

Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ingeniería

Carrera:

Maestría en Ciencias de la Ingeniería



**Micromecánica configuracional de medios porosos
aplicada al sistema de Biot**

T E S I S

Para obtener el título de:

Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Presenta:

Ing. Juan Carlos Barreto

Director de tesis:

Director: Dr. Ing. Javier Luis Mröginski

Co-director de tesis:

Co-Director: Dr. Ing. Héctor Ariel Di Rado

Resistencia, Chaco Argentina

2024

MICROMECAÁNICA CONFIGURACIONAL DE MEDIOS POROSOS APLICADA AL SISTEMA DE BIOT

Prof. Juan Carlos Barreto

Tesis de Maestría
en Ciencias de la Ingeniería



Maestría en Ciencias de la Ingeniería

MICROMECAÁNICA CONFIGURACIONAL DE MEDIOS POROSOS APLICADA AL SISTEMA DE BIOT

Por
Juan Carlos Barreto

Director: **Dr. Ing. Javier L. Mröginski**
Co-Director: **Dr. Ing. H. Ariel Di Rado**

Tesis presentada como requisito parcial
para acceder al grado académico de
Magister en Ciencias de la ingeniería

Julio 2024

Resumen

En el presente trabajo de tesis se analizan diversos modelos elastodinámicos en la aproximación micromecánica propuesta por J. Eshelby o de fuerzas configuracionales, y, de segundo gradiente de acuerdo con la teoría de Mindlin-Aifantis, siendo esta una primera dimensión de análisis.

Todas estas construcciones están referidas a medios porosos, los cuales se definen en términos de la formulación de Biot denominada u-p (campo de desplazamiento, campos de porosidad), este tipo de acoplamiento llamado poromecánico, conduce, en general, a sistemas hiperbólico-parabólicos de ecuaciones en derivadas parciales, en este sentido, surge la otra dimensión de análisis de esta tesis, esta es la de formular rigurosamente el problema de condiciones iniciales y de borde o problema de Cauchy y de condiciones de contorno asociadas a los mencionados modelos, con el objetivo de obtener soluciones semi-analíticas clásicas o fuertes cumpliendo las condiciones de Hadamard.

Se emplea sistemáticamente la técnica de obtención de funciones de Green, a efectos de lograr que, utilizando el segundo y tercer teorema de representación de Green Lagrange y la identidad de Somigliana, se puedan construir representaciones integrales de las soluciones a las que identificamos como soluciones semi-analíticas, como ya se dijera. El sistema de representaciones integrales de las soluciones está acoplado, aunque puede resolverse a partir del uso de diversos dispositivos numéricos, por ejemplo: a) aproximantes de Picard, b) discretizando el sistema poromecánico usando diferencias finitas adaptativas, algunas de estas situaciones se analizan en los problemas de aplicación propuestos.

Los problemas parabólicos en general están mal puestos (ill-posed) de manera que las funciones de Green asociadas a este tipo de operadores se escriben en el sentido Backward, así también, el problema de Neumann, va acompañado de su condición de resolubilidad. Los operadores hiperbólicos derivados de la aplicación de la aproximación de segundo gradiente generan un nuevo tipo no local de condiciones iniciales, necesitándose ahora cuatro condiciones iniciales para definir sin ambigüedades el problema de Cauchy

Finalmente, uno de los objetivos de esta tesis es integrar, al menos formalmente, estas dos visiones de la micromecánica de medios porosos, como lo son: la teoría de fuerzas configuracionales y las de gradientes de deformación de orden superior en el marco de la teoría poroelástica de Biot

Abstract

In the present thesis work, several elastodynamics models are analyzed in the micromechanical approach proposed by J. Eshelby or configurational forces, and, of second gradient according to the Mindlin-Aifantis theory, this being a first dimension of analysis.

All these constructions refer to porous media, which are defined in terms of Biot's formulation called u-p (displacement field, porosity fields), this type of coupling called poromechanical, leads, in general, to hyperbolic/parabolic systems of partial differential equations, in this sense, the other dimension of analysis of this thesis arises, This is to rigorously formulate the problem of initial and edge conditions or Cauchy problem and boundary conditions associated with the aforementioned models, with the aim of obtaining classical or strong semi-analytic solutions fulfilling Hadamard's conditions.

Green's technique of obtaining functions is systematically used in order to achieve that, using the second and third representation theorems of Green Lagrange and the Somigliana identity, integral representations of the solutions that we identify as semi-analytic solutions can be constructed, as already mentioned. The system of integral representations of the solutions is coupled, although it can be solved from the use of various numerical devices, for example: a) Picard approximants, b) discretizing the poromechanical system using adaptive finite differences, some of these situations are analyzed in the proposed application problems.

Parabolic problems in general are ill-posed, so that the Green functions associated with these types of operators are written in the Backward sense, so the Neumann problem is accompanied by its resolvability condition. The hyperbolic operators derived from the application of the second gradient approximation generate a new non-local type of initial conditions, and four initial conditions are now needed to unambiguously define the Cauchy problem.

Finally, one of the objectives of this thesis is to integrate, at least formally, these two visions of porous media micromechanics. such as: the theory of configurational forces and those of higher-order strain gradients within the framework of Biot's poroelastic theory

Agradecimientos

«...Ibant obscuri sola sub nocte per umbras...»

Publio Virgilio Marón, Eneida 6:268

A Dios, por permitirme, en el atardecer de mi vida, cumplir este sueño.

Javier L. Mroghinski, fue sin duda, la persona crucial para que este proyecto se realice, su dedicación, aliento y siempre adecuadas sugerencias, surgidas de lecturas y relecturas de mis manuscritos, permitieron que finalmente llegue a esta instancia final de evaluación; me ha enseñado y ayudado con una dedicación que comprometen mi reconocimiento y admiración. Valoro enormemente su decisión de permitir que alguien sin experiencia ingenieril, iniciara esta aventura siempre desafiante del aprendizaje; en un área científica, me atrevería a afirmar, situada en el límite de lo conocido, por lo menos en teoría de materiales. ¡Gracias Javier!

A Ariel Di Rado, por su lectura y crítica de toda la tesis, todo ello me ayudó a entender cómo se escribe un texto en Ciencias de la Ingeniería. ¡Gracias Ariel!

A los jurados, por su lectura minuciosa de la tesis, que ayudó a mejorarla sustancialmente.

A Alejandro Meza, por su inestimable ayuda en la escritura en LaTeX de la tesis, hemos comenzado un camino juntos de estudio, y crecimiento personales

A Ciro, Ayelén, Paulina, Benicio, y Elena que hacen mi vida hermosa, todos los días.

A Norma, que me completa, por el amor de estos años, por la comprensión y la paciencia infinitas.

Índice general

1	Introducción	17
1.1	Antecedentes y Motivación	17
1.1.1	Aproximaciones históricas de la Micromecánica de Medios Continuos	17
1.1.2	Motivaciones preliminares	20
1.1.3	Definición del marco epistemológico de la tesis	25
1.2	Objetivos, organización de la tesis y aplicaciones	26
2	Formulación general del problema elastodinámico y poroelastodinámico	29
2.1	Elementos de Elasticidad Clásica. Relaciones entre tensores en la configuración deformada y no deformada	29
2.2	Elementos de Mecánica Configuracional. Tensores de Eshelby	31
2.3	Elementos de la teoría de espacios funcionales	38
2.4	Formulación del problema elastodinámico en las diferentes representaciones	40
2.4.1	Formulación de los problemas: elastodinámico y viscoelastodinámico clásicos	41
2.4.2	Planteo de la solución del sistema	42
2.5	Prueba de unicidad	45
3	Formulación del problema microelastodinámico	51
3.1	Consideraciones previas respecto del marco teórico a desarrollar	51
3.2	Problema de Eshelby	53
3.3	Formulación del problema de Eshelby	54
3.3.1	Justificación de la relación entre el segundo tensor de Eshelby y el tensor de cuarto orden de Eshelby-Mura	55
3.4	Problema de Eshelby dinámico	61
3.4.1	Solución semi-analítica del problema visco-elastodinámico tridimensional, no acotado, con una inclusión	67
3.5	Formulación del problema dinámico de Eshelby en la configuración no deformada	69
3.6	Problema micro-elastodinámico en la formulación de segundo gradiente	71
3.6.1	Problema de Cauchy micromecánico	74
3.7	Generalizaciones de la teoría de gradientes de alto orden	76
3.7.1	Operadores de tipo Mindlin-Aifantis	76
3.7.2	Teorema de la divergencia sobre múltiples escalas	77
3.7.3	Tercer teorema de Green-Lagrange multi-escala	77
4	Formulación del problema micro-poroelastodinámico	79
4.1	Descripción del problema y modelización	79
4.2	Caso poroelástico	80
4.3	Caso poro-visco-elástico	83

4.4	Problema poroelastodinámico en la representación lagrangiana con fuerzas configuracionales	85
5	Micromecánica configuracional Aplicada al sistema de Biot en la Formulación de Segundo Gradiente	93
5.1	Consideraciones previas respecto del marco teórico a desarrollar	93
5.2	Sistema de Biot Micro-poromecánico configuracional en la formulación de segundo gradiente	98
5.3	Sistema de Biot Micro-poromecánico configuracional en la formulación de segundo gradiente con pre-stressed	101
6	Problemas de aplicación	105
6.1	Dinámica de un medio poroso en la formulación micromecánico-configuracional, en la representación deformada	105
6.1.1	Primer modelo: Medio microporomecánico configuracional con dos porosidades en la representación deformada	107
6.2	Modelado del fenómeno dinámico de consolidación de un medio poroso viscoelástico no saturado, con una inclusión en el esqueleto sólido considerando diversas condiciones de borde	117
6.3	Experimentos computacionales	129
6.4	Problemas de aplicación: experimentos computacionales	143
6.4.1	Cuestiones respecto del Abordaje Computacional	143
6.4.2	Simulación numérica	145
6.4.3	Conclusiones respecto del experimento computacional	147
7	Conclusiones	149
7.1	Resultados obtenidos	149
7.2	Propuesta de trabajos futuros	149
A	Teoremas de representación de Green-Lagrange	155
B	Consideraciones accesorias sobre el problema de Eshelby y su generalización dinámica	161
C	Operaciones Push-Forward Y Pull-Back Para Tensores De Segundo Orden. Derivada Temporal De Lie	165
D	Formulación lagrangiana de la elastodinámica	169
E	Teorema de Noether	173
F	Tensores antisimétricos para la determinación de ecuaciones de evolución	175
G	Código de MATLAB	181

Glosario

- $L^2(R_k)$: Espacio de funciones integrables en media cuadrática o desarrollables en serie de Fourier. R_k : Dominio de definición de la función.
- Criterio del supremo para establecer convergencia uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{(\vec{x}, t) \in R_k} \left[\left\| u_j^{(n)}(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) \right\| \right] \right\} = 0 \iff u_j^{(n)}(\vec{x}, t) \mapsto u_j(\vec{x}, t)$$

- Condición de Lipschitz (funciones Lipschitz continuas)

$$\|u_{2j}(\vec{x}_{j2}, t) - u_{1j}(\vec{x}_{1j}, t)\|_{L^2(R_k)} \leq k \|x_{j2} - x_{j1}\|_{L^2(R_k)} ; k \in R_0^+$$

- $\langle \cdot \rangle$: Producto interno de un espacio pre-hilbertiano.
- $H_0^1(R_k)$: Espacio de Sobolev de energía positiva.
- Base canónica de un espacio R^n

$$\hat{e}_j ; \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k = \delta_{jk} \begin{cases} 1 \forall j = k \\ 0 \forall j \neq k \end{cases}$$

- $u_j(\vec{x}, t)$: Campo de desplazamiento, $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$; $\partial_t^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}$: operador derivada parcial primera y segunda con respecto al tiempo, respectivamente.
- $\hat{\nabla} \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$: operador nabra, $\hat{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: Operador laplaciano.
- $\hat{\nabla}^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2}$: Operador bi-laplaciano.
- $F_j = \hat{\nabla} f(\vec{x}, t) = (f(\vec{x}, t))_{,j}$: Vector gradiente ; $f(\vec{x}, t)$: Campo escalar.
- Divergencia de un vector $F_j = \hat{\nabla} f(\vec{x}, t)$; $f \in L^2(R_k)$: $F_{j,j} = \hat{\nabla}^2 f(\vec{x}, t) = (f(\vec{x}, t))_{,jj}$.
- Rotacional de un campo vectorial

$$\hat{\nabla} \times \vec{u}(\vec{x}, t) = \varepsilon_{jkl} u_{k,l}(\vec{x}, t)$$

Símbolos de Levi-Civita

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 \forall (i, j, k) : (1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2) \\ -1 \forall (i, j, k) : (3, 2, 1); (1, 3, 2); (2, 1, 3) \\ 0 \forall (i, j, k) : \text{si } i = j \text{ o } j = k \text{ o } k = i \end{cases}$$

- Laplaciano de un campo vectorial

$$(u_j(\vec{x}, t))_{,kk} = \hat{\nabla}^2 u_j(\vec{x}, t) = \hat{\nabla}(\hat{\nabla} u_j(\vec{x}, t)) - \hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times u_j(\vec{x}, t)) = (u_{k,k}(\vec{x}, t))_{,j} - \varepsilon_{jkl}(\varepsilon_{lmn} u_{m,n}(\vec{x}, t))_{,k}$$

- Flujo de un campo vectorial definido sobre una superficie limitadora; $L^2(\partial\Gamma)$: Espacio funcional sobre la superficie limitadora

$$u_{j,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = q_j^a(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma} ; q_j^a \in (L^2(\partial\Gamma))^2$$

- Flujo de un campo vectorial definido sobre una superficie limitadora con derivada oblicua (Ecuaciones de Navier-Lame anisótropas)

$$K_{jk} u_{n,k} \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma} = q_n^a(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma} ; q_n^a \in (L^2(\partial\Gamma))^2$$

- Teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \iiint_{V_K} d^3x u_{j,j}(\vec{x}, t) &= \iint_{\partial\Gamma} da u_j(\vec{x}, t) \hat{n}_j \\ \iiint_{V_K} d^3x u_{j,kk}(\vec{x}, t) &= \iint_{\partial\Gamma} da u_{j,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_j \\ \iiint_{V_K} d^3x (\varepsilon_{jkl} u_{k,l}(\vec{x}, t)) &= \iint_{\partial\Gamma} da \varepsilon_{jkl} u_k(\vec{x}, t) \hat{n}_l \end{aligned}$$

- Segundo teorema de Green para campos escalares

$$\begin{aligned} \iiint_{V_K} dV \{ \psi(\vec{x}, t) \varphi_{,kk}(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x}, t) \psi_{,kk}(\vec{x}, t) \} &= \\ &= \iint_{\partial\Gamma} dS \{ \psi(\vec{x}, t) \varphi_{,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_k - \varphi(\vec{x}, t) \psi_{,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \} \\ \psi, \varphi \in L^2(R_k) ; \varphi_{,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} &= q \Big|_{\partial\Gamma} ; \psi_{,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = \bar{q} \Big|_{\partial\Gamma} \\ q \in L^2(\partial\Gamma) ; \bar{q} \in L^2(\partial\Gamma) \end{aligned}$$

- Tercer teorema de Green para campos vectoriales:

$$\begin{aligned} \iiint_{V_K} dV \{ u_j(\vec{x}, t) v_{j,kk}(\vec{x}, t) - v_j(\vec{x}, t) u_{j,kk}(\vec{x}, t) \} &= \\ &= \iint_{\partial\Gamma} dS \{ u_j(\vec{x}, t) v_{k,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_j - u_j(\vec{x}, t) \varepsilon_{jkl}(\varepsilon_{lmn} v_{m,n}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k - \\ &\quad - v_j(\vec{x}, t) u_{k,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_j + v_j(\vec{x}, t) \varepsilon_{jkl}(\varepsilon_{lmn} u_{m,n}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \} \\ (\hat{n}_k v_{j,k}(\vec{x}, t) - v_{k,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_j + \varepsilon_{jkl}(\varepsilon_{lmn} v_{m,n}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} &= q_j \Big|_{\partial\Gamma} \\ (\hat{n}_k u_{j,k}(\vec{x}, t) - u_{k,k}(\vec{x}, t) \hat{n}_j + \varepsilon_{jkl}(\varepsilon_{lmn} u_{m,n}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} &= \bar{q}_j \Big|_{\partial\Gamma} \\ u_j, v_j \in (L^2(R_k))^3 ; q_j \in (L^2(\partial\Gamma))^2 ; \bar{q}_j \in (L^2(\partial\Gamma))^2 \end{aligned}$$

- Cuarto teorema de Green para campos tensoriales

$$\begin{aligned} \iiint_{V_K} dV \{ \epsilon_{ik}(\vec{x}, t) \sigma_{kj,j}(\vec{x}, t) - \sigma_{ik}(\vec{x}, t) \epsilon_{kj,j}(\vec{x}, t) \} = \\ = \iint_{\partial\Gamma} dS \{ \epsilon_{ik}(\vec{x}, t) \sigma_{kj}(\vec{x}, t) \hat{n}_j - \sigma_{ik}(\vec{x}, t) \epsilon_{kj} \hat{n}_j \} \\ \sigma_{kj}, \epsilon_{kj} \in (L^2(R_k))^{3 \times 3} ; \sigma_{kj}(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma} = q_k \Big|_{\partial\Gamma} \\ \sigma_{kj}(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma} = \bar{q}_k \Big|_{\partial\Gamma} ; q_j \in (L^2(\partial\Gamma))^2 ; \bar{q}_j \in (L^2(\partial\Gamma))^2 \end{aligned}$$

- $\sigma_{jk,k}$: Divergencia de un tensor de segundo orden
- $\sigma_{jk,k}(\vec{x}, t) = f_j(\vec{x}, t)$: Definición de fuerza volumétrica
- $\sigma_{jk,k} : \dot{\epsilon}_{kj} = g$ Definición de producto contracto de dos tensores
- $\partial_t u_j(\vec{x}, t) ; \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)$: Campos de velocidades y aceleraciones respectivamente
- $u_{i,j}(\vec{x}, t)$: Gradiente del campo de desplazamiento
- Tensor espacial de deformación, de Almansi

$$e_{ij}(\vec{x}, t) = (1/2)(u_{i,j}(\vec{x}, t) + u_{j,i}(\vec{x}, t) - u_{n,i}(\vec{x}, t) \cdot u_{n,j}(\vec{x}, t))$$

- \dot{e}_{ij} : Tasa del tensor espacial de deformación
- $\Omega = (1/2)(u_{i,j}(\vec{x}, t) - u_{j,i}(\vec{x}, t)) \ll 1$: Tensor de rotación
- Tensores de gradiente de velocidad y tensor de velocidad de deformación respectivamente

$$\begin{aligned} l_{ij} &= v_{i,j}(\vec{x}, t) \\ d_{ij} &= (1/2)(l_{ij}(\vec{x}, t) + l_{ij}^T(\vec{x}, t)) = (1/2)(v_{i,j}(\vec{x}, t) + v_{j,i}(\vec{x}, t)) \end{aligned}$$

- $\epsilon_{ij}(\vec{x}, t)$: Tensor de deformación infinitesimal o de pequeñas deformaciones, cuando $e_{ij}(\vec{x}, t) = \epsilon_{ij}(\vec{x}, t)$
- $E_{AB} = C_{AB}$: Tensor material de deformación de Green Lagrange
- K_{AB}, K_{jk} : Tensores energía-impulso de Eshelby en la configuración no deformada y deformada respectivamente
- W : Energía elástica $J = \det\{F_{jA}\} > 0$: Jacobiano $J = \det\{F_{jA}\} = 1$ Transformación isocora ; φ : Campo de vacíos (Voids)
- $F_{iA} = x_{i,A} ; F_{iA}^{-T} = (x_{i,A})^T ; F_{iA}^{-1} = X_{A,i}$: Tensor gradiente de deformaciones, su traspuesto, y su inverso
- $K_{AB} = W \delta_{AB} - F_{Ai} P_{iB}$: Tensor de Eshelby en la configuración no deformada en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff. $K_{AB} = W \delta_{AB} - J F_{Ai} \sigma_{ij} F_{jB}^{-T}$ (Han y Atluri, 2014)
- Fórmula de Nanson, definiciones del primer y segundo tensor de Piola Kirchhoff

$$\hat{n}_j da = J F_{jA}^{-T} \hat{N}_A dA ; P_{jA} = J F_{jA}^{-T} = F_{jA} S_{AK}$$

S_{AK} : Segundo Tensor de Piola Kirchhoff

- $\epsilon_{ij}^*, \epsilon_{iA}^*$: Tensor de deformaciones residuales en la configuración deformada y en la representación mixta respectivamente
- R_{iK} : Tensor mixto de rotación T_{AB} : Tensor de Biot, M_{AB} : Tensor de Mandel
- P_{iK} : Primer tensor de Piola-Kirchhoff S_{AB} : Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff U_{AB} : Tensor derecho de estiramiento

$$C_{AB} = F_{Ai}^T \cdot F_{iB} = U_{AB}^2 ; F_{iB} = R_{iK} \cdot U_{KB} ; R_{iK}^T = R_{Ki}^{-1} ; T_{AB} = R_{Ai}^T \cdot P_{iB}$$

El tensor de Biot se escribe en función del primer Piola Kirchhoff

- Relaciones entre el tensor de Cauchy y los tensores de Piola Kirchhoff, Biot y Mandel

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= J^{-1} P_{iK} F_{Kj}^T ; \sigma_{ij} = J^{-1} F_{iK} S_{KA} F_{Aj}^T ; \sigma_{ij} = J^{-1} R_{iK} T_{KA} F_{Aj}^T \\ \sigma_{ij} &= J^{-1} F_{iA}^{-T} M_{KA} F_{Aj}^T ; S_{KA} = J F_{Ki}^{-T} \sigma_{ij} F_{jA}^T ; P_{iK} = J \sigma_{ij} F_{jK}^{-T} \end{aligned}$$

- M_{AB}^a, M_{AB}^w : Matrices de anisotropía de acoplamiento del poro de aire y agua respectivamente en la configuración deformada, con el campo de deformaciones
- $C_{ijkl}^e, C_{ijkl}^v, S_{ijkl}^{Es} \in V^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$: Tensor elástico, viscoelástico, y tensor de Eshelby de cuarto orden asociado a inclusiones, respectivamente
- $\sigma_{ij}^e, \dot{\sigma}_{ij}^v, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}$ Tensor de tensiones elástico, tensor de tensiones visco-elástico, tensor de deformaciones elásticas y viscoelásticas respectivamente
- $\sigma_{ij}^e = C_{ijkl}^e \epsilon_{kl} ; \dot{\sigma}_{ij}^v = C_{ijkl}^v \dot{\epsilon}_{kl}$: Definiciones de los tensores de tensiones elástico y viscoelástico en función de las respectivas deformaciones infinitesimales
- Ecuación de ondas elásticas

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}, t)$$

- Ecuación de ondas viscoelásticas

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}, t)$$

- Ecuación de ondas viscoelásticas con pre-stressed en la representación de Biot-Bazant

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) + (\sigma_{ik}^0 u_{k,j})_{,j} = \rho f_j(\vec{x}, t)$$

- $\sigma_{jk}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma} = t_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma} ; t_j \in (L^2(\partial \Gamma))$: Teorema de Cauchy t_j : tensiones superficiales
- $\partial M = \partial \Gamma_1 \cup \partial \Gamma_2 \cup \dots \cup \partial \Gamma_n$: Superficies limitadoras asociadas a un volumen de control
- $w(\sigma_{ij}(\vec{x}, t) \epsilon_{ij}(\vec{x}, t), \epsilon_{ij,k}(\vec{x}, t), \dots)$: Densidad de energía de deformación de Mindlin, en función de gradientes del tensor de tensiones de Cauchy y del campo de deformaciones infinitesimales
- $f_i = -S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl,j}^*$: Definición de fuerza configuracional en la configuración deformada.

- $b_i^{inh} = -S_{jAkB}^{Es} \epsilon_{kB,A}^*$: Definición de fuerza inhomogénea en la configuración mixta (Han y Atluri, 2014).
- $S_{jklm}^{Es} = J^{-1}(F_{jA} K_{AB} F_{Bk}^{-1})(\epsilon_{lm}^*)^{-1} - J^{-1}(F_{jA}(W \delta_{AB}) F_{Bk}^{-1})(\epsilon_{lm}^*)^{-1}$: Relación entre el tensor de cuarto orden de Eshelby-Mura y el tensor de segundo orden de Eshelby en la configuración no deformada. Haciendo $(\epsilon_{lm}^*)^{-1} \rightarrow (u_{l,m})^{-1}$
- $C_{jklm}^{Es} = J^{-1}(F_{jA} K_{AB} F_{Bk}^{-1})(u_{l,m})^{-1} - J^{-1}(F_{jA}(W \delta_{AB}) F_{Bk}^{-1})(u_{l,m})^{-1}$: Relación entre el tensor elástico de cuarto orden y el tensor de Segundo orden de Eshelby, en la configuración no deformada
- $\sigma_{jk} = C_{jklm}^e u_{l,m} = J^{-1}(F_{jA} K_{AB} F_{Bk}^{-1}) - J^{-1}(F_{jA}(W \delta_{AB}) F_{Bk}^{-1})$: Relación entre el tensor de Cauchy y el tensor de Eshelby de segundo orden en la configuración no deformada.
- $f_j = \sigma_{jk,k} = (J^{-1}(F_{jA} K_{AB} F_{Bk}^{-1}))_{,k} - (J^{-1}(F_{jA}(W \delta_{AB}) F_{Bk}^{-1}))_{,k}$: Fuerza configuracional.
- Ecuacion de ondas elásticas en la representación lagrangiana. Formulación Mixta

$$\rho_0 \partial_t^2 x_j(\vec{X}(\vec{x}, t), t) - (P_{jA}(\vec{X}(\vec{x}, t), t))_{,A} = -S_{jAkB}^{Es} \epsilon_{kB,A}^*(\vec{X}(\vec{x}, t), t)$$

S_{jAkB}^{Es} : Tensor de Eshelby de cuarto orden mixto.

Es posible reescribir la expresión anterior en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_0 \partial_t^2 x_j(X_j, t) - (J \sigma_{ij} F_{jA}^{-T})_{,A} &= -b_j^{inh}(X_j, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_0 \partial_t^2 x_j(X_j, t) - (W \delta_{ik} F_{kA}^{-1})_{,A} + (K_{ik} F_{kA}^{-1})_{,A} &= -b_j^{inh}(X_j, t) \end{aligned}$$

- Ecuacion de ondas elásticas en la representación lagrangiana o material en la configuración no deformada (Gurtin, 1995)

$$\partial_t^2 X_A(\vec{x}, t) - (S_{AB}(\vec{x}, t))_{,B} = -b_A(\vec{x}, t)$$

b_A : Fuerza debida a las inhomogeneidades

- $k_{ij}(\vec{x}, t) = (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ Operador de segundo gradiente de Mindlin-Aifantis (Polizzotto, 2013)
- $k_{ij}(\vec{x}, t) = (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2 + l_M^4 \hat{\nabla}^4) \sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ Operador de cuarto gradiente de Mindlin-Aifantis, (Polizzotto, 2014)
- $k_{ij,j}(\vec{x}, t) = (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \sigma_{ij,j}(\vec{x}, t) = -S_{ijkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t)$: Definición de fuerza configuracional o micromecánica en la formulación de segundo gradiente
- Definición de la ecuación de propagación de ondas elásticas en la formulación de segundo gradiente con fuerzas configuracionales

$$(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \sigma_{ij,j}(\vec{x}, t) = -S_{ijkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t)$$

- Definición de la ecuación de Navier-Lame en la formulación de segundo gradiente con fuerzas configuracionales (Wang y Wang, 2019)

$$\begin{aligned} (1 - b_M^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mu (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 u_j(\vec{x}, t) - \\ - (\mu + \lambda) (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}(\hat{\nabla} u_j(\vec{x}, t)) = -S_{ijkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

- Definición de la ecuación de Navier-Lame viscoelásticas en la formulación de segundo gradiente con fuerzas configuracionales

$$(1 - b_M^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mu(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 u_j(\vec{x}, t) - (\mu + \lambda)(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}(\hat{\nabla} u_j(\vec{x}, t)) - \bar{\mu}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 \dot{u}_j(\vec{x}, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda})(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}(\hat{\nabla} \dot{u}_j(\vec{x}, t)) = -S_{ijkl}^{Es}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t)$$

- $l_M^2, b_M^2, l_A^2, l_w^2$: Longitudes características micrométricas para los campos de desplazamiento y las porosidades.
- $\alpha_1, \alpha_2 \in R_0^+$: Coeficientes de Biot. $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$: Coeficientes de acoplamiento poro-mecánicos
- $\theta_a, \theta_w, \bar{\theta}_a, \bar{\theta}_w \in R_0^+$: Coeficientes de porosidad relativa, $\mu, \lambda, \bar{\mu}, \bar{\lambda} \in R_0^+$ Coeficientes elásticos de Lamé y viscoelásticos respectivamente
- u_j, p_a, p_w : Campo de desplazamientos, distribución de presiones de poro de agua y de aire respectivamente.
- $M_{ij}^a, M_{ij}^w, J_k^a, J_k^w$: Tensores anisotrópicos de poro de agua y de aire que acoplan el campo de porosidades y el campo poro-viscoelástico, Campos vectoriales del flujo de aire y de agua respectivamente.
- K_{ij}^a, K_{ij}^w : Tensores anisotrópicos de poro de agua y aire respectivamente.
- $\tilde{K}_{ij}^a, \tilde{K}_{ij}^w$: Tensores viscosos de poro de agua y aire respectivamente.
- Funciones de Green asociadas al campo de desplazamiento y a los campos de porosidades $g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$; $g_a(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$; $g_w(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$
- Función de Green para el operador elastodinámico en el caso de un medio no acotado

$$g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{t - t'}{4\pi r^2} \left\{ \left(\frac{3r_i r_k}{r^3} - \frac{\delta_{ik}}{r} \right) \left[h\left(t - t' - \frac{r}{c_d}\right) - h\left(t - t' - \frac{r}{c_s}\right) \right] \right\} + \frac{r_i r_k}{r^2} \left[\frac{1}{c_d} \delta\left(t - t' - \frac{r}{c_d}\right) - \frac{1}{c_s} \delta\left(t - t' - \frac{r}{c_s}\right) \right] + \frac{\delta_{ik}}{c_s} \delta\left(t - t' - \frac{r}{c_s}\right)$$

$$r = \|\vec{x} - \vec{x}'\| = \sqrt{r_i r_i}$$

- Tensor dinámico de cuarto orden de Eshelby-Mura asociado a una inclusión elipsoidal isotrópica

$$S_{mnls}^{Es} = \frac{1}{4\pi s_1 s_2 s_3} \int_{|\xi|=1} dS \frac{a + 2p_\xi}{a \rho p_\xi^3 (b + p_\xi)^2} [\lambda \xi_m \xi_l \delta_{ns} + 2\mu \xi_m \xi_l \xi_n \xi_s] + \frac{\mu}{4\pi s_1 s_2 s_3} \int_{|\xi|=1} dS \frac{b + 2p_\xi}{b \rho p_\xi^3 (b + p_\xi)^2} [(1/2)(\xi_m \xi_s \delta_{ln} + \xi_m \xi_n \delta_{ls} + \xi_l \xi_s \delta_{mn} + \xi_l \xi_n \delta_{ms}) - 2\xi_m \xi_l \xi_n \xi_s]$$

- Definición de deformación residual asociada a inclusiones con simetría elipsoidal (Markens-coff, 2016)

$$\epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) = \epsilon_{lm}^* h(t - s_r^2 x_r^2); \quad h: \text{función de Heavside}$$

CAPÍTULO 1

Introducción

«...Ávido, curioso, casual, sin otra ley que la fruición y la indiferencia inmediata, anduvo por la variada tierra y miró, en una u otra margen del mar, las ciudades de los hombres y sus palacios...»

