

Dinámicas caóticas: sobre mariposas, demonios y el tiempo

Juan E. Nápoles Valdes

Universidad de la Cuenca del Plata, Lavalle 50,
3400 Corrientes, Argentina

idic@ucp.edu.ar

y

Universidad Tecnológica Nacional, French 414,
3500 Resistencia, Chaco, Argentina

jnapoles@frre.utn.edu.ar

Prediction is difficult, especially the future
NIELS BOHR

RESUMEN

En este trabajo se exponen los métodos desarrollados y aplicados en el estudio y observación del clima, así como su interrelación con conceptos clásicos de la filosofía como son el determinismo y el caos.

1. PRÓLOGO

Según el famoso físico y matemático francés del siglo XVIII Pierre Simon Laplace (1749–1827), uno no debe ser capaz solamente de predecir si lloverá o no el domingo, sino dónde y cuándo caerá una gota de agua en particular. Por supuesto, también debe ser posible, al menos teóricamente, calcular la temperatura exacta en un punto específico del desierto de Gobi, Mongolia, hace 125 años, o la altura exacta a la cual un árbol determinado en la selva del Amazonas crecerá en el curso de su vida. ¿Pero es esto simplemente una fantasía, o es este tipo de previsibilidad exhaustiva realmente una característica inherente de nuestro mundo?

La humanidad lo ha hecho desde tiempos lejanos, bastan como ejemplos

Delfos, Dodona, Tebas y Delos, que son sólo unos cuantos de los santuarios otrora dedicados a otear el porvenir. Los oráculos eran parte importante de la vida cotidiana, y consulta obligada ante sucesos extraordinarios. Reyes y gobernantes helénicos comparecían ante la Pitonisa de Delfos; los emperadores romanos lo hacían ante Fortuna Primigenia, en lo que ahora es la ciudad italiana de Palestrina, y así sucesivamente a lo largo de la historia.

En la antigüedad, el mundo debía de haber parecido bastante arbitrario. Desastres como las inundaciones o las enfermedades parecían producirse sin aviso o razón aparente. La gente primitiva atribuía esos fenómenos naturales a un panteón de dioses y diosas que se comportaban de forma caprichosa e impulsiva. No había forma de predecir lo que harían, y la única esperanza era ganarse su favor mediante regalos o conductas.

Sin embargo, los hombres se percataron gradualmente de ciertas regularidades en el comportamiento de la naturaleza. Estas regularidades eran más obvias en el movimiento de los cuerpos celestes a través del firmamento. Por eso la astronomía fue la primera ciencia en desarrollarse. Fue puesta sobre una firme base matemática por Newton hace más de 300 años, teniendo a Copérnico, Kepler y Galileo como antecesores ilustres de lo que hoy se conoce con el nombre de *Mecánica Celeste*¹. Siguiendo el ejemplo de la astronomía, se encontró que otros fenómenos naturales también obedecían leyes científicas definidas. Esto llevó a la idea del determinismo científico, que parece haber sido expresada públicamente por primera vez por Laplace²: si en un instante determinado conociéramos las posiciones y velocidades de todas las partículas en el Universo, podríamos calcular su comportamiento en cualquier otro momento del pasado o del futuro³: “*podemos mirar el estado actual del universo como el efecto de su pasado y de la causa de su futuro. Podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabía todas las fuerzas que naturaleza animada y las posiciones mutuas de los seres que la componen, si este intelecto es bastante extenso para someter los datos al análisis, en una sola fórmula el movimiento de los cuerpos más grandes del universo y el del átomo más ligero; para tal*

¹Sir Arthur Eddington observaba que uno de los grandes misterios del Universo consiste en que todo en él rota. En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años; cierto es que prelados instruidos advertían que la semana santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. El sistema heliocéntrico, establecido con la publicación de la obra de Copérnico *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) (aunque se remonta a Aristarco de Samos en el siglo III a.C.), resolvió estas y otras dificultades y abrió el camino de la verdad celeste, por la que transitarían más adelante Kepler, Galileo, Newton, Poincaré y muchos más.

²Pierre-Simon Laplace nació en Beaumont-en-Auge (Normandía) el 23 de marzo de 1749 y murió en París, el 5 de marzo de 1827. Astrónomo, físico y matemático francés, es recordado como uno de los máximos científicos de todos los tiempos, a veces referido como el *Newton francés* o *Newton de Francia*, con unas fenomenales facultades matemáticas no poseídas por ninguno de sus contemporáneos.

³Bradley, Larry D., *Chaos and Fractals*, (<http://www.pha.jhu.edu/%7Eldb/seminar/laplace.html>).



FIGURA 1. Pierre Simón Laplace. http://www.natureduca.com/biograf/laplace_pierre.php

intelecto nada podría ser incierto y el futuro apenas como el pasado estaría presente antes de sus ojos”.

Hay una historia probablemente apócrifa según la cual Napoleón le preguntó a Laplace sobre el lugar de Dios en este sistema, a lo que él replicó: “Caballero, yo no he necesitado esa hipótesis”. No creo que Laplace estuviera diciendo que Dios no existe. Es simplemente que Él no interviene para romper las leyes de la ciencia. Esa debe ser la postura de todo científico. Una ley científica no lo es si sólo se cumple cuando algún ser sobrenatural la permite y no interviene.

Eso implica que podemos predecir el futuro, al menos en principio. Sin embargo, en la práctica, nuestra capacidad para predecir el futuro está severamente limitada por la complejidad de las ecuaciones en las que pensaba Laplace, y por el hecho de que éstas a menudo exhiben una propiedad que lo impide (sensibilidad a las condiciones iniciales), denominada caos, y que será el centro de este trabajo.

Por eso las predicciones meteorológicas son tan poco fiables.

A pesar de estas dificultades prácticas, el determinismo científico permaneció como dogma durante el siglo XIX. Sin embargo, en el siglo XX hubo dos acontecimientos que mostraron que la visión de Laplace sobre una predicción completa del futuro no puede ser llevada a cabo.

El primero de ellos es el desarrollo de lo que se denomina *mecánica cuántica* y tres fueron los hechos experimentales que exhibieron la incapacidad de la física clásica para explicarlos: el primero fue el principio de equipartición de la energía que surge de la mecánica clásica y los ingredientes probabilísticos usados por Boltzmann para tratar con sistemas formados de N (10^{23}) partículas. *Grosso modo*, este principio establece que la energía que reside en los diferentes grados de libertad de las partículas que componen a un sistema, bajo ciertas condiciones, se reparte “equitativamente” en la energía promedio de cada partícula y por tanto en su energía total. Esto da lugar a que cantidades fácilmente medibles como los calores específicos de sólidos y gases, especialmente, arrojen valores teóricos que no concuerdan con el experimento.

El segundo fue el famoso problema de la “radiación del cuerpo negro”. Un cuerpo negro es aquel que absorbe y emite toda la radiación electromagnética independientemente de su frecuencia. En equilibrio con sus alrededores a una temperatura dada T , un trozo de carbón en el fuego o una caja de zapatos pintada de negro con un pequeño agujero por el cual penetre y salga la radiación, constituyen ejemplos aceptables de dicho cuerpo. La propiedad o atributo más significativo de un cuerpo negro es su densidad de energía, esto es, la energía por unidad de volumen contenida en un cierto intervalo de frecuencia.

En 1900 Max Planck⁴ pudo dar una deducción teórica para dicha cantidad que concordara con los datos experimentales que ya se conocían en ese entonces y cubrían desde el infrarrojo hasta el ultravioleta. Para ello Planck tuvo que suponer que la radiación emitida o absorbida por los radiadores elementales que constituyen el cuerpo negro y cuya naturaleza es totalmente irrelevante, debido a la ya conocida ley de Kirchhoff, sólo pueden emitir o absorber paquetes discretos de energía. Esta hipótesis revolucionaria que tomó varias décadas en ser aceptada por los físicos de la época, marcó el nacimiento de la mecánica cuántica.

El tercer hecho experimental que exhibió la incapacidad de las teorías clásicas de la física para explicarlo fue la regularidad observada en las llamadas líneas espectrales, que son nada menos que las huellas dactilares de cada uno de los elementos químicos que conocemos. Cuando un átomo

⁴Max Karl Ernst Ludwig Planck (Kiel, Alemania, 23 de abril de 1858–Gotinga, Alemania, 4 de octubre de 1947) considerado como el inventor de la teoría cuántica y galardonado con el premio Nobel de física en 1918.

cualquiera se excita o relaja por la influencia de un factor externo, calentamiento por ejemplo, emite radiación electromagnética a determinadas frecuencias únicas para cada átomo. Desde 1885, en que el numerólogo aficionado y profesor de escuela J. J. Balmer pudo darle un cariz de regularidad a las líneas espectrales, características del átomo de hidrógeno, los espectroscopistas de todo el mundo se volcaron sobre el problema de intentar encontrar un patrón de regularidad que fuera común a los espectros de todos los elementos.

