que describen los puntos del espacio de fase decrecerán en espiral hacia un punto interior, que representa el estado estable, en este caso, el de la inmovilidad absoluta. Este punto final es el ejemplo de atractor más sencillo posible; lo podemos imaginar como un imán del tamaño de la cabeza de un alfiler. Podemos considerar un atractor en un sistema disipativo como un conjunto límite (puede ser un punto como el de este ejemplo) del cual no



emanan órbitas. El oscilador armónico, el péndulo sin fricción, tiene una órbita circular y una solución helicoidal. Cuando se proyecta la hélice sobre el plano de fases, posición-velocidad $(x, \dot{x}) = (x_1, x_2)$, se obtiene la órbita cerrada³³.

Pues bien, la conexión entre la geometría fractal y la caología nace de la siguiente situación: cuando representamos en un espacio de fase el estado de un sistema caótico, las órbitas y los atractores asociados a dicho sistema son objetos de dimensión fractal, esto es, son fractales. Son estos atractores de dimensión fractal los que se denominan *atractores extraños*.



Como hemos dicho, fue E. N. Lorenz quien en 1963 presentó el primer atractor extraño, y el primero en calcular la dimensión fractal de dicho atractor. Este atractor, llamado de Lorenz (véase la figura anterior), se caracterizaba por ser estable, de pocas dimensiones y no periódico. Así lo caracteriza Gleick, sus órbitas no se cortaban entre sí, sus lazos y espirales eran infinitamente hondos; jamás se juntaban y jamás se intersecaban. Sin

³³Recomendamos Arnold, V.I., *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Mir, 1974; Simmons, G.F., *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill, 1993; Elsgoltz, L., *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Mir, 3a ed, 1982.; Weisstein, E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, 1999, y Abellanas, L. y A. Galindo, *Métodos de cálculo*, McGraw-Hill, serie Schaum. 1990.

embargo, permanecían dentro de un espacio finito, confinados en una casilla. ¿Cómo acontecía aquello? ¿Cómo cabían en un espacio finito innumerables, infinitas órbitas? Esto es la fractalidad.

Podemos concluir la caracterización de los sistemas o fenómenos caóticos, por tanto, como aquellos que, aparentando ser fenómenos de azar, no lo son, presentan una dinámica no lineal (dependencia sensible) y su comportamiento llevado al espacio de fases se caracteriza por la existencia de atractores extraños, atractores de dimensión fractal.

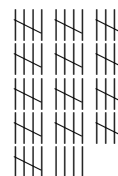
Presentados los sistemas caóticos y, así, la caología como ciencia que se ocupa de su estudio, podemos, dentro de la caología, presentar dos enfoques básicos generales. En el primero, el caos se considera como precursor y socio del orden y no como su opuesto. Figura central en esta dirección de investigación del caos es Ilya Prigogine, Premio Nobel por su trabajo en termodinámica irreversible. El título del libro del que es coautor con Isabelle Stengers, *Order out of Chaos* (Orden a partir del caos) representa básicamente este enfoque.

El segundo enfoque del que podemos elegir como representantes a E. N. Lorenz, Mitchell Feigenbaum, Benoit Mandelbrot, Robert Shaw... , destaca el orden oculto que existe dentro de los sistemas caóticos³⁴.

El enfoque de los 'atractores extraños' difiere del 'orden a partir del caos' por la atención que presta a los sistemas que siguen siendo caóticos, esto es, los sistemas que no generan orden. Mientras Prigogine considera que la línea del orden a partir del caos (línea filosófica) reside en su capacidad para resolver el problema metafísico de reconciliación entre el ser y el devenir, los defensores de la línea de los atractores extraños destacan la capacidad de los sistemas caóticos para generar información. El orden no sería más que una manifestación del desorden, una anécdota.