El Hacedor, Jorge L. Borges

Resumen y objetivos:

En este capítulo se formulan los antecedentes históricos de la micromecánica. Se recorren en apretada síntesis las líneas teóricas más relevantes y se construye un argumento general de fundamentación y justificación de la tesis.

- Formular de manera consistente las motivaciones y los objetivos que persigue este trabajo de tesis.
- Enunciar las principales líneas teóricas asociadas a la micromecánica de medios continuos.

1.1 Antecedentes y Motivación

1.1.1 Aproximaciones históricas de la Micromecánica de Medios Continuos

La Ciencia de Materiales es el área de conocimiento, ligada a las llamadas Ciencias de la Ingeniería, que mayores desarrollos ha experimentado en los últimos 70 años, en particular, el problema de Eshelby (1957), y su recíproco el problema de Hill (1965), generan las bases de una mirada microscópica que, desde entonces, constituye el punto de partida de múltiples tipos de abordaje y de técnicas formales para lo que hoy se define como Micromecánica.

Desde el trabajo fundamental de los Cosserat (Cosserat y Cosserat, 1909) denominado: *Théorie des corps déformables*, precedido por los trabajos: *Sur la théorie de l'élasticité. Premier mémoire* (1896) ; *Sur la statique de la ligne déformable* (1907), *Sur la théorie des corps minces* (1908), hasta los trabajos de A. Madeo y P. Neff, mencionamos: *A unifying perspective: The relaxed linear micromorphic continuum* (2014); *Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps* (2015), la idea predominante es la de definir micro-estructuras dotadas de ciertas propiedades geométrico-termodinámicas, asociadas a la cristalografía del material, introduciendo nuevos grados de libertad, hasta aquí el enfoque sigue siendo eminentemente newtoniano y determinista.

Salvatore Torquatto, en cambio en su texto de 2002, *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*, describe una mecánica estadística de sólidos micro estructurados, utilizando el concepto de homogeneización descrito por Tartar (2009); Jikov, Kozlov y Oleinik (1994); Oleinik, Shamaev y Yosifian (1992), asume además, la validez de la analogía, que

puede establecerse entre un sólido viscoelástico y un fluido viscoso, en este caso, las microestructuras definidas en un volumen elemental representativo (REV) tienen distribución aleatoria que sigue la dinámica impuesta por la ecuación de Boltzmann. S. Nemat-Nasser (1993; 2003), y colaboradores aportan sustanciales pruebas respecto del punto de vista de Torquatto, V. Buryachenko por su parte, en su texto de 2007, *Micromechanics of Heterogeneous Materials*, también aporta pruebas y desarrolla aún más la teoría de Torquatto, introduciendo cierto tipo de promedio, que incorpora naturalmente la heterogeneidad, que, en el caso del primer autor mencionado en este párrafo, esta surge como consecuencia del proceso de homogenización.

Las teorías de elasticidad asociadas a materiales denominados complejos, que luego describiremos detalladamente, se fundan, a saber, en el concepto de campo, en el aumento de grados de libertad del medio descrito por dichos campos, en el cumplimiento riguroso del segundo principio de la termodinámica, y en la asunción, y en esto radica la novedad, de la existencia de ciertas longitudes características, a través de las cuales identificamos escalas de profundidad en la descripción del fenómeno que nos ocupe, surgen así, las escalas micro y nano-mecánicas aunque más recientemente, se agrega una escala cuasi clásica, introducida a partir del concepto de gas de “fractones”, surgido de la cuantificación del campo elástico clásico $u_i(x, y, z, t)$.

Aún queda por clasificar la perspectiva de Aifantis (2016), respecto de la existencia de una “Chemoelasticity”, o Químio-elasticidad en la cual aparecen como variables de campo, ciertos potenciales químicos que explicarían la existencia de cambios de fase, los cuales a su vez estarían asociados a cambios en la estructura geométrica del material, justificando así la presencia de fuerzas configuracionales, de manera que, el proceso de geometrización iniciado por J. Eshelby, G. Maugin, M. Gurtin, queda explicado, ahora, en términos, de micro-transiciones de fase, de origen fisicoquímico, lo cual a escala macroscópica aparecen en la forma de fuerzas asociadas a la geometría del sistema, así entonces esta perspectiva estaría ubicada en una zona de transición entre la micro y nano-mecánica, introduciéndose ciertos factores de origen no clásico que están vinculadas a correcciones de alto orden tipo meca-cuánticas.

Los aspectos meso y micromecánicos vinculados a las propiedades y aplicaciones de materiales complejos, tanto orgánicos (biomecánica de tejidos, modelado de tumores avasculares, etc.) como inorgánicos, materiales compuestos, metamateriales, etc., han resignificado varias líneas de formulación teórica, proveyendo al mundo de la Ingeniería de una herramienta de diseño y cálculo fundamentales como lo es la Mecánica de Medios Continuos, definida ahora como Micromecánica de Medios Continuos (MMC) de tipo inhomogéneo y/o configuracional, de tipo Micromórfico, o de tipo Riemanniano.

Estas versiones no son meras reescrituras de la MMC clásica, sino que, partiendo de primeros principios establecidos en términos newtonianos y compartidos por la comunidad de expertos, establece nuevas representaciones de las expresiones de conservación balance, definiendo así una mecánica Eshelbiana, esta situación y la no linealidad de las ecuaciones de movimiento, conducen a un conjunto de ecuaciones de gobierno, que plantean problemas formales particulares, es decir definen una nueva episteme matemática y física, que intenta describir las propiedades micromecánicas de materiales inhomogéneos y en general heterogéneos.

En particular, las definiciones que reformulan la poro-elasticidad en términos configuracionales constituyen lo que se podría definir como micro-poro-elasticidad, impacta directamente en el sistema de Biot, el cual, como se sabe, constituye el andamiaje teórico más utilizado, para describir y explicar fenómenos como el de la consolidación de suelos saturados o parcialmente saturados, asumiendo la naturaleza porosa de los suelos, lo cual se logra identificando coeficientes poroelás-

ticos, los cuales sustituyen a los conocidos coeficientes de Lamé.

Una cuestión central en este trabajo está motivada por las posibles modificaciones a los resultados de la poro-elastodinámica clásica, que debieran surgir, cuando el sistema de Biot es escrito en la configuración deformada y las fuerzas configuracionales, que habitualmente se hallan referidas en la configuración no deformada o material, también se expresan en la configuración deformada, discutiendo en este punto una micro-poro-elastodinámica asociada a un medio poroso. Se asume que, la inhomogeneidad de un material según Mura (1987), surge cuando se implanta un medio elástico en otro distinto, mientras que una inclusión es un tipo de defecto de naturaleza geométrica que surge sin participación de otro material.

Se impone en este punto, analizar en detalle la estrategia experimental asociada al problema de Eshelby y sus implicancias poro-elásticas. Eshelby (1957) genera lo que se denomina un experimento “pensado”, a efectos de caracterizar un nuevo tipo de fuerza, que posteriormente será llamada configuracional (Eringen, 1968; Gurtin, 1981; Maugin, 1978; Selvadurai y Sepehr, 1999).

Esta fuerza se origina cuando se extrae una porción de la matriz del material considerado y se sustituye por una inclusión del mismo material o de otro, de manera que, lo que se ha hecho en realidad desde un punto de vista micromecánico, es alterar la distribución de dislocaciones, defectos u otros aspectos constitutivos del material cristalino, con lo cual finalmente modificamos su geometría y en consecuencia la energía interna asociada. Esta perspectiva da origen a nuevas teorías micromecánicas, por ejemplo: la teoría geométrica de defectos (fundada sobre la existencia de fuerzas de Peach-Koehler), la teoría micromórfica (generalización de la teoría de elasticidad micropolar de Cosserat, (Kumar y Singh, 1996)), la teoría de elasticidad de dislocaciones (Lazar y Agiasofitou, 2014), entre otras.

En cualquier caso, la idea fundamental consiste en describir las propiedades mecánicas de los materiales, asumiendo una relación geométrico-energética como la causa de las respuestas de los mismos ante acciones externas que pueden medirse a escala macroscópica y se denominan propiedades efectivas. Desde el punto de vista de Gurtin (2000), la aparición de fuerzas configuracionales es la manifestación de una transición de fase que ocurre desde la configuración no deformada a la deformada y, dicho proceso se verifica, disipando potencia configuracional, la cual podría escribirse en función de estos objetos geométricos.

Eshelby construye una teoría de campo, esencialmente destinada a explicar el fenómeno de dinámica de fractura (Eshelby, 1951, 1956), asumiendo que las transformaciones micromecánicas producen la aparición de un campo medio de tensiones y deformaciones, en general no lineal, el cual puede describirse de forma geométrica a través de un tensor denominado de energía-impulso (energía-momento).

De esta manera, a partir de la propuesta de Eshelby, la perturbación o inclusión microscópica puede ser geometrizada, manifestándose esta nueva situación, en función de un nuevo tipo de fuerza llamada configuracional. En este sentido, la presencia de la inclusión, obtenida, según el experimento pensado de Eshelby, ocasionará siempre una inhomogeneidad material localizada, lo cual producirá un cambio en la geometría micromecánica y en su energía asociada.

La afirmación precedente tiene diversas implicaciones, en relación con el planteo de las ecuaciones de conservación de la elasticidad clásica, las cuales se deberán expresar ahora, en forma lagrangiana (Maugin, 1980), es decir en la representación no deformada, de modo que, el primer tensor de Piola Kirchhoff, sustituye al de Cauchy, y el segundo tensor de Piola-Kirchhoff aparece asociado a efectos viscosos en la representación no deformada.

En formulaciones matemáticamente más generales, se escriben las expresiones de la teoría de la elasticidad en espacios curvos (que se asimilan a los de tipo configuracional), es decir en términos del tensor de curvatura de Riemann, asociándose al tensor de torsión la presencia de las inclusiones, o de los defectos en general. La justificación de la introducción de un espacio curvo está vinculada a la idea de geometrización de la inhomogeneidad, esta percepción teórica, elude la idea del acoplamiento micro-macro en términos de mecanismos de homogeneización, porque supone que el efecto de la inhomogeneidad o inclusión, es global, aunque su presencia sea micromecánica. (Roychowdhury y Gupta, 2013, 2017; Yasutomi, 2007; Kupferman et al., 2017; Grubic et al., 2013).

1.1.2 Motivaciones preliminares

En el abordaje de la presente tesis se establece como primera decisión, la definición de manera precisa de los vínculos entre micromecánica y fuerzas configuracionales, sin utilizar procedimientos de homogeneización, estableciendo, previo análisis sintético de algunas líneas teóricas existentes, el modelado elastodinámico, de manera que las formulaciones serán evolucionarias o a lo sumo tasa independiente. En este punto, es necesario decir que los modelos propuestos serán escritos en términos de sistemas de operadores hiperbólico-parabólicos, a los cuales suponemos acotados, compactos y convexos, y por eso mismo uniformemente continuos en espacios de Sobolev. Se formularán rigurosamente los problemas de Cauchy y de frontera, para luego, en algunos casos presentar sintéticamente técnicas destinadas a probar existencia y unicidad de las soluciones.

Si bien, no existe una definición rígida y aceptada universalmente para definir lo que ya podríamos denominar *Mecánica de Medios Continuos Mesoscópica*, si podrían darse ciertas cotas típicas asociadas a estos sistemas, diríamos que están situados normalmente en el rango de 100 nanómetros (el tamaño de un virus típico) a 1000 nanómetros = $1\mu\text{m}$ (el tamaño de una bacteria típica), 500 micrómetros (μm) es el límite superior aproximado para una microestructura. (Krajcinovic, 1996; Nemat-Nasser y Hori, 1993; Eshelby, 1957)

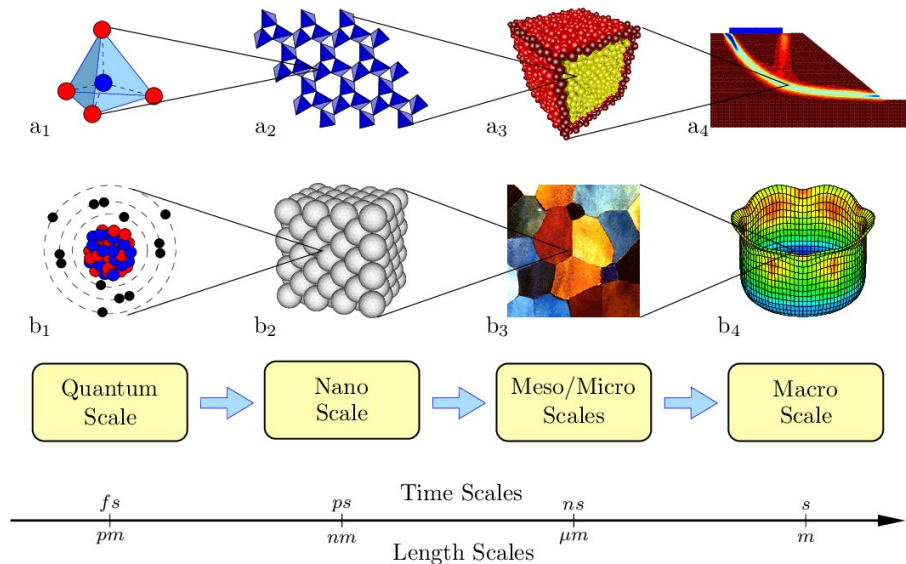


Figura 1.1: Escalas que atraviesan la formulación micromecánica según sean espaciales y temporales (Dettmar, PhD. Thesis, Universitat Stuttgart, 2006)

En la figura siguiente se observa un medio poroso de naturaleza micromecánica. Se trata de una estructura ósea, anisótropa y heterogénea, indicándose en ella las diferentes escalas que componen dicho medio.

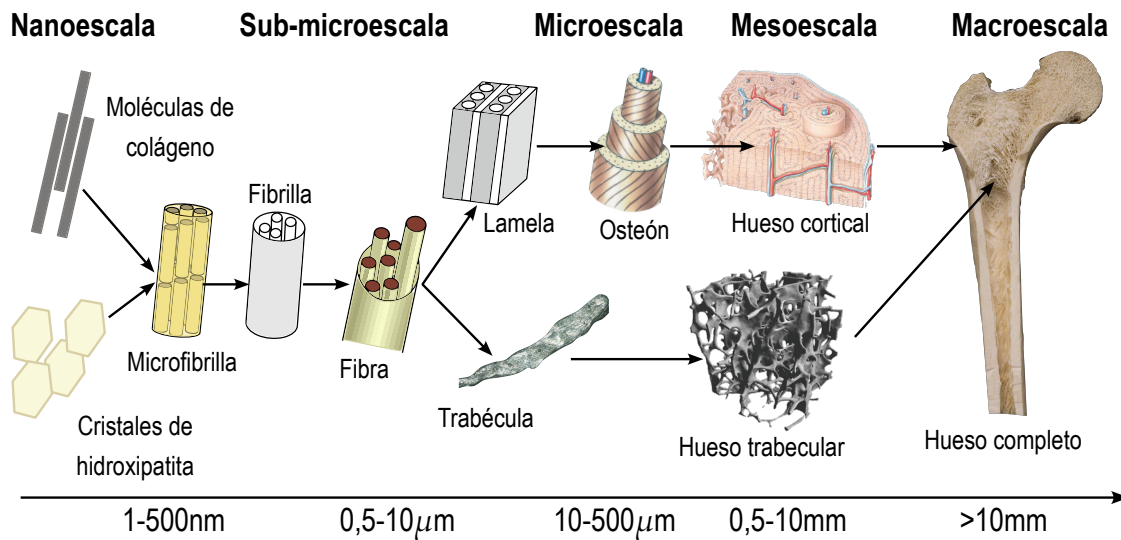


Figura 1.2: Medio poroso de naturaleza micromecánica representativa del denominado *hueso trabecular*. (L. Colabella, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Mar del Plata, 2018).

Otra cota inferior que limita los intereses de la micromecánica podría ser la siguiente: se asume que, a escala micrométrica, con las herramientas formales que provee el análisis funcional clásico, no se consideran efectos de naturaleza mecano-cuántica. De este modo podríamos definir a la micromecánica del medio continuo, como el conjunto de teorías de campo que, describe, mide, modeliza y explica fenómenos multifísicos, que ocurren a escala micrométrica, y que, por distintas vías, puede verificarse su existencia a escala macroscópica.

Es importante señalar tres aspectos de la Micromecánica de Medios Continuos, que son de la mayor importancia:

- Nace como consecuencia de intentar explicar fenómenos de fractura dinámica y de establecer relaciones entre la escala micro-macro en materiales de la más variada naturaleza. (Eshelby, 1957)
- Pretende vincular la microestructura de los materiales (dislocaciones, disclinaciones, defectos en general) a través de una teoría de campo, con propiedades macroscópicas observables, muchas de las cuales son conocidas desde hace mucho tiempo (elasto-plasticidad, daño dúctil y frágil, entre otros) (Lazar y Agiasofitou, 2014)
- Tiene intereses de diseño alrededor de nuevos materiales, con propiedades micromecánicas preestablecidas (materiales inteligentes, meta-materiales, micro vigas, y micro placas), materiales con memoria de forma.

Establecidos estos aspectos, se impone la discusión acerca de cómo conocemos un medio, que, desde ahora, llamaremos micro-estructurado o con microestructuras, debido a que contiene sub-estructuras, que sostienen la forma y propiedades detectables del material, macroscópicamente, estas son de orden micrométrico distribuidas al azar o periódicamente. Hay, desde esta perspectiva por lo menos diez grandes grupos teóricos, de algunos de los cuales nos ocuparemos en

esta tesis

- **Teoría Geométrica de Eshelby-Mura-Maugin**, consiste en la descripción de propiedades micromecánicas utilizando el concepto de fuerza configuracional, la que puede asociarse a un proceso de transición de fase de tipo: no deformado-deformado, (Problema de Eshelby), definición de pseudo-momentum según Maugin (1988). Solido inhomogéneo y anisótropo (Nemat-Nasser y Hori, 1993). Otros contribuyentes destacados M. Gurtin, G. Maugin, M. Epstein, P. Steinmann; S. Nemat-Nasser, Shaofan Li, Z. Hashin, S. Shtrikman.
- **Teoría de Mindlin-Aifantis**: se introducen gradientes de deformación de alto orden asociados a ciertas longitudes características vinculadas a la presencia de microestructuras (Mindlin, 1964; Mindlin y Eshel, 1968; Aifantis, 1978, 1992). Otros contribuyentes Askas y Aifantis (2006); De Domenico y Askas (2016a), Polizzotto (2012, 2013, 2014), Tsinoopoulos et al. (2012). Esta es la primera teoría de elasticidad no local, que luego será generalizada por C. Eringen.
- **Teoría de E. Kröner**: (*Elasticity theory of materials with long range cohesive forces*, 1967) Este autor propone, una modificación sustantiva del punto de vista de Mindlin-Aifantis, introduciendo en la ecuación constitutiva del material de que se trate, un término vinculado a las llamadas fuerzas cohesivas de largo alcance. La ecuación elastodinámica asociada, es un operador integrodiferencial, en general, fuertemente no lineal. La teoría de Kröner ha sido utilizada exitosamente en la formulación de medios porosos, cuando en ellos actúan fuerzas de cohesión, las cuales quedan representadas por potenciales de tipo Lennard-Jones. Los suelos expansivos en poroelasticidad admiten una ecuación constitutiva conteniendo un término integral de tipo Lennard-Jones (Wang y Wang, 2019).
- **Teoría de pre-stressed de Biot-Bazant**, asume una deformación micromecánica preexistente que se incluye explícitamente en las ecuaciones de la elastodinámica surgen así varias teorías asociadas según la estructura del término de pre-tensión, Trefftz (1933), Biezeno y Hencky (1928), Bazant (1971); Biot (1965): *Mechanics of Incremental Deformations*.
- **Teoría de microestructuras**: Cosserat y Cosserat (1909), Eringen y Şuhubi (1964); Şuhubi y Eringen (1964) introducen los conceptos de micro rotación (solidos micropolares) y micro-dilatación (stretch), el segundo autor construye la mecánica micromórfica de solidos homogéneos anisótropos, y la elasticidad no local (Micro-continuum Fields Theories, Non local Field Theory), otros contribuyentes a la teoría: Ieşan (1983, 1985, 2012), Pamplona et al. (2012), Chiriță et al. (2015), Ciarletta et al. (2012).
- **Teoría de Metamateriales de P. Neff, y A. Madeo**: introducen un campo tensorial de micro-distorsión P_{ij} , que integra micro-polaridad y stretch, generalización de cuerpo micromórfico, otros contribuyentes Lazar et al. (2005); Lazar y Agiasofitou (2014), generalizaciones no locales para deformaciones finitas
- **Teorías de homogenización y de múltiples escalas**. Medios heterogéneos. Definición de RVE, y luego técnicas de promediación definidas sobre las ecuaciones de evolución. Principales desarrolladores: Tartar (2009), Sanchez-Palencia (1980), Lions (1988), de Souza Neto et al. (2015); Blanco et al. (2016); Suquet (1997); Pavliotis y Stuart (2007).
- **Teoría peridinámica**: Operadores no locales pseudo-evolucionarios de Calderon-Zygmund, (Silling, 2000). Problemas de fractura. Problemas con la determinación e interpretación de las condiciones de borde. Implementación computacional probada en problemas aplicados

- **Teoría de Mielke-Roubicek** (Numerical approaches to rate-independent processes and applications in inelasticity, 2009): Operadores rate-independent acoplados a rate-dependent, micromecánica elastoplástica, asociada al concepto de daño. Operadores sub-diferenciales, inclusiones diferenciales. Se denominan también operadores energéticos de Mielke-Roubicek, se utilizan para abordar problemas de laminación y delaminación, entendiendo estos procesos en el marco de la teoría de materiales con memoria de forma. Otros contribuyentes a esta teoría son: R. Rossi, G. Savaré, E. Bonetti, E. Rocca, M. Thomas.
- **Teoría de promediación de V. Buryachenko** para cuerpos heterogéneos. Define una jerarquía tipo BBGKY, sobre ansambles definidos sobre varios tipos de RVEs simultáneamente, es una especie de generalización de la teoría de Mori-Tanaka. Un intento de establecer una mecánica estadística micromecánica (Buryachenko, 2007).
- **Teoría micromórfica fractal y Lattice models of Micromechanics**. M. Ostoj Starzewski (2002; 2009), introduce la derivada Hausdorff en el laplaciano de Laplace-Beltrami, u otras derivadas topológicas y reformula el problema de la distribución de campos en términos de un problema de optimización fractal.
- **Teoría de Químio-elasticidad** (Intermittent plasticity, Elasticity coupled phase field models) (Aifantis, 2003, 2016). El autor introduce una teoría de segundo gradiente en el nivel nanomecánico, asumiendo la validez de la mecánica del continuo y suponiendo que las fluctuaciones de las dislocaciones y defectos en general, a ese orden, pueden describirse por sistemas de ecuaciones de reacción difusión con correcciones de segundo gradiente, explica de esa manera fenómenos de plasticidad a longitudes del orden del nanómetro. Esta es la primer formulación teórica que integra elastoplasticidad y plasticidad con teorías de cambio de fase o Phase Field Models, se torna fundamental el uso de la teoría de Cahn-Hilliard, Phase Field Theory, y la teoría de Allen-Cahn para describir transiciones de fase. Uno de los objetivos que persigue este corpus teórico es explicar el fenómeno de memoria de forma.
- **Teoría de Fractones** (Distler et al., 2022) **Metamateriales activos (Soft matter). Elasticidad no hermitica**. Scheibner, Souslov, Banerjee, Surówka, Irvine y Vitelli (2020). Este es el primer intento por cuantizar la teoría de la elasticidad, los fractones serían las partículas que surgen como cuantos del campo elástico. Los fractones son partículas emergentes que están inmóviles de forma aislada, pero que pueden moverse juntas en pares dipolares u otros grupos pequeños. Estas excitaciones exóticas ocurren naturalmente en ciertas fases cuánticas de la materia descritas por teorías de gauge tensorial. Claramente la teoría de la elasticidad es un ejemplo de este tipo de objetos, será posible suponer que, los fenómenos de fractura son transiciones de fase cuánticas mediadas por fractones (Pretko et al., 2020).
- **Teoría de Metamateriales definidos sobre micro-lattices de tipo pantógrafo**. dell'Isola y Gavriluk (2012); Stolz et al. (2022). Este es otro intento de fundamentación de la aparición de una forma, que en este caso está asociada a un material diseñado para responder a alguna acción externa modificando su forma, es decir, su geometría, y en consecuencia la energía disponible para concretar dichos cambios.
- **Elasticidad no-local de tipo Klein Gordon** Lazar y Agiasofitou (2022).

Todas las formulaciones teóricas mencionadas precedentemente son teorías de campo elástico efectivo (EFT, por sus siglas en ingles), en este caso microelástico, todas ellas proporcionan modelos macroscópicos homogéneos para medios que en general no lo son, basados en técnicas analítico-computacionales.

La caracterización de un material heterogéneo como un medio efectivo es una herramienta valiosa y versátil para calcular y predecir, en este caso, las propiedades físicas de materiales porosos. Las teorías de medios efectivos usualmente dependen de las propiedades físicas y fracciones volumétricas de cada componente del material, y también de la geometría del arreglo de las mismas.

La fundamental limitación de estos modelos reside en el hecho de que cualquier enfoque que se utilice para obtener los parámetros elásticos macroscópicos de un medio heterogéneo parte de suponer que, la longitud de la onda que se propaga a través del medio es mucho mayor que la dimensión de las heterogeneidades del mismo, lo que se conoce como hipótesis de onda larga. Las referencias necesarias para comprender la génesis de esta idea, en cuanto a la forma de cálculo de parámetros estructurales, reconoce por lo menos tres autores:

- **Voigt (1889)** – El campo de deformación es constante en el material compuesto. Se aplica la regla de mezclas para determinar los componentes de la matriz de rigidez.
- **Reuss (1929)** – El campo de tensión es constante en el material compuesto. Se aplica la regla de mezclas para determinar los componentes de la matriz de flexibilidad.
- **Hashin y Shtrikman (1963)** – Proponen un método variacional que conduce a la obtención del problema Micromecánico en la forma de Eshelby, y una desigualdad variacional conduce a la estimación de cotas superiores e inferiores para las constantes estructurales.