Para Planck los cuantos no eran más que un truco matemático que no tenía una realidad física, lo que quiera que eso signifique. Sin embargo, los físicos empezaron a encontrar otros comportamientos, que sólo podían ser explicados en términos de cantidades con valores discretos o cuantizados, más que variables continuas. Por ejemplo, se encontró que las partículas elementales se comportaban más bien como pequeños trompos girando sobre un eje. Pero la cantidad de giro no podía tener cualquier valor. Tenía que ser algún múltiplo de una unidad básica. Debido a que esa unidad es muy pequeña, uno no se percató que un trompo normal desacelera mediante una rápida secuencia de pequeños pasos, más que mediante un proceso continuo. Pero para trompos tan pequeños como los átomos, la naturaleza discreta del giro es muy importante.

Pasó algún tiempo antes de que la gente se diera cuenta de las implicaciones que tenía este comportamiento cuántico para el determinismo⁵.

El segundo acontecimiento que mostró la imposibilidad del determinismo laplaciano, es el desarrollo de la propia mecánica clásica en la determinación de las órbitas de los cuerpos celestes. A pesar que se había alcanzado un alto grado de precisión en estos estudios, el descubrimiento de una discrepancia de menos de un minuto a lo largo del siglo, en el movimiento aparente de Mercurio⁶, provocó una crisis de tal magnitud, que desembocó, a los pocos

⁵García-Colin Scherer, Leopoldo, "Realidad e incertidumbre en la física", *Revista Casa del Tiempo*, UAM, febrero de 2004, pp. 2-9. (<http://www.difusioncultural.uam.mx/revista/feb2004/garcia.html>)

⁶A fines del siglo XIX, el matemático francés Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) se interesó en calcular el movimiento de precesión del perihelio de Mercurio usando las leyes de Newton, y encontró que sumando las perturbaciones ocasionadas por los demás planetas, éste debía ser de 574 segundos de arco por siglo. Sin embargo, las mediciones demostraban que la precesión del perihelio de Mercurio era de 531 segundos de arco por siglo. ¿A qué atribuirle, entonces, la diferencia de 43 segundos de arco por siglo? Le Verrier rápidamente se convenció que la explicación de esa diferencia era la existencia de otro planeta aún no descubierto en la vecindad inmediata del Sol. La búsqueda de ese hipotético planeta, al que se denominó *Vulcano*, fue muy distinta a la que se llevó a cabo en el caso de Neptuno, planeta al que Johann Gottfried Galle y Louis d'Arrest localizaron basándose en los cálculos realizados independientemente por Le Verrier y el inglés John Couch Adams, tomando en cuenta las perturbaciones que causa en la órbita de Urano. Vulcano, de cuya existencia poco se dudaba por entonces, fue buscado persistentemente en la posición predicha por los cálculos de Le Verrier. En más de una ocasión se reportó su descubrimiento, pero en ningún caso esto pudo confirmarse. La infructuosa búsqueda prosiguió hasta principios del siglo XX, cuando finalmente se encontró una explicación inesperada, no para Einstein, de la precesión del perihelio de Mercurio.

años, en la “teoría especial de la relatividad”⁷. En particular, esto nos lleva de regreso a Laplace, quien dedicó mucha parte de su vida a estudiar la estabilidad de los planetas. Su *Treatise on Celestial Mechanics* es un compendio del conocimiento sobre la dinámica planetaria en su tiempo, aunque su descripción rebasa los marcos de este trabajo⁸.

A fines del siglo XIX la ciencia se mueve entre dos distintos paradigmas para la modelación matemática. Uno, el ya conocido, era el del análisis por medio de las ecuaciones diferenciales que en un principio determinan la evolución del Universo, pero que en la práctica sólo se aplica a problemas simples y bien estructurados. El segundo era el análisis estadístico que representaba una aproximación burda del movimiento de sistemas complejos. Estos dos paradigmas habían alcanzado respetabilidad en el mundo científico de la época.

En el siglo XIX, al crecer el número de personas dedicadas a la meteorología, las actividades empíricas, teóricas y predictivas se fueron diferenciando. Muchas de las personas que trabajaban en la tradición empírica hicieron del tiempo promedio su principal preocupación y a mediados del siglo dieron origen, como una ciencia descriptiva, a la climatología, curiosamente lugar de encuentro de ambos paradigmas. Muchos de los que trabajaban en la tradición teórica hicieron de las leyes de la física su punto de partida y dieron origen a la rama de la ciencia que se denominó *meteorología dinámica*. Por último, con el inicio en los años 1870 de las predicciones diarias por los servicios meteorológicos, la predicción del clima se convirtió en una profesión.

Estas tres tradiciones siguieron su camino diferenciado hasta mediados del siglo XX, época que se caracterizó por la integración científica, por lo que los meteorólogos comenzaron a hablar de una unificación de la meteorología.

⁷Por todo lo señalado antes, mantengo esta posición a pesar que hay historiadores que piensan que la anomalía del perihelio de Mercurio sólo alcanzó a tener cierta significación crucial a la luz de la teoría de la relatividad, *i.e.*, como confirmación predictiva empírica de esta teoría frente a la mecánica celeste clásica, sin tener en cuenta que fue uno de los tantos hechos acumulados que reflejaban el “indeterminismo” de la mecánica determinística en boga.

⁸Con este tratado, monumental obra en cinco volúmenes publicados entre 1799 y 1825, se culmina el trabajo de más de un siglo de duración durante el cual los científicos intentaron dar una explicación matemática de la teoría de la gravitación universal basada en los principios de Newton. Laplace reúne en un sólo cuerpo, de doctrina homogénea, todos los trabajos dispersos de Newton, Halley, Clairaut, D’Alembert, Euler, etc. De esta manera, y junto con sus propias aportaciones, recoge el conocimiento de su época sobre el movimiento de los cuerpos del Sistema solar. Los primeros dos volúmenes, publicados en 1799, contienen los métodos para calcular los movimientos de los planetas, determinando sus figuras, y resolviendo problemas de marea. Los volúmenes tercero y cuarto, publicados en 1802 y 1805, contienen aplicaciones de estos métodos y varias tablas astronómicas. El quinto volumen, publicado en 1825, es principalmente histórico, pero presenta, como apéndice, los resultados de las últimas investigaciones de Laplace. El contenido de *Mecánica Celeste* es excelente, pero su lectura de ninguna manera es fácil. Biot, que le ayuda en la revisión de los textos para su impresión, narra que, con frecuencia, Laplace es incapaz de recuperar los detalles en su cadena de razonamientos por lo que rápidamente recurrirá a la fórmula: “*Il est facile de voir*”. *Mecánica Celeste* no es solamente la traducción de los *Principia* al idioma del cálculo diferencial, sino que completa todos aquellos apartados que Newton fue incapaz de justificar en sus detalles. El tratado de Laplace ha sido considerado desde entonces como un texto clásico.

Esta unificación, que culminó en los años 50 y 60 del siglo pasado, estuvo íntimamente ligada al desarrollo de las computadoras electrónicas y es a partir de aquí donde el concurso de las matemáticas es esencial.

La base de esta noción se basa sobre la posibilidad hipotética de saber la posición y la velocidad exactas de cada partícula del Universo. Si podemos recolectar de alguna manera este cuerpo inmenso de datos, después debemos, empleando los principios fundamentales de la física del movimiento, poder saber la trayectoria de todas estas partículas sobre la colisión de unas con otras. Recordando que todos los incidentes visibles y invisibles tienen en el nivel más pequeño una base atómica, y después enfocando hacia fuera del micro al macro, podemos ver cómo la previsibilidad debe ser ilimitada. Este “intelecto” del que Laplace habla, se etiquetó simbólicamente como criatura ficticia “que-todo-lo sabe”, un ente que en cualquier instante podría saber la posición y la velocidad de todas las unidades de la partícula y procesar esta monstruosidad de datos⁹.

Esta teoría, se conocería como el *Demonio de Laplace*, una idea que subrayaba los límites del saber. Teóricamente, si uno pudiera calcular el espacio y el tiempo en los cuales una gota de agua solitaria cae en la tierra, entonces el pronóstico de tornados y de ciclones no sería más difícil¹⁰.

2. EL DEMONIO DE LAPLACE vs. LA MARIPOSA DE LORENZ

La predicción numérica del clima se lleva a cabo a partir de un modelo matemático formulado por ecuaciones en derivadas parciales, las cuales traducen las leyes generales de la física que rigen la atmósfera terrestre¹¹.