De cualquier forma, no podemos dejar pasar cómo 'sutilmente' existe un nexo entre ambas direcciones. La herramienta indispensable que utilizan ambas para un tratamiento efectivo del caos y la geometría fractal: el ordenador. Sólo con las nuevas tecnología informáticas es posible una investigación positiva en estos campos y en cualquiera de las líneas de trabajo aludidas anteriormente. El propio Mandelbrot ha señalado que la geometría fractal depende de las computadoras como ninguna otra geometría dependió antes de un objeto mecanizado; las computadoras han permitido practicar la matemática como una 'ciencia experimental'. Así, los fractales generados por computadoras se desenvuelven en una interacción continua y fluida entre ser humano y la 'inteligencia' de la máquina, resultado que inscribe fuertemente al caos y la geometría fractal como un nuevo paradigma en el seno de lo que hoy día llamamos *posmodernismo*.

³⁴Véase Stewart, Ian, *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*, Penguin Books Ltd, Harmondsworth, Middlesex, 1989.



Asistimos con el posmodernismo a un proceso de desnaturalización de todos los contextos que rodean al ser humano y a la vez al propio ser humano. De este modo, los grandes centros de poder de este planeta codician el control de la tecnología de la computación, tecnología que será la herramienta indispensable para controlar lo que ya, no a tan largo plazo, será nuestro nuevo hábitat: el ciberespacio. Frente a esta realidad tan incierta, la figura del hombre se hace cada vez más confusa, se encuentra en parte desterrado en un mundo cada vez más fluctuante y fragmentado.

El individuo se diluye así, bajo el efecto del *byte*, mientras que el tratamiento informático lo reduce a la existencia estadística para constituir un efectivo, un mercado, un público, un electorado, o simplemente una muestra en un sondeo.

Nos encontramos en el instante de la historia donde se dibuja un horizonte, en el que la creación y la curiosidad dan paso al aburrimiento, la educación a la programación de los individuos; un mundo donde la cultura se atrofia mientras que la ciencia y sus aplicaciones se hipertrofian, en todo caso mucha ciencia y poca conciencia.

¿Que ocurrirá cuando el ser humano quede desnaturalizado y considerado una construcción, un artificio, como cualquier otra cosa? ¿Será ese el momento de la fractura?

6. REALIDAD MODERNA

La descripción matemática del mundo depende, sobretodo, de una delicada interrelación entre la continuidad y discontinuidad, 'fenómenos discretos'. Singularidades, bifurcación y catástrofe son términos diferentes para la descripción del surgimiento de estructuras discretas a partir de otras suaves, continuas.

La teoría de las singularidades es una generalización del estudio de funciones en sus puntos de máximo y de mínimo. En la teoría de Whitney las funciones son reemplazadas por aplicaciones, *i.e.*, colección de varias funciones de varias variables.

Whitney observó que, genéricamente, sólo dos tipos de singularidades pueden aparecer. Todas las demás se transforman en una de estas, bajo pequeñas perturbaciones del cuerpo o de la dirección de proyección, mientras que estos dos tipos, *pliegue* y *cúspide*, como él los llamó, son estables y persisten después de pequeñas deformaciones de la aplicación.

En los últimos 30 años esta teoría ha adquirido un sofisticado nivel, principalmente debido a los trabajos del propio Whitney, de Thom (1959) y J. Mather (1965). Se ha convertido en una poderosa herramienta con un amplio rango de aplicaciones, principalmente vinculada con la teoría de la bifurcación.

El término *bifurcación* como entendemos ahora, significa ‘rompimiento’ y es usado en un sentido amplio para designar toda suerte de reorganización cualitativa o metamorfosis de varias entidades que resultan de un cambio de los parámetros sobre las cuales ellas dependen.

Catástrofes son cambios bruscos que surgen como una respuesta súbita del sistema a un cambio suave en las condiciones externas.

Como una ilustración de esta teoría, presentaremos la pérdida de la estabilidad del equilibrio y del modo auto-oscilante de comportamiento. La pérdida de estabilidad de un estado de equilibrio por cambio de los parámetros, no tiene por qué estar asociada, obligatoriamente, con la bifurcación del estado de equilibrio: se puede perder la estabilidad no sólo por colindar con otro estado, sino también, por el mismo.