En este marco, descrito previamente, situamos la teoría de la microporo-mecánica, que se desarrolla en el último capítulo de esta tesis, desde la perspectiva del sistema de Biot, el cual modela el comportamiento mecánico de un medio poroso en términos de distribuciones de presiones de poro, y campos de desplazamientos.

Esta teoría puede extenderse fácilmente a medios porosos multifásicos, en los cuales tienen lugar una importante cantidad de fenómenos que permiten clasificarlos, también, como sistemas multifísicos (Mroginiski et al., 2011). Como principal hipótesis, estos modelos basados en la teoría de Biot asumen la existencia de un tensor de tensiones efectivo que acopla las leyes constitutivas (deformaciones materiales), con las leyes de: Darcy, Fick y Fourier, en los casos más generales.

Un fenómeno que será tratado en ese trabajo es el de la dinámica de un medio poroso, no saturado, escribiéndose para ello el sistema de ecuaciones de Biot en la configuración deformada y no deformada respectivamente.

En el referencial de la teoría de *Biot configuracional*, las distribuciones de fuerzas debidas a los gradientes de poro de líquido y gas pueden, eventualmente ser identificadas como las responsables del cambio de geometría en el medio poroso (Selvadurai y Suvorov, 2014, 2016), es decir podrían asimilarse a inclusiones en la matriz sólida, con lo cual se tiene la posibilidad de vincular la teoría de Biot con la formulación de Eshelby-Maugin-Kienzler-Lazar.

En este trabajo, asumimos que las inclusiones están definidas en el esqueleto sólido de acuerdo con la teoría de Eshelby, y los defectos sobre los cuales actúan fuerzas de tipo Peach-Koehler están embebidos en el medio elástico, moviéndose en una serie de planos preestablecidos. El modelo dinámico considera una serie de efectos de interacción entre dislocaciones, tales como las ya mencionadas, fuerzas de Peach-Koehler, generación (fuentes puntuales), aniquilación y obstrucción. Así entonces, se establece una diferencia sustantiva entre el concepto de inclusión y el de defecto, el primero es de carácter no local y tiene relación con la idea inicial de Eshelby, respecto de una redistribución de la energía elástica del sólido por efecto de alguna acción externa, que se

expresa en términos del cambio de geometría del objeto, el segundo es local y esta vinculado con el concepto de daño elastoplástico o plástico, las dinámicas en ambos casos, de nuevo, se escriben utilizando los argumentos clásicos provenientes de las ecuaciones de conservación balance, la diferencia se establece en la naturaleza de las fuerzas intervinientes: en el primer caso son de tipo configuracional, en el sentido de G. Maugin, M. Gurtin etc.; en el segundo caso son fuerzas de tipo Peach Koehler (Markenscoff y Ni, 2016). Es posible establecer una relación entre el tensor de Eshelby-Mura y fuerzas del tipo Peach-Köehler sobre defectos (Lubarda, 2019).

$$f_k^{P-K}(\vec{x}, t) = \varepsilon_{kij} \sigma_{il}(b_l \xi_j) = -\varepsilon_{kij} (S_{ilmn}^{Es} \varepsilon_{nm}^*(\vec{x}, t))(b_l \xi_j)$$

En términos del tensor de Eshelby de segundo orden, en la configuración no deformada escribimos:

$$f_k^{P-K}(\vec{x}, t) = J^{-1} \varepsilon_{kij} ((F_{iA} K_{AB} F_{Bl}^{-1})(b_l \xi_j) - (F_{iA} (W \delta_{AB}) F_{Bl}^{-1})(b_l \xi_i))$$

El trabajo de I. A. Kunin de 1968, establece un grupo de modelos constitutivos con microestructura relacionándolos con la teoría de dislocaciones, también Mura (1963), propone un modelo dinámico continuo de dislocaciones y el fenómeno de plasticidad. Rudnicki (2002, 2011), establece relaciones entre las distribuciones de poro de líquido y gas, con tensiones y deformaciones residuales, al modelar la dinámica de reservorios. Se obtienen a partir de linealizaciones o relajaciones adecuadas, de las ecuaciones de gobierno, representaciones integrales de las soluciones, que luego podrán ser objeto de experimentos numéricos para establecer similitudes y diferencias con las aproximaciones clásicas.

Se establece entonces como objetivo primordial de la presente propuesta, la formulación configuracional de la teoría clásica de Biot y su aplicación a problemas de geomecánica, en la configuración deformada. En esta tesis le damos el nombre de fuerza configuracional indistintamente a aquellas que provienen de problemas de tipo Eshelby, como así también a las que surgen de cinemáticas microestructurales (micro-rotaciones, micro-dilatación, micro-distorsión)

1.1.3 Definición del marco epistemológico de la tesis

Desde un punto de vista epistemológico, la Micromecánica y sus ciencias asociadas (Teoría de Campos, Cristalografía, Cristalofísica, Micro y Nano-electrónica, Nano-fotónica, Ciencias de Computo, Teoría de Optimización, etc.), tiene claros objetivos tecnológicos, podríamos afirmar que se trata de la formulación de un conjunto de dispositivos de análisis y creación de materiales, es decir define un entorno de trabajo (framework), en el que se formula y construye un grupo estandarizado de conceptos, prácticas y criterios para enfocar un tipo de problemática particular que sirve como referencia, para enfrentar y resolver nuevos problemas de índole similar.

Hay un área de vacancia, detectada por el autor, en el sentido de que, los problemas en Ingeniería Civil, se formulan con el específico objetivo de la simulación numérica, es decir se parte de la construcción de la forma débil del problema, e inmediatamente, vía residuos Ponderados de Galerkin u otros medios de construcción del concepto de error, el Método de Elementos Finitos o alguna de sus variantes

Esta tesis está motivada en el sentido de, proveer un conjunto de técnicas matemáticas y numéricas, que permitan tratar con toda generalidad problemas dinámicos en Micromecánica de Materiales para su utilización en Ingeniería Civil, que se ubica antes de la formulación débil, es decir en la concepción clásica o fuerte.

El conjunto de herramientas, o entorno de trabajo, que se desarrolla en esta tesis, destinado al análisis de un problema micro-elastodinámico reconoce las siguientes dimensiones de análisis

- Construcción de la formulación clásica y consecuentemente de sus soluciones clásicas o fuertes, asociadas a problemas de condiciones iniciales y de borde micro-elastodinámicos y micro-poro-elastodinámicos en la configuración deformada y no deformada.
- Obtención de soluciones semi-analíticas en la forma de sistemas de ecuaciones integrales, sujetas, en general, a ciertas condiciones de resolubilidad (Problema de Neumann)
- Aplicación de la teoría de aproximantes de Picard o de Padé, para la construcción de la solución numérica de dichas ecuaciones.
- Introducción de condiciones iniciales no-locales y de un nuevo tipo de Problema de Cauchy para el caso microelastodinámico en la formulación de segundo gradiente

1.2 Objetivos, organización de la tesis y aplicaciones

Se definen para este trabajo de tesis los objetivos siguientes

Objetivo General:

- Definir con la mayor generalidad posible un entorno de trabajo (Framework) formado por un conjunto estandarizado de conceptos, representaciones y criterios, que sirva para abordar problemas micro-elasto-dinámicos, y micro-poro-elastodinámicos, en la concepción clásica o fuerte, que luego nos permita, comprender, construir y resolver situaciones problemáticas de índole similar.

Objetivos específicos

- Establecer, con toda generalidad, dispositivos matemáticos de modelización, asociados a la formulación de problemas de condiciones iniciales y de borde, referidos al fenómeno de propagación de ondas, y difusión, en materiales elásticos y poroelásticos, desde la perspectiva micromecánica, discutiendo el tipo de condiciones utilizado, y sus implicancias en las soluciones clásicas obtenidas
- Definir magnitudes tensoriales en la formulación micromecánica, en la configuración deformada y no deformada, utilizando el concepto de fuerza configuracional, y luego en la representación de segundo gradiente y superiores, según la perspectiva de la teoría de Mindlin-Aifantis, respectivamente
- Discutir la equivalencia de las representaciones de la fuerza configuracional en la representación no deformada y deformada, y por otra parte según la teoría de Mindlin-Aifantis
- Utilizar de manera sistémica los teoremas de representación de Green-Lagrange, teniendo en cuenta el tipo de sistema material de referencia considerado, las escalas implicadas, y las representaciones integrales de las soluciones obtenidas
- Utilizar de manera sistemática el teorema de Picard, aplicado a las soluciones semi-analíticas obtenidas, a efectos de construir aproximaciones numéricas consistentes y fácilmente evaluables, utilizando, para ello, métodos de interpolación conocidos. Es decir que, se obtiene un sistema de ecuaciones integrales acopladas cuasi-lineales, que serán el objeto de análisis analítico-computacional

Organización de la tesis:

Este trabajo está constituido por 6 capítulos, y un apartado último que contiene conclusiones y propuestas detalladas de trabajos futuros.

La propuesta central de esta tesis es, la formulación y análisis riguroso de problemas de condiciones iniciales y de borde, asociados a sistemas de operadores evolucionarios, los cuales describen problemas micro-elastodinámicos y micro-poro-elastodinámicos en la formulación de Mindlin Aifantis, y la consecuente obtención de soluciones analíticas y semi-analíticas suponiendo que los defectos (inclusiones, dislocaciones, disclinaciones, inhomogeneidades) están acoplados a los campos de desplazamientos microelásticos y poro-microelásticos de manera lineal, con constantes de acoplamiento pequeñas lo cual permite construir soluciones perturbativas a todo orden.

En el capítulo uno se expone: antecedentes y motivaciones respecto del título del trabajo y se enumeran las distintas aproximaciones teóricas que, sobre micromecánica existen en la actualidad

En el capítulo dos se formulan el problema elastodinámico y poroelastodinámico este último en la representación (u,p) , se trata de sistemas hiperbólico-parabólicos, respecto de los cuales el problema recurrente es formular rigurosamente el problema de Cauchy y de condiciones de borde, los problemas de existencia y unicidad, como siempre, se resuelven utilizando el teorema de aproximantes de Picard, aunque también, recientemente, se han utilizado aproximantes de Padé.

En general, puede demostrarse, aunque este cálculo no se realiza en este trabajo, que las soluciones son estables según el criterio de Liapunov. Para estos operadores es posible probar desigualdades a priori, de tipo Carleman, por ejemplo, a fin de acotar las soluciones halladas. A efectos de completar de manera rigurosa la formulación del problema de contorno de Neumann, se añade en todos los casos donde esta cuestión es tratada las condiciones de resolubilidad del mismo.

En el capítulo tres, se formula el problema micro-elastodinámico, según el problema de Eshelby, se establece su generalización dinámica definiéndose las condiciones iniciales y de borde correspondientes, luego se construye el sistema dinámico en la configuración no deformada utilizando el segundo y tercer teorema Green-Lagrange, se obtienen las representaciones de las soluciones.

En el capítulo cuatro, se formula el problema micro-poro-elastodinámico, según la teoría de Mindlin Aifantis, definiéndose las condiciones iniciales y de borde correspondientes, luego se construye la representación de las soluciones.

En el capítulo cinco, se formula el problema de condiciones iniciales y de borde de la micromecánica configuracional aplicada al sistema de Biot, en la representación de segundo gradiente, en la configuración deformada, haciendo uso de los teoremas de Green Lagrange, se obtiene las representaciones de las soluciones.

En el capítulo seis, Se consideran problemas de aplicación, uno de los cuales tiene un abordaje computacional.

En el capítulo siete, se abordan las conclusiones, se realizan propuestas de trabajos futuros con detalles respecto de su formulación y posibles formas de soluciones computacionales.

Se incluyen siete apéndices:

- **Apéndice A:** Teoremas de representación de Green-Lagrange
- **Apéndice B:** Consideraciones accesorias sobre el problema de Eshelby y su generalización dinámica.
- **Apéndice C:** Operaciones Push-Forward Y Pull-Back Para Tensores De Segundo Orden. Derivada Temporal De Lie

- **Apéndice D:** Formulación lagrangiana de la elastodinámica
- **Apéndice E:** Teorema de Noether
- **Apéndice F:** Utilización de tensores antisimétricos para la determinación de ecuaciones de evolución
- **Apéndice G:** Código de MATLAB

Aplicaciones:

Las principales áreas de aplicación de las teorías de segundo gradiente podrían agruparse en tres grandes grupos de cuestiones:

- a) Micro-elastodinámica de procesos de micro y nano indentacion, micro-elastodinámica de adhesión y delaminación dúctil, modificaciones a la ley de Darcy y los fenómenos de difusión micro-poro-elastodinámicos, fenómenos de inestabilidad mecánica por plasticidad intermitente en aleaciones de Molibdeno (micropillar compression) y de Aluminio Manganese, inestabilidades químico-mecánicas en ánodos de LiB
- b) Bio-químico-mecánica, Inestabilidades cerebrales inducidas por Glioblastoma, teoría de segundo gradiente aplicada al tejido cerebral con porosidades y vacíos, asumiendo cierto flujo de células del glioma, puede demostrarse estabilidad intermitente, lo cual impacta en las terapéuticas propuestas.
- c) Teorías reológicas de segundo gradiente y superiores aplicadas a fluidos newtonianos, y a fluidos complejos, acoplamiento de las ecuaciones de la elastodinámica de segundo gradiente y generalizaciones de la ecuación de Stokes a efectos de explicar fenómenos de visco-plasticidad en emulsiones poliméricas de alta densidad, es posible estudiar también en este tipo de compuestos inclusiones e inhomogeneidades de manera análoga a como se realiza en un sólido.

CAPÍTULO 2

Formulación general del problema elastodinámico y poroelastodinámico

«...Yo, que tantos hombres he sido, no he sido nunca aquel en cuyo abrazo desfallecía Matilde Urbach...»

Le regret d'Héraclite,
Gaspar Camerarius, en *Deliciae Poetarum Borussiae*, VII, 16

Resumen y objetivos:

Se definen las principales entidades tensoriales de la elasticidad clásica y de la mecánica eshelbiana, se establecen relaciones entre ambas y se formulan los entornos de trabajo destinados al abordaje de problemas elastodinámicos y poroelastodinámicos en las configuraciones deformada y no deformada respectivamente.

- Formular y relacionar campos tensoriales elásticos clásicos y micromecánicos, utilizando para ello los tensores de Eshelby en la configuración deformada y no deformada.
- Formulación exhaustiva del modelo elastodinámico y viscoelastodinámico en la configuración deformada y no deformada.
- Establecer teoremas de unicidad asociados a las soluciones de los modelos previamente definidos.

2.1 Elementos de Elasticidad Clásica. Relaciones entre tensores en la configuración deformada y no deformada

A continuación, se establecen algunas relaciones entre el tensor de tensiones o de Cauchy, y los tensores de Piola Kirchhoff primero y segundo; y los tensores de Biot y Mandel, además también de relaciones que verifica el tensor gradiente de deformaciones, todos estos resultados serán de suma utilidad en el desarrollo posterior de la tesis

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_{iK} &= \mathbf{L}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{jK} / \mathbf{L}_{ij} = \dot{\mathbf{F}}_{iK} \cdot \mathbf{F}_{Kj}^{-1} \quad ; \quad \dot{\mathbf{E}}_{ij} = (1/2)(\dot{\mathbf{F}}_{iK}^T \cdot \mathbf{F}_{Kj} + \mathbf{F}_{iK}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_{Kj}) \\ \dot{\mathbf{e}}_{ij} &= (1/2)((v_{i,j})^T + v_{j,i}) \quad ; \quad \dot{\mathbf{E}}_{ij} = (1/2)\mathbf{F}_{iK}^T \cdot \dot{\mathbf{E}}_{KL} \cdot \mathbf{F}_{Lj}^{-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{ij} \equiv \mathbf{d}_{ij} &= (1/2)(\mathbf{L}_{ij}^T + \mathbf{L}_{ij}) = (1/2)((\dot{\mathbf{F}}_{iK} \mathbf{F}_{Kj}^{-1})^T + \dot{\mathbf{F}}_{iK} \mathbf{F}_{Kj}^{-1}) = \\ &= (1/2)\mathbf{F}_{iK}^{-T} (\dot{\mathbf{F}}_{Kj}^T + \mathbf{F}_{Kl}^T \dot{\mathbf{F}}_{lM} \mathbf{F}_{Mj}^{-1}) = (1/2)\mathbf{F}_{iK}^{-T} \dot{\mathbf{E}}_{KL} \mathbf{F}_{Lj}^{-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se muestra seguidamente la obtención del primer tensor de Piola Kirchhoff, utilizando la definición de energía elástica

$$\begin{aligned}
 W &= (1/2) \int_v (\sigma_{ij} : d_{ij}) dv = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_{ij} : L_{ij}) dv = (1/2) \int_V (J \sigma_{ij} : (\dot{F}_{iK} F_{Kj}^{-1})) dV \\
 &= (1/2) \int_V (J \sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) : \left[(\dot{F}_{pI} \hat{e}_p \hat{E}_I) (F_{Jk}^{-1} \hat{E}_J \hat{e}_k) \right] dV \\
 &= (1/2) \int_V dV J \sigma_{ij} F_{jI} F_{iI}^{-1} = \int_V dV \left[J (F_{Iq}^{-1} \hat{E}_I \hat{e}_q) (\sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) \right] : (\dot{F}_{pJ} \hat{e}_p \hat{E}_J) \\
 &= (1/2) \int_V dV ((J F_{iI}^{-1} \sigma_{ij}) : \dot{F}_{jI}) = (1/2) \int_V dV P_{Ij} : \dot{F}_{jI} \\
 P_{Ij} &= J F_{iI}^{-T} \sigma_{ij} \quad ; \quad P_{jI} = J \sigma_{jk} F_{kI}^T \quad ; \quad J = \det(F_{iK})
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Obtención del Segundo tensor de Piola Kirchhoff

$$\begin{aligned}
 W &= (1/2) \int_v (\sigma_{ij} : d_{ij}) dv = \frac{1}{2} \int_V (J \sigma_{ij} : (F_{jK}^{-T} \dot{E}_{KL} F_{Li}^{-1})) dV \\
 W &= (1/2) \int_V (J \sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) : \left[(F_{Ap}^{-1} \hat{E}_A \hat{e}_p)^T (\dot{E}_{AB} \hat{E}_A \hat{E}_B) (F_{Bq}^{-1} \hat{E}_B \hat{e}_q) \right] dV \\
 W &= (1/2) \int_V (J \sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) : (F_{Ap}^{-1} \hat{e}_p \dot{E}_{AB} F_{Bq}^{-1} \hat{e}_q) = (1/2) \int_V (J \sigma_{ij} : (F_{iA}^{-1} \dot{E}_{AB} F_{Bj}^{-1})) \\
 W &= (1/2) \int_V (J (F_{Ai}^{-1} \hat{E}_A \hat{e}_i) \cdot (\sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j) (F_{Bj}^{-1} \hat{E}_B \hat{e}_j)^T) : \dot{E}_{AB} \hat{E}_A \hat{E}_B dV \\
 W &= (1/2) \int_V dV (J (F_{Ai}^{-1} \sigma_{ij} F_{jB}^{-T}) : \dot{E}_{AB}) = (1/2) \int_V dV S_{AB} : \dot{E}_{BA}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

De modo que, definimos el Segundo tensor de Piola Kirchhoff, tomando el pull-back de σ_{ij}

$$S_{AB} = J F_{Ai}^{-1} \sigma_{ij} F_{jB}^{-T}$$

Otras relaciones que serán importantes en este trabajo son las relaciones entre el tensor de Cauchy y los tensores de Piola Kirchhoff primero y segundo (Ogden, 1997), que se obtienen utilizando transformaciones de Piola y operaciones push-forward respectivamente

$$\sigma_{ij} = J^{-1} P_{iA} \cdot F_{Aj}^T \quad ; \quad \sigma_{ij} = J^{-1} F_{iA} \cdot S_{AB} \cdot F_{Bj}^T \tag{2.5}$$

$$\sigma_{ij} = J^{-1} F_{iA}^{-T} \cdot M_{AB} \cdot F_{Bj}^T \quad ; \quad \sigma_{ij} = J^{-1} R_{iA} \cdot T_{AB} \cdot F_{Bj}^T \tag{2.6}$$

Relaciones entre los tensores de Piola Kirchhoff primero y Segundo y los tensores de tensiones, derecho de Green, Mandel y de Biot (Ogden, 1997; Bonet y Wood, 2008; Han y Atluri, 2014), de nuevo utilizando transformaciones de Piola y operaciones pull-back y push-forward obtenemos

$$P_{iA} = J \sigma_{ij} \cdot F_{jA}^{-T} \quad ; \quad S_{AB} = J F_{Ai}^{-1} \sigma_{ij} F_{jA}^{-T} \tag{2.7}$$

$$T_{AB} = R_{Ai}^T P_{iB} = J R_{Ai}^T \sigma_{ij} \cdot F_{jB}^T \tag{2.8}$$

$$C_{AB} = F_{Aj}^T F_{jB} = U_{AB}^2 \quad ; \quad M_{AB} = C_{AL} S_{LB} \quad ; \quad P_{iA} = F_{iB}^{-T} M_{BA} \tag{2.9}$$

$$J = \det(F_{iB}) \quad ; \quad J^{-1} = \det(F_{iB}^{-1})$$

En la figura siguiente se muestran las relaciones entre configuración deformada y no deformada de los tensores de Piola-Kirchhoff:

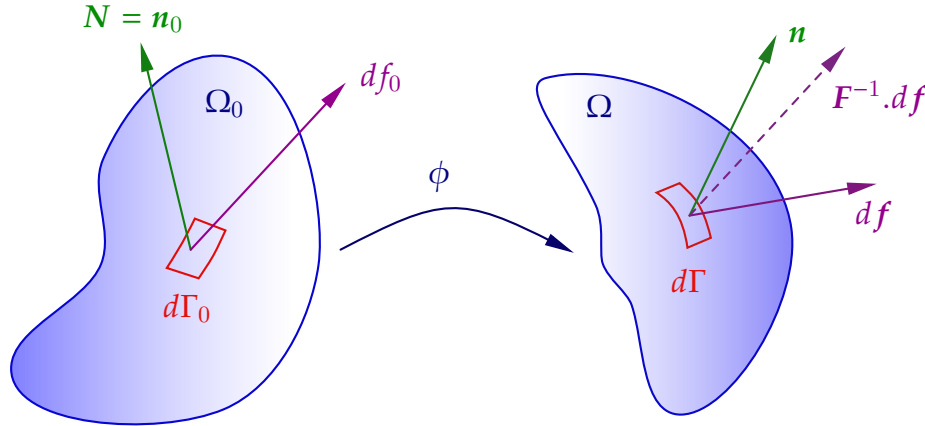


Figura 2.1: Transformaciones de la configuración deformada a la no deformada y su inversa. (Bonet y Wood, 2008)

Relaciones con el tensor elástico

$$\mathbf{P}_{iA} = J(\mathbf{C}_{ijkl}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}) \cdot \mathbf{F}_{jA}^T \quad ; \quad \mathbf{S}_{AB} = J\mathbf{F}_{Ai}^{-1}(\mathbf{C}_{ijkl}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}) \cdot \mathbf{F}_{jB}^{-T} \quad ; \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T}_{AB} = \mathbf{R}_{Ai}^T \mathbf{P}_{iB} = J\mathbf{R}_{Ai}^T(\mathbf{C}_{ijkl}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}) \cdot \mathbf{F}_{jB}^T \quad (2.11)$$

$$\mathbf{C}_{AB} = \mathbf{F}_{Aj}^T \mathbf{F}_{jB} = \mathbf{U}_{AB}^2 \quad ; \quad \mathbf{M}_{AB} = \mathbf{C}_{AL} \mathbf{S}_{LB} \quad (2.12)$$

$$J = \det(\mathbf{F}_{iB}) \quad ; \quad J^{-1} = \det(\mathbf{F}_{iB}^{-1})$$

Una cuestión de relevancia fundamental en los diversos modos de abordaje de la micromecánica lo constituye el referencial utilizado para modelar las diferentes formas de interacción, así entonces en la aproximación de Mindlin-Aifantis, y en general en todas las teorías de segundo gradiente el referencial utilizado es el deformado, mientras que en el caso configuracional, en la formulización de Gurtin-Mauguin, se utiliza la configuración no deformada, estableciéndose así lo que en la literatura técnica se conoce como Mecánica Configuracional o Mecánica Material (Mechanics in Material Space with Applications to Defect and Fracture Mechanics, Kienzler y Herrmann, 2000).

2.2 Elementos de Mecánica Configuracional. Tensores de Eshelby

La teoría de elasticidad clásica construye sus conclusiones respecto de objetos definidos en la llamada configuración deformada. La controversia que intenta resolver la micromecánica, asociada a la cual se hallan un conjunto vasto de microelasticidades o de elasticidades en objetos con microestructuras, es definir un estado anterior no deformado y en consecuencia homogéneo, que estaría asociado a la llamada configuración material o no deformada.

Esta caracterización del sólido está fundada en la idea de que este, no es completamente homogéneo en un sentido general, sino que presenta inhomogeneidades localizadas susceptibles de ser descritas en términos de ciertas estructuras geométricas llamadas genéricamente defectos. Sobre estas estructuras se manifiestan físicamente fuerzas configuracionales, las cuales dependen de la geometría del entorno que contiene al defecto, tal como lo estableciera Eshelby (1951), cuando calcula la fuerza ejercida sobre una singularidad realizando una tracción superficial.

A esta altura del argumento, es importante recordar que la teoría de defectos asociada al concepto de inhomogeneidad estuvo asociada a la explicación del fenómeno de fractura. Mura

(1987) reescribe el problema de Eshelby y construye un tensor de cuarto orden análogo al tensor elástico clásico, pero ahora definido en el interior de la inclusión, objeto ya definido por Eshelby. La idea que subyace es que los defectos progresan y finalmente definen una condición general de fractura del sólido, al decir de Maugin “Las fuerzas configuracionales detectan inhomogeneidades”.

La operación definida por Eshelby en su *Gedankenexperiment* se denomina “transplante”, la tesis que prueba Eshelby es que el transplante genera, en el nuevo sólido transplantado, un residuo deformacional que queda asociado a un defecto, de modo que el tensor energía-impulso del cuerpo transplantado contiene la singularidad manifestada por la presencia de fuerzas configuracionales.

Aún hoy, los diversos autores utilizan estos tres tipos de fuerzas, a saber: materiales, de inhomogeneidad y configuracionales como sinónimas, pero distan mucho de serlo. Por ejemplo, las fuerzas materiales y también las de inhomogeneidad están definidas únicamente en la configuración no deformada, y estas últimas asociadas al total de fuerzas configuracionales que actúa sobre y entre los defectos, las fuerzas materiales están asociadas a la geometría de la variedad donde se define el problema elástico y no necesariamente son fuerzas configuracionales.

Por otra parte, las fuerzas volumétricas definidas en la configuración deformada, con existencia física real, a través de una transformación de Piola-Kirchhoff, quedan expresadas como fuerzas materiales ahora en la configuración no deformada, vinculadas directamente a la divergencia del primer Piola-Kirchhoff, o del segundo Piola-Kirchhoff, mientras que en la representación no deformada la divergencia del tensor de Eshelby nos da la fuerza de inhomogeneidad representativa de todas las acciones configuracionales sobre y entre defectos.

Cabría afirmar entonces que la micromecánica y las microelasticidades asociadas surgen como consecuencia del concepto de inhomogeneidad sostenido este por el tensor de energía-impulso de Eshelby en la configuración no deformada.