La atmósfera es un fluido, por lo que las ecuaciones utilizadas serán las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos, eso sí, para el caso de una capa aislada de aire (seco o conteniendo vapor de agua) cuyo movimiento

⁹Mandel, David R., *Chaos Theory, Sensitive Dependence and the Logistic Equation*. (<http://www.freewebs.com/drmandel/pubs/ampsyh1995.pdf>)

¹⁰A veces, para expresar una idea, los físicos han imaginado un ser con capacidades sobrehumanas pero no sobrenaturales, es decir, capacidades superiores a las de cualquier persona pero que no violan ninguna ley fundamental de la naturaleza. A estos seres se les suele llamar *demonios*, a pesar de que no tienen ninguna mala intención.

¹¹Para detalles históricos sobre la climatología y diversas cuestiones técnicas, recomendamos consultar: Coiffier, J., *Elements de prevision numerique du temps*, Ecole Nationale de la Meteorologie, Meteo-France, Toulouse, 1996; Coiffier, J., *Un demi-si'ecle de prevision numerique du temps. La meteorologie*, 8° serie, no. 30, juin 2000. Special Prevision numerique du temps, 2000, 11–31; Dahan-Dalmedico, A., “History and Epistemology of Models: Meteorology (1946-1963) as a Case Study”, *Arch. Hist. Exact Sci.* **55**, 2001, 395–422; Dutton, J. A., *Dynamics of Atmospheric Motion*, Dover Publications, New-York, 1995; Hunt, J. C. R., “Lewis Fry Richardson and his contributions to Mathematics, Meteorology and Models of Conflict”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 2001, xii-i-xxxvi; Jacobson, M. Z., *Fundamentals of Atmospheric Modeling*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999; Nebeker, F., *Calculating the Weather. Meteorology in the 20th Century*, Academic Press, San Diego, 1995; y Pailleaux, J., J. F. Geleyn et E. Legrand, *La prevision numerique du temps avec les mod'eles Arp'ege et Aladin. Bilan et perspectives*, La meteorologie, 8° serie, no. 30, juin 2000. Special Prevision numerique du temps, 2000, 32–60.

se observa desde un sistema no inercial, como lo son todos los que giran con la Tierra. Un análisis del orden de magnitud de los distintos términos de esas primeras ecuaciones permite simplificarlas según sean las escalas de espacio y tiempo de los fenómenos meteorológicos que se consideren.

En lo que respecta a la predicción meteorológica clásica, las escalas espaciales horizontales van de 10,000 km a 10 km (escalas planetaria, sinóptica y de mesoescala) y las temporales de varios días a algunas horas. Las ecuaciones matemáticas obtenidas son no lineales y, en general, sus soluciones no se pueden obtener de forma analítica. Para resolverlas hay que apelar al cálculo numérico, que proporciona una solución aproximada. El paso fundamental consiste en reemplazar las ecuaciones en variables continuas por ecuaciones en las que las variables son discretas, cuyas soluciones se obtienen mediante un algoritmo apropiado.

Existe una gran variedad de modelos, cada uno con sus ventajas e inconvenientes. Como norma general, cuanto más preciso sea el método más cálculos habrá que hacer y, por tanto, más tiempo se tardará en ejecutarlo. Evidentemente, para una precisión dada se elegirán métodos rápidos, ya que para que una predicción tenga sentido se debe poder hacerla en un plazo de tiempo relativamente corto. Hay que resaltar que la mayor parte de las veces una predicción meteorológica es una verdadera carrera contra el reloj, pues de nada sirve calcular con gran precisión el tiempo que hará mañana si para ese cálculo se necesitan más de veinticuatro horas. Por lo que siempre habrá que hacer un compromiso entre la precisión del cálculo y la duración de su ejecución.

Los resultados de una predicción numérica dependen de las simplificaciones que se hayan hecho para obtener el sistema de ecuaciones matemáticas del modelo y, también, de los efectos de la ‘numerización’ adoptada. Por eso es muy importante estudiar analíticamente los distintos esquemas numéricos y conocer con precisión los errores que inevitablemente se cometen al utilizar uno u otro.

Quien dice cálculo numérico dice ordenador, ya que esta es la herramienta necesaria para realizar los cálculos. Esto introduce una nueva degradación pues los cálculos no se hacen de forma exacta sino de forma aproximada, y al trabajar con un número limitado de decimales (8 a 16) se comete un error de redondeo. Sin embargo, muchas veces ese error de redondeo introducido por el ordenador es mucho menor que el que se comete al resolver el problema matemático con los métodos numéricos.

¡Ojo!, dijimos muchas veces...

Una vez formuladas las ecuaciones matemáticas del modelo, para resolverlas hay que partir del estado inicial de la atmósfera en el instante $t = 0$. Esto significa que en ese instante se debe conocer el valor de todas

las variables que caracterizan el estado de la atmósfera. Esto es posible gracias a la creación y al funcionamiento del servicio mundial de observación meteorológica que, con métodos convencionales tanto en superficie como en altitud y con la ayuda de satélites artificiales, obtiene una descripción aceptable de la atmósfera en un instante inicial dado. Ahora bien, los datos iniciales no se deben introducir brutalmente en el modelo ya que en un instante fijado las variables atmosféricas están ligadas entre sí pues, al menos teóricamente, también son un resultado de las ecuaciones de evolución. Por tanto, para evitar que se engendren fuertes oscilaciones debidas a la propagación de ondas gravitatorias de amplitud irreal, se tienen que retocar los valores iniciales recogidos de las variables, de manera que la presión y el viento verifiquen un determinado equilibrio denominado equilibrio masa-viento. Para ello se utiliza una técnica denominada inicialización no lineal por modos normales.

El diseño de esquemas numéricos más precisos y más rápidos y el aumento de la potencia de los ordenadores han hecho que los errores debidos a las técnicas numéricas y al cálculo electrónico tiendan a disminuir. Ahora bien, queda una fuente de error fundamental que resulta del hecho que las medidas efectuadas a partir de la red de observación no permiten determinar el valor exacto de las variables que definen el estado inicial del modelo. Así, al definirlo, siempre va a aparecer un cierto grado de inexactitud.

Debido a la no linealidad de las ecuaciones de evolución, la inevitable introducción de una ligera desviación en el estado inicial se amplifica a medida que evoluciona el modelo, para al cabo de un tiempo dar una solución que se aparta totalmente de la solución de referencia. Esto plantea la siguiente cuestión ¿en qué momento deja de tener valor la solución obtenida?, o lo que es lo mismo, ¿cuál es el límite de la predictibilidad de la atmósfera? Se ha intentado determinar este límite de dos formas, mediante estudios de la turbulencia y realizando experimentos numéricos paralelos. Hoy en día la opinión unánime es que el límite de predictibilidad de la atmósfera para los problemas de valores iniciales está entre 10 y 15 días.

Para que el problema matemático esté bien propuesto, además de las ecuaciones de evolución y de las condiciones iniciales se necesitan las condiciones de contorno; es decir, es necesario conocer los valores de las variables atmosféricas sobre la frontera del dominio atmosférico D considerado. En el caso en que D sea toda la atmósfera terrestre, sólo hay que tener en cuenta sus límites inferior y superior. En el caso en el que esté limitado por una frontera lateral, además habrá que hacer suposiciones más o menos justificadas sobre la evolución de las variables sobre esa frontera. Por ejemplo, en dominios grandes se podrá imponer las mismas condiciones en sus bordes laterales, lo cual equivale a una periodicidad o simetría espacial. Naturalmente, la calidad de la predicción en el interior del dominio dependerá de lo

acertado de la estimación de la evolución de las variables sobre su frontera lateral. También, cuanto mayor sea el dominio más tardará la predicción para su interior en ser afectada por los errores cometidos en la frontera.

Todo lo anterior nos lleva al hecho que la predicción numérica del tiempo se ha visto muy favorecida por el desarrollo de ordenadores electrónicos cada vez más potentes. Así, la potencia de los ordenadores utilizados en meteorología ha ido subiendo desde 3,000 operaciones por segundo (IBM 701, instalado en 1955) a 2.5,000,000 operaciones por segundo (CDC 6600, del año 1966), a 7,000,000,000 de operaciones por segundo (Cray C98, del año 1991), hasta los 100,000,000,000 operaciones por segundo (Fujitsu VPP 5000, instalado en Meteo-France a finales de 1999). Esta creciente potencia de cálculo esencialmente se ha utilizado para aumentar la resolución horizontal y vertical de los modelos. Tampoco hay que olvidar que esos progresos también deben mucho a los esfuerzos de los matemáticos, que proponen algoritmos cada vez más refinados y convergentes rápidamente, y a los físicos, que van mejorando los métodos para describir toda la complejidad de los procesos atmosféricos.

El proceso de predicción del clima no acaba con el resultado numérico. ¡Los ordenadores no solucionan todo! En particular, para los plazos más breves (de algunas horas a uno o dos días) es indispensable la destreza del hombre del tiempo encargado de la predicción quien, como gran conocedor del clima regional y de los límites de los modelos, ajusta e incluso modifica los resultados de la simulación y los traduce a términos de tiempo observable: intensidad de las precipitaciones, temperaturas máxima y mínima del día, posible aparición de nieblas, de tormentas, de ráfagas de viento, etcétera.