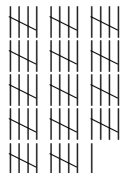
Analicemos las siguientes reorganizaciones del retrato de fases de un sistema plano:

- A. Por un cambio del parámetro el estado de equilibrio da nacimiento a un ciclo límite (de radio $\sqrt{\epsilon}$, donde el parámetro difiere del valor de bifurcación por ϵ). La estabilidad del equilibrio es transferida al ciclo y el punto de equilibrio es inestable.
- B. Un ciclo límite colapsa en el estado de equilibrio: el dominio de atracción del estado de equilibrio desaparece con el ciclo y cuando este desaparece, transfiere su inestabilidad al estado de equilibrio.

Si nuestro estado de equilibrio es el comportamiento establecido en un sistema real, entonces bajo cambios de los parámetros los siguientes fenómenos son observados en los casos A y B.

- I) Después de la pérdida de estabilidad del equilibrio queda establecido un comportamiento oscilatorio periódico, la amplitud de las oscilaciones es proporcional a la raíz cuadrada de la ‘criticalidad’ (la diferencia entre el parámetro y el valor crítico, en el cual el equilibrio pierde la estabilidad). Esta forma de pérdida de estabilidad es llamada *suave*, puesto que el comportamiento oscilante, para un valor de la criticalidad pequeña, difiere poco del estado de equilibrio.
- II) Antes de establecer el estado de pérdida de la estabilidad, el dominio de atracción del estado tiende a ser muy pequeño y, al presentarse perturbaciones, el dominio de atracción desaparece completamente. Esta forma es llamada *dura*. Aquí el sistema deja su estado estacionario con un salto a un estado diferente de movimiento. Este estado puede ser otro estado estacionario estable o cierto movimiento más complicado.

Las condiciones de movimiento establecidas han sido llamadas *atractores* puesto que ‘atraen’ las condiciones vecinas (transitorias). La existencia de



atractores con curvas de fases exponencialmente divergentes sobre ellos y la estabilidad de tal tipo de fenómenos, fueron establecidos a comienzos de los años 60 por Smale, D.V. Anosov y Ya.G. Sinaj sobre la estabilidad estructural de sistemas dinámicos. Independientemente de estos trabajos teóricos, el meteorólogo E. Lorenz en 1963, describió (como dijimos) un atractor en un espacio de fases tridimensional, el cual había observado en experimentos numéricos sobre la modelación de convecciones, con curvas de fases que se alejan de él en varias direcciones y puntualizó la conexión de este fenómeno y la turbulencia.

En los trabajos de Anosov y Sinaj la divergencia exponencial fue establecida, en particular para el movimiento de un punto material sobre una superficie de curvatura negativa. La primera aplicación de la teoría de la divergencia exponencial al estudio de la estabilidad hidrodinámica fue publicada en 1966.

La teoría de Poincaré–Andronov, de la que ya hemos hablado, sobre la pérdida de estabilidad del estado de equilibrio, posee muchas aplicaciones en todos los campos de la teoría de oscilaciones (tanto para sistemas con un número finito de grados de libertad, como para medios continuos), que es imposible enunciar aquí: sistemas en mecánica, física, química, biología y economía, pierden estabilidad todo el tiempo.

En artículos sobre teoría de las catástrofes, la pérdida suave de estabilidad de estados de equilibrio es llamada usualmente *Bifurcación de Hopf*.

En la teoría de bifurcación, como teoría de las singularidades, los resultados fundamentales y aplicaciones fueron obtenidos sin la ayuda de la teoría de las catástrofes. La contribución de esta fue la introducción del término ‘atractor’ y el conocimiento sobre la bifurcación de atractores. Una variedad de atractores han sido descubiertos ahora en todas las áreas de la teoría de oscilaciones; por ejemplo, ha sido sugerido que los variados fenómenos del lenguaje son diferentes atractores de un sistema dinámico ‘productor de sonidos’.

Hasta hace alrededor de dos décadas, todo experimento que encontraba complicadas oscilaciones aperiódicas, digamos en reacciones químicas, era abandonado, citando impurezas en el experimento, efecto de cambios externos y cosas por el estilo. Ahora es claro que muchas de estas oscilaciones complejas están conectadas con la esencia misma de la materia, con la presencia del caos y atractores extraños, quizás determinado por las ecuaciones fundamentales del problema y no por los variados efectos externos; ellas pueden ser estudiadas a un nivel superior de los modos estacionarios clásicos y los modos periódicos de comportamiento de los procesos.