En la configuración deformada y cuando se trata de una inclusión, T. Mura prueba la existencia de un tensor de Eshelby de cuarto orden que puede vincularse de manera sencilla con el tensor de segundo orden de Eshelby tal como se estudiará en el Capítulo 3, en relación con el problema microelastodinámico. De todas maneras, adelantamos algunos de estos resultados:

Tensores de Eshelby en la configuración no deformada, y en función de los tensores de Piola-Kirchhoff, primero y segundo (Ogden, 1997; Han y Atluri, 2014) y de los tensores de Cauchy-Green derecho y de Green-Lagrange.

$$K_{AB} = W \delta_{AB} - F_{Ak}^T P_{kB} \quad ; \quad K_{AB} = W \delta_{AB} - F_{Ak}^T (F_{kC} S_{CB})$$

$$K_{AK} = W \delta_{AK} - \left\{ \frac{\partial W}{\partial E_{AK}} \right\} \quad ; \quad K_{AK} = W \delta_{AK} - 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial C_{AK}} \right\}$$

Tensor de Eshelby en la configuración deformada, y en función de los tensores de Piola-Kirchhoff, primero y segundo (Eshelby, 1975; Han y Atluri, 2014)

$$K_{ij} = W \delta_{ij} - \sigma_{ik} u_{k,j} \Rightarrow \sigma_{ik} = (W \delta_{ij} - K_{ij}) u_{j,k}^{-1} \quad (2.13)$$

$$K_{ij} = W \delta_{ij} - (J^{-1} P_{iA} F_{Ak}^T) u_{k,j} \quad ; \quad K_{ij} = W \delta_{ij} - (J^{-1} F_{iA} S_{AB} F_{Bk}^T) u_{k,j} \quad (2.14)$$

$$P_{iA} = J(W \delta_{ij} - K_{ij} u_{j,k}^{-1}) F_{kA}^{-T} \Rightarrow S_{AB} = J F_{Ai}^{-1} (W \delta_{ij} - K_{ij} u_{j,k}^{-1}) F_{kB}^{-T} \quad (2.15)$$

Relaciones entre el tensor elástico de cuarto orden y el tensor de Eshelby en la configuración deformada y no deformada respectivamente:

$$C_{iklm} = (W\delta_{ij} - K_{ij})u_{j,k}^{-1}u_{l,m}^{-1}; \quad C_{iklm} = (J^{-1}F_{iA}^{-1}(W\delta_{AB} - K_{AB})F_{Bk})u_{l,m}^{-1} \quad (2.16)$$

Relaciones entre los tensores de Eshelby de segundo orden en la configuración no deformada y deformada

$$K_{AB} = W\delta_{AB} - JF_{Aj}^T \cdot (W\delta_{jk} \cdot u_{k,l}^{-1}) \cdot F_{lB}^{-T} + JF_{Aj}^T \cdot (K_{jk} \cdot u_{k,l}^{-1}) \cdot F_{lB}^{-T}$$

Relaciones entre los tensores de cuarto orden elástico y de Eshelby con el tensor de segundo orden de Eshelby en la configuración no deformada, este último para el interior de una inclusión de cualquier forma:

$$\begin{aligned} C_{jlmn}^e &= J^{-1}(F_{jA}^{-T} \cdot W\delta_{AB} - K_{AB} \cdot F_{Bl}^T) \otimes u_{n,m}^{-1} \\ S_{jlmn}^{Es} &= J^{-1}(F_{jA}^{-T} \cdot W\delta_{AB} - K_{AB} \cdot F_{Bl}^T) \otimes (\varepsilon_{nm}^*)^{-1} \end{aligned}$$

ε_{nm}^* : deformaciones residuales (eigenstrain)

En definitiva, la teoría de la uniformidad material y la ausencia de homogeneidad defendida por Epstein y Maugin en términos geométricos (Epstein y Maugin, 1990, 1997) —siguiendo los primeros trabajos de Noll (1967) y Wang (1968)— produce una caracterización directa de la uniformidad en términos de un tensor de tensión material K_{AB} llamado tensor de tensiones de Eshelby. Este es el dual del tensor energía-impulso de primer orden de la configuración de referencia, de la misma manera que el primer tensor de Piola-Kirchhoff: P_{iA} es el dual del gradiente de deformación clásico.

Definimos la densidad de energía en la configuración no deformada $W(F; X)$ donde F es el gradiente de deformación con respecto a la configuración no deformada y X son las coordenadas materiales. Removemos la dependencia explícita respecto de X efectuando un cambio local $K(X)$ en la configuración de referencia. Asumiendo que J es el $\det F$, escribimos $W = \tilde{W}(F, X) = J^{-1}\tilde{W}(FK(X)) = \hat{W}(F, K)$.

$$P_{iA} = \frac{\partial W}{\partial F_{iA}}, \quad K_{AB} = W\delta_{AB} - F_{Ai}^T P_{iB} \Rightarrow b_A^{inh} = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial K_B} K_{BA}^T$$

De modo tal que las fuerzas de inhomogeneidad entendidas como suma de fuerzas configuracionales que emanan de todas las inhomogeneidades materiales de un cuerpo se escriben de la forma siguiente

$$K_{AB,B} = -b_A^{inh}$$

En general son fuerzas configuracionales aquellas que actúan sobre y entre los defectos elásticos como por ejemplo vacíos, grietas, interfases, dislocaciones, disclinaciones e inclusiones, son fuerzas impulsoras termodinámicas (Maugin y Epstein, 1998; Cleja-Tigoiu y Maugin, 2000).

Las fuerzas configuracionales son entonces energéticamente duales respecto de los cambios de geometría o de forma del sólido.

Seguidamente se muestran las transformaciones entre representaciones de estados tenso-deformacionales, en un intento de interpretar la acción de las fuerzas configuracionales y de homogeneidad que operan en un sólido a escala meso y micromecánica.

Transformaciones entre representaciones

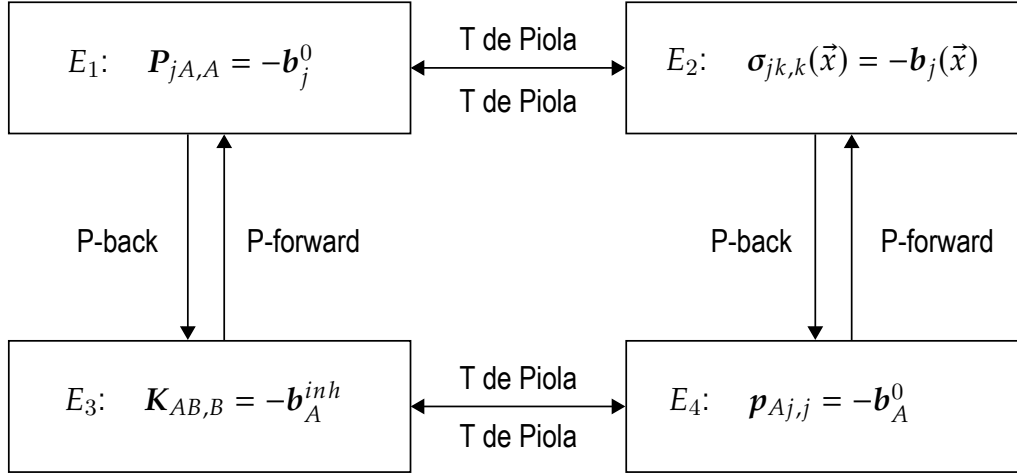


Figura 2.2: Transformaciones entre estados tenso-deformacionales en diversas representaciones

Se analizan a continuación las transformaciones asociadas a cada estado de tensión deformación, a partir de lo explicitado en la Figura 2.2.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \sigma_{jk,k} + \rho b_j(\vec{x}) = 0 \quad \text{en } R_k ; \quad \sigma_{jk} = J^{-1} P_{jA} \cdot F_{Ak}^T \\
 & (J^{-1} P_{jA} \cdot F_{Ak}^T)_{,k} + \rho f_j(\vec{x}) = 0 \quad \text{en } R_k \\
 & P_{jA} \cdot \underbrace{(J^{-1} F_{Ak}^T)_{,k}}_{=0} + \underbrace{J^{-1} P_{jA,k} F_{Ak}^T}_{=P_{jA,A}} + \rho f_j(\vec{x}) = 0 \quad \text{en } R_k \Rightarrow \\
 & \Rightarrow P_{jA,A} + \underbrace{J\rho}_{\rho_0} f_j(\vec{x}) = 0 \quad \text{en } R_k \Rightarrow P_{jA,A} + \underbrace{\rho_0 f_j(\vec{x})}_{b_j^0} = 0 \Rightarrow \boxed{P_{jA,A} = -b_j^0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & K_{AB} = W \delta_{AB} - F_{Aj}^{-1} \cdot P_{jB} \Rightarrow P_{jB} = F_{jA} W \delta_{AB} - F_{jA} K_{AB} \\
 & P_{jB,B} = (F_{jA} (W \delta_{AB}))_{,B} - (F_{jA} K_{AB})_{,B} \\
 & P_{jB,B} = (F_{jA} (W \delta_{AB}))_{,B} - (F_{jA} K_{AB})_{,B} \\
 & P_{jB,B} = (F_{jA} (W_{,B} \delta_{AB})) + \underbrace{F_{jA,B} (W \delta_{AB})}_{=0} - (F_{jA} K_{AB})_{,B} \\
 & K_{AB,B} = (W_{,B} \delta_{AB}) - F_{Aj}^{-1} P_{jB,B} = -b_A^{inh} \Rightarrow \boxed{K_{AB,B} = -b_A^{inh}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & K_{AB} = W \delta_{AB} - p_{Bj} \cdot F_{jA} \Rightarrow p_{Aj} = W \delta_{AB} F_{Bj}^{-1} - K_{AB} F_{Bj}^{-1} \\
 & P_{Aj,j} = W_{,j} \delta_{AB} F_{Bj}^{-1} + W \delta_{AB} \underbrace{F_{Bj,j}^{-1}}_{=0} - K_{AB} \underbrace{F_{Bj,j}^{-1}}_{=0} - K_{AB,j} F_{Bj}^{-1} \\
 & P_{Aj,j} = W_{,j} \delta_{AB} F_{Bj}^{-1} - K_{AB,j} F_{Bj}^{-1} = -b_A^0 \Rightarrow \boxed{p_{Aj,j} = -b_A^0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & p_{Aj} = J F_{Ak}^T \cdot \sigma_{kj} \quad ; \quad \sigma_{kj} = J^{-1} F_{kA}^T \cdot p_{Aj} \\
 & \sigma_{kj,j} = \underbrace{(J^{-1} F_{kA}^T)_{,j}}_{=0} p_{Aj} + \underbrace{J^{-1} F_{kA}^T p_{Aj,k}}_{=p_{kj,j}} = - \underbrace{p_{kj,j}}_{b_j} \Rightarrow \boxed{\sigma_{kj,j} = -b_j}
 \end{aligned}$$

Transformaciones de Piola y operaciones pull-back y push-forward

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= J^{-1}(P_{iA} \cdot F_{Ak}^T) \quad E_2 \Rightarrow E_1 \quad P_{jA} = J\sigma_{ij} \cdot F_{jA}^{-T} \\ K_{AB} &= W\delta_{AB} - p_{Aj}F_{jB} \quad E_3 \Rightarrow E_4 \quad p_{Aj} = W\delta_{AB}F_{Bj}^{-1} - K_{AB}F_{Bj}^{-1} \\ K_{AB} &= W\delta_{AB} - F_{Aj}^{-1} \cdot P_{jB} \quad E_2 \Rightarrow E_3 \quad P_{jB} = F_{jA}W\delta_{AB} - F_{jA} \cdot K_{AB} \\ \sigma_{jk} &= J^{-1}F_{jA}^{-T} \cdot p_{Ak} \quad E_2 \Rightarrow E_4 \quad p_{Aj} = JF_{Ak}^T \cdot \sigma_{kj}\end{aligned}$$

Caso 1. Cálculo de las fuerzas inhomogéneas

$$\begin{aligned}K_{AB} &= W\delta_{AB} - F_{Aj}^T \cdot P_{jA} \wedge P_{jA} = F_{jB} \cdot S_{BA} \Rightarrow K_{AB} = W\delta_{AB} - F_{Aj}^T \cdot (F_{jC} \cdot S_{CB}) \\ K_{AB} &= W\delta_{AB} - F_{Aj}^T \cdot P_{jA} \wedge S_{CB} = JF_{Cj}^{-1}\sigma_{jk}F_{kB}^{-T} \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{AB} &= W\delta_{AB} - JF_{Aj}^T(F_{jC}(F_{Cj}^{-1}\sigma_{jk}F_{kB}^{-T})) \\ \Rightarrow K_{AB} &= W\delta_{AB} - JF_{Aj}^T\sigma_{jk}F_{kB}^{-T} \quad \wedge \quad \sigma_{jk} = J^{-1}(F_{jA}^{-T}(W\delta_{AB} - K_{AB})F_{Bk}^T) \\ \Rightarrow \sigma_{jk,k} &= J^{-1}(F_{jA}^{-T}(W\delta_{AB} - K_{AB})F_{Bk}^T)_{,k}\end{aligned}$$

Fuerza de inhomogeneidad expresada en la representación deformada a partir de la representación no deformada

$$b_j = J^{-1}(F_{jA}^{-T}(W\delta_{AB} - K_{AB})F_{Bk}^T)_{,k}$$

Caso 2. Cálculo de las fuerzas inhomogéneas

$$\begin{aligned}K_{AB} &= W\delta_{AB} - F_{Aj}^T \cdot P_{jA} \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{jA}^{-T}K_{AB} &= F_{jA}^{-T}W\delta_{AB} - F_{jA}^{-T}F_{Aj}^T \cdot P_{jA} \Rightarrow P_{jB} = F_{jA}^{-T}W\delta_{AB} - F_{jA}^{-T}K_{AB} \\ P_{jB,B} &= (F_{jA}^{-T}W\delta_{AB} - F_{jA}^{-T} \cdot K_{AB})_{,B}\end{aligned}$$

Fuerza de in-homogeneidad expresada en la representación deformada a partir de la representación no deformada

$$b_j^0 = (F_{jA}^{-T}W\delta_{AB} - F_{jA}^{-T}K_{AB})_{,B}$$

Caso 3.

$$K_{AB} = W\delta_{AB} - p_{Aj} \cdot F_{jB} \Rightarrow K_{AB,B} = (W\delta_{AB} - p_{Aj} \cdot F_{jB})_{,B}$$

Fuerza de inhomogeneidad expresada en la representación no deformada

$$b_A^{inh} = (W\delta_{AB} - F_{Aj}^T \cdot p_{jB})_{,B}$$

Caso 4.

$$p_{Aj} = W\delta_{AB}F_{Bj}^{-1} - K_{AB} \cdot F_{Bj}^{-1} \Rightarrow p_{Aj,j} = (W\delta_{AB}F_{Bj}^{-1} - K_{AB} \cdot F_{Bj}^{-1})_{,j}$$

Fuerza de in-homogeneidad expresada en la representación no deformada a partir de la representación deformada

$$b_A^0 = (W\delta_{AB}F_{Bj}^{-1} - K_{AB} \cdot F_{Bj}^{-1})_{,j}$$

Determinación de la forma de la fuerza de Peach-Koehler sobre defectos o singularidades

Las fuerzas de Peach-Koehler son el primer ejemplo de la existencia de fuerzas configuracionales sobre y entre defectos, vacíos, dislocaciones, disclinaciones, etc., (Peach y Koehler, 1950; Lubarda, 2019) el nombre de fuerza configuracional lo adopta Nabarro (1983) y posteriormente Maugin y Trimarco (1992). En general la presencia de fuerzas configuracionales en la representación deformada va a obtenerse al calcular la divergencia del tensor de Eshelby de segundo orden tal como se indica en las secciones siguientes.

Caso 1. Calculo de la fuerza de Peach-Koehler de naturaleza configuracional

$$\begin{aligned} K_{ij} &= w\delta_{ij} - \sigma_{ik} \cdot \varepsilon_{kj} = W\delta_{ij} - (F_{iA}^{-1} \cdot \delta_{AB}W - F_{iA}^{-1} \cdot K_{AB}) \cdot F_{Bk}^T \cdot \varepsilon_{kj} \\ K_{ij,j} &= (W\delta_{ij} - (F_{iA}^{-1} \cdot \delta_{AB}W - F_{iA}^{-1} \cdot K_{AB}) \cdot F_{Bk}^T \cdot \varepsilon_{kj}),j \end{aligned}$$

Fuerzas de Peach-Koehler configuracionales vistas desde la configuración no deformada referidas a la configuración deformada

$$f_i^{P-K} = (W\delta_{ij} - (F_{iA}^{-1} \cdot \delta_{AB}W - F_{iA}^{-1} \cdot K_{AB}) \cdot F_{Bk}^T \cdot \varepsilon_{kj}),j$$

Caso 2. Calculo de la fuerza de Peach-Koehler de naturaleza configuracional

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= (w\delta_{ij} - J^{-1}(F_{iA} \cdot K_{AB} \cdot F_{Bj}^T))\varepsilon_{jk}^{-1} \\ \sigma_{ij} &= J^{-1}F_{iA} \cdot S_{AB} \cdot F_{Bj}^T \quad ; \quad S_{AB} = JF_{Aj}^{-1} \cdot \sigma_{ij} \cdot F_{Bj}^T \quad ; \quad K_{ij} = J^{-1}(F_{iA} \cdot K_{AB} \cdot F_{Bj}^T) \\ \sigma_{ik,k} &= \left\{ (w\delta_{ij} - J^{-1}(F_{iA} \cdot K_{AB} \cdot F_{Bj}^T))\varepsilon_{jk}^{-1} \right\}_{,k} \end{aligned}$$

Fuerzas de Peach-Koehler configuracionales vistas desde el sistema de referencia deformado

$$f_i^{P-K} = (w\delta_{ij} - J^{-1}(F_{iA} \cdot K_{AB} \cdot F_{Bj}^T)\varepsilon_{jk}^{-1}),k$$

Otras relaciones del tensor de Eshelby útiles para calcular fuerzas configuracionales en diferentes representaciones son

$$\begin{aligned} K_{AB} &= W\delta_{AB} - C_{AD} \cdot S_{DB} = W\delta_{AB} - (F_{Aj}^T \cdot e_{jk} \cdot F_{kD}) \cdot S_{DB} \\ C_{AD} &= (1/2)(F_{Aj}^T \cdot e_{jk} \cdot F_{kD}) \quad / \quad e_{jk} - \text{Tensor de Almansi} \\ \sigma_{ik} &= F_{iA}^{-1} \cdot (\delta_{AB}W - K_{AB}) \cdot F_{Bk}^T \quad / \quad C_{AD} - \text{Tensor derecho de Green - Lagrange} \\ C_{jklm} &= (F_{iA}^{-1} \cdot \delta_{AB}W - F_{iA}^{-1} \cdot K_{AB}) \cdot F_{Bk}^T \varepsilon_{lm}^{-1} \\ S_{jklm}^{Es} &= (F_{iA}^{-1} \cdot \delta_{AB}W - F_{iA}^{-1} \cdot K_{AB}) \cdot F_{Bk}^T (\varepsilon_{lm}^*)^{-1} \end{aligned}$$

Tensor de tensiones poroelástico

En la configuración deformada y en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff, Ledesma

(2000) escribe

$$\sigma_{jk}(\vec{x}, t) = \sigma_{jk}^{(e)}(u) + \sigma_{jk}^{(v)}(\dot{u}) - \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \quad (2.17)$$

$$\sigma_{jk}^{(e)} = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{P}_{jA} \mathbf{F}_{Ak}^T \quad ; \quad \sigma_{jk}^{(v)} = \partial_t (J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{P}_{jA}^v \mathbf{F}_{Ak}^T) \quad (2.18)$$

$$\sigma_{jk}^{(a)} = \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a p_a(\vec{x}, t) = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{M}_{jA}^a p_a \mathbf{F}_{Ak}^T \quad (2.19)$$

$$\sigma_{jk}^{(w)} = \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^w p_w(\vec{x}, t) = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{M}_{jA}^w p_w \mathbf{F}_{Ak}^T \quad (2.20)$$

$$\mathbf{P}_{Aj} = J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Ak}^{-1} \sigma_{jk}^{(e)} \quad ; \quad \mathbf{P}_{Aj}^{(v)} = \partial_t (J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Ak}^{-1} \sigma_{jk}^{(v)}) \quad (2.21)$$

Definición de las matrices de poro de agua y de aire respectivamente en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff (Abousleiman et al., 1993; Cheng, 2016).

$$\mathbf{M}_{ij}^a = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{M}_{jA}^a \mathbf{F}_{Ak}^T \quad ; \quad \mathbf{M}_{ij}^w = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{M}_{jA}^w \mathbf{F}_{Ak}^T$$

La dimensionalidad se respeta cuando ambas matrices son multiplicadas por las constantes de Biot α_1 y α_2 .

Tensor de Eshelby poroelástico

En la configuración no deformada realizamos la siguiente justificación, partiendo del balance de momentum en la configuración material tenemos

$$\mathbf{P}_{iA,A} + \rho_0 f_i = 0 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{P}_{iA} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_{iA}} \quad ; \quad W = \bar{W}(\mathbf{F}_{iA}, X_A)$$

Premultiplicando (2.22) por \mathbf{F}_{iA}

$$\mathbf{P}_{iA,A} : \mathbf{F}_{iA} = (\mathbf{P}_{iA} : \mathbf{F}_{iA})_{,A} - \mathbf{P}_{iA} (\mathbf{F}_{iA,A})^T = (\mathbf{P}_{iA} : \mathbf{F}_{iA})_{,A} - W_{,A} - f_A^{inh}$$

Donde

$$W_{,A} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{F}_{iA}} (\mathbf{F}_{iA})_{,A}^T + \frac{\partial \bar{W}}{\partial X_A} \Big|_{\mathbf{F}_{iA}=\text{cte.}} \quad f_A^{inh} = - \frac{\partial \bar{W}}{\partial X_A} \Big|_{\text{exp}} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial X_A} \Big|_{\mathbf{F}_{iA}=\text{cte.}}$$

$$\mathbf{K}_{AB,B} + f_A^{ext} + f_A^{inh} = 0 \quad \mathbf{K}_{AB} = W \delta_{AB} - \mathbf{F}_{Ai} \mathbf{P}_{iA}$$

La fuerza exterior y la fuerza inhomogénea se calculan de la siguiente forma:

$$f_A^{ext} = -\rho_0 f_i \mathbf{P}_{iA}$$

$f_A^{inh} = - \frac{\partial \bar{W}}{\partial X_A}$

 fuerza configuracional

Sustituyendo en el primer tensor de Piola-Kirchhoff (Ec. 2.7) la expresión del tensor de tensiones efectivo poroelástico (Ec. 2.17) asumiéndolo isótropo, utilizando el tensor de segundo orden de Eshelby recién definido y sustituyendo en él las expresiones anteriores (Ec. 2.7, 2.17) obtenemos:

$$\mathbf{K}_{AB} = W \delta_{AB} - \mathbf{F}_{Ak} \cdot (\mathbf{F}_{kC} (\mathbf{F}_{Cj}^{-1} (\sigma_{jl}^e - \alpha_1 p_a \delta_{jl} - \alpha_2 p_w \delta_{jl}) \mathbf{F}_{lB}^{-T})) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{AB} = & W \delta_{AB} - \mathbf{F}_{Ak} \cdot (\mathbf{F}_{kC} (\mathbf{F}_{Cj}^{-1} \sigma_{jl}^e \mathbf{F}_{lB}^{-T})) + \\ & + \alpha_1 \mathbf{F}_{Ak} \cdot (\mathbf{F}_{kC} (\mathbf{F}_{Cj}^{-1} (p_a \delta_{jl}) \mathbf{F}_{lB}^{-T})) + \alpha_2 \mathbf{F}_{Ak} \cdot (\mathbf{F}_{kC} (\mathbf{F}_{Cj}^{-1} (p_w \delta_{jl}) \mathbf{F}_{lB}^{-T})) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{K}_{AB,B} = 0 \iff f_A^{inh} \equiv 0$$

La expresión de conservación del tensor de Eshelby en la configuración no deformada está en Maugin (1993, 2011); Maugin y Rousseau (2015)

Tensor de tensiones poro-viscoelástico en la configuración deformada en función del primer tensor de Piola Kirchhoff (Bennett, Regueiro y Borja, 2016)

$$\sigma_{jk}(\vec{x}, t) = \sigma_{jk}^{(e)}(u) + \sigma_{jk}^{(v)}(\dot{u}) - \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \quad (2.25)$$

$$\sigma_{jk}^e = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{P}_{jA} \mathbf{F}_{Ak}^T \quad ; \quad \sigma_{jk}^v = \partial_t (J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{P}_{jA}^{(v)} \mathbf{F}_{Ak}^T) \quad (2.26)$$

$$\sigma_{jk}^{(p_a)} = \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(x, t) = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{P}_{jA} p_a \mathbf{F}_{Ak}^T \quad (2.27)$$

$$\sigma_{jk}^{(p_w)} = \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(x, t) = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{P}_{jA} p_w \mathbf{F}_{Ak}^T \quad (2.28)$$

$$\mathbf{P}_{Aj} = J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Ak}^{-1} \sigma_{jk}^{(e)} \quad \mathbf{P}_{Aj}^{(v)} = \partial_t (J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Ak}^{-1} \sigma_{jk}^{(v)}) \quad (2.29)$$

Tensor de tensiones poro-viscoelástico en la configuración deformada en función del segundo tensor de Piola-Kirchhoff

$$\sigma_{jk}(\vec{x}, t) = \sigma_{jk}^{(e)}(u) + \sigma_{jk}^{(v)}(\dot{u}) - \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \quad (2.30)$$

$$\sigma_{jk}^{(e)} = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{jA} \mathbf{S}_{AB}^{(v)} \mathbf{F}_{Bk}^T \quad ; \quad \dot{\sigma}_{jk}^{(v)} = \partial_t (J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{jA} \mathbf{S}_{AB}^{(v)} \mathbf{F}_{Bk}^T) \quad (2.31)$$

$$\sigma_{jk}^{(p_a)} = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{jA} \mathbf{S}_{AB}^{(v)} p_a \mathbf{F}_{Bk}^T \quad ; \quad \sigma_{jk}^{(p_w)} = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{jA} \mathbf{S}_{AB}^{(v)} p_w \mathbf{F}_{Bk}^T \quad (2.32)$$

$$\mathbf{S}_{AB}^{(v)} = J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Ai}^{-1} \sigma_{ij}^{(e)} \mathbf{F}_{jB}^{-T} \quad ; \quad \mathbf{S}_{AB}^{(v)} = \partial_t (J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Ai}^{-1} \dot{\sigma}_{ij}^{(v)} \mathbf{F}_{jB}^{-T}) \quad (2.33)$$

Tensor de tensiones poro-viscoelástico en la configuración deformada en función del tensor de Mandel (Bonet y Wood, Non Linear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2008);

$$\sigma_{jk}(\vec{x}, t) = \sigma_{jk}^{(e)}(u) + \sigma_{jk}^{(v)}(\dot{u}) - \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(x, t) - \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(x, t) \quad (2.34)$$

$$\sigma_{jk}^{(e)} = J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{jA}^{-T} \mathbf{M}_{AB} \mathbf{F}_{Bk}^T \quad ; \quad \dot{\sigma}_{jk}^{(v)} = \partial_t (J^{-1}(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{jA}^{-T} \mathbf{M}_{AB}^{(v)} \mathbf{F}_{Bk}^T) \quad (2.35)$$

$$\sigma_{jk}^{(p_a)} = \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a p_a \quad ; \quad \sigma_{jk}^{(p_w)} = \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^w p_w \quad (2.36)$$

$$\mathbf{M}_{AB} = J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Aj}^T \sigma_{jk}^{(e)} \mathbf{F}_{kB}^{-T} \quad ; \quad \mathbf{M}_{AB}^{(v)} = \partial_t (J(\mathbf{F}) \mathbf{F}_{Aj}^T \dot{\sigma}_{jk}^{(v)} \mathbf{F}_{kB}^{-T}) \quad (2.37)$$

2.3 Elementos de la teoría de espacios funcionales

Las siguientes definiciones enmarcan todos los desarrollos futuros en este trabajo, de modo que se tornan cruciales al momento de fundamentar muchas de las conclusiones a las que se arriban, en relación con su estructura funcional, y operacional. Sea $C_k^p([a, b]) \equiv (C_k([a, b]), \|\bullet\|)$, donde $C_k([a, b])$ es el espacio lineal de las funciones continuas definidas sobre el intervalo cerrado $[a, b] \in \mathbb{R}$ y con recorrido en k , sobre el cual se constituye el espacio normado, definiendo:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_a^b dx |f(x)|^p \right\}^{1/p} \quad \forall f \in C_k([a, b]) ; \quad \forall p : 1 \leq p < +\infty$$

Este espacio normado es euclídeo si y solo si $p = 2$. Según el teorema de completitud, todo espacio normado no completo admite una colección, única salvo isomorfismos en norma, está

garantizada, por tanto, la existencia de un espacio completo

$$L_k^p([a, b]) = \left(\bar{C}_k^p([a, b]) \right)$$

Definimos los siguientes operadores vectoriales en forma diferencial

Definición de Gradiente de un campo escalar

$$\begin{aligned} G(\varphi) : E(A \subset R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) &\rightarrow \bar{E}(R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) \\ G(\varphi) = \hat{\nabla}\varphi = \text{grad}(\varphi) &= F_k(x_k, t) ; \forall k = 1 \dots n \end{aligned}$$

Definición de rotacional de un campo vectorial

$$\begin{aligned} R(u_k) : E(A \subset R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) &\rightarrow \bar{E}(R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) \\ R(u_k) = \hat{\nabla} \otimes u_k = \text{rot}(u_k) &= (-1)^k S_k(x_k, t) ; \forall k = 1 \dots n \end{aligned}$$

Definición de divergencia de un campo vectorial

$$\begin{aligned} D(u_k) : E(A \subset R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) &\rightarrow \bar{E}(R \otimes [0, t], \|\cdot\|) \\ D(u_k) = \hat{\nabla} \cdot u_k = \text{div}(u_k) &= \psi(x_k, t) ; \forall k = 1 \dots n \end{aligned}$$

Definición de divergencia de un campo tensorial

$$\begin{aligned} D\sigma_{jl} : A \subset R^{n \times n} \otimes [0, t] &\rightarrow R^{n \times n} \otimes [0, t] \\ D\sigma_{jl} = \text{div}(\sigma_{jl}) = \sigma_{jl,l} &= F_j(x_k, t) \quad \forall k = 1 \dots n \end{aligned}$$

Definición de segunda divergencia de un campo tensorial

$$\begin{aligned} D(D\sigma_{jl}) : E(A \subset R^{n \times n} \otimes [0, t], \|\cdot\|) &\rightarrow \bar{E}(R^{n \times n} \otimes [0, t], \|\cdot\|) \\ D(D\sigma_{jl}) = \text{div}(\text{div}(\sigma_{jl})) &= \sigma_{jl,lj} = \chi_j(x_k, t) \quad \forall k = 1 \dots n \end{aligned}$$

Definición de laplaciano de un campo escalar

$$\begin{aligned} D(G(\varphi)) : E(A \subset R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) &\rightarrow \bar{E}(R \otimes [0, t], \|\cdot\|) \\ D(G(\varphi)) = \hat{\nabla}(\text{grad}(\varphi)) &= \hat{\nabla}(\hat{\nabla}\varphi) = \hat{\nabla}^2\varphi(x_k, t) = E(x_k, t) ; \forall k = 1 \dots n \end{aligned}$$

Definición de laplaciano de un campo vectorial

$$\begin{aligned} G(D(u_k)) : E(A \subset R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) &\rightarrow \bar{E}(R^n \otimes [0, t], \|\cdot\|) \\ G(D(u_k)) = \hat{\nabla}(\text{div}(u_k)) &= \hat{\nabla}(\hat{\nabla}u_k) = \hat{\nabla}^2u_k(x_k, t) = F_k(x_k, t) ; \forall k = 1 \dots n \end{aligned}$$

Definición de laplaciano de un campo tensorial

$$\begin{aligned} D(D(\sigma_{jk})) : E(A \subset R^{n \times n} \otimes [0, t], \|\cdot\|) &\rightarrow \bar{E}(R^{n \times n} \otimes [0, t], \|\cdot\|) \\ D(D(\sigma_{jk})) = \hat{\nabla}(\nabla(\sigma_{jk})) &= \hat{\nabla}^2\sigma_{jk}(x_k, t) = q_{jk}(x_k, t) ; \forall k = 1 \dots n \\ B_{nm}\sigma_{jk,nm}(x_k, t) &= q_{jk}(x_k, t) \quad ; \quad B_{nm} \in V^{n \times n} \\ B_{nm} = B_{mn} \quad ; \quad B_{nm}v_nv_m &\geq a_0v_nv_n / v_n \in S(q) \end{aligned}$$

Pertenencia de funciones vectoriales y tensoriales

$$u_k, S_k \in C_0^n(R_\tau^n) \quad ; \quad \sigma_{jk} \in C_0^n(R_\tau^{n \times n}) \quad ; \quad \varphi, \psi, \chi \in C_0^n(R_\tau)$$

$$u_k, S_k, \sigma_{jk}, q_{jk}, \varphi, \psi, \chi \in E(q, \|\cdot\|)$$

Definición de operador hiperbólico (Ecuación de onda)

$$H(\varphi): E(A \subset R^n \otimes [0, t), \|\cdot\|) \rightarrow \bar{E}(R \otimes [0, t), \|\cdot\|)$$

$$H(\varphi) = \rho(x_k, t) \quad \forall k = 1 \dots n \quad ; \quad \rho \in L^2(R_\tau)$$

$$H(\varphi) \equiv \partial_t^2 \varphi(x_k, t) - a^2 \nabla^2 \varphi(x_k, t) \quad ; \quad a \in R_0^+$$

Definición de operador parabólico (Ecuación de difusión)

$$H(\varphi): E(A \subset R^n \otimes [0, t), \|\cdot\|) \rightarrow \bar{E}(R \otimes [0, t), \|\cdot\|)$$

$$H(\varphi) = \rho(x_k, t) \quad \forall k = 1 \dots n \quad ; \quad \rho \in L^2(R_\tau)$$

$$H(\varphi) \equiv \partial_t \varphi(x_k, t) - a^2 \nabla^2 \varphi(x_k, t) \quad ; \quad a \in R_0^+$$

Se escriben a continuación, diversos sistemas elastodinámicos, acoplado a campos escalares y o vectoriales, los cuales se analizarán en las diferentes aproximaciones teóricas, a ser desarrolladas en los capítulos siguientes de esta tesis

2.4 Formulación del problema elastodinámico en las diferentes representaciones

El siguiente cuadro muestra de manera análoga al de la Figura 2.2 las relaciones dinámicas que se establecen entre las diferentes representaciones de estados tensionales.