Lorenz¹² intentó explicar esta idea mediante un ejemplo hipotético. Sugirió que imaginásemos a un meteorólogo que hubiera conseguido hacer una predicción muy exacta del comportamiento de la atmósfera, mediante cálculos muy precisos y a partir de datos muy exactos. Podría encontrarse una predicción totalmente errónea por no haber tenido en cuenta el aleteo de una mariposa en el otro lado del planeta. Ese simple aleteo podría introducir perturbaciones en el sistema que llevaran a la predicción de una tormenta.

De aquí surgió el nombre de *efecto mariposa* que, desde entonces, ha dado lugar a muchas variantes y recreaciones.

Se denomina, por tanto, efecto mariposa a la amplificación de errores que pueden aparecer en el comportamiento de un sistema complejo. En definitiva, el efecto mariposa es una de las características del comportamiento

¹²Edward Norton Lorenz nació en West Haven, Connecticut, EUA, el 23 de mayo de 1917. Estudio matemáticas en el Dartmouth College en New Hampshire y en la Universidad de Harvard en Cambridge, Massachusetts. El 12 de mayo de 2004 Lorenz recibió la medalla *Dutch Buys Ballot*, por sus aportes extraordinarios.

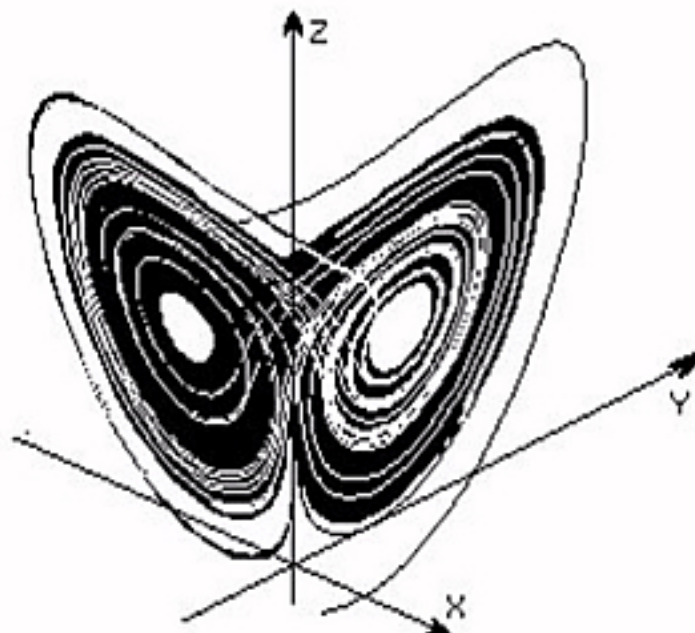


FIGURA 2. El atractor extraño de Lorenz.
<http://www.geocities.com/SiliconValley/5659/CAOS/CAOS.html>

de un sistema caótico, en el que las variables cambian de forma compleja y errática, haciendo imposible hacer predicciones más allá de un determinado punto, que recibe el nombre de horizonte de predicciones.

Los resultados de Lorenz, a pesar de haber aparecido en una revista técnica reconocida¹³, pasaron inadvertidos para la comunidad científica. La figura del modelo de Lorenz no es otra cosa que la manifestación de la inestabilidad exponencial, es lo que se denomina *atractor extraño*¹⁴. En meteorología se sabe que la amplitud de una perturbación se duplica cada tercer día. A una condición inicial dada, es decir, cierto estado de la atmósfera en la superficie del planeta (presión, temperatura, humedad), le corresponde una evolución futura perfectamente determinista¹⁵.

No obstante, si se modifican ligeramente las condiciones iniciales, hacer que una mariposa agite sus alas, este pequeño cambio tal vez no tenga repercusiones en los primeros instantes o días. Sin embargo, ya lo hemos

¹³ *J. Atmos. Sci.* **20** (1963), pp. 130–141.

¹⁴ Detalles complementarios pueden encontrarse en el trabajo del autor: “Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales”, *Revista Lecturas Matemáticas* **25** 59–111 (2004).

¹⁵ En su famoso trabajo *Deterministic Nonperiodic Flow*, Edward Lorenz propuso como modelo de un flujo hidrodinámico disipativo una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes que resulta en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

visto con las iteraciones, la modificación se amplificará y si se duplicará cada tercer día, se multiplicará por 300 cada mes y por 100,000 cada dos meses, y llegará a ser 10^{30} por año.

Calcular previamente la influencia (o no) de nuestra mariposa, requeriría el conocimiento preciso de todos esos datos y de todas las fuerzas a las que está sometida en el momento inicial de equilibrio, lo cual es imposible, salvo para el “Demonio de Laplace”. Este personaje tiene un conocimiento pleno de todas las fuerzas de la naturaleza y de la situación de todos los elementos, y por tanto nada es incierto para él, ni el pasado ni el futuro. Si el Demonio de Laplace fuese infalible, el caos sería para él un término sin sentido. Pero, tal y como hemos planteado, sólo un error entre miles de millones de aciertos, por diminuto que fuese, dotaría a sus predicciones de la misma fiabilidad que la de un horóscopo telefónico.

No debe entristecernos el hecho de no poder acceder a toda la información conocida por el personaje creado por Pierre Simon de Laplace. Gracias a nuestra fenomenal ignorancia, actividades tan edificantes como una partida de billar tienen un desenlace incierto, aun cuando los jugadores sean mejores que “Felson el rápido”. Esta paradójica comunión entre lo impredecible y lo determinista nos libera de lo que, de otra forma, sería un aburrimiento cósmico.

3. EL CAOS

En 1580 nació Jan Baptista van Helmont¹⁶ en Bruselas, ciudad que en ese entonces formaba parte de los Países Bajos españoles. Van Helmont descubrió que existen otros gases además del aire, y demostró que los vapores emitidos por combustión de carbón eran los mismos que se producían al fermentar el jugo de las uvas (bióxido de carbono). Fue él quien inventó la palabra “gas” a partir de la voz griega *χάος* (caos). ¿Por qué eligió ese término y no otro? Van Helmont era un individuo cultivado y con buena educación, y aprovechó un vocablo griego cuyos varios significados se pueden asociar con las propiedades de un gas.

Si nos ubicamos en una época en la que posiblemente era un poco difícil concebir la existencia de algo que no se pudiese ver o tocar, podremos comprender por qué la elección cayó sobre un término que, entre sus múltiples acepciones, tiene las siguientes: primer estado del universo; materia amorfa; extensión o envergadura del universo; abismo inferior; oscuridad infinita, y oquedad o abismo muy vasto. Para los antiguos griegos el abismo aludido es

¹⁶Químico, fisiólogo y médico belga que reconoció la existencia de gases discretos e identificó el dióxido de carbono. Puede considerarse a van Helmont como puente entre la alquimia y la química. Aunque con inclinaciones místicas y creyente en la piedra filosofal, fue un observador cuidadoso y un experimentador exacto. Muere en 1644 en Vilvoorde, en los Países Bajos españoles, hoy Bélgica. Su nombre Jan también se escribe como Joannes.

el *Tártaro*, el inframundo, aún más bajo que el *Hades*, en donde pululaban las almas de los difuntos.

El sentido moderno que tiene la palabra caos como sinónimo de desconcierto, confusión, embrollo, lío, etc., fue forjado por Publio Ovidio Nasón (43 a.C.–17 d.C.) en sus *Metamorfosis*, un enorme poema en versos hexámetros que es una colección de mitos y leyendas. Las historias se desenvuelven en orden cronológico; la primera y la última se refieren a la creación del orden a partir del caos. La primera metamorfosis es la transición de un universo amorfo y desordenado a uno ordenado: el *Cosmos*. La última metamorfosis, la culminante, es la muerte y deificación de Julio César; la transformación del caos de las guerras civiles romanas en una paz brillante y magnífica: la paz augusta.

A partir del tiempo de Laplace, los fenómenos naturales que cambian al transcurrir el tiempo se clasificaban en dos clases, los llamados *sistemas determinísticos* —cuyo estado presente determina de manera unívoca y predecible su estado futuro— y los *aleatorios*, en los cuales el estado futuro puede ser cualquiera y no se puede predecir sino a la luz de una distribución de probabilidad.

Hasta tiempos recientes, esta dicotomía ha sido guía de trabajo de la gran mayoría de los científicos; el escenario estaba perfectamente claro: los fenómenos son determinísticos y, en ese caso, predecibles; la única barrera para conocer el futuro es nuestro grado de conocimiento (o ignorancia) de las condiciones iniciales y de las ecuaciones dinámicas del sistema. O bien, son azarosos y tenemos que conformarnos con conocer sus propiedades probabilísticas y renunciar al sueño de la predicción.