Estas oscilaciones caóticas y la presencia de atractores en diferentes fenómenos de variados campos, ilustran bien a las claras, hasta donde ha

penetrado hoy la teoría de las oscilaciones, que no se detiene, por supuesto, en lo que hemos señalado en este trabajo.

Por otra parte, la característica común de las trayectorias en un régimen caótico es el tener una estructura geométrica altamente irregular y que ante cierto tipo de enfoque —estudiar la sección de Poincaré, por ejemplo— da lugar a ciertos conjuntos fractales. Algo extraordinario es que los fractales resultaron ser ubicuitos en la naturaleza, tanto a nivel de las formas de algunos elementos naturales —hojas, costas marinas, copo de nieve, etc.— como en las formas geométricas generadas siguiendo reglas relativamente sencillas, rompiendo así con el viejo adagio que *natura non facit saltus*.

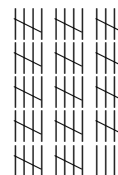
A manera de conclusión, notemos que en estos apuntes no hemos hecho alusión a la aparición de los ordenadores, estos, presentes en grado sumo en todas las investigaciones relacionadas con las catástrofes, el caos y las bifurcaciones, no han sido presentados en todo su papel. Las máquinas, que por sí solas no podían resolver toda la tarea, obligaron a los matemáticos a formularse un nuevo conjunto de interrogantes, relacionados no sólo con los problemas concretos, sino con la naturaleza de su trabajo y con el modo que se resolvían los problemas o se intentaban resolver.

Es más, en tareas relacionadas con problemas prácticos, no es suficiente, por ejemplo, el conocimiento de la existencia de la solución. El no-matemático poco puede hacer con un teorema abstracto de existencia. El matemático, buscando una salida a esta situación, brinda procedimientos para ‘construir’ la solución, y como no siempre se logra dar en cuadraturas, tiende a presentar procedimientos que envuelven una colección finita de operaciones. Así, si por un lado, siguiendo los impulsos de la lógica interna del desarrollo de la matemática, crecen en cantidad y variedad los resultados puramente teóricos sobre solubilidad de ecuaciones, por otro lado tenemos lo siguiente:

¿Qué significa para el físico experimental una solución exacta?
¿Cómo interpretar esta noción, si se sabe que los datos iniciales son inexactos?

Sobre lo anterior es necesario entonces formular la estrategia de trabajo y considerar, por ejemplo, aspectos como los siguientes:

- 1) Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones.
- 2) Elaboración de algoritmos (sistemas de reglas prefijadas en función del carácter del proceso).
- 3) Análisis de la dependencia continua de la solución con respecto a los datos iniciales.
- 4) Estimado de los errores del algoritmo y los errores de cálculo.



Sin embargo, en este caso surgen nuevos problemas, a los que ya hicimos alusión y que no reiteraremos aquí, baste decir que la resolución de un problema práctico por parte de un matemático para un no-matemático, envuelve conclusiones en que tienen que intervenir, obligatoriamente, el matemático y el especialista que con él trabaja. Además de todo lo expuesto, pensamos que este trabajo puede servir de guía y referencia a otros más completos y que tiene ciertas ventajas metodológicas, a saber:

- que en otros campos no considerados se pueden obtener conclusiones como las aquí brindadas;
- permite hacer conjeturas sobre los casos generales y, en ciertos casos en que se haga una conjetura falsa, comprobar dicha falsedad;
- acostumbra a considerar, ante determinados problemas, casos más simples, la génesis de la problemática, que tanto pueden ayudar a la resolución de problemas más complejos.

Al margen de todo lo anterior, y apuntando algo sobre lo que debemos recalcar, es que fue Poincaré el primero en vislumbrar los conceptos que hoy en día intervienen en una teoría matemática llamada, genéricamente, y sin definición unánime, *caos*. Fue precisamente el problema de los tres cuerpos, que él demostró que no tenía solución en la forma planteada (ganando con ello, en 1887, el premio del rey de Suecia por la resolución del problema) lo que lo llevó a pensar en la complejidad de un sistema.