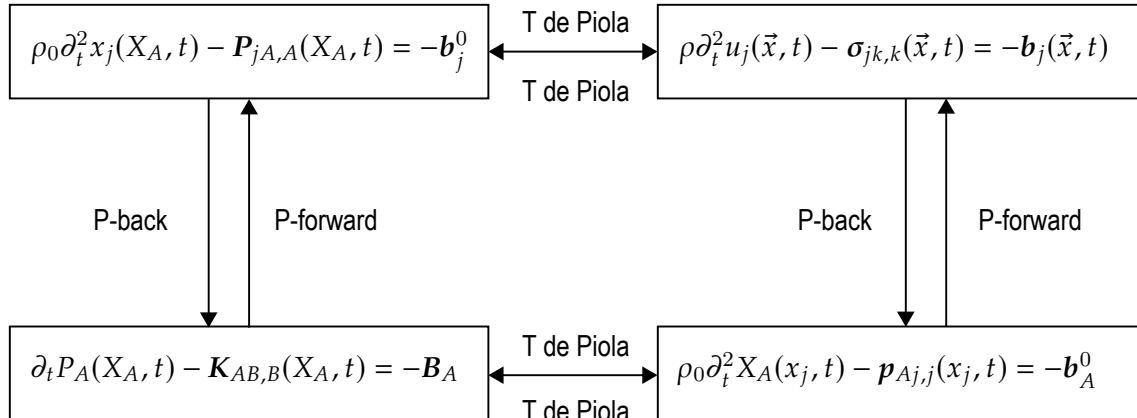


Figura 2.3: Representaciones elastodinámicas, para diferentes estados de tensión-deformación.

Tres de estas representaciones serán estudiadas en esta tesis, a saber: la representación elastodinámica clásica en la representación deformada, la elastodinámica en la formulación lagrangiana en la representación material y se hará un breve recorrido teórico sobre la elastodinámica inhomogénea en la representación no deformada en términos del tensor de Eshelby de segundo orden expresado también en esta misma configuración, introduciendo el concepto de pseudomomentum como lo hace Maugin (1993, cap. 4, pág. 88). Finalmente se debe agregar que, en los capítulos subsiguientes actúan como fuerzas exteriores las inclusiones o defectos del material que van a poder expresarse a través de transformaciones de Piola u operaciones pull-back push-forward en las distintas representaciones.

2.4.1 Formulación de los problemas: elastodinámico y viscoelastodinámico clásicos

Un problema elastodinámico y/o visco-elastodinámico lineal queda definido por la geometría del sólido, las propiedades de dicho material, ciertas fuerzas actuantes y unas dadas condiciones de contorno que imponen restricciones al movimiento de cuerpo. A partir de esos elementos es posible encontrar un campo de desplazamientos y un campo de tensiones en el sólido, con los cuales es posible describir y estimar la respuesta activa del medio ante acciones externas, para el caso micromecánico, las fuerzas actuantes serán llamadas configuracionales o microestructurales, según nos situemos en la teoría de Eshelby-Mura, Mindlin-Aifantis, o Eringen-Nemat-Nasser, respectivamente

Condiciones geométricas Leyes constitutivas o de comportamiento para el caso elástico y viscoelástico

$$\varepsilon_{jk}(\vec{x}, t) = (1/2)(u_{j,k}(\vec{x}, t) + u_{k,j}(\vec{x}, t)) \quad (2.38)$$

$$\dot{\varepsilon}_{jk}(\vec{x}, t) = (1/2)(\dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t) + \dot{u}_{k,j}(\vec{x}, t)) \quad (2.39)$$

$$\sigma_{jk}^e(u) = C_{jklm}^e \varepsilon_{lm}(\vec{x}, t) \quad ; \quad \sigma_{jk}^v(u) = C_{jklm}^v \dot{\varepsilon}_{lm}(\vec{x}, t) \quad (2.40)$$

$$\sigma_{jk}^t(u) = C_{jklm}^e \varepsilon_{lm}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{\varepsilon}_{lm}(\vec{x}, t) \quad (2.41)$$

Para el caso no lineal geométrico tendremos:

$$\varepsilon_{jk}(\vec{x}, t) = (1/2)(u_{j,k}(\vec{x}, t) + u_{k,j}(\vec{x}, t) + u_{j,n}(\vec{x}, t)u_{n,k}(\vec{x}, t)) \quad (2.42)$$

$$\dot{\varepsilon}_{jk}(\vec{x}, t) = (1/2)(\dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t) + \dot{u}_{k,j}(\vec{x}, t) + \dot{u}_{j,n}(\vec{x}, t)\dot{u}_{n,k}(\vec{x}, t)) \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^t = & C_{jklm}^e u_{lm}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{u}_{lm}(\vec{x}, t) + \\ & + C_{jklm}^e u_{m,n}(\vec{x}, t)u_{n,l}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{u}_{m,n}(\vec{x}, t)\dot{u}_{n,l}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

A partir de la densidad de lagrangiano siguiente y del principio de mínima acción (Kienzler y Herrmann, 2004; Joly, 2008) (Ver Apéndice C)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_j, \dot{u}_j, u_{j,k}, \dot{u}_{j,k}) = & (1/2)\rho \dot{u}_j(\vec{x}, t)\dot{u}_j(\vec{x}, t) - (1/2)u_{j,k}(\vec{x}, t)C_{jklm}u_{l,m}(\vec{x}, t) - \\ & - (1/2)\dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t)C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t) + \rho u_j f_j(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Obtenemos la ecuación de movimiento visco-elastodinámica, con condiciones de contorno de Neumann, mixtas y de Robin respectivamente

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm} u_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (2.46)$$

Condiciones iniciales

$$u_j(x, 0) = u_j^0 / \dot{u}_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \quad \partial_t u_j(x, 0) = w_j^0 / \dot{w}_j^0 \in (L^2(D_k))^2 \quad (2.47)$$

Condiciones de Neumann

$$(-C_{jklm} u_{l,m}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_j^a \in L^2(\partial\Gamma_1) \quad (2.48)$$

$$(-C_{jklm} u_{l,m}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_2} = t_j^a \Big|_{\partial\Gamma_2} / t_j^a \in L^2(\partial\Gamma_2) \quad (2.49)$$

Condiciones de borde mixtas

$$(-C_{jklm}u_{l,m}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))\hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_j^a \in L^2(\partial\Gamma_1) \quad (2.50)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{u}_j^b \Big|_{\partial\Gamma_2} / \bar{u}_j^b \in L^2(\partial\Gamma_2) \quad (2.51)$$

Condiciones de borde de Robin

$$(-C_{jklm}u_{l,m}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))\hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} + k_1 u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (2.52)$$

$$(-C_{jklm}u_{l,m}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))\hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_2} + k_2 u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \mathbf{t}_j^b \Big|_{\partial\Gamma_2} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{t}_j^b \in L^2(\partial\Gamma_2) \quad ; \quad \mathbf{t}_j^a \in L^2(\partial\Gamma_1) \quad ; \quad k_{1,2} \in R_0^+ \quad (2.54)$$

Condiciones sobre las matrices y funciones

$$C_{jklm}, C_{jklm}^v \in V^{3 \times 3 \times 3 \times 3} ; \rho_{jl} \in V^{3 \times 3} ; f_k \in (L^2(R_k))^3 \quad (2.55)$$

$$C_{jklm} = C_{kjlm} = C_{jklm} = C_{lmjk} \quad ; \quad C_{jklm}^v = C_{kjlm}^v = C_{jklm}^v = C_{lmjk}^v \quad (2.56)$$

$$C_{jklm} v_{jk} v_{lm} > a_0 v_{jk} v_{jk} ; C_{jklm}^v \dot{v}_{jk} \dot{v}_{lm} > b_0 \dot{v}_{jk} \dot{v}_{jk} ; a_0, b_0 \in R_0^+ \quad (2.57)$$

$$v_{jk} \in F_1(C^e) \quad ; \quad \dot{v}_{jk} \in F_2(C^v)$$

2.4.2 Planteo de la solución del sistema

Si el sistema es homogéneo: $\rho_{jl} \delta_{lj} = \rho$ se obtiene la clásica ecuación de Navier-Cauchy. Las soluciones se construyen utilizando el tercer teorema de Green y la identidad de Somigliana. Este es el tipo de modelo formal que utilizaremos sistemáticamente, ayudados por las distintas ecuaciones constitutivas. En la configuración no deformada y en la representación lagrangiana, la ecuación de ondas elásticas se escribe (Maugin, 1993, 1995, 2011):

$$\rho_0 \partial_t^2 x_i(x_i(X_A, t), t) - P_{iA,A}(X_A, F_{iA}) = 0 \quad \text{en } R_k \quad (2.58)$$

Expresando el primer tensor de Piola Kirchhoff, en función del tensor de Eshelby

$$\Rightarrow \rho_0 \partial_t^2 x_j(X_j, t) - (J \sigma_{ij} F_{jA}^{-T})_{,A} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_0 \partial_t^2 x_j(X_j, t) - (W \delta_{jk} F_{kA}^{-1})_{,A} + (K_{jk} F_{kA}^{-1})_{,A} = 0$$

Entonces, en la representación lagrangiana, la ecuación de movimiento para perturbaciones elásticas en términos de los tensores de Eshelby en las configuraciones deformada y no deformada se escriben

$$\rho_0 \partial_t^2 x_j(X_j, t) - (W \delta_{jk} F_{kA}^{-1})_{,A} = - \underbrace{(K_{jk} F_{kA}^{-1})_{,A}}_{\text{Fuerza configuracional}} \quad (2.59)$$

Utilizando el segundo tensor de Piola-Kirchhoff obtenemos

$$\rho_0 \partial_t^2 x_j(X_j, t) - (F_{jA} W \delta_{AB})_{,B} = - \underbrace{(F_{jA} K_{AB})_{,B}}_{\text{Fuerza configuracional}} \quad (2.60)$$

Haciendo:

$$(W \delta_{ik} F_{kA}^{-1})_{,A} = (F_{nA} x_{j,n})_{,A}$$

Donde se utilizó la identidad de Laplace-Beltrami, para construir el análogo del laplaciano clásico isotrópico.

Tenemos, con el tensor Eshelby en la configuración deformada, el siguiente problema de valores iniciales y de borde, donde se ha impuesto una condición de Neumann en la interface inclusión matriz y otra del mismo tipo en la superficie limitadora de la matriz:

$$\rho_0 \partial_t^2 x_j(X_j, t) - (F_{kA} x_{j,k})_{,A} = (K_{jk} F_{kA}^{-1})_{,A} \quad \text{en } R_k \quad (2.61)$$

$$x_j(X_j, 0) = x_j^0 / x_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t x_j(X_j, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (2.62)$$

$$-F_{kA} x_{j,k} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -K_{jk} F_{kA}^{-1} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad ; \quad \rho_0 \in R_0^+ \quad (2.63)$$

$$-F_{kA} x_{j,k} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_M} = -t_j^a \Big|_{\partial\Gamma_M} / t_j^a \in (L^2(\partial\Gamma_M))^2 \quad (2.64)$$

Pre-multiplicando (2.58) por el tensor F_{Ai} : (Ver Ap. 3)

$$\rho_0 \partial_t^2 X_A - W \delta_{AB,B} + F_{Ak} \cdot (F_{kC} (J \cdot F_{Cj}^{-1} \sigma_{jl}^e F_{lB}^{-T}))_{,B} = -b_A^{inh} \quad \text{en } R_k \quad (2.65)$$

$$X_A(\vec{x}, 0) = X_A^0 / X_A^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t X_A(\vec{x}, 0) = \dot{X}_A^0 / \dot{X}_A^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (2.66)$$

$$W \delta_{AB} \hat{n}_B + F_{Ak} \cdot (F_{kC} (J \cdot F_{Cj}^{-1} \sigma_{jl}^{ef} F_{lB}^{-T})) \hat{n}_B \Big|_{\partial\Gamma_1} = T_A^{int} \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad ; \quad \rho_0 \in R_0^+ \quad (2.67)$$

$$X_A \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0 \quad ; \quad T_A^{int} \in (L^2(\partial\Gamma_1))^3 \quad ; \quad b_A^{inh} \in (L^2(\partial\Gamma_1))^3 \quad (2.68)$$

El problema de condiciones iniciales y de borde para el caso elastodinámico general con condiciones de contorno mixtas utilizando el teorema de Helmholtz $u_{l,mk} \rightarrow u_{l,mk} - \varepsilon_{lpq}(\varepsilon_{kqr} u_{m,rp})$ nos permitirá escribir el tensor de tensiones de la siguiente forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(e)} u_{l,k} - C_{ijkl}^{(e)} (\varepsilon_{lnp} (\varepsilon_{knq} u_{p,q})) \quad (2.69)$$

De modo que la ecuación elastodinámica será

$$\rho \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^e u_{l,kj}(\vec{x}, t) + C_{ijkl}^e (\varepsilon_{lnp} (\varepsilon_{knq} u_{p,q}(\vec{x}, t)))_{,j} = \rho f_i(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (2.70)$$

Las condiciones iniciales se escriben

$$u_i(\vec{x}, t) = u_i^0 / u_i^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad (2.71)$$

$$\partial_t u_i(\vec{x}, t) = w_{1i}^0 / w_{1i}^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (2.72)$$

Las condiciones de borde se establecen sobre la superficie $\partial M = \partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2$

$$\begin{aligned} & - (C_{ijkl}^{(e)} u_{l,k} - C_{ijkl}^{(e)} (\varepsilon_{lnp} (\varepsilon_{knq} u_{p,q}))) \hat{n}_j = \\ & = t_j^a - \varepsilon_{jnp} u_{n,p}^a(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_j^a, u_{n,p}^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} & u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{u}_j^1 \Big|_{\partial\Gamma_2} / \bar{u}_j^1 \in (L^2(\partial\Gamma_2))^2 \\ & f_j \in (L^2(R_k))^3 \quad ; \quad \rho \in R_0^+ \end{aligned} \quad (2.74)$$

Para el problema visco-elastodinámico tendremos

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}(\vec{x}, t) &= C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^e (\varepsilon_{mnp} (\varepsilon_{lnq} u_{p,q}(\vec{x}, t))) + \\ &\quad + C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^v (\varepsilon_{mnp} (\varepsilon_{lnq} \dot{u}_{p,q}(\vec{x}, t))) = \\ &= C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) + C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^e \varphi_{k,l}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^v \dot{\varphi}_{k,l}(\vec{x}, t) \\ \varphi_{k,l}(\vec{x}, t) &= \varepsilon_{knp} (\varepsilon_{lnq} u_{p,q}(\vec{x}, t)) \quad ; \quad \dot{\varphi}_{k,l}(\vec{x}, t) = \varepsilon_{mnp} (\varepsilon_{lnq} \dot{u}_{p,q}(\vec{x}, t))\end{aligned}\quad (2.75)$$

El nuevo problema generalizado visco-elastodinámico se escribirá así:

$$\begin{aligned}\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v u_{l,mk}(\vec{x}, t) + \\ + C_{jklm}^e (\varepsilon_{mnp} (\varepsilon_{lnq} u_{p,q}(\vec{x}, t)))_{,k} + C_{jklm}^v (\varepsilon_{mnp} (\varepsilon_{lnq} \dot{u}_{p,q}(\vec{x}, t)))_{,k} = \\ = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k\end{aligned}\quad (2.76)$$

Las condiciones iniciales se escriben

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad (2.77)$$

$$\partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_{1j}^0 / w_{1j}^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (2.78)$$

Las condiciones de borde mixtas serán:

$$\begin{aligned}- C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e \varepsilon_{lnp} (\varepsilon_{mnp} u_{p,q}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\ - C_{jklm}^e \varepsilon_{lnp} (\varepsilon_{mnp} u_{p,q}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = (t_j^a - \varepsilon_{jnp} u_{n,p}^a(\vec{x}, t) - \varepsilon_{jnp} \dot{u}_{n,p}^a(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_1}\end{aligned}\quad (2.79)$$

$$t_j^a, u_{n,p}^a, \dot{u}_{n,p}^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{u}_j^{-1} \Big|_{\partial\Gamma_2} / \bar{u}_j^{-1} \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 ; f_j \in (L^2(R_k))^3 ; \rho \in R_0^+ \quad (2.80)$$

El problema de Cauchy y de condiciones de borde para el problema elastodinámico asociado a la interacción entre una inclusión embebida en una matriz, cuando suponemos que existe una tensión configuracional aplicada en la interface inclusión-matriz será:

$$\begin{aligned}\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) &= (J^{-1}(\mathbf{F}_{jA}(\mathbf{W} \boldsymbol{\delta}_{AB}) \mathbf{F}_{Bk}^{-1}))_{,k} - \\ &\quad - (J^{-1}(\mathbf{F}_{jA} \mathbf{K}_{AB} \mathbf{F}_{Bk}^{-1}))_{,k} \quad \text{en } R_k \\ u_j(\vec{x}, 0) &= u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \\ - C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} &= (J^{-1}(\mathbf{F}_{jA}(\mathbf{W} \boldsymbol{\delta}_{AB}) \mathbf{F}_{Bk}^{-1})) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} - \\ &\quad - (J^{-1}(\mathbf{F}_{jA} \mathbf{K}_{AB} \mathbf{F}_{Bk}^{-1})) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \\ - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_M} &= t_j \Big|_{\partial\Gamma_M} / t_j \in (L^2(\partial\Gamma_M))^2 \\ C_{jklm}^e &\in V^{3 \times 3 \times 3 \times 3} ; C_{jklm}^e = C_{kjl m}^e = C_{j k m l}^e = C_{l m j k}^e \\ C_{jklm}^e u_{l,m} u_{j,k} &> a_0 u_{j,k} u_{j,k} ; a_0 \in R_0^+ ; u_{j,k} \in F(C^e)\end{aligned}$$

2.5 Prueba de unicidad

En particular consideramos un tipo de problema elastodinámico restringido, de desplazamiento puro, este hecho no limita los resultados que se obtendrán a continuación. Para probar unicidad suponemos la existencia de dos campos que satisfacen idénticas condiciones iniciales y de borde, aunque suponemos inicialmente que se trata de dos distribuciones de desplazamiento distintas, esta contradicción solo podrá salvarse si es posible probar finalmente que:

$$u_j(\vec{x}, t) = v_j(\vec{x}, t) \quad (2.81)$$

Los campos:

$$u_j(\vec{x}, t) ; v_j(\vec{x}, t)$$

satisfacen el siguiente problema de condiciones iniciales y de borde (2.39), haciendo, $C_{jklm}^v = 0$, tenemos:

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (2.82)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (2.83)$$

$$\partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_{1j}^0 / w_{1j}^0 \in (\mathbf{L}^2(D_k))^3 \quad (2.84)$$

$$- C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_j^a \in (\mathbf{L}^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (2.85)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{u}_j^1 \Big|_{\partial\Gamma_2} / \bar{u}_j^1 \in (\mathbf{L}^2(\partial\Gamma_2))^2 ; f_j \in (\mathbf{L}^2(R_k))^3 \quad (2.86)$$

Para $v_j(\vec{x}, t)$

$$\rho \partial_t^2 v_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e v_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (2.87)$$

$$v_j(\vec{x}, 0) = v_j^0 / v_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (2.88)$$

$$\partial_t v_j(\vec{x}, 0) = w_{2j}^0 / w_{2j}^0 \in (\mathbf{L}^2(D_k))^3 \quad (2.89)$$

$$- C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_j^a \in (\mathbf{L}^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (2.90)$$

$$v_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{v}_j^1 \Big|_{\partial\Gamma_2} / \bar{v}_j^1 \in (\mathbf{L}^2(\partial\Gamma_2))^2 \quad (2.91)$$

Multiplicando (2.86) por $v_j(\vec{x}, t)$ y (2.91) por $u_j(\vec{x}, t)$

$$\rho v_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - v_j(\vec{x}, t) C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho v_j(\vec{x}, t) f_j(\vec{x}, t) \quad (2.92)$$

$$\rho u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 v_j(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) C_{jklm}^e v_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho u_j(\vec{x}, t) f_j(\vec{x}, t) \quad (2.93)$$

Restando (2.92) de (2.93) e integrando tendremos

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x (u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 v_j(\vec{x}, t) - v_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) \right\} + \\ & + \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} - u_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} \right\} \right\} = \\ & = \rho \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x (u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 v_j(\vec{x}, t) - v_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t) C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} \right\} + \\
 & + \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x \left\{ \epsilon_{kjl} v_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{lmn} C_{mnpq}^e u_{p,q}(\vec{x}, t)) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \epsilon_{kjl} u_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{lmn} C_{mnpq}^e v_{p,q}(\vec{x}, t))_{,k} \right\} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \rho \iiint_V d^3x (u_j(\vec{x}, 0) \partial_t v_j(\vec{x}, 0) v_j(\vec{x}, 0) \partial_t u_j(\vec{x}, 0)) + \\
 & + \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} - u_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k}) \right\} = \\
 & = \int_0^t dt \left\{ \oint_{\partial\Gamma} dS (v_j(\vec{x}, t) C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \right\} + \\
 & + \int_0^t dt \left\{ \oint_{\partial\Gamma} dS \left\{ \epsilon_{kjl} v_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{lmn} C_{mnpq}^e u_{p,q}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \epsilon_{kjl} u_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{lmn} C_{mnpq}^e v_{p,q}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, dado que no existe derivada oblicua, es decir, no puede expresarse de la siguiente forma $\hat{n}_i = \epsilon_{ijk} \hat{b}_j \hat{t}_k$, pues \hat{b}_j es cero.

$$\int_0^t dt \left\{ \oint_{\partial\Gamma} dS \left\{ \epsilon_{kjl} v_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{lmn} C_{mnpq}^e u_{p,q}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k - \right. \right. \\
 \left. \left. - \epsilon_{kjl} u_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{lmn} C_{mnpq}^e v_{p,q}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \right\} \right\} = 0$$

Además, debido a que ambos campos satisfacen las mismas condiciones iniciales y de borde finalmente tenemos:

$$\int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} - \right. \right. \\
 \left. \left. - u_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} \right\} \right\} = 0 \iff u_j = v_j$$

Para el caso visco-elastodinámico puro la prueba de unicidad idéntica al caso anterior, es decir se proponen dos campos de desplazamientos, que satisfacen iguales condiciones iniciales y de borde, aunque, ellos mismos se suponen distintos. (2.81),

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (2.94)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_{1j}^0 / w_{1j}^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (2.95)$$

$$-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j^a / t_j^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (2.96)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{u}_j^1 / \bar{u}_j^1 \in (L^2(\partial\Gamma_2))^2 \quad (2.97)$$

Se escribe un problema análogo para $v_j(\vec{x}, t)$ y se procede análogamente respecto del problema

anterior, obteniéndose entonces

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x (u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 v_j(\vec{x}, t) - v_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - u_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{v}_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} \right\} \right\} = \\
 & = \rho \left\{ \iiint_V d^3x (u_j(\vec{x}, 0) \partial_t^2 v_j(\vec{x}, 0) - v_j(\vec{x}, 0) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, 0)) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - u_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{v}_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} \right\} \right\} = \\
 & = \int_0^t dt \left\{ \oint_{\partial\Gamma} d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - u_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{v}_{l,m}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Nuevamente llegamos a la condición:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t dt \left\{ \iiint_V d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - u_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e v_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{v}_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} \right\} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Que solo es cierta si y solo si $u_j(\vec{x}, t) = v_j(\vec{x}, t) \wedge \dot{u}_j(\vec{x}, t) = \dot{v}_j(\vec{x}, t)$ Se prueba de esta manera la unicidad de las soluciones asociadas al problema viscoelástico sin derivada oblicua. Se han utilizado las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 - \iiint_V d^3x v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} &= \iiint_V d^3x v_{j,k}(\vec{x}, t) C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - \\
 & - \oint_{\partial\Gamma} dS v_j(\vec{x}, t) C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k
 \end{aligned}$$

Tercera identidad de Green:

$$\begin{aligned}
 & - \iiint_V d^3x v_j(\vec{x}, t) (C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t))_{,k} = \\
 & = \iiint_V d^3x (\epsilon_{ijk} (C_{klmn} u_{m,n})) \cdot (\epsilon_{ijk} (C_{klmn} v_{m,n})) + u_{i,j} C_{ijkl} (C_{klmn} u_{m,n}) \\
 & \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} u_{m,n}(\vec{x}, t))) - u_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{m,n}(\vec{x}, t)))) = \\
 & = \oint_{\partial\Gamma} dS (\epsilon_{pjn} u_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{nkl} v_{k,l}(\vec{x}, t)) - \epsilon_{pjn} v_j(\vec{x}, t) (\epsilon_{nkl} u_{k,l}(\vec{x}, t))) \hat{n}_p
 \end{aligned}$$

Para el caso del sólido elástico homogéneo e isótropo tendremos las conocidas ecuaciones de Navier-Lamé, y el problema siguiente de condiciones iniciales y de borde será (Chandrasekharaiah y Debnath; Continuum Mechanics, 1994), (Eringen y Şuhubi, Elastodynamics, 1975), (Hetnarski y Ignaczak, The Mathematical Theory of Elasticity, 2013).