En pocas palabras, un universo como maquinaria perfecta de relojería, como una película en la cual aunque no hayamos visto los cuadros futuros ya están ahí, esperando que llegue el momento de ser proyectados. O un universo en el que Dios decide todos los detalles y, por lo tanto, es inaccesible al conocimiento humano, dado que Dios es una metapresencia, y entonces para los humanos el transcurso de la historia es ciego y azaroso.

Probablemente, en la primera concepción no haya mejor ‘ejemplo’ que el problema de los N cuerpos.

Newton resolvió el problema de dos cuerpos afectándose mutuamente debido a su atracción gravitacional, cada uno de ellos viaja en una órbita elíptica en torno al centro de masa común, y el comportamiento es periódico y predecible por siempre. De esta manera se podría concluir que la Tierra girará alrededor del Sol por los siglos de los siglos y que este sistema es completamente estable. Sin embargo, el problema es que la Tierra y el Sol no son los únicos cuerpos del Sistema Solar, pues se hallan acompañados de otros planetas con sus respectivas lunas.

Un paso de avance destacado podemos ubicarlo alrededor del sexagésimo cumpleaños del Rey Óscar II de Suecia y de Noruega en 1889. Con motivo de esta celebración, se convocó un premio (de 2,500 coronas) para el mejor trabajo relacionado con una serie de problemas matemáticos, entre ellos demostrar que el Sistema Solar es estable.

Henri Poincaré (1854–1912), una de las figuras más interesantes de la ciencia de todos los tiempos¹⁷, se llevó dicho premio; en el camino no sólo desarrolló técnicas matemáticas muy poderosas —la teoría de las expansiones asintóticas y el estudio de ecuaciones diferenciales con singularidades—, sino que inventó la topología, una nueva rama de las matemáticas que la revolucionó por completo. Sin embargo, su solución sólo era parcialmente correcta.

Poincaré trabajó el modelo reducido de Hill¹⁸. En este modelo se supone que el tercer cuerpo es demasiado pequeño con respecto a los otros dos y que su existencia no los afecta (pero la de ellos sí afecta al pequeño). Bajo estas premisas, ya sabemos que los dos cuerpos grandes se moverán en órbitas elípticas y, por lo tanto, su movimiento es periódico y, por ende, estable y predecible.

Poincaré se esforzó por demostrar que el movimiento del cuerpo pequeño era también periódico, pero lo que encontró lo llenó de asombro: “... *Se queda uno tan pasmado ante la complejidad de esta figura, que ni siquiera intentaré dibujarla...*”.

El tercer cuerpo seguía una trayectoria aperiódica, irregular e impredecible, pese a estar sujeta a leyes determinísticas. El asombro no era para menos: Poincaré se encontró de frente con un comportamiento dinámico que desafiaba todo lo que los matemáticos y físicos habían creído hasta ese momento; algo que parecía una criatura mitológica, una mezcla inconcebible de orden con desorden, de determinismo con aleatoriedad, de armonía y confusión. Ese monstruo se llama *Caos*, y aunque Poincaré lo tuvo en sus manos, no pudo identificarlo cabalmente ni aprovechar todas sus consecuencias científicas y filosóficas. Era un descubrimiento prematuro para su tiempo; por eso Poincaré no pudo, pese a ser un gran filósofo de

¹⁷Jules Henri Poincaré nació en Nancy, Francia, el 29 de abril de 1854 y murió en París el 17 de julio de 1912. Generalmente conocido como Henri Poincaré, fue un extraordinario matemático, físico teórico y filósofo de la ciencia. Poincaré es descrito a menudo como el último universalista (después de Gauss) capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática. Para mayores detalles biográficos de Poincaré puede consultar, por ejemplo, Darboux, G., *Eloge historique d'Henri Poincaré lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913*, Gauthier-Villars, París, 1913.

¹⁸Llamado así en honor del astrónomo estadounidense George William Hill, que nació en Nueva York el 3 de marzo de 1838 y murió en West Nyack el 16 de abril de 1914. Su trabajo se centró en las matemáticas que describen el problema de los tres cuerpos, después estudió la perturbación ejercida por los planetas Júpiter y Saturno en la órbita de la Luna alrededor de la Tierra, definiendo lo que se conoce hoy con el nombre de *Esfera de Hill*. Fue presidente de la *American Mathematical Society* en el período 1894–1896 y miembro de la Sociedad Real de Edimburgo en 1908, así como de las academias de Bélica (1909), *Christiania* (1910), Suecia (1913), entre otros.

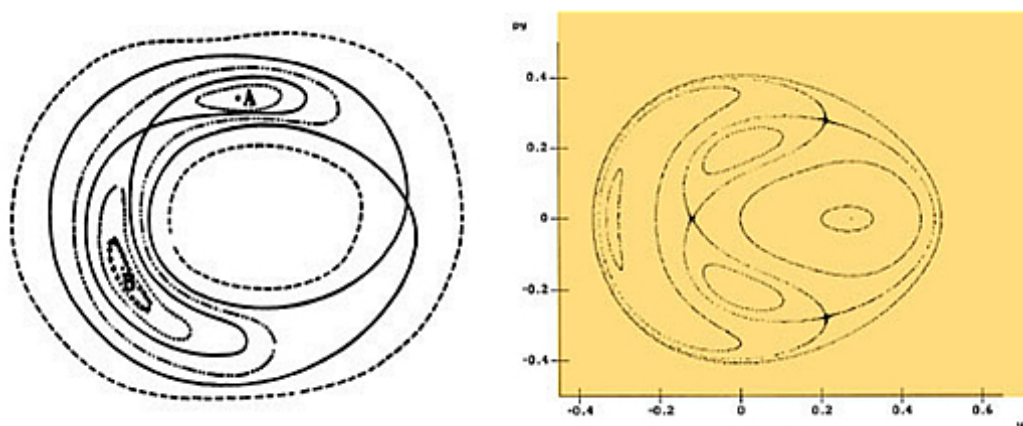


FIGURA 3. Las curvas de la izquierda aparecieron en la memoria de Poincaré de 1890, y fueron obtenidas con bastante imaginación. Las de la derecha fueron publicadas en 1964 en el artículo de los astrónomos Hénon y Heiles (citado en la nota de pie de página número 16), y fueron contruidas a partir de cálculos con ordenador.

la ciencia, evaluar su magnitud. No obstante, se dio perfecta cuenta de que la mecánica clásica ya no sería la misma: "... Sucede que pequeñas diferencias en los estados iniciales producen diferencias enormes en el estado final. Un pequeño error en los primeros se traduce en un error enorme en el último. La predicción se vuelve imposible, y entonces decimos que tenemos un fenómeno azaroso".

El mérito de Poincaré es indiscutible; con la invención de la topología abrió un camino alternativo ante el desarrollo exclusivamente analítico del estudio de los sistemas dinámicos que había impulsado Laplace, y devolvió la mecánica a su cuna: la geometría. No estaría de más que los topólogos contemporáneos recordasen que su disciplina, nació de la física.

Pero volviendo a Suecia, en el concurso antes mencionado, la memoria premiada, *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*, consideraba un problema astronómico muy concreto, de fácil enunciación pero diabólicamente complicado¹⁹. Considere el lector que el problema de Kepler, que seguramente recordará, se puede enunciar como el problema de dos cuerpos (Sol-planeta). ¿Y qué tiene que ver eso con el caos? Pues que los movimientos de tres cuerpos controlados por la ley de atracción universal de Newton, paradigma del determinismo laplaciano y base de la concepción mecanicista del mundo, podían resultar terriblemente complicados. Y en un preciso sentido técnico, Poincaré introducía (en la versión publicada de su trabajo) el concepto de lo que en el lenguaje actual llamamos

¹⁹Reproducida en "Sur les Equations de la Dynamique et le Problème des Trois Corps", *Acta Mathematica* **13**, 1-270, París, 1890, y ampliada en *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vol. 1, Gauthier Villars, París, 1892 (reimpreso por Dover en 1957).

soluciones caóticas u homoclínicas, que él llamaba doblemente asintóticas. La figura anterior, en su modesta apariencia, es en nuestra opinión reveladora. Compara el poder de abstracción y de imaginación de Poincaré²⁰ con los resultados numéricos obtenidos con ordenador en 1964. Éstos corresponden a un artículo de los astrónomos Hénon y Heiles²¹, que representó un papel importante en la revitalización del interés por el caos. Huelgan los comentarios.