Los aportes de Poincaré no recibieron atención suficiente al principio, como señalábamos antes, por parte de los astrónomos, se tuvo que esperar a la aparición de los ordenadores, para que el enfoque de Poincaré resultara prometedor. Comportamientos extraños y desordenados aparecen en las pantallas, comportamientos que, poco a poco, fueron cediendo a ser clasificados de alguna forma gracias, en gran medida, a los trabajos de Kolmogorov, Arnold y Morse en los años 50 y 60 y que derivaron en el conocido *Teorema* (y *Teoría*) *KAM*³⁵.

Guiados por el más puro espíritu clásico, la clasificación topológica de las singularidades en el plano de fases de un sistema de tres dimensiones, nos lleva a la aparición de las nuevas formas ya aludidas: los fractales. Denominación que a partir de los trabajos de Mandelbrot ha llegado a ser una de las denominaciones matemáticas más populares en los últimos años.

El estudio de los conjuntos fractales ha seguido las líneas sugeridas por otras muchas disciplinas, que se encuentran intrínsecamente ligadas con estos problemas y llevó a los investigadores del caos en un programa de desarrollo que seguiría los pasos siguientes:

³⁵Consulte del autor *Ecuaciones diferenciales y contemporaneidad* (dado a publicar).

- 1) **La búsqueda de atractores extraños en presencia de fenómenos aleatorios.** Pongamos de ejemplo el estudio de la existencia y la estabilidad de solitones en sistemas generales con rozamiento no lineal, en los que pueden aparecer atractores espacio-temporales.
- 2) **Clasificar estos atractores por su dimensión fractal.** Inclusive llevado al análisis de la naturaleza fractal del universo el cálculo de la dimensión fractal en imágenes binarias, la multifractalidad en turbulencia tridimensional y muchos otros problemas actuales.
- 3) **La aplicación de la teoría del grupo de renormalización.** Utilizada inclusive en los autómatas celulares y en el desarrollo de una teoría de la información para sistemas multiatractores.

Así vemos como la mecánica clásica y la matemática asociada, han aportado nuevas facetas y abierto caminos del conocimiento sobre los que ni siquiera se pensaban a comienzos de siglo. Lejos de ser excepción, el caos permea la naturaleza y este nuevo hecho nos asegura que el universo contiene secretos y misterios de la dinámica que por ahora permanecen lejos de la curiosidad humana.

De esta manera hemos visto cómo el afán griego de reducir el cosmos a la geometría, Ptolomeo con sus epiciclos y Kepler con sus elipses, nos ha llevado a un modelo del universo que se nos escurre entre los dedos al intentar conocer y controlar todas y cada una de sus partes.

Estos apuntes no pretenden abarcar todos los cambios e interrelaciones entre la matemática y las EDO; han sido referidos a las teorías más actuales de las matemáticas y cómo han contribuido las EDO al desarrollo de estas teorías. Por otra parte, nada se ha dicho, por ejemplo, sobre los cambios en la enseñanza de estas disciplinas. Como dijimos, se han destacado algunos tópicos que, a nuestro entender, han tenido una mayor incidencia en el desarrollo de la matemática y de las propias EDO. El análisis detallado de las particularidades de estos cambios creemos que sean necesarios y útiles, no sólo para el trabajo de los matemáticos, sino además, para los propios físicos, biólogos, etc., que trabajan en conjunto con los matemáticos.

Naturalmente, a estas contribuciones básicas pueden sumarse otros muchos valores añadidos, sea bajo la forma particular de ciertos resultados parciales o ciertas estrategias metodológicas, sea bajo la forma de orientaciones o ideas de alcance más general sobre los usos críticos y heurísticos de los temas tratados, o sobre sus servicios como vía de educación racional en un sentido preciso: en el sentido de desarrollar la capacidad de juzgar sobre el papel atribuido a uno u otro método. Pero no nos demoraremos ahora en el vano intento de perseguir todos estos —u otros anteriores— cabos sueltos. El desarrollo actual de la matemática es un arte largo y lo que uno pudiera decir aquí de ella tendría que ser breve.