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mu u_{j,kk}(\vec{x}, t) - (\mu + \lambda)(u_{k,k}(\vec{x}, t))_{,j} = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (2.98)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (2.99)$$

$$(-\mu u_{j,k}(\vec{x}, t) - (\mu + \lambda)(u_{j,k}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_1} = t_j^a \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (2.100)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_2} = \bar{u}_j^1 / \bar{u}_j^1 \in (L^2(\partial \Gamma_2))^2 ; \rho, \mu, \lambda \in R_0^+ ; f_j \in (L^2(R_k))^3 \quad (2.101)$$

Para el caso del sólido viscoelástico como cuerpo de Voight, homogéneo e isótropo tendremos, el problema siguiente: (Chandrasekharaiah y Debnath; Continuum Mechanics, 1994), (Brown et al., Analysis of models for viscoelastic wave propagation, 2018).

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mu u_{j,kk}(\vec{x}, t) - (\mu + \lambda)(u_{k,k}(\vec{x}, t))_{,j} -$$

$$- \bar{\mu} \dot{u}_{j,kk}(\vec{x}, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda})(\dot{u}_{k,k}(\vec{x}, t))_{,j} = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (2.102)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (2.103)$$

$$(-\mu u_{j,k}(\vec{x}, t) - (\mu + \lambda)(u_{k,k}(\vec{x}, t))) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_1} +$$

$$+ (-\bar{\mu} \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda})(\dot{u}_{k,k}(\vec{x}, t))) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial \Gamma_1} / t_j^a \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (2.104)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_2} = \bar{u}_j^1 \Big|_{\partial \Gamma_2} / \bar{u}_j^1 \in (L^2(\partial \Gamma_2))^2 ; \rho, \mu, \lambda, \bar{\mu}, \bar{\lambda} \in R_0^+ \quad (2.105)$$

Para esta situación volvemos a utilizar la estrategia de formar con dos soluciones, que verifican idénticas condiciones iniciales y de borde la siguiente identidad

$$u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 v_j(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 v_j(\vec{x}, t) + \mu(v_j(\vec{x}, t) u_{j,kk}(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) v_{j,kk}(\vec{x}, t)) +$$

$$+ (\mu + \lambda)(v_j(\vec{x}, t)(u_{p,p}(\vec{x}, t))_{,j} - v_j(\vec{x}, t)(u_{p,p}(\vec{x}, t))_{,j}) = 0 \quad (2.106)$$

Probamos unicidad en la misma forma que en las páginas precedentes

$$\iiint_V d^3x (u_j(\vec{x}, 0) \partial_t v_j(\vec{x}, 0) - u_j(\vec{x}, 0) \partial_t v_j(\vec{x}, 0)) +$$

$$+ \mu \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t') u_{j,kk}(\vec{x}, t') - u_j(\vec{x}, t') v_{j,kk}(\vec{x}, t')) \right\} +$$

$$+ (\mu + \lambda) \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t') (u_{p,p}(\vec{x}, t'))_{,j} - v_j(\vec{x}, t') (u_{p,p}(\vec{x}, t'))_{,j}) \right\} =$$

$$= \iiint_V d^3x (u_j(\vec{x}, 0) \partial_t v_j(\vec{x}, 0) - u_j(\vec{x}, 0) \partial_t v_j(\vec{x}, 0)) +$$

$$+ \mu \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial \Gamma} dS (v_j(\vec{x}, t') u_{j,k}(\vec{x}, t') - u_j(\vec{x}, t') v_{j,k}(\vec{x}, t')) \hat{n}_k \right\} +$$

$$+ (\mu + \lambda) \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t') (u_{p,p}(\vec{x}, t'))_{,j} - v_j(\vec{x}, t') (u_{p,p}(\vec{x}, t'))_{,j}) \right\} \quad (2.107)$$

Como $v_j(\vec{x}, t)$ y $u_j(\vec{x}, t)$ satisfacen iguales condiciones de borde e iniciales se tiene que:

$$\begin{aligned} & \mu \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t') u_{j,kk}(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t') v_{j,kk}(\vec{x}, t)) \right\} + \\ & + (\mu + \lambda) \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x (v_j(\vec{x}, t') (u_{p,p}(\vec{x}, t'))_{,j} - v_j(\vec{x}, t) (u_{p,p}(\vec{x}, t'))_{,j}) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Que solo se cumple si y solo si:

$$v_j(\vec{x}, t) = u_j(\vec{x}, t)$$

Los problemas de existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones asociadas a problemas elastodinámicos, han sido tratados extensamente en Andrianov et al. (2021); Bloom (1981); Hetnarski y Ignaczak (2013) y Knops y Payne (1971). En algunos casos la prueba consiste en construir un funcional de energía que se asume convexo, y que para $E|_{t=0} = 0$, de donde se sigue la unicidad. Utilizando la primera desigualdad de Körn como se expresa en Oleinik et al. (1992), se prueban condiciones de estabilidad, local y asintótica de las soluciones.

Las soluciones $u_i(\vec{x}, t)$ son funciones vectoriales coercivas que verifican la siguiente expresión

$$\frac{u_i(x_i, t)x_i}{\|x_i\|_H} \rightarrow +\infty \quad \text{si } \|x_i\| \rightarrow \infty$$

El operador elastodinámico \mathcal{L} es autoadjunto y verifica

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u_i, u_i \rangle & \geq c \|u_i\|_H^2 \\ \langle \rho \partial_t^2 u_i - C_{ijkl} u_{k,lj}, u_i \rangle & \geq c \|u_i\|_H^2 \\ \langle \sigma_{ij} u_{j,k}, u_{k,i} \rangle & \geq c_1 \|u_{j,k}\|^2 \\ \langle M_{ij}^a p_{a,i}, p_{a,j} \rangle & \geq c_2 \|p_{a,i}\|^2 \\ c, c_1, c_2 & \in R_0^+ \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Formulación del problema microelastodinámico

«...Para que su horror sea perfecto, César, acosado al pie de una estatua por los impacientes puñales de sus amigos, descubre entre las caras y los aceros la de Marco Junio Bruto, su protegido, acaso su hijo, y ya no se defiende y exclama: “¡Tú también, hijo mío!”...»

La Trama, Jorge L. Borges

Resumen y objetivos:

Se formulan modelos microelastodinámicos y se construyen las soluciones semianalíticas en la forma de sistemas de ecuaciones integrales cuasilineales. Se describe e interpreta el problema de Eshelby, como dispositivo de anclaje de la teoría subsecuente.

- Describir detalladamente el problema de Eshelby y sus implicancias micromecánicas.
- Formular rigurosamente el problema dinámico de Eshelby, al que definimos como Modelo Microelastodinámico.
- Construir soluciones semianalíticas, y sus condiciones de validez, asociadas al problema microelastodinámico.

3.1 Consideraciones previas respecto del marco teórico a desarrollar

En el marco teórico que desarrollamos asumimos la validez de la teoría de Mindlin-Aifantis, también llamada de segundo gradiente (Coussy, 2004; Sciarra et al., 2007; Aifantis, 1994) aplicada a un medio poroso según el modelo u-p de Biot, donde u es el campo de desplazamientos en el esqueleto sólido y p son los campos de presiones de poro de agua y aire respectivamente, por lo expuesto es válida también la hipótesis de existencia de un tensor efectivo que generaliza el tensor de Cauchy. Suponemos inicialmente un sistema isotérmico, en las cercanías del equilibrio termodinámico, es válido además el principio de mezclas enunciado por A. Eringen.

Al esqueleto sólido lo suponemos elástico o en general viscoelástico, para el caso elastoplástico, se distinguen dos teorías que difieren conceptualmente en el enfoque que debe dársele a las variables internas. Por una parte, en el marco de la teoría de mezclas se asume que la inelasticidad está restringida al esqueleto sólido (Borja y Alarcón, 1995; Borja et al., 1998; Bennett et al., 2016), mientras que, siguiendo la teoría de medios porosos continuos de Coussy (2010), las fases porosas experimentan también efectos irreversibles como ser cambios en la porosidad (Coussy, 2004; Mrogiński, 2013). Las ecuaciones de evolución de los campos de presiones de poro se ob-

tienen por aplicación de la ley de Darcy y el principio de conservación de la masa, lo cual termina acoplando el campo de presiones de poro y el campo de desplazamientos.

En el esqueleto sólido se resuelve el problema de Eshelby en el sentido de determinar la estructura de una inclusión, de modo que, desde este marco teórico, se utiliza el término inclusión asociándolo al de microestructura y por ende definido en términos de fuerzas configuracionales expresadas en la configuración deformada.

El sistema obtenido por aplicación de las ecuaciones de conservación balance es de carácter hiperbólico-parabólico, termodinámicamente consistente, validando la desigualdad de Clausius-Duhem.

Se formulan los problemas de: valores iniciales (Problema de Cauchy) y de contorno, en este caso de tipo Neumann, y mixto, en este sentido el problema se dice bien puesto (Well-posed) en el sentido de Hadamard, se prueban condiciones de existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones fuertes o clásicas en espacios de Hilbert, o más generalmente en espacios de Sobolev adecuadamente definidos. Se persigue, por aplicación de los teoremas de representación de Green-Lagrange la obtención de soluciones fuertes o clásicas que, en general vendrán definidas en la forma de un sistema de ecuaciones integrales acopladas a las cuales denominamos *Representaciones Integrales de las Soluciones*.

Para la construcción de las Representaciones Integrales de las soluciones, se utiliza la técnica de las funciones de Green, calculando para cada clase de operador un tipo de función de Green consistente con la naturaleza de la función sobre la que actúa el operador, así entonces habrá una función de Green de carácter tensorial asociada al campo de desplazamiento, y, funciones de Green escalares asociadas a los campos de presión de poro de agua y aire. Se construye la siguiente forma asociada al problema de Neumann (Problema de Mandel en Geomecánica).

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_K} d^3x' (g_{jk}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \Sigma u_k(\vec{x}', t') - u_k(\vec{x}', t') \Sigma g_{kj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')) \right\} = \\ = \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_K} d^3x' (g_{jk}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') f_k(\vec{x}', t', u) - \right. \\ \left. - u(\vec{x}', t') \delta_{jk} (\delta(\vec{x} - \vec{x}', t - t') - 1/V)) \right\} \end{aligned}$$

Donde los operadores Σ , son auto-adjuntos, acotados y uniformemente continuos, sus espectros son completos y forman una base del espacio de Hilbert respectivo.

Utilizando el teorema de la divergencia en la expresión anterior se llega a la representación integral mencionada precedentemente. Respecto de los operadores parabólicos de porosidades el problema se formula de manera idéntica.

Respecto de la función de Green, esta aparece asociada a un problema Backward, y, en ese sentido es un problema mal puesto (Ill - posed) que debe simetrizarse previamente.

Para la formulación débil se definen distribuciones v y ψ , φ asociadas a los campos de desplazamientos y porosidades respectivamente, todo lo cual conduce a la construcción de elementos finitos mixtos.

Junto con los campos de desplazamiento se introducen formas análogas para los campos de presión de poro de agua y aire. Se construye la siguiente forma asociada al problema de Neumann

(Problema de Mandel en Geomecánica)

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_K} d^3x' (g_\alpha(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \Xi p_\alpha(\vec{x}', t') - p_\alpha(\vec{x}', t') \Xi g_\alpha(\vec{x} - \vec{x}', t - t')) \right\} = \\ = \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_K} d^3x' (g_\alpha(\vec{x} - \vec{x}', t - t') f(t', p_\alpha) + \right. \\ \left. + (-\delta_\alpha(\vec{x} - \vec{x}', t - t') - 1/V) p_\alpha(\vec{x}', t')) \right\} \end{aligned}$$

El problema de Neumann, en general no tiene solución única de manera que se añade una condición de resolubilidad quedando así rigurosamente formulado, esta básicamente consiste en construir una solución constante que se asume como un promedio de la solución completa

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma} dS C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k \right\} = - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_K} d^3x' S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\} \\ \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma} dS t_j^0(\vec{x}', t') \hat{n}_k \right\} = 0 \end{aligned}$$

Para los campos de desplazamientos y expresiones análogas para los campos de porosidades

3.2 Problema de Eshelby

La presencia de diferentes tipos de defectos, en los materiales, a escala micro y nano, impactan fuertemente en las propiedades efectivas de estos a escala macroscópica. Respecto de estas microestructuras, distribuidas, según múltiples escalas de longitud y energía, existen diversas aproximaciones teóricas, todas ellas, en mayor o menor medida hacen uso del concepto de auto deformación, y asociada a esta idea aparece el concepto termodinámico de transición de fase. Así entonces, podemos pensar el problema micromecánico como proceso de transición de fase de una configuración no deformada a otra deformada, inducida por una nueva clase de objeto físico llamado fuerza configuracional, los estados meta-estables inducidos por estas, se expresan en términos de auto deformaciones (Eshelby, 1957).

Las fuerzas configuracionales son acciones dinámicas que reconfiguran geométrica y energéticamente un material, operando sobre los defectos del sólido y produciendo a escala macroscópica las propiedades efectivamente medidas. Este nuevo tipo de fuerza no reconoce un origen newtoniano, en el sentido de que no se trata de un efecto inercial sino energético geométrico, aunque participa de ecuaciones de conservación balance claramente newtonianas. Así como en mecánica clásica la presencia de fuerzas está asociada a la variación instantánea del momentum lineal, en micromecánica las fuerzas configuracionales están vinculadas al cambio instantáneo de una nueva función vectorial llamada pseudo-momentum.

Por todo lo expresado, queda claro que surge aquí, una nueva mecánica denominada *Mecánica Configuracional* o *Mecánica Material*, esta última denominación aparece relacionada con el hecho de que, el sistema de ecuaciones de este tipo de modelos encuentra su representación natural en la configuración no deformada, material o lagrangiana, algunos autores, G. Maugin, M. Gurtin, entre otros, llaman a este nuevo corpus teórico, Mecánica Eshelbiana, recordando así la obra fundacional de J. Eshelby en este campo, al introducir el tensor de Energía impulso que lleva su nombre y que está indisolublemente unida al cálculo de las integrales J, típicas de la teoría de

fractura. De hecho, los primeros trabajos de Eshelby (1957, 1958, 1959) surgen al intentar explicar los fenómenos de fractura dúctil y frágil en sólidos.

Existen, otras perspectivas teóricas, a partir de la cuales son posibles de abordar los problemas micromecánicos, por ejemplo, la *teoría de la homogeneización*. En esta versión, se parte de la definición de un Elemento de Volumen Representativo o (RVE) por sus siglas en inglés, y luego, a través de técnicas de promediación que se desarrollan sobre el sistema de ecuaciones de gobierno, se obtienen las tensiones y deformaciones residuales como correcciones a las denominadas ecuaciones constitutivas.

Para generar estas correcciones se definen múltiples escalas que conectan el modelo micromecánico (definido a partir de un RVE consistente) con el macromecánico, y es a partir de estas que se realiza el proceso de promediación ya mencionado (Tartar, 1974; Bensoussan y Lions, 1973; Lions, 1984)

Otra visión teórica, es la de de Souza Neto y Feijóo (2006); de Souza Neto et al. (2015), los cuales proponen criterios variacionales microscópicos, escritos sobre los RVE, definidos adecuadamente, y, a partir de técnicas variacionales clásicas, obtienen el sistema de ecuaciones de gobierno multi-escala, lo cual conduce naturalmente a la obtención de las tensiones y deformaciones no mecánicas, que, de nuevo corrigen las ecuaciones constitutivas, empleando las condiciones de Hill-Mandel como nexo para el salto de escala.

3.3 Formulación del problema de Eshelby

Un aporte sustantivo de Eshelby (1957) destinado a la comprensión de estos es su experimento pensado (Gedanken). Los cuatro pasos del experimento virtual para construir la solución de Eshelby son los siguientes (Barnett y Cai, 2018; Meyer, 2014; Böhm, 1998):

- Se tienen Un sólido elástico lineal con volumen V , y superficie S (matriz). Una inclusión V_0 con superficie S_0 está incrustada en la matriz;
- Se suprime la inclusión de la matriz;
- Se aplica la tracción superficial T a S_0 para que la inclusión vuelva a su forma original.
- Se vuelve a incrustar la inclusión en la matriz y se quita la tracción T

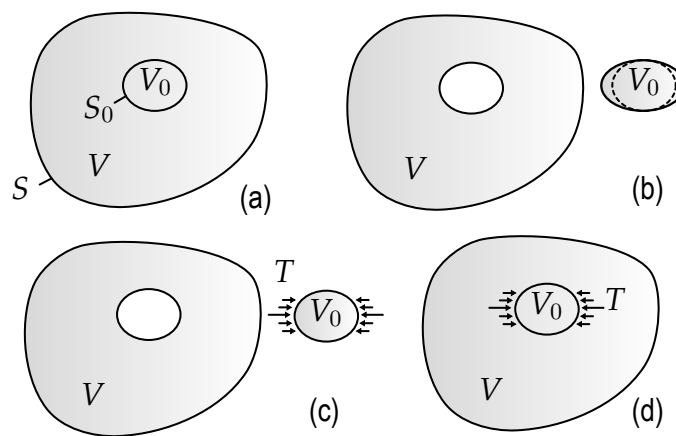


Figura 3.1: Experimento de Eshelby

El problema de Eshelby con condiciones de Neumann, en términos de la secuencia experi-

mental anterior se escribe de la forma

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^* \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \epsilon_{kl}^e = C_{ijkl}^e (S_{klmn} \epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^e \epsilon_{kl}^e = C_{ijkl}^e (S_{klmn} \epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^e \epsilon_{kl}^e = S_{ijmn}^{Es} \epsilon_{mn}^* - C_{ijkl}^e \epsilon_{kl}^* \cong S_{ijmn}^{Es} \epsilon_{mn}^* \\ C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) &= -S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}) \text{ en } R_k \quad ; \quad S_{ijmn}^{Es} = C_{ijkl}^e S_{klmn}\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl}^*(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.2)$$

$$C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_i^a \in (L(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.3)$$

$\epsilon_{kl,j}^*(\vec{x})$: son las deformaciones residuales no mecánicas.

Condiciones sobre las matrices

$$\begin{aligned}C_{ijkl}^e, S_{ijkl}^{Es} &\in V^{3 \times 3 \times 3 \times 3} \quad ; \quad C_{ijkl}^e = C_{jikl}^e = C_{ijlk}^e = C_{klij}^e \quad ; \quad S_{ijkl}^{Es} = S_{jikl}^{Es} = S_{ijlk}^{Es} \\ C_{ijkl}^e \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} &> a_0 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad ; \quad S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{ij}^* \epsilon_{kl}^* > b_0 \epsilon_{ij}^* \epsilon_{ij}^* \quad ; \quad a_0, b_0 \in R_0^+ \\ \epsilon_{ij} &\in F(C^e) \quad ; \quad \epsilon_{ij}^* \in F(S^{Es})\end{aligned}$$

En términos de las condiciones de borde impuestas se escribe la solución de la forma:

$$\begin{aligned}u_i(\vec{x}) &= \langle u(\vec{x}) \rangle - \iiint_V d^3x' g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') S_{mjkl}^{Es} \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}') + \\ &+ \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') S_{mjkl}^{Es} \epsilon_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') t_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Donde la función de Green verifica:

$$C_{ijkl}^e g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) = -\delta_{in}(\delta(\Delta\vec{x}) - (1/V)) \quad \text{en } R_k \quad (3.5)$$

$$C_{ijkl}^e g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = 0 \quad ; \quad C_{ijkl}^e g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (3.6)$$

La condición de resolubilidad es:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') S_{mjkl}^{Es} \epsilon_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') t_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \\ = \iiint_V d^3x' (g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') S_{mjkl}^{Es} \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}'))\end{aligned}\quad (3.7)$$

3.3.1 Justificación de la relación entre el segundo tensor de Eshelby y el tensor de cuarto orden de Eshelby-Mura

Una inclusión no homogénea, Ω , con una forma arbitraria y cualquier distribución de deformación inelástica, incrustada dentro de un cuerpo homogéneo y sometida a cargas externas arbitrarias, puede ser igualada al efecto que produce una inclusión homogénea que acompaña a

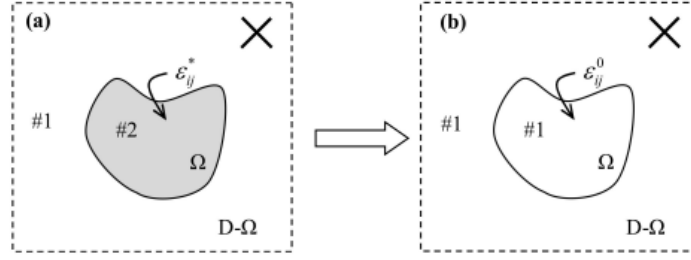


Figura 3.2

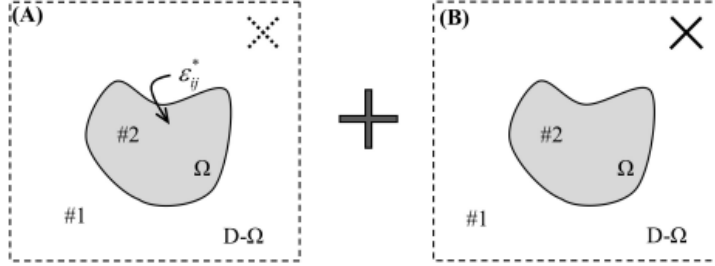


Figura 3.3

una distribución de deformación propia equivalente dentro de ella. Las distribuciones de tensión y deformación total en el sistema no cambian, es lo expresado gráficamente en las Figuras 3.2 y 3.3.

La justificación formal de lo expresado en los gráficos precedentes, puede expresarse en la forma siguiente:

$$C_{ijkl}^*(\epsilon_{kl} + \epsilon_{kl}^X - \epsilon_{kl}^*) = C_{ijkl}^e(\epsilon_{kl} + \epsilon_{kl}^X - \epsilon_{kl}^0) \quad \forall \vec{x} \in \Omega$$

C_{ijkl}^* , C_{ijkl}^e : son las constantes elásticas de la inclusión y del sustrato respectivamente.

ϵ_{kl}^* : Deformación residual en la inclusión inhomogénea

ϵ_{kl}^X : Deformación elástica en la inclusión homogénea inducida por fuerzas exteriores conocidas, que se denotan como X

ϵ_{kl}^0 : Deformación residual en la inclusión homogénea.

Si no hay fuerzas exteriores:

$$C_{ijkl}^*(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) = C_{ijkl}^e(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0) \quad \forall \vec{x} \in \Omega \Rightarrow$$

$$\epsilon_{kl} = C_{ijkl}^* : \epsilon_{mn}^* \Rightarrow \sigma_{kl} = (C_{lkmn}^e : C_{mnpq}^*) : \epsilon_{sp}^* = S_{lksp}^{Es} \epsilon_{sp}^*$$

$$S_{lksp}^{Es} = C_{lkmn}^e \bar{S}_{mnpq}^{Es} \Rightarrow \begin{cases} K_{kl} = W \delta_{kl} - (S_{kmnp}^{Es} : \epsilon_{sp}^*) \cdot u_{m,l} \\ K_{AB} = W \delta_{AB} - J(F_{Aj}^T \cdot (S_{jlsp}^{Es} : \epsilon_{sp}^*) \cdot F_{lB}^{-T}) \cdot u_{m,l} \end{cases}$$

Relación entre el tensor de Eshelby de segundo orden y el tensor de Eshelby Mura de cuarto orden en las configuraciones deformada y no deformada respectivamente

$$S_{kmnp}^{Es} \in V^{3 \times 3} ; S_{kmnp}^{Es} = S_{mkps}^{Es} = S_{kmps}^{Es}, \text{ es un tensor definido positivo.}$$

Relación entre el tensor de cuarto orden de Eshelby–Mura y el tensor de segundo orden de Eshelby en la configuración no deformada:

$$S_{jklm}^{Es} = J^{-1}(F_{jA} K_{AB} F_{Bk}^{-1})(\epsilon_{lm}^*)^{-1} - J^{-1}(F_{jA}(W \delta_{AB}) F_{Bk}^{-1})(\epsilon_{lm}^*)^{-1}$$

A continuación, formulamos un conjunto de problemas de Eshelby de gran interés en micro-mecánica, en la configuración no deformada

- Problema de Eshelby como transición de fase, de la configuración no deformada a la deformada Maugin (1979)

$$\begin{aligned} -\mathbf{P}_{jA,A} &= -\mathbf{S}_{jAkB}^E \boldsymbol{\varepsilon}_{kB,A}^* \\ -\mathbf{P}_{jA} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} &= -\mathbf{S}_{jAkB}^E \boldsymbol{\varepsilon}_{kB}^* \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \end{aligned}$$

Donde se han definido:

$$\sigma_{jk}(\vec{x}) = \mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}) \quad ; \quad \dot{\sigma}_{jk}(\vec{x}, t) = \mathbf{C}_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t) \quad (3.8)$$

$$\sigma_{jk} = J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T \quad ; \quad \sigma_{jk} = J^{-1} \mathbf{F}_{jA}^{-T} \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T \quad (3.9)$$

$$\dot{\sigma}_{jk}(\vec{x}, t) = \partial_t (J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T) \quad ; \quad \dot{\sigma}_{jk}(\vec{x}, t) = \partial_t (J^{-1} \mathbf{F}_{jA}^{-T} \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) \quad (3.10)$$

Condición de equilibrio y fuerza configuracional

$$-\sigma_{jk,k} = \rho f_j(\vec{x}) \quad \text{en } R_k \quad (3.11)$$

$$\rho f_j(\vec{x}) = -\mathbf{S}_{jklm}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{lm,k}^*(\vec{x}) \quad \text{en } R_k \quad (3.12)$$

$$\mathbf{S}_{jklm}^{Es} = J^{-1} (\mathbf{F}_{jA} \mathbf{K}_{AB} \mathbf{F}_{Bk}^{-1}) (\boldsymbol{\varepsilon}_{lm}^*)^{-1} - J^{-1} (\mathbf{F}_{jA} (W \boldsymbol{\delta}_{AB}) \mathbf{F}_{Bk}^{-1}) (\boldsymbol{\varepsilon}_{lm}^*)^{-1} \quad (3.13)$$

- Problema de Eshelby en la configuración deformada

$$-\mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}) = -\mathbf{S}_{jklm}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{lm,k}^*(\vec{x}) \quad \text{en } R_k \quad (3.14)$$

$$-\mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -\mathbf{S}_{iklm}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{lm}^*(\vec{x}) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.15)$$

$$-\mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}) n_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_j^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.16)$$

- Problema de Eshelby en función del primer tensor de Piola Kirchhoff, expresado en la configuración deformada, con condición de borde sobre la interfaz inclusión-matriz $\partial\Gamma_{in}$.

$$(-J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T)_{,j} = -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kB,A}^*(x, t) \quad \text{en } R_k \quad (3.17)$$

Se impone una condición de Neumann en la interfaz inclusión-matriz

$$(-J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kB}^*(x, t) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.18)$$

$$(-J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.19)$$

- Problema de Eshelby en función del segundo tensor de Piola Kirchhoff, expresado en la configuración deformada

$$(-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^{-T} \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T)_{,j} = -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kB,A}^*(x, t) \quad \text{en } R_k \quad (3.20)$$

$$(-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^{-T} \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kB}^*(x, t) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.21)$$

$$(-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^{-T} \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.22)$$

Condición de equilibrio viscoelástica con fuerzas configuracionales expresadas en la configuración deformada

$$-\sigma_{jk,k}(\vec{x}, t) - \dot{\sigma}_{jk,k}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}) \quad \text{en } R_k \quad (3.23)$$

$$\sigma_{jk}(\vec{x}, 0) = \sigma_{jk}^0 / \sigma_{jk}^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^{3 \times 3} \quad (3.24)$$

$$\rho f_j(\vec{x}) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}) \quad \text{en } R_k \quad (3.25)$$

Condición de equilibrio viscoelástica con memoria y fuerza configuracional

$$-\sigma_{jk,k}(\vec{x}, t) - (g(s) \circ \dot{\sigma}_{jk,k}(\vec{x}, s)) = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (3.26)$$

$$\sigma_{jk}(\vec{x}, 0) = \sigma_{jk}^0 / \sigma_{jk}^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^{3 \times 3} \quad ; \quad g \in L^2(\bar{R}_k^0) \quad (3.27)$$

$$\rho f_j(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (3.28)$$

Condición de equilibrio viscoelástica con memoria y fuerza configuracional

$$-\sigma_{jk,k}(\vec{x}, t) - (g(s) \circ \sigma_{jk,k}(\vec{x}, s)) + (\bar{g}(s) \circ \dot{\sigma}_{jk,k}(\vec{x}, s)) = \rho f_j(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k$$

$$\rho f_j(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad ; \quad g, \bar{g} \in L^2(\bar{R}_k^0) \quad (3.29)$$

$$\sigma_{jk}(\vec{x}, 0) = \sigma_{jk}^0 / \sigma_{jk}^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^{3 \times 3} \quad (3.30)$$