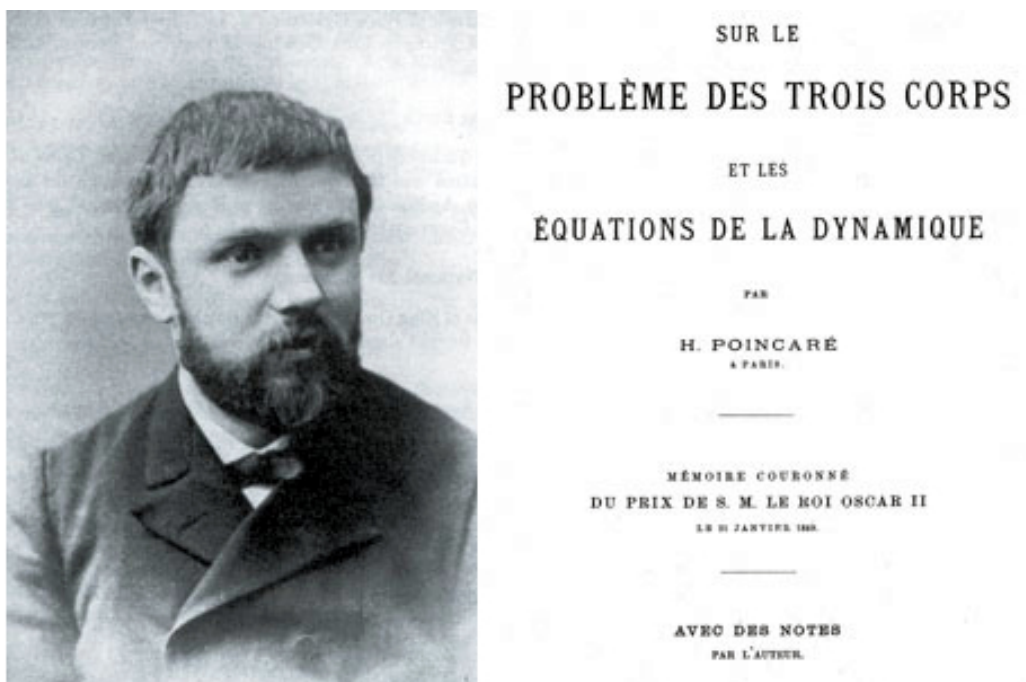


FIGURA 4. Poincaré y la portada de su famosa memoria. En realidad corresponde a una revisión del trabajo originalmente premiado.

Una primera mirada a la historia del problema de la estabilidad del Sistema Solar nos lleva hasta Pierre Simon Laplace, quien dedicó mucha parte de su vida a estudiar la estabilidad de los planetas. Su *Treatise*, como ya

²⁰Para una mayor información técnica, consulte por ejemplo Mawhin, J., "The Centennial Legacy of Poincaré and Lyapunov in Ordinary Differential Equations", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, serie II, núm. 34 (1994), pp. 9–46, y Nápoles V., J. E. y C. Negrón, "De la Mecánica Analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", *Revista LLULL* (España) **17** (32) (1994) pp. 190–206 (un resumen de este trabajo fue publicado en el *Bol. Soc. Cub. Mat. Comp.* **15** (1993) pp. 1–9).

²¹Henon, M., y C. Heiles, "The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments", *Astrom. J.* **69** (1964) pp. 73–79. Recomendamos, para detalles técnicos, consultar Arnold, V. I., *Metodos matemáticos de la mecánica clásica*, Ed. Paraninfo, Madrid, 1983; Gutzwiller, M. C., *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer Verlag, Nueva York, 1990; Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989, y Reichl, L. E., *The Transition to Chaos*, Springer Verlag, 1992.

dijimos, es un compendio del conocimiento sobre la dinámica planetaria en su tiempo. Utilizó la teoría de las perturbaciones para mostrar que el movimiento de los planetas era cuasiperiódico, *i.e.*, si se graficaba en el espacio de fases, las trayectorias estaban sobre la superficie de un toro. Sin embargo, la solución obtenida por Laplace era en forma de series y, para que fuera una demostración rigurosa, válida y utilizable, se requería demostrar la convergencia de las series.

Años después, Poincaré demostró que para la mayoría de los casos las series divergen²². Pese a esto, Poincaré perseveró en el estudio introduciendo el concepto de *espacio de fases*, diferente de la concepción lagrangiana, en el cual las soluciones son representadas por órbitas. Como innovación adicional, analizó ‘cortes’ del espacio de fases en lugar de analizar el espacio completo. Con esta aproximación, Poincaré estableció los principios para una nueva aproximación a los sistemas dinámicos, que posteriormente permitiría el estudio de caos.

Las ideas de Poincaré quedaron algo olvidadas, aunque el progreso de la física siguió con dos rupturas, la teoría de la relatividad, en la cual el espacio y el tiempo dejaban de ser absolutos y la masa de un móvil dependía de su velocidad, y la mecánica cuántica, en la que al binomio *objeto medido-instrumento de medida* se unía un tercero en discordia, el *operador*, y la precisión en la medida quedaba limitada intrínsecamente por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Como ocurre tantas veces en ciencia, las ideas de Poincaré se rescataban, así el pensador francés se había anticipado a su tiempo y su obra fue continuada en el siglo XX, entre otros, por Birkoff, Kolmogorov, Sinaí, Samel, Arnold y Moser.

En concreto, las situaciones con las que trabajó Poincaré pueden ser caracterizadas de esta manera:

- Están descritas matemáticamente por sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.
- Presentan gran sensibilidad a las condiciones iniciales, con sinergias y retroalimentaciones, en los que aparecen en consecuencia ‘efectos mariposa’.
- Son disipativas, o sea, para evolucionar necesitan un aporte constante de energía.
- En su devenir se va perdiendo información de modo que al cabo de un tiempo, más o menos largo, pierden toda relación con las condiciones iniciales.

²²En realidad, esa fue la respuesta de Poincaré al concurso ya mencionado. Hubo que esperar hasta mediados del siglo XX, con la teoría KAM, para tener una respuesta completa de este asunto.

Se dice que presentan un comportamiento de *caos determinista*.

La expresión ‘caos determinista’ puede parecer una contradicción en los términos, enfrentados caos y desorden frente a determinismo y orden. Con ella precisamente quiere darse a entender que la pérdida de la información que caracteriza al caos no es debida a circunstancias más o menos aleatorias, como las que se contemplan en la última revolución de la física, la mecánica cuántica, sino a las precisas leyes deterministas de la física clásica²³.

Por ser más complicados que sus contrapartes lineales, los sistemas no lineales habían sido poco estudiados; por lo tanto, la ubicuidad del caos no se había detectado. En su candor, los físicos estaban convencidos de que la predictibilidad era una consecuencia natural de una estructura teórica correctamente establecida, que dadas las ecuaciones de un sistema, únicamente restarían los cálculos para conocer como se va a comportar.

Nuestras ideas de pronosticar fueron por lo menos drásticamente modificadas cuando el caos se hizo un componente necesario de la consideración en cada aspecto de la predicción de clima. En otras palabras, el caos ha liberado nuestras ideas de la posibilidad de predecir las variaciones del clima. El enorme esfuerzo invertido en medir la emisión del dióxido de carbono artificial en la estratósfera a fin de llegar a una conclusión determinista sobre sus efectos en la tendencia observada de aumento de la temperatura, conocida como *calentamiento global*, ha demostrado ser insuficiente. Estos estudios también han sido conducidos en otras direcciones como son el efecto de gases de invernadero, aerosoles estratosféricos, y reducción de ozono, en la esperanza de ser capaz de predecir el efecto que ellos tendrán en la variación de temperaturas a largo plazo. A menudo, los defensores ambientales señalan a un factor o al otro como la causa principal del calentamiento global²⁴.

Además, el clima de la Tierra está notablemente influenciado por la variabilidad en su órbita, su orientación en el espacio y la salida de radiación del Sol. Durante siglos, se creía que las órbitas planetarias eran caminos parecidos a un reloj estable y previsible. Se conoce ahora que la influencia gravitacional de otros planetas hace que una órbita particular se haga más excéntrica con el tiempo, que se acumula en el comportamiento caótico. Por lo tanto, aun si todo el clima atmosférico fuera conocido, uno todavía tendría que considerar la naturaleza caótica de nuestro Sistema Solar²⁵.

En el medio matemático se atribuye a T. Y. Li y L. A. Yorke la acuñación del término *caos* para referirse al comportamiento determinístico, pero irre-

²³Ejemplos de sistemas en los que puede aparecer un comportamiento caótico, además de los ya analizados, son fluidos, láseres, sistemas ópticos no lineales, plasmas, aceleradores de partículas, reacciones químicas (Belusov-Zabotinsky), dinámica de poblaciones (presa-depredador), sistemas biológicos diversos, economía y sociología.

²⁴Hansen, James E., y cols., “Climate Forcings in the Industrial Era”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **95** (1998) pp. 12753–12758.

²⁵Varadi, Ferenc, Michael Ghil y William M. Kaula, “Jupiter, Saturn, and the Edge of Chaos”, *Icarus* **1392**, (junio de 1999) pp. 286–294(9).

gular y aperiódico. En su celebrado artículo “Period Three Implies Chaos” publicado en 1975 en *American Mathematical Monthly*, demostraron que si un mapeo continuo de un intervalo a la recta real tiene un punto de periodo tres, entonces ese mapeo exhibe comportamiento caótico. A su vez, Yorke opina que R. May y G. Oster fueron “... los primeros en comprender cabalmente la dinámica caótica de una función de un intervalo en sí mismo”.