- Problema de Eshelby viscoelástico en la configuración deformada

$$-C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (3.31)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (3.32)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}) - C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)) n_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} = -S_{iklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}) n_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \quad (3.33)$$

$$(C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)) n_k \Big|_{\partial \Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial \Gamma_1} / t_j^a \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (3.34)$$

- Problema de Eshelby viscoelástico no local en la configuración deformada

$$-C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - (g(s) \circ C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, s)) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (3.35)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} (-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}) - (g(s) \circ C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, s)) n_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} &= \\ &= -S_{iklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}) n_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - (g(s) \circ C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, s)) n_k \Big|_{\partial \Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial \Gamma_1} \quad (3.38)$$

$$t_j^a \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad ; \quad g \in L^2(\bar{R}_k^0)$$

- Problema de Eshelby en función del primer tensor de Piola Kirchhoff, de tipo viscoelástico

expresado en la configuración deformada

$$(J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T)_{,j} + \partial_t (J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T)_{,j} = -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{kB,A}^*(x, t) \text{ en } R_k \quad (3.39)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (3.40)$$

$$(-(J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T) - \partial_t (J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T)) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} = -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{kB}^*(x, t) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \quad (3.41)$$

$$(-(J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T) - \partial_t (J^{-1} \mathbf{P}_{iA} \mathbf{F}_{Aj}^T)) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial \Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (L^2(\partial \Gamma_{in}))^2 \quad (3.42)$$

- Problema de Eshelby en función del segundo tensor de Piola Kirchhoff, de tipo viscoelástico expresado en la configuración deformada

$$(-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T)_{,j} - \partial_t (J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T)_{,j} = -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{kB,A}^*(x, t) \text{ en } R_k \quad (3.43)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} (-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) - \partial_t (J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} &= \\ &= -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{kB}^*(x, t) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$(J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial \Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (3.46)$$

- Problema de Eshelby en función del segundo tensor de Piola Kirchhoff, de tipo viscoelástico con memoria, expresado en la configuración deformada

$$\begin{aligned} (-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T)_{,j} - (g(s) \circ \partial_s (J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T))_{,j} &= \\ &= -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{kB,A}^*(x, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} (-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) - (g(s) \circ \partial_t (J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T)) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} &= \\ &= -\mathbf{S}_{iAkB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{kB}^*(x, t) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$(-J^{-1} \mathbf{F}_{iA}^T \mathbf{S}_{AB} \mathbf{F}_{Bj}^T) \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial \Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (3.50)$$

- Problema de Eshelby viscoelástico con fuerza configuracional asociada una inclusión viscoelástica en la configuración deformada (Shahidi et al., 2014; Laws, 1980; Barthélémy et al., 2016).

$$\begin{aligned} -\mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t) &= -\mathbf{S}_{jklm}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{lm,k}^*(\vec{x}, t) + \\ &- \mathbf{S}_{jklm}^{Ev} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} (-\mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}) - \mathbf{C}_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)) n_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} &= \\ &= -\mathbf{S}_{iklm}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{lm}^*(\vec{x}, t) n_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} - \mathbf{S}_{jklm}^{Ev} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{lm}^*(\vec{x}, t) n_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$(-\mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)) n_k \Big|_{\partial \Gamma_1} = \mathbf{t}_j^a \Big|_{\partial \Gamma_1} / \mathbf{t}_j^a \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (3.54)$$

- Problema de Eshelby viscoelástico no local con fuerza configuracional asociada una inclusión viscoelástica también no local, en la configuración deformada

$$-C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - (g \circ C_{jklm}^v \dot{u}_{l,mk}(\vec{x}, t)) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) - (\bar{g} \circ S_{jklm}^{Ev} \dot{\epsilon}_{lm,k}^*(\vec{x}, t)) \text{ en } R_k ; g \in L^2(\bar{R}_k^0) ; \bar{g} \in L^2(\bar{R}_k^0) \quad (3.55)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad (3.56)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}) - (g \circ C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))) n_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{iklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) n_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} - (\bar{g} \circ S_{jklm}^{Ev} \dot{\epsilon}_{lm}^*(\vec{x}, t)) n_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.57)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - (g \circ C_{jklm}^v \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t))) n_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_j^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.58)$$

- Problema de Eshelby en términos del operador de Stokes asociado a la difusión de esfuerzos (Showalter, 2015)

$$\partial_t \epsilon_{jk}(\vec{x}, t) - C_{jklmnp}^e \epsilon_{np,ml}(\vec{x}, t) = -S_{jklmnp}^{Es} \epsilon_{np,ml}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (3.59)$$

$$\epsilon_{jk}(\vec{x}, 0) = \epsilon_{jk}^0 / \epsilon_{jk}^0 \in (H_0^1(D_k))^{3 \times 3} \quad (3.60)$$

$$C_{jklmnp}^e \epsilon_{np,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_l \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{jklmnp}^{Es} \epsilon_{np,m}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_l \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.61)$$

$$C_{jklmnp}^e \epsilon_{np,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_l \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_{jk}^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_{jk}^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^{2 \times 2} \quad (3.62)$$

- Problema de Eshelby en términos del operador de Stokes asociado a la difusión de esfuerzos

$$\partial_t u_{j,k}(\vec{x}, t) - C_{jklmnp}^e (u_{p,n}(\vec{x}, t))_{,lm} = -S_{jklmnp}^{Es} \epsilon_{np,ml}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (3.63)$$

$$u_{j,k}(\vec{x}, 0) = u_{j,k}^0 / u_{j,k}^0 \in (H_0^1(D_k))^{3 \times 3} \quad (3.64)$$

$$-C_{jklmnp}^e (u_{p,n}(\vec{x}, t))_{,m} \hat{n}_l \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{jklmnp}^{Es} \epsilon_{np,m}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_l \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.65)$$

$$-C_{jklmnp}^e (u_{p,n}(\vec{x}, t))_{,m} \hat{n}_l \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_{jk}^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_{jk}^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^{2 \times 2} \quad (3.66)$$

- Problema de Eshelby en términos del operador de Stokes asociado a la difusión de desplazamientos

$$\partial_t u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (3.67)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad (3.68)$$

$$-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.69)$$

$$-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_j^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.70)$$

- Problema de Eshelby en términos del operador de Stokes con memoria asociado a la difusión

de desplazamientos (Difusión en el sentido de Showalter, 1997)

$$\partial_t u_j(\vec{x}, t) - (g \circ C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, s)) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \quad (3.71)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} - (g \circ C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, s)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} &= \\ &= -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} ; \quad g \in L^2(\bar{R}_k^0) \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$- (g \circ C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_j^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.74)$$

- Problema de Eshelby en términos del operador de Stokes viscoelástico, asociado a la difusión de desplazamientos (Showalter, 2005)

$$\begin{aligned} \partial_t u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - (g \circ C_{jklm}^v \partial_s u_{l,mk}(\vec{x}, s)) &= \\ &= -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} (-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - (g \circ C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, s))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} &= \\ &= -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - (g \circ C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (3.78)$$

$$g \in L^2(\bar{R}_k^0) ; \quad t_j^a \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2$$

3.4 Problema de Eshelby dinámico

Formulamos rigurosamente el problema de Eshelby dinámico unívoco en la forma siguiente: Sea B una región regular y acotada de R^3 , con frontera ∂B , y sea: \hat{n} la normal exterior a ∂B . Sea B_{in-M} una región regular y acotada de R^3 , interior a B , con frontera ∂B_{in-M} , y sea: \hat{n}_{in-M} la normal exterior a ∂B_{in-M} . Establecemos que los siguientes datos se asignan sobre B y B_{in-M} respectivamente.

- El campo elástico o de Navier-Cauchy $\sigma[\bullet](\vec{x})$; donde $\sigma[\bullet]$ es una aplicación sobre, que va de σ (el espacio de los tensores de segundo orden) dentro de $\text{sim}\sigma[\bullet]$ (el subespacio de tensores simétricos de σ).
- El campo de tensiones residuales o de Eshelby $\sigma^*[\bullet](\vec{x})$; donde $\sigma^*[\bullet]$ es una aplicación sobre, que va de σ^* (el espacio de los tensores de segundo orden) dentro de $\text{sim}\sigma^*[\bullet]$ (el subespacio de tensores simétricos de σ).
- La densidad de campo $\rho(\vec{x}) > 0$
- Los campos de desplazamiento y velocidades iniciales:

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \quad \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = v_j^0 / v_j^0 \in (L^2(D_k))^3$$

- Se elige un campo de fuerzas volumétricas $f_j \in B \times R_0^+$, asociado al campo de Navier-Cauchy.

- f) Se establecen los campos de desplazamientos y tracciones sobre sendas porciones de superficies de ∂B , llamadas ∂B_1 y ∂B_2 que verifican $\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2$; $\partial B_1 \cap \partial B_2 = \emptyset$, respecto del campo de Navier-Cauchy:

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_1} = u_j^1 \Big|_{\partial \Gamma_1} / u_j^1 \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 ; \partial \Gamma_1 = \partial B_1 \times R_0^+$$

$$\sigma_{ij} \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_2} = t_j^a(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_2} / t_j^a(\vec{x}, t) \in (L^2(\partial \Gamma_2))^2 ; \partial \Gamma_2 = \partial B_2 \times R_0^+$$

- g) Se establecen los campos de tracciones sobre la superficies de ∂B_{in-M} que están asociados al problema de Eshelby

$$\sigma_{ij}^* \hat{n}_j \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} = t_j^*(\vec{x}, t) \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} / t_j^*(\vec{x}, t) \in (L^2(\partial \Gamma_2))^2 ; \partial \Gamma_{In} = \partial B_{In} \times R_0^+$$

Formulación del problema de Eshelby dinámico con condiciones de borde tipo Neumann para el sistema elastodinámico configuracional en la referencia deformada (Markenscoff, 2014; Markenscoff y Ni, 2016; Wang et al., 2005)

$$f_j(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) / \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) = \epsilon_{lm}^* h(t - s_r^2 x_r^2)$$

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (3.79)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = v_j^0 / v_j^0 \in (L^2(D_k))^3$$

$$-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \quad (3.80)$$

$$-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_1} = t_j^1 \Big|_{\partial \Gamma_1} / t_j^1 \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (3.81)$$

$$S_{jklm}^{Es} = J^{-1} (F_{jA} K_{AB} F_{Bk}^{-1}) (\epsilon_{lm}^*)^{-1} - J^{-1} (F_{jA} (W \delta_{AB}) F_{Bk}^{-1}) (\epsilon_{lm}^*)^{-1}$$

Construcción de la función de Green

$$\rho \partial_t^2 g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = -\delta_{nj} (\delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (1/V)) \quad (3.82)$$

$$g_{nj}(\Delta \vec{x}, 0) = 0 ; \partial_t g_{nj}(\Delta \vec{x}, 0) = 0 \quad (3.83)$$

$$-C_{jklm}^e g_{nl,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} = 0 \quad (3.84)$$

$$-C_{jklm}^e g_{nl,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_1} = 0 \quad (3.85)$$

Multiplicamos el operador elastodinámico por la función de Green, y el operador asociado a la función de Green por la amplitud del campo de desplazamiento obtenemos la forma siguiente

$$\rho_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) =$$

$$= -g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad (3.86)$$

$$\rho u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - u_n(\vec{x}, t) C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) =$$

$$= u_n(\vec{x}) \delta_{nj} (\delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (1/V)) \quad (3.87)$$

Sustrayendo convenientemente llegamos a la expresión operacional siguiente

$$\begin{aligned} \rho g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \rho u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) + \\ + g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - u_n(\vec{x}, t) C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = \\ = -g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}) - u_n(\vec{x}) \delta_{nj}(\delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (1/V)) \quad (3.88) \end{aligned}$$

Utilizando la regla de derivación de un producto de funciones, tenemos, para a primera diferencia del primer miembro la expresión

$$\begin{aligned} \rho g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \rho u_j(\vec{x}, t) \partial_t^2 g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = \\ = \rho \partial_t (g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \partial_t u_j(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) \partial_t g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t)) \\ - \partial_t g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \partial_t u_j(\vec{x}, t) + \partial_t u_j(\vec{x}, t) \partial_t g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = 0 \quad (3.89) \end{aligned}$$

Procediendo análogamente para el segundo término, tendremos:

$$\begin{aligned} g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - u_n(\vec{x}, t) C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = \\ = (g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - u_n(\vec{x}, t) C_{jklm}^e g_{nl,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t)),_k \\ - g_{nj,k}(\Delta \vec{x}, \Delta t) C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + u_{n,k}(\vec{x}, t) C_{jklm}^e g_{nl,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = 0 \quad (3.90) \end{aligned}$$

Integrando y aplicando el teorema de la divergencia tenemos la representación de la solución

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Gamma_{in}} dS (g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}') C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}')) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} + \oint_{\partial \Gamma_1} dS (g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}') C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}')) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_1} \\ = - \iiint_V d^3 x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}') S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}') - u_n(\vec{x}) + \langle u_n(\vec{x}) \rangle \quad (3.91) \end{aligned}$$

La representación de la solución será:

$$\begin{aligned} u_n(\vec{x}, t) = \langle u_n(\vec{x}, t) \rangle - \\ - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3 x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\} + \\ + \iiint_V d^3 x' (u_j(\vec{x}', 0) (\partial_t g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t)) - g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_j(\vec{x}', 0)) + \\ - \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial \Gamma_{in}} dS (g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t')) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \right\} - \\ - \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial \Gamma_1} dS (g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t')) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_1} \right\} \quad (3.92) \end{aligned}$$

La condición de resolubilidad del problema de Neumann será

$$\int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \right\} = \quad (3.93)$$

$$= - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\}$$

$$\int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_1} dS C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} = 0 \quad (3.94)$$

La formulación del problema mixto será:

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad (3.95)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (3.96)$$

$$- C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.97)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = \bar{u}_j^1 \Big|_{\partial\Gamma_1} / \bar{u}_j^1 \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.98)$$

Construcción de la función de Green

$$\rho \partial_t^2 g_{nj} - C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\Delta\vec{x}, \Delta t) = -\delta_{nj} \delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) \quad (3.99)$$

$$g_{nj}(\Delta\vec{x}, 0) = 0 ; \partial_t g_{nj}(\Delta\vec{x}, 0) = 0 \quad (3.100)$$

$$- C_{jklm}^e g_{nl,m}(\Delta\vec{x}, \Delta t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = 0 \quad (3.101)$$

$$g_{nj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (3.102)$$

Procediendo análogamente respecto del caso anterior, se obtiene la representación de la solución siguiente:

$$\begin{aligned} u_n(\vec{x}, t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\} + \\ & + \iiint_V d^3x' (u_j(\vec{x}', 0) \partial_t g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t) - g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_j(\vec{x}', 0)) + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_1} dS (u_j(\vec{x}', t') C_{jklm}^e g_{nl,m}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \hat{n}_k) \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} - \\ & - \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_1} dS (g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k) \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \end{aligned} \quad (3.103)$$

La formulación para el problema de Robin será:

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad (3.104)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \lambda_{1,2} \in R_0^+ \quad (3.105)$$

$$\partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (3.106)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k + \lambda_1 u_j(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.107)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k + \lambda_2 u_j(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_j^1 \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} / \mathbf{t}_j^1 \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.108)$$

Construcción de la función de Green

$$\rho \partial_t^2 g_{nj} - C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = -\delta_{nj} \delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) \quad (3.109)$$

$$g_{nj}(\Delta \vec{x}, 0) = 0 ; \partial_t g_{nj}(\Delta \vec{x}, 0) = 0 \quad (3.110)$$

$$(-C_{jklm}^e g_{nl,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \hat{n}_k + \lambda_1 g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = 0 \quad (3.111)$$

$$(-C_{jklm}^e g_{nl,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k + \lambda_1 g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t)) \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (3.112)$$

Procediendo análogamente respecto del caso anterior, se obtiene la representación de la solución siguiente

$$\begin{aligned} u_n(\vec{x}, t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\} + \\ & + \iiint_V d^3x' (u_j(\vec{x}', 0) \partial_t g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t) - g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_j(\vec{x}', 0)) + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_1} dS g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') (\lambda_1 u_j(\vec{x}', t') - C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \right\} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_1} dS g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') (\lambda_2 u_j(\vec{x}', t') - C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k) \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \quad (3.113) \end{aligned}$$

La condición de resolubilidad será para este caso escrita en la forma:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}', t') \right\} = \\ = \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' u_j(\vec{x}', t') C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \right\} \quad (3.114) \end{aligned}$$

El problema mixto Robin-Dirichlet se escribe en la forma:

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (3.115)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (3.116)$$

$$(-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k + \lambda_1 u_j(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.117)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \bar{u}_j^1 \Big|_{\partial\Gamma_1} / \bar{u}_j^1 \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 ; \lambda_1 \in R_0^+ \quad (3.118)$$

La función de Green satisfará el sistema

$$\rho \partial_t^2 g_{nj} - C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = -\delta_{nj} \delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) \quad (3.119)$$

$$g_{nj}(\Delta \vec{x}, 0) = 0 ; \partial_t g_{nj}(\Delta \vec{x}, 0) = 0 \quad (3.120)$$

$$(-C_{jklm}^e g_{nl,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \hat{n}_k + \lambda_1 g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t)) \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} = 0 \quad (3.121)$$

$$g_{nj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_1} = 0 ; \lambda_1 \in R_0^+ \quad (3.122)$$

La representación de la solución será:

$$\begin{aligned} u_n(\vec{x}, t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\} + \\ & + \iiint_V d^3x' (u_j(\vec{x}', 0)(g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')) - g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_j(\vec{x}', 0)) + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial \Gamma_{in}} dS g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') (\lambda_1 u_j(\vec{x}', t') - C_{jklm}^e u_{l,m} \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}}) \right\} - \\ & - \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial \Gamma_1} dS g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') (\lambda_1 g_{nj}(\vec{x}', t') - \right. \\ & \left. - C_{jklm}^e g_{nl,m}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \hat{n}_k) \Big|_{\partial \Gamma_1} \right\} \quad (3.123) \end{aligned}$$

La condición de resolubilidad será para este caso escrita en la forma:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}', t') \right\} = \\ = \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' u_j(\vec{x}', t') C_{jklm}^e g_{nl,mk}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \right\} \quad (3.124) \end{aligned}$$

Formulación del problema no lineal con condiciones de tipo Neumann

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e (u_{p,m}(\vec{x}, t) u_{p,l}(\vec{x}, t))_{,k} = \\ = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) ; u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad (3.125) \end{aligned}$$

$$\partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (3.126)$$

$$-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in-M}} \quad (3.127)$$

$$-C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_1} = t_j^1 \Big|_{\partial \Gamma_1} / t_j^1 \in (L^2(\partial \Gamma_1))^2 \quad (3.128)$$

De nuevo utilizando el teorema de representación de Green-Lagrange, la función de Green definida previamente y las ecuaciones de movimiento (3.125), se construye la representación integral de la solución, la cual en general será semi-analítica, dado que en general las fuerzas exteriores y la propia estructura del tensor de Eshelby podrían ser cuasilineales, por ejemplo, de la forma.

$$\begin{aligned} f_j(\vec{x}, t) = & -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) - S_{jklm}^{Es} (\epsilon_{mn}^*(\vec{x}, t) K_{np} \epsilon_{pl}^*(\vec{x}, t))_{,k} \\ f_j(\vec{x}, t) = & -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) - S_{jklm}^{Es} (\epsilon_{mA}^*(\vec{x}, t) K_{AB} \epsilon_{Bl}^*(\vec{x}, t))_{,k} \end{aligned}$$

La representación integral de solución será

$$\begin{aligned}
 u_n(\vec{x}, t) = & \langle u_n(\vec{x}, t) \rangle - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\} - \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e (u_{p,m}(\vec{x}', t') u_{p,l}(\vec{x}', t'))_{,k} \right\} + \\
 & + \iiint_V d^3x' (u_j(\vec{x}', 0) (\partial_t g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t)) - g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_j(\vec{x}', 0)) + \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t')) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \right\} - \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_1} dS (g_{nj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t')) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \quad (3.129)
 \end{aligned}$$

$$- \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' C_{jklm}^e (u_{p,m}(\vec{x}', t') u_{p,l}(\vec{x}', t'))_{,k} \right\} \quad (3.130)$$

$$\int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_1} dS C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} = 0 \quad (3.131)$$

Condición de resolubilidad del problema de Neumann

$$\int_0^t dt' \left\{ \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}', t') \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \right\} = - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}', t') \right\} -$$

3.4.1 Solución semi-analítica del problema visco-elastodinámico tridimensional, no acotado, con una inclusión

El recinto considerado en algunos de los problemas micromecánicos más usuales, es todo R^3 o todo R^2 , lo cual significa que las dimensiones de la inclusión o del defecto que se trate, respecto de los límites macroscópicos de la región de integración están separados por varios órdenes de magnitud, con lo cual, lo que se exige a las soluciones es el cumplimiento de una condición de contorno asintótica, de la forma

$$\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} (u_j(\vec{x}, t)) = 0$$

de modo que en la mayoría de los casos resolvemos un problema de Cauchy o de condiciones iniciales.

En este trabajo de tesis suponemos que el contorno o superficie limitadora, sobre las que estuvimos definiendo las condiciones de borde se hallan en las cercanías de la inclusión, inhomogeneidad o defecto considerado, a diferencia de lo dicho anteriormente.

El siguiente ejercicio, muestra el modo de abordaje de los llamados problemas sobre recintos no acotados o semi-infinitos, la técnica matemática utilizada es el análisis microlocal (Hörmander, 1971) y se sustenta en la teoría de la transformada de Fourier a la que se llama genéricamente teoría de *Operadores de Fourier*, solo como una brevísimas síntesis de este otro tipo de abordaje de problemas micromecánicos, se desarrolla la solución siguiente. Suponemos válidas las ecuaciones de elastodinámica para un sólido elástico isótropo y homogéneo con una inclusión

Ecuaciones de Navier-Lame (Hetnarski y Ignaczak, 2013):

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mu \hat{\nabla}^2 u_j(\vec{x}, t) - (\mu + \lambda) \hat{\nabla}(\hat{\nabla} u_j(\vec{x}, t)) - \bar{\mu} \hat{\nabla}^2 \dot{u}_j(\vec{x}, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \hat{\nabla}(\hat{\nabla} \dot{u}_j(\vec{x}, t)) = -S_{jklm}^{(E)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (3.132)$$

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / \dot{u}_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / \dot{w}_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (3.133)$$

$$\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} (u_j(\vec{x}, t)) = 0 \quad ; \quad \mu, \lambda, \bar{\mu}, \bar{\lambda} \in R_0^+ \quad (3.134)$$

$$S_{jklm}^{Es} = J^{-1} (F_{jA} K_{AB} F_{Bk}^{-1}) (\epsilon_{lm}^*)^{-1} - J^{-1} (F_{jA} (W \delta_{AB}) F_{Bk}^{-1}) (\epsilon_{lm}^*)^{-1}$$

Transformando por Fourier tenemos:

$$\ddot{u}_j(\vec{k}, t) + \rho^{-1} \mu k_j^2 u_j(\vec{k}, t) + \rho^{-1} \bar{\mu} (k_j)^2 \dot{u}_j(\vec{k}, t) + \rho^{-1} (\mu + \lambda) \vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot u_j(\vec{k}, t)) + \rho^{-1} (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \dot{u}_j(\vec{k}, t)) = -\rho^{-1} S_{jklm}^{(E)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{k}, t) \quad (3.135)$$

La solución operacional, en la forma de una representación integral, será:

$$u_j(\vec{k}, t) = K_j(t, u_j^0, w_j^0) - \int_0^t dt' g(t - t', \vec{k}) \{ \tilde{K}_j(u_j(\vec{k}, t'), \partial_t u_j(\vec{k}, t')) + S_{jklm}^{(E)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{k}, t') \} \quad (3.136)$$

$$g(t - t', \vec{k}) = \frac{e^{-\rho^{-1} \bar{\mu} \vec{k}^2 (t-t')}}{k_j^2 q(\mu, \bar{\mu})} \text{sen}(k_j^2 q(\mu, \bar{\mu}) \cdot (t - t')) \quad \forall t > t'$$

Donde se han definido, las siguientes funciones y parámetros:

$$q(\mu, \bar{\mu}) = \rho^{-1/2} \sqrt{\mu^2 - \bar{\mu}} \quad ; \quad q(\bar{\mu}) = \rho^{-1/2} \bar{\mu}$$

$$K_j(t, u_j^0, w_j^0) = e^{-\rho^{-1} \bar{\mu} \vec{k}^2 t} \left\{ u_j^0(\vec{k}) \cos(\vec{k}^2 q(\mu, \bar{\mu}) \cdot t) + \frac{1}{k_j^2 q(\mu, \bar{\mu})} (w_j^0(\vec{k}) + q(\bar{\mu}) u_j^0(\vec{k})) \text{sen}(k_j^2 q(\mu, \bar{\mu}) \cdot t) \right\}$$

$$\tilde{K}_j(u_j(\vec{k}, t'), \partial_t u_j(\vec{k}, t')) = k_j(\mu + \lambda) (\vec{k} \cdot u_j(\vec{k}, t')) + (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) (\vec{k} \cdot (\partial_t u_j(\vec{k}, t')))$$

Los aproximantes de Picard son:

$$u_j^0(\vec{k}, t) \cong K_j(t, u_j^0, w_j^0) - \int_0^t dt' g(t - t', \vec{k}) S_{jklm}^{(E)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{k}, t') \quad (3.137)$$

La aproximación de orden n será:

$$u_j^{(n+1)}(\vec{k}, t) \cong u_j^0(\vec{k}, t) - \int_0^t dt' g(t - t', \vec{k}) \tilde{K}_j(u_j^{(n)}(\vec{k}, t'), (\partial_t u_j(\vec{k}, t'))^{(n)}) \quad (3.138)$$

$$g(t - t', k_j) = \frac{e^{-\rho^{-1} \bar{\mu} \vec{k}^2 (t-t')}}{\vec{k}^2 q(\mu, \bar{\mu})} \text{sen}(\vec{k}^2 q(\mu, \bar{\mu}) \cdot (t - t')) \quad \forall t > t'$$

Finalmente, anti-transformando por Fourier

$$u_j^0(x_j, t) \cong \iiint_V d^3k e^{ik_j x_j} \left\{ K_j(t, u_j^0, w_j^0) - \int_0^t dt' g(t-t', \vec{k}) S_{jklm}^{(E)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{k}, t) \right\} \quad (3.139)$$

$$g(t-t', \vec{k}) = \frac{e^{-\rho^{-1} \bar{\mu} \vec{k}^2 (t-t')}}{\vec{k}^2 q(\mu, \bar{\mu})} \text{sen}(\vec{k}_j^2 q(\mu, \bar{\mu}) \cdot (t-t')) \quad \forall t > t'$$

Y para la aproximación de orden n tendremos:

$$u_j^{(n+1)}(\vec{x}, t) \cong \iiint_V d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{x}} u_j^{(0)}(\vec{k}, t) - \iiint_V d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \left\{ \int_0^t dt' g(t-t', \vec{k}) \tilde{K}_j(u_j^{(n)}(\vec{k}, t'), (\partial_t u_j(\vec{k}, t'))^{(n)}) \right\} \quad (3.140)$$

Que es la representación integral de la solución semi-analítica del problema planteado

3.5 Formulación del problema dinámico de Eshelby en la configuración no deformada

El siguiente desarrollo vuelve a situar el problema de Eshelby en una región finita, es decir acotada y compacta, pero en la configuración no deformada, según la escritura de Maugin (2011).