Es posible que Yorke haya acuñado el término, pero el primer artículo donde se puede encontrar en su título la palabra *caos* fue en el de May, “Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos”, publicado en 1974 en *Science*, que antecede al de Li y Yorke en un año. La afirmación de Yorke acerca de la primicia en comprender la dinámica de los mapeos unidimensionales es llanamente falsa: en 1964, el matemático soviético Alexander Nikolayevich Sharkovsky²⁶ publicó en la revista ucraniana de matemáticas *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal* un artículo llamado “Coexistencia de ciclos de un mapeo continuo de la línea en sí misma”, en el cual presenta de manera rigurosa y perfectamente bien fundamentada lo que May y Oster publicaron una década más tarde (Robert May reconoce que desconocía el trabajo de Sharkovsky). De paso, se debe mencionar que el resultado de Li y Yorke es un caso muy particular del Teorema de Sharkovsky²⁷.

4. ATRACTORES EXTRAÑOS

Mientras esta manifestación del caos que se llamó *efecto de mariposa* era al principio muy desalentadora para los meteorólogos, los científicos pudieron ver más allá de su pesimismo y comenzaron a desarrollar su potencial como un instrumento para estudiar sistemas complejos más bien que una fuerza disuasoria a la ciencia de la predicción. Mientras la teoría de caos sacudió la vieja perspectiva que la ciencia podría, en teoría, descubrir la capa de misterio que oculta tales complejidades, esto no acabó completamente con la esperanza de entender los sistemas complejos. Las buenas noticias sobre el efecto mariposa eran que esto reveló que la mayor parte de los comportamientos aparentemente arbitrarios expuestos por estos sistemas de hecho viene de una fuente bastante simple.

Por lo tanto, quizás el análisis de este ‘caos’ no era tan imposible como se había creído. El modelado matemático, hasta este punto, había sido quizás

²⁶Matemático ucraniano, nacido en Kiev el 7 de diciembre de 1936.

²⁷Detalles adicionales sobre los resultados de Sarkovskii (porque en realidad no es un único teorema) pueden ser consultados en Rubiano, G., “Acerca del teorema de Sarkovskii”, *Lecturas Matemáticas* **15** (1994) pp. 21–26; Nápoles V., J. E., “Una nota sobre el Teorema de Sarkovskii”, *Lecturas Matemáticas* **16** (1995) pp. 211–214, y Nápoles V., J. E., “Funciones continuas, órbitas y caos. El Teorema de Sarkovskii”, *Boletín de Matemáticas* **XII** 2, (2005) pp. 98–113.

el acercamiento más prominente a la correlación de sistemas complejos en la meteorología. Varios grados del éxito habían sido alcanzados de usar esta táctica en una tentativa de imitar la realidad. Aún cuando se afirmaba que estos modelos eran por lo general tan complejos, que ninguna estructura comprensible podría ser extraída alguna vez de su uso. Sin embargo, el ascenso de la teoría de caos proporcionó una herramienta central para que el análisis del tiempo tuviera una mayor franqueza, aparecieron conjuntos con propiedades cualitativas muy llamativas.

La situación de que hablamos puede presentarse así: cuando un sistema es caótico, el conjunto de estados de fases donde se presenta el fenómeno de dependencia sensible a las condiciones iniciales puede venir acompañado de otras condiciones adicionales, por ejemplo, que sea un *conjunto atractor* para todas o para la mayor parte de las trayectorias del sistema.

En tales situaciones, es habitual que dicha porción del espacio de fases tenga una estructura geométrica y topológica muy complicada y, como consecuencia, una dinámica de alto grado de complejidad. Estos conjuntos fueron denominados *atractores extraños* debido a que tienen una estructura y una apariencia ‘extraña’²⁸.

El concepto de atractor extraño es algo difícil de definir con esmero. Aunque bastante polémico en su aplicación a la meteorología, los atractores son fenómenos matemáticos genuinos observados en el espacio de fases de dichos sistemas. Los atractores pueden ser definidos de una manera aproximada como²⁹ “*un conjunto límite que colecciona trayectorias*” y, en el sentido visual, es simplemente el modelo gráfico o camino adoptado al trazar las trayectorias de un sistema.

Los atractores extraños comprenden una categoría propia, son regiones estables y limitadas a un espacio finito y acotado, y lo más imprevisible es que en ella todas las trayectorias nunca siguen el mismo camino dos veces y muestran un comportamiento arbitrario dentro de la región. Todas las trayectorias de este sistema siguen un curso similar alrededor de un atractor extraño, pero nunca son idénticas.

Podemos definir entonces la misión del pronóstico meteorológico como una búsqueda de atractores extraños dentro de los sistemas dinámicos de fluidos que constituyen el tiempo. Con la identificación del atractor extraño viene un rastro de orden y estructura para ser encontrada en estas

²⁸Dos matemáticos, Floris Takens (n. 1941) y David Ruelle (n. 1935), acuñaron dicho nombre para este nuevo tipo de atractor. Un atractor estructuralmente estable que no es uno de los tipos clásicos, el punto o el círculo, se dice que es un atractor extraño. El nombre constituye una declaración de ignorancia, siempre que los matemáticos denominan a una cosa como ‘patológica’, ‘anormal’, ‘extraña’, o algo parecido, lo que quieren decir es ‘no entiendo esto’. Pero es también una bandera que contiene un mensaje, puede que no lo entienda, pero seguro que me parece importante.

²⁹Petree, J., *Part 3: Strange Attractor in Chaos Theory* (<http://www.ufu.edu/petreejh4/Attractor.htm>) y una agradable introducción a estas ideas se encuentra en <http://johnbanks.maths.latrobe.edu.au/chaos/> y <http://www.calresco.org/attract.htm>

complejidades. El atractor extraño ha sido llamado ‘la huella’ del caos en el sentido que este es quizás el único camino que podemos seguir hasta donde el caos ha causado su influencia en el sistema. El desafío crítico de localizar este atractor, sin embargo, viene del hecho que cuando hablamos sobre el tiempo, debemos analizar el espacio de fase. En nuestra realidad física, tratamos con las dimensiones familiares de espacio y tiempo. Cuando entramos en el espacio de fase, sin embargo, las dimensiones pueden tomar la forma de cualquier calidad física, tantas como son necesarios para describir el sistema, sin límite *a priori*. En el caso del tiempo, las dimensiones del espacio de fase se hacen propiedades como temperatura, humedad, etc. Sin embargo, entender un sistema con más que nuestras tres dimensiones habituales sin considerar la representación gráfica, plantea una dificultad considerable. Un atractor dentro de tal sistema es un conjunto de puntos que tendría que describir el estado del sistema en un instante específico del tiempo, a saber, la temperatura, humedad, presión, velocidad de viento, etc., en cualquier momento dado. La complejidad de este atractor, y así el sistema dentro del cual está contenido, son medidos por su número de dimensiones. Este número es aproximadamente el número de variables necesarias para describir a fondo el estado del sistema en un instante dado del tiempo. El atractor extraño puede ser encontrado añadiendo cada vez más dimensiones a un sistema hasta que una estructura definida comience a aparecer. La localización de una estructura dentro de un sistema meteorológico por lo general requiere muchas dimensiones, reflejando su complejidad enorme. Este número de dimensiones, sin embargo, no es a menudo un número entero, *e.g.*, es un objeto fractal³⁰.

De aquí el adjetivo ‘extraño’, así llamado porque esto representa una desviación de nuestra experiencia ordinaria de dimensiones de número entero, además del hecho que esto excede nuestra realidad de tres dimensiones. El siguiente paso después de determinar el número de dimensiones existentes, es calcular cuáles son ellas. Este es un proceso muy técnico e intrincado, requiriendo grandes cantidades de datos y un número bajo de dimensiones. En la práctica, este proceso es muy difícil.

Varias personas han reclamado haber localizado atractores extraños para el pronóstico meteorológico de la Tierra y sus dimensiones respectivas. Sin embargo, pocos han ‘sobrevivido’ a las refutaciones y reconvenciones. Los que en el día de hoy se llaman atractores, han sido sugeridos de forma computacional o heurística, pero no rigurosa. De momento, el problema de probar la existencia de atractores extraños en sistemas dinámicos, es un problema matemático de primera magnitud en esta teoría. El famoso

³⁰El atractor de Lorenz es un fractal con dimensión de Hausdorff entre 2 y 3. En Grassberger, P., e I. Procaccia, “Measuring the strangeness of strange attractors”, *Physica D* **9** (1983), pp. 189–208, se ha estimado la dimensión de Hausdorff en 2.06 ± 0.01 y la dimensión de correlación en 2.05 ± 0.01 .

atractor de Lorenz ha estado toda una vida ilustrando el caos en portadas de libros, revistas especializadas y prensa en general. Sólo en el año 1999 el matemático sueco Warwick Tucker ha demostrado su *pedigrí* caótico³¹.

Pero ¿cómo llegó Lorenz a estas ideas? Estaba interesado en el conocimiento en profundidad de la convección atmosférica y en lugar de usar las herramientas habituales, usó unas ecuaciones debidas a Boussinesq que describen el flujo de un fluido situado en una situación convectiva. Truncando hasta ciertos órdenes estas ecuaciones, Lorenz simplificó las cosas, redujo el problema al estudio de una evolución temporal en tres dimensiones y obtuvo el siguiente sistema tridimensional con parámetros:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + ay, \\ \dot{y} &= bx - y - xz, \\ \dot{z} &= -cz + xy.\end{aligned}$$

Con ayuda de un ordenador, usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden y asignándole determinados valores a los parámetros a , b y c , que veremos más adelante, Lorenz vivió una situación muy llamativa. El ordenador que tenía Lorenz, un *Royal McBee LGP-300*, un laberinto de válvulas al vacío y cables, no era demasiado fiable. Así que ‘metió’ sus ecuaciones en el ordenador y lo dejó que trabajara a una velocidad de una iteración por segundo (la máquina con la que escribo este trabajo, es entre cincuenta y cien veces más rápida).

Lorenz tuvo su ordenador durante varios años, desde alrededor de 1960. En el invierno de 1961, estaba ejecutando un precursor del que ahora es su famoso sistema. Calculó una solución y quiso estudiar cómo se comportaba en un período de tiempo más grande. En vez de esperar durante varias horas, anotó los números que había obtenido en la mitad de la ejecución, introdujo la información como un nuevo punto inicial y puso el ordenador a funcionar.

Lo que debería haber pasado es lo siguiente: la máquina debería haber repetido la segunda mitad de la ejecución original, y luego seguiría a partir de allí. La repetición serviría como una comprobación útil, pero ahorrándose la primera mitad.

Lorenz fue a tomar una taza de té. Cuando regresó, encontró que la nueva ejecución ¡no había repetido la segunda mitad de la original! Empezaban de la misma manera, pero lentamente las dos ejecuciones divergían, hasta que

³¹ “The Lorenz attractor exists”, *C. R. Acad. Sci. Ser. I Math.* **328** (12) (1999) pp. 1197–1202; comentado por Ian Stewart en la revista *Nature* **406** (31 de agosto de 2000) pp. 948–949, en el artículo “Mathematics: The Lorenz Attractor Exists”. Una demostración más accesible puede consultarse en *The Lorenz Attractor Exists—An Auto Validated Proof* disponible en <http://www.cs.utep.edu/interval-comp/interval.02/tuck.pdf>

al final no guardaban ningún parecido la una con la otra. ¿Qué pasó? En la memoria del ordenador se almacenaban seis cifras decimales 0,506127, en la segunda parte sólo aparecían tres 0,506. Lorenz introdujo una aproximación suponiendo que la diferencia, algo mayor que una milésima, no tendría influencia.

Los parámetros utilizados por Lorenz fueron $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$ (véase la figura 2), y si bien la evolución temporal estudiada no es una descripción realista de la convección atmosférica, su estudio dio un fuerte argumento a la impredecibilidad. Lo que Lorenz demostró fue que los errores en las predicciones meteorológicas, que todos tomamos con escepticismo, tenían una excusa válida, la *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

5. EPÍLOGO

El Caos es ya un concepto que ha ganado su legitimidad en la ciencia. Resulta imposible hacer una lista de quienes han contribuido a su fundamentación teórica y a sus aplicaciones en las más diversas áreas del conocimiento. El caos ya existe como especialidad científica por derecho propio, y la mayoría de las universidades e institutos de investigación científica del mundo han abierto centros o departamentos de las disciplinas que explotan y desarrollan el concepto de caos, de la *dinámica no-lineal* y la *teoría de los sistemas complejos*.

Hay definiciones formales del caos y de los conceptos que se derivan de él. El lector interesado puede consultar algún texto de sistemas dinámicos, pero creo que toda teoría científica requiere sus metáforas propias y que, gracias a éstas, cualquier persona podrá darse una idea de la teoría más complicada.

Ahora sabemos que el perfecto conocimiento de las leyes de la física y la química no garantizan el poder de predecir. De hecho, sistemas físicos tan simples como un péndulo en el cual la masa se sustituye por un doble brazo con capacidad de giro, para los cuales se conocen perfectamente sus leyes, son igual o más impredecibles que una ruleta. También da muerte al indeterminismo metafísico y al determinismo laplaciano, el caos determinístico es una síntesis dialéctica de ellos.

Para poder hacer predicciones en un sistema caótico sería necesario conocer con infinita precisión las condiciones iniciales de un sistema; es imposible, pues implica una cantidad infinita de información. Esto nos obliga a modificar la idea que tenemos acerca de la definición misma de ciencia, pues una de las premisas más aceptadas de lo que constituye el trabajo científico es que el resultado de un experimento sea *reproducible*. En un contexto más amplio podemos decir que una de las características del conocimiento científico es su *verificabilidad*. Ello no es posible en sistemas caóticos. La

idea de la reproducibilidad o verificabilidad como condición para que algo sea científico o no, tendrá que modificarse; será necesaria una etapa de reflexión y asimilación de todas las consecuencias que trae consigo el concepto de caos.

Sin embargo, los meteorólogos no tienen por qué abandonar su trabajo. Dado que es posible conocer con precisión limitada las condiciones iniciales, también lo es hacer predicciones limitadas del futuro de un sistema. Se habla, entonces, del *horizonte de predictibilidad* de algún fenómeno o modelo.

Un sistema azaroso tiene un horizonte nulo de predictibilidad; el sueño de Laplace es un horizonte infinito. Los sistemas caóticos tienen horizontes de magnitudes que dependen de parámetros intrínsecos del fenómeno o modelo, y de la escala temporal de los mismos.

Por ejemplo, el Sistema Solar es inestable y caótico, por lo que un planeta de repente se fugue de su órbita y se pierda en el Universo es perfectamente factible. Sin embargo, el horizonte de predictibilidad del Sistema Solar se estima en unos 20 millones de años, por lo que no debemos preocuparnos demasiado de que la Tierra se vaya a buscar otra estrella.

En el caso de la meteorología, se calcula que el horizonte de predictibilidad es de cuatro a siete días, y esto no depende de los métodos y computadoras empleadas. Durante algún tiempo se pensó que con el desarrollo de una vasta red de satélites que proveyeran información de alta calidad, sumado al progreso innegable de computadoras cada vez más poderosas, se podría extender ilimitadamente el horizonte de predictibilidad climática. Esta es otra ilusión perdida.

Incluso si la teoría del caos nunca permitiera la predicción meteorológica a largo plazo, sus contribuciones al pensamiento científico moderno ya garantizan una posición junto a teorías establecidas como la teoría de la relatividad o la mecánica cuántica. Indudablemente, ha resultado ser al menos una marca de progreso notable lo que Robert Pool llama '*un cambio de paradigma*'. Mínimamente, esto nos ha dado una percepción más realista de determinismo, que dibuja para nosotros un cuadro ligeramente más claro del mundo en el cual vivimos, aun si nunca somos capaces de definir realmente el caos.

Ensanchando sus aplicaciones más allá de la ciencia, la idea detrás de la teoría del caos, a saber, que un mismo cambio en condiciones iniciales puede causar diferencias grandes en el resultado, puede ser vista con una inclinación filosófica. El fenómeno puede ser observado en muchos procesos terrenales, incluso el curso de la historia humana. Stuart Kauffman nota que la civilización también se adhiere al fundamentalismo dictado en la teoría, en el sentido que aunque "*pueda parecer elevarse y caerse, las cosas nunca pasarán del mismo modo, y los pequeños acontecimientos o las*

personalidades solas pueden cambiar el mundo alrededor de ellos". La universalidad de su mensaje ha crecido más que el mundo de la ciencia y de las matemáticas, y su influencia puede ser encontrada hasta dentro del mundo artístico³². Más que cualquier aspecto de la ciencia, el caos ha adquirido una posición creciente en el arte, quizás debido a un acercamiento nuevo al Universo.

Los artistas han descubierto que el caos y la aleatoriedad pueden ser hermosos y que ellos pueden ser expresados por varias manifestaciones artísticas. Incluso sus representaciones geométricas producen algunos modelos sin duda asombrosos. Para terminar podemos decir entonces que *el caos es el lugar donde la naturaleza se hizo creativa*.

ABSTRACT

In this work there are exhibited the methods developed and applied in the study and observation of the climate, as well as his interrelation with classic concepts of the Philosophy as it is the determinism and of the current Mathematics: The chaos.

³²Pool, Robert, "Chaos Theory: How Big an Advance?", *Science* **245** 4913 (1989) pp. 26–28.