Campo de desplazamiento lagrangiano o material, con inclusiones mixtas, en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff (Maugin, Material Inhomogeneities in Elasticity, 1993)

$$\rho_0 \partial_t^2 x_j(\vec{X}, t) - P_{jA,A}(\vec{X}, t) = -S_{jAnB}^E(\epsilon_{n,B}^*(\vec{X}, t))_{,A} \quad (3.141)$$

$$x_j(\vec{X}, 0) = x_j^0 / x_j^0 \in (H_0^1(D_K))^3 ; \partial_t x_j(\vec{X}, 0) = v_j^0 / v_j^0 \in (L^2(D_K))^3 \quad (3.142)$$

$$-P_{jA}(\vec{X}, t) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{jAnB}^E(\epsilon_{n,B}^*(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.143)$$

$$-P_{jA}(\vec{X}, t) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_j \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.144)$$

$$S_{jAkB}^{Es} = J^{-1} (F_{jC} K_{CD} F_{Dk}^{-1}) (\Gamma_{kB,A}^*)^{-1} - J^{-1} (F_{jC} (W \delta_{CD}) F_{Dk}^{-1}) (\Gamma_{kB,A}^*)^{-1} \quad (3.145)$$

$$\epsilon_{lm}^* \rightarrow \Gamma_{lB}^* ; \quad l \rightarrow l \quad m \rightarrow B ; \quad \Gamma_{kB}^* : \text{eigenstrain mixto} \quad (3.146)$$

Se define la función de Green en la forma

$$\rho_0 \partial_t^2 g_{jk}(\Delta\vec{X}, \Delta t) - g_{jk,A}(\Delta\vec{X}, \Delta t) = \delta_{jk}(\delta(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (1/V)) \quad (3.147)$$

$$g_{jk}(\Delta\vec{X}, 0) = 0 \quad \partial_t g_{jk}(\Delta\vec{X}, 0) = 0 \quad (3.148)$$

$$-g_{jk,A}(\Delta\vec{X}, \Delta t) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = 0 ; \quad -g_{jk,A}(\Delta\vec{X}, \Delta t) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (3.149)$$

Y encontramos la representación integral siguiente

$$\rho_0 \iiint_V dV \left\{ g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) - x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) \right\} +$$

$$+ \oint_{\partial\Gamma} dS (x_k(\vec{X}', t) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t-t')) \hat{n}_A - (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t-t') P_{kA}(\vec{X}', t')) n_A =$$

$$= - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{S}_{kAnB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \right\} - x_j(\vec{X}, t) + \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle \quad (3.150)$$

Donde hemos impuesto la condición

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{ g_{jk,A} \mathbf{P}_{kA}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') - x_k(\vec{X}, t) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \} \right\} = 0 \quad (3.151)$$

Finalmente obtenemos la representación del campo lagrangiano $x_j(\vec{X}, t)$

$$\begin{aligned} x_j(\vec{X}, t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{S}_{kAnB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \right\} + \\ & + \rho_0 \iiint_V dV \left\{ x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) - g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) \right\} + \\ & + \oint_{\partial\Gamma} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') n_A - \\ & - x_k(\vec{X}', t) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \hat{n}_A) \quad (3.152) \end{aligned}$$

Esta representación está referida al problema mixto, para el caso del problema de Neumann que es el que corresponde a la situación estudiada tendremos, con la definición de la función de Green dada precedentemente

$$\begin{aligned} x_j(\vec{X}, t) = & \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{S}_{kAnB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \right\} + \\ & + \rho_0 \iiint_V dV \left\{ x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) - g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) \right\} + \\ & + \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') n_A + \\ & + \oint_{\partial\Gamma_1} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') n_A) \quad (3.153) \end{aligned}$$

Y se añade la condición de resolubilidad siguiente

$$\oint_{\partial\Gamma_{in}} dS \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') \hat{n}_A = \iiint_V dV \mathbf{S}_{kAnB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \quad (3.154)$$

$$\oint_{\partial\Gamma_1} dS \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') \hat{n}_A = 0 \quad (3.155)$$

Para el caso del segundo Piola Kirchhoff tendremos:

$$\begin{aligned}
 x_j(\vec{X}, t) = & \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') S_{kAnB}^{Es} \epsilon_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \right\} + \\
 & + \rho_0 \iiint_V dV \left\{ x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) - g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) \right\} + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') F_{kB} S_{BA}(\vec{X}', t) n_A + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') F_{kB} S_{BA}(\vec{X}', t) n_A \quad (3.156)
 \end{aligned}$$

De manera análoga al caso anterior para obtener la representación integral de la solución se impone

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \left\{ g_{jk,A} F_{kB} S_{BA}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') - x_k(\vec{X}, t) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \right\} \right\} = 0$$

Y se añade la condición de resolubilidad siguiente

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS F_{kB} S_{BA}(\vec{X}', t') \hat{n}_A &= \iiint_V dV S_{kAjB}^{Es} \epsilon_{jB,A}^*(\vec{X}', t') \\
 \iint_{\partial\Gamma_1} dS F_{kB} S_{BA}(\vec{X}', t') \hat{n}_A &= 0
 \end{aligned}$$

3.6 Problema micro-elastodinámico en la formulación de segundo gradiente

Las teorías de elasticidad denominadas, en general, de segundo gradiente de deformación surgen en la literatura, junto con las teorías llamadas no locales, de las cuales solo difieren en su forma de escritura; son dispositivos analíticos capaces de explicar las fuerzas de interacción de largo alcance dentro de la microestructura de los materiales, y para capturar fenómenos detectados experimentalmente tales como efectos de escala, dispersión de ondas, localización de deformaciones, etc.; los cuales eran ignorados por la teoría clásica, (Kröner, 1967; Krumhansl y Matthew, 1968; Mindlin, 1965; Mindlin y Eshel, 1968), más recientemente (Ma et al., 2018)

Dentro de este marco, de particular interés, es en el artículo fundamental de Mindlin (1965), que, este autor, formula la primera teoría de gradientes de tensión tanto para el caso estático como para el caso dinámico introduciendo, un término inercial idéntico al definido en mecánica clásica. La idea fundamental de Mindlin es que, los efectos de escala pueden ser estudiados si asumimos la existencia de un desarrollo perturbativo (desarrollo en serie de Taylor) de la energía elástica, alrededor de las micro-deformaciones del material. A pesar del número excesivo de constantes materiales requeridas en ella (1560), surgidas de las posibles combinaciones de se producen al construir tal desarrollo, esta teoría sigue siendo un prototipo por sus fundamentos conceptuales y su capacidad para capturar efectos de escalas de longitud. Toupin (1964), Ostoja-Starzewski (2011, 2017) mediante un estudio sobre modelos de redes mono y poliatómicas, (elasticidad de segundo gradiente sobre lattices fractales) señalaron la capacidad de una generalización de la teoría de gradientes de deformación para interpretar la estructura atómica de la materia.

Aifantis y colaboradores proponen una teoría de elasticidad isotrópica basada en el primer gradiente de deformación, que requiere solo de tres constantes materiales (es decir, las dos constantes de Lamé clásicas y un parámetro de escala de longitud), (Aifantis, 1992; Altan y Aifantis,

1992; Ru y Aifantis, 1993). Esta teoría se extendió luego dinámicamente, al introducirse términos de inercia de orden superior al segundo (Askas y Aifantis, 2006, 2011) para los cuales solo se requiere un parámetro adicional de escala de longitud. Es también cierto que, con estas modificaciones teóricas, el problema de Cauchy, asociado al operador hiperbólico de segundo orden (operador elastodinámico de segundo gradiente); se modifica sustancialmente debido a que son necesarias cuatro condiciones iniciales, dos en el interior del volumen de integración y dos sobre ciertas superficies iniciales que deben conocerse previamente, (no son las superficies limitadoras típicas de la teoría macroscópica), para determinar existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones.

Este modelo de elasticidad (aquí conocido como el modelo de Aifantis) se ha empleado para abordar una variedad de problemas estructurales que muestran que no surgen singularidades de deformación en las indentaciones y núcleos de dislocación, y que se pueden capturar los efectos de dispersión de ondas (Askas y Aifantis, 2011). Sin embargo, como muestran Lazar et al. (2005), las singularidades de doble tensión (ambigüedad en la divergencia del tensor de tensiones, en los extremos de la deformación) no pueden eliminarse con el mencionado modelo de Aifantis. Para el caso de teorías de segundo gradiente, partimos de la forma general para la densidad de energía de deformación, escrita según Mindlin (1964, 1965), Polizzotto (2012), Sadd (2019), Aifantis (2003), Askas y Aifantis (2011) en la forma

$$w(\epsilon_{ij}(\vec{x}), \epsilon_{ij,k}(\vec{x})) = (1/2)\lambda \epsilon_{ii}(\vec{x})\epsilon_{jj}(\vec{x}) + \mu \epsilon_{ij}(\vec{x})\epsilon_{ij}(\vec{x}) + c_1 \epsilon_{ij,j}(\vec{x})\epsilon_{ik,k}(\vec{x}) + c_2 \epsilon_{ii,k}(\vec{x})\epsilon_{kj,j}(\vec{x}) + c_3 \epsilon_{ii,k}(\vec{x})\epsilon_{jj,k}(\vec{x}) + c_4 \epsilon_{ij,k}(\vec{x})\epsilon_{ij,k}(\vec{x}) + c_5 \epsilon_{ij,k}(\vec{x})\epsilon_{kj,i}(\vec{x}) \quad (3.157)$$

Los números c_1, c_5 , son constantes estructurales del material llamadas coeficientes de gradientes de deformación. Se eligen las constantes siguientes:

$$c_1 = c_2 = c_5 = 0 \quad ; \quad c_3 = (1/2)c\lambda \quad ; \quad c_4 = c\mu$$

La constante c tiene dimensiones de una longitud al cuadrado, ahora la expresión para la densidad de energía de deformación será:

$$w(\epsilon_{ij}(\vec{x}), \epsilon_{ij,k}(\vec{x})) = (1/2)\lambda \epsilon_{ii}(\vec{x})\epsilon_{jj}(\vec{x}) + \mu \epsilon_{ij}(\vec{x})\epsilon_{ij}(\vec{x}) + (1/2)c(\lambda \epsilon_{ii,k}(\vec{x})\epsilon_{jj,k}(\vec{x}) + \mu \epsilon_{ij,k}(\vec{x})\epsilon_{ij,k}(\vec{x})) \quad (3.158)$$

La expresión anterior puede a su vez escribirse en forma

$$w(\epsilon_{ij}(\vec{x}), \epsilon_{ij,k}(\vec{x})) = (1/2)(\sigma_{ij}(x)\epsilon_{ij}(\vec{x}) + \mu_{ijk}(\vec{x})\kappa_{ijk}(\vec{x})) \quad (3.159)$$

Donde $\epsilon_{ij}(\vec{x})$ es el tensor conjugado de $\sigma_{ij}(x)$ y $\mu_{ijk}(\vec{x})$ lo es de $\kappa_{ijk}(\vec{x})$. Finalmente definiendo:

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}^e \epsilon_{kl}(\vec{x}) \quad ; \quad \mu_{ijk}(\vec{x}) = l_M^2 C_{ijmn}^e \epsilon_{mnk}(\vec{x}) \quad (3.160)$$

$$\epsilon_{ij}(\vec{x}) = (1/2)(u_{i,j}(\vec{x}) + u_{j,i}(\vec{x})) \quad (3.161)$$

$$\kappa_{ijk}(\vec{x}) = \epsilon_{ij,k}(\vec{x}) = (1/2)(u_{i,jk}(\vec{x}) + u_{j,ik}(\vec{x})) \quad (3.162)$$

El problema de Eshelby en la formulación de segundo gradiente se escribe (Ma et al., 2018)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij,j}(x) + f_i = 0 &\implies C_{ijkl}^e \epsilon_{kl,j}(\vec{x}) - \mu_{ijk,kj}(\vec{x}) = -f_j(\vec{x}) \implies \\ &\implies C_{ijkl}^e u_{kl,j}(\vec{x}) - l_M^2 C_{ijkl}^e (u_{k,nn}(\vec{x}))_{,lj} = S_{ijkl}^{Es}(\vec{x}) \epsilon_{kl,j}(\vec{x}) - \\ &\quad - l_M^2 S_{ijkl}^{Es}(\vec{x}) (\epsilon_{kl,nn}(\vec{x}))_{,j} \end{aligned} \quad (3.163)$$

Una generalización del problema de Eshelby en la formulación de segundo gradiente se escribe (Bonfoh y Sabar, 2023)

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}) - l_M^2 C_{ijklnm}^s (u_{k,nm}(\vec{x}))_{,lj} = \\ = -S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}) + l_M^2 S_{ijklnm}^{Es} (\epsilon_{kl,nm}^*(\vec{x}))_{,j} \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (3.164)$$

Las condiciones de contorno de Neumann son

$$\begin{aligned} (C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 C_{ijklnm}^s (u_{k,nm}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl}^*(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + \\ + l_M^2 S_{ijklnm}^{Es} (\epsilon_{kl,nm}^*(\vec{x})) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} ; l_M \in R_0^+ \end{aligned} \quad (3.165)$$

$$(C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 C_{ijklnm}^s (u_{k,nm}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (L(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.166)$$

Si el tensor de segundo gradiente es isótropo respecto de dos de sus índices coincide con el tensor elástico y el problema anterior puede escribirse de la forma siguiente

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}) - l_M^2 C_{ijkl}^e (\hat{\nabla}^2 u_{k,lj}(\vec{x})) = -S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}) + \\ + l_M^2 S_{ijkl}^{Es} (\hat{\nabla}^2 \epsilon_{kl,nm}^*(\vec{x}))_{,j} \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$\begin{aligned} (C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 C_{ijklnm}^s (\hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = -S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl}^*(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + \\ + l_M^2 S_{ijkl}^{Es} (\hat{\nabla}^2 \epsilon_{kl}^*(\vec{x})) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$(C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 C_{ijklnm}^s (\hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (L(\partial\Gamma_1))^2 \quad (3.169)$$

La representación de la solución es:

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}) = \langle u(\vec{x}) \rangle + \iiint_V d^3x' (g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') S_{mjkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}'^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}') - \\ - \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') S_{mjkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}'^2) \epsilon_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} - \\ - \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{mi}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{t}_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} \end{aligned} \quad (3.170)$$

Para el cálculo de la función de Green tenemos:

$$C_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{kn,lj}(\Delta\vec{x}) = \delta_{in} (\delta(\Delta\vec{x}) - (1/V)) \text{ en } R_k \quad (3.171)$$

$$C_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = 0 ; C_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (3.172)$$

Las condiciones de resolubilidad son:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x}-\vec{x}') S_{mjkl}^{Es} (1-l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{im}(\vec{x}-\vec{x}') t_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \\ = \iiint_V d^3x' (g_{im}(\vec{x}-\vec{x}') S_{mjkl}^{Es} (1-l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}')) \end{aligned} \quad (3.173)$$

Para la formulación del problema dinámico se utiliza la formulación clásica de Mindlin-Aifantis que se escribe, para la conservación del momentum lineal en la forma siguiente:

$$(1-l_M^2 \hat{V}^2) \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - (1-l_M^2 \hat{V}^2) \sigma_{ij,j}(\vec{x}, t) = -(1-l_M^2 \hat{V}^2) S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \quad (3.174)$$

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x}, t) = C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) + C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) \quad (3.175)$$

En la ecuación (3.174) aparecen términos de microinercia que corrigen en términos de una dimensión característica l_M el término de inercia clásico. Esto impacta directamente en una nueva formulación del problema de Cauchy que podríamos denominar, en general, problema de Cauchy multiescala, si bien formalmente podemos demostrar existencia y unicidad para la ecuación (3.174), podrían existir inconsistencias respecto de si es posible la determinación simultánea de las proyecciones de las condiciones iniciales clásicas sobre cierto conjunto de superficies que caractericen la aparición de los fenómenos micro y nanomecánicos (Okatev y Zubko, 2020).

Resulta simple, a partir del mecanismo descrito previamente, la incorporación de otros campos como los de temperaturas, vacíos, micro temperaturas, difusión, y en general múltiples porosidades, también son posibles, aproximaciones gradientales de orden superior al segundo.

3.6.1 Problema de Cauchy micromecánico

La otra cuestión, que se tratara previamente, y que surge al intentar la representación de las soluciones elastodinámicas, utilizando la técnica de funciones de Green y el tercer teorema de representación de Green-Lagrange, conduce a un nuevo tipo de problema de Cauchy, en el que además de las condiciones clásicas se agrega un nuevo par de condiciones iniciales definidas sobre ciertas superficies iniciales, que caracterizan los ámbitos micro y nanomecánicos de modo que, la novedad residiría en el hecho de que el conjunto de condiciones iniciales se amplía a cuatro, esto surge debido a la situación de no localidad de la teoría. Las nuevas condiciones iniciales se escribirán en la forma:

$$-\rho l_M^2 (u_i(\vec{x}, 0))_{,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Pi} = \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} \in (H_0^1(\partial\Pi))^2 \quad (3.176)$$

$$-\rho l_M^2 (\partial_t u_i(\vec{x}, 0))_{,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Pi} = \bar{w}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / \bar{w}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} \in (L^2(\partial\Pi))^2 \quad (3.177)$$

Si tuviéramos en cuenta una corrección de orden cuarto, tendríamos otro par de condiciones iniciales que se escribiría de la siguiente forma:

$$\rho l_N^4 (\hat{V}^2 u_i(\vec{x}, 0))_{,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = \bar{u}_i^2 \Big|_{\partial\Gamma} / \bar{u}_i^2 \Big|_{\partial\Gamma} \in (H_0^1(\partial\Gamma))^2 \quad (3.178)$$

$$\rho l_N^4 (\hat{V}^2 (\partial_t u_i(\vec{x}, 0)))_{,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = \bar{w}_i^2 \Big|_{\partial\Gamma} / \bar{w}_i^2 \Big|_{\partial\Gamma} \in (L^2(\partial\Gamma))^2 \quad (3.179)$$

Donde $\partial\Gamma$ y $\partial\Pi$ caracterizan las superficies nano y micromecánicas respectivamente. Sus longitudes características son $l_M \gg l_N$

Las ecuaciones de movimiento de la teoría junto con las condiciones iniciales y de borde, serán:

Campos de desplazamiento

$$\rho \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - b_M^2 (\partial_t^2 u_i(\vec{x}, t))_{,jj} - C_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) + \\ + l_M^2 C_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,lj}(\vec{x}, t) + \tilde{l}_M^2 C_{ijkl}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) = -S_{ijkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t) +$$

Condiciones iniciales

$$u_i(\vec{x}, 0) = u_i^0 / u_i^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t u_i(\vec{x}, 0) = v_i^0 / v_i^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (3.180)$$

$$u_i(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial\Pi} = \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} \in (H_0^1(\partial\Pi))^2 \quad (3.181)$$

$$(\partial_t u_i(\vec{x}, 0))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Pi} = v_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / v_i^0 \in (L^2(\partial\Pi))^2 \quad (3.182)$$

Condiciones de borde entre: inclusión-matriz y superficie limitadora exterior, se denominan condiciones de Gurtin-Murdoch

$$(-C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + \\ + l_\mu^2 C_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + (\tilde{l}_\mu^2 C_{ijk}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} = \\ = -S_{ijkl}^E \epsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} + S_{ijkl}^E \hat{\nabla}^2 \epsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \quad (3.183)$$

Sobre la superficie limitadora externa

$$(-C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ + l_\mu^2 C_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + (\tilde{l}_M^2 C_{ijk}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (3.184)$$

$t_i^a \in L^2(\partial\Gamma_1)$

Cálculo de las funciones de Green, para el campo de desplazamientos

$$\rho \partial_t^2 g_{in}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - b^2 (\partial_t^2 g_{in}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,jj} - C_{ijkl}^e g_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - \\ - C_{ijkl}^v \dot{g}_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - l_\mu^2 C_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 g_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) + \tilde{l}_\mu^2 C_{ijkl}^v \hat{\nabla}^2 \dot{g}_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) = \\ = \delta_{in} (\delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) - 1/V) \quad (3.185)$$

Utilizando el tercer teorema de representación de Green-Lagrange, se obtienen las represen-

taciones integrales de las soluciones las cuales se escribirán en este caso de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 u_i(\vec{x}, t) = & \langle u_i(\vec{x}, t) \rangle + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \left\{ S_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}', t') + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{S}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \right\} \right\} + \\
 & + \iint_{S_{ini}} dS \left\{ u_n(\vec{x}, 0) (\partial_t g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t))_{,j} \hat{n}_j \Big|_{S_{ini}} - g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t) (\partial_t u_n(\vec{x}, 0))_{,j} \hat{n}_j \Big|_{S_{ini}} \right\} + \\
 & + \iiint_V d^3x' u_k(\vec{x}', 0) \left\{ u_n(\vec{x}', 0) \partial_t g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t) - g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_k(\vec{x}', 0) \right\} - \\
 & - \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS \left\{ g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') (S_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl}^*(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} - \right. \\
 & \left. - \tilde{S}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) \right\} \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in-M}} \Big\} - \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') t_n \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \quad (3.186)
 \end{aligned}$$

Las condiciones de resolubilidad para el problema de Neumann son las siguientes

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS C_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) u_{k,l}(\vec{x}, t) + C_{ijkl}^v (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) = \\
 \iiint_V d^3x' \left\{ S_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}', t) + \tilde{S}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \right\} \quad (3.187)
 \end{aligned}$$

3.7 Generalizaciones de la teoría de gradientes de alto orden

A continuación se fundamenta lo establecido en la subsección 3.6.1 para lo cual hacemos uso del concepto de operador de Mindlin-Aifantis (Askas et al., 2007, 2019; De Domenico y Askas, 2016a; Engelbrecht y Berezovski, 2015)

3.7.1 Operadores de tipo Mindlin-Aifantis

Se define el siguiente operador de múltiples escalas en términos de un desarrollo de gradientes tipo virial, a todo orden:

$$\wp \equiv 1 - l_1^2 \hat{V}^2 + l_2^4 \hat{V}^4 - l_3^6 \hat{V}^6 + \dots = 1 + \sum_{s=1}^m \mathfrak{I}^s l_s^{2s} \hat{V}^{2s} ; l_s \in R_0^+ ; \forall s \in N \quad (3.188)$$

$$l_1 > l_2 > l_3 > \dots \gg l_n ; \mathfrak{I}^s = -1, s = 2k - 1 ; \mathfrak{I}^s = 1, s = 2k \forall k \in N \quad (3.189)$$

Puede probarse, que este operador es acotado, compacto y por eso mismo, uniformemente continuo, utilizando para ello análisis microlocal (Hörmander, 1971), al polinomio diferencial anterior puede aplicársele la K-teoría algebraica clásica, y el álgebra cohomológica de De Rham (De Leon et al., 2021) a fin de caracterizar una secuencia de haces de homología que vinculan de modo causal las diferentes longitudes (Segev y Epstein, 2020). La utilización de operadores de Mindlin-Aifantis corrige el término de inercia clásico introduciendo los llamados términos de micro-inercia

$$\begin{aligned}
 \rho \left\{ 1 + \sum_{s=1}^m \mathfrak{I}^s l_s^{2s} \hat{V}^{2s} \right\} (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) = \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \rho l_1^2 \hat{V}^2 (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) + \\
 + \rho l_2^4 \hat{V}^4 (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) - \rho l_3^6 \hat{V}^6 (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) + \dots + \rho l_{2s}^{2s} \hat{V}^{2s} (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) \quad (3.190)
 \end{aligned}$$

Por otra parte el tensor de Cauchy, que para este caso lo asumimos viscoelástico y cuasi-lineal tiene la siguiente forma

$$\tau_{jk}(\vec{x}, t) = \wp \sigma_{ij}(\vec{x}, t) = C_{ijkl}^e(\wp u_{l,k}(\vec{x}, t) + \wp(u_{l,p}(\vec{x}, t)u_{p,k}(\vec{x}, t))) + C_{ijkl}^v(\wp(\partial_t u_l(\vec{x}, t)),_k) \quad (3.191)$$

Para el caso poroelástico el tensor de Cauchy efectivo corregido será

$$\tau_{jk}^{ef}(\vec{x}, t) = \wp \sigma_{ij}^{ef}(\vec{x}, t) = C_{ijkl}^e(\wp u_{l,k}(\vec{x}, t)) + C_{ijkl}^v(\wp u_{l,k}(\vec{x}, t)) - \alpha_1 M_{jk}^a \wp p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 M_{jk}^w \wp p_w(\vec{x}, t) ; \alpha_{1,2} \in R_0^+ \quad (3.192)$$

Todas las matrices asociadas a los tensores de cuarto orden y segundo orden son simétricas y definidas positivas.

La ecuación de movimiento multi-escala será, en la representación deformada:

$$\rho \wp(\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t)) - (\tau_{jk}(\vec{x}, t)),_k = -\wp J_j(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (3.193)$$

3.7.2 Teorema de la divergencia sobre múltiples escalas

El teorema de la divergencia podría expresarse ahora utilizando los operadores de Mindlin-Aifantis de la siguiente forma (Angoshtari y Yavari, 2015)

$$\begin{aligned} \iiint_{V_k} d^3x (\wp u_k(\vec{x}, t)),_k &= \iiint_{V_k} d^3x \left\{ \left\{ 1 + \sum_{s=1}^m \mathfrak{I}^s l_s^{2s} \right\} u_k(\vec{x}, t) \right\},_k = \\ &= \oint_{\partial\Gamma} dS u_k(\vec{x}, t) \hat{n}_k + \sum_{s=1}^m \mathfrak{I}^s l_s^{2s} \left\{ \oint_{\partial\Gamma_{l_s}} dS_{l_s} (\hat{\nabla}^{2s} u_k(\vec{x}, t)) \hat{n}_k^s \right\} \end{aligned} \quad (3.194)$$

3.7.3 Tercer teorema de Green-Lagrange multi-escala

El tercer teorema de representación de Green Lagrange para dos campos vectoriales u_j, v_j se escribe

$$\begin{aligned} \iiint_{V_k} d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t)(\wp u_{j,k}(\vec{x}, t)),_k - u_j(\vec{x}, t)(\wp v_{j,k}(\vec{x}, t)),_k \right\} &= \\ &= \iiint_{V_k} d^3x \left\{ v_j(\vec{x}, t) \left\{ \left\{ 1 + \sum_{s=1}^m \mathfrak{I}^s l_s^{2s} \hat{\nabla}^{2s} \right\} u_{j,k}(\vec{x}, t) \right\},_k - \right. \\ &\quad \left. - u_j(\vec{x}, t) \left\{ \left\{ 1 + \sum_{s=1}^m \mathfrak{I}^s l_s^{2s} \hat{\nabla}^{2s} \right\} v_{j,k}(\vec{x}, t) \right\},_k \right\} = \\ &= \oint_{\partial\Gamma} dS \left\{ v_j(\vec{x}, t) u_{j,k}(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) v_{j,k}(\vec{x}, t) \right\} \hat{n}_k + \\ &\quad + \sum_{s=1}^m \mathfrak{I}^2 l_s^{2s} \left\{ \oint_{\partial\Gamma_{l_s}} dS_{l_s} \left\{ v_j(\vec{x}, t) \hat{\nabla}^{2s} u_{j,k}(\vec{x}, t) - u_j(\vec{x}, t) \hat{\nabla}^{2s} v_{j,k}(\vec{x}, t) \right\} \hat{n}_k^s \right\} \end{aligned} \quad (3.195)$$

CAPÍTULO 4

Formulación del problema micro-poroelastodinámico

«...Distraídos en razonar la inmortalidad, habíamos dejado que anoheciera sin encender la lámpara. No nos veíamos las caras. Con una indiferencia y una dulzura más convincentes que el fervor, la voz de Macedonio Fernández repetía que el alma es inmortal...»

Diálogo sobre un diálogo, Jorge L. Borges

Resumen y objetivos:

Se describe y formula el entorno de trabajo que nos permita el abordaje de problemas micro-poroelastodinámicos.

- Formulación del problema de condiciones iniciales y de borde, y demás condiciones de validez, vinculadas al problema micro-poroelastodinámico.
- Obtener soluciones semianalíticas en la configuración deformada y no deformada asociadas al problema micro-poroelastodinámico.

4.1 Descripción del problema y modelización

Los medios porosos constituyen un tipo de material en extremo versátil, con un gran número de aplicaciones en Ciencia de Materiales y consecuentemente de particular interés como elemento estructural en Ciencias de la Ingeniería, desde esta perspectiva, el capítulo que se desarrolla a continuación aspira a mostrar, las diferentes formas de abordaje que admiten modelización matemática, asumiendo que, la teoría de Biot de la poroelasticidad y la de mezclas de componentes, refieren de manera simple y elegante al conjunto de fenómenos que tienen lugar en este tipo de medios, de los cuales el suelo es un ejemplo.

En este trabajo se considera el medio poroso como un sistema trifásico, compuesto por un esqueleto sólido, con poros de agua y aire, e interacciones poro-mecánicas entre las distribuciones de poro de agua y aire (Straughan, 2017), (Biot, 1956a,b; Biot y Temple, 1972), (Svanadze, 2019), (Bažant, 1971), (Rudnicki, 2000).

El conocimiento de las interacciones existentes entre las tres fases del sistema constituye el punto básico para el entendimiento del comportamiento del suelo no saturado. A continuación, serán comentados brevemente algunos aspectos básicos referentes a cada una de las fases constituyentes, a partir de las cuales se inicia el proceso de modelado de los fenómenos que tiene lugar en este tipo de medios:

- Fase sólida: Está integrada básicamente por un esqueleto solido
- Fases intersticiales: Representada por campos de presiones denominados presiones de poro de agua, aire, poluentes etc.

Biot (1955) propone una profunda revisión del modelo de Terzaghi de la consolidación, para lo cual formula su teoría poro-elástica de materiales, en ella el principal supuesto es que se trata de una teoría de campos definida sobre la tripleta de objetos siguiente:

$$\Pi(u_j, \phi_a, \phi_w)$$

Donde se tienen los campos de desplazamiento, y los campos escalares de ciertas variables descriptoras llamadas porosidades, en este caso llamadas poro de agua y poro de aire. En rigor las porosidades son campos de presiones que responden a la ley de Darcy. De modo que todo medio poroso queda descrito en lo sucesivo por grupos de campos de la forma:

$$\Pi(u_j, p_1, p_2, \dots, p_n, c_1, c_2, \dots, c_n, v_1, \dots, v_n, T)$$

Donde de nuevo tenemos campos de desplazamientos, porosidades concentraciones de poluentes, temperatura, distribuciones de vacíos, también podríamos suponer la existencia de categorías de desplazamientos como por ejemplo en la teoría micromórfica donde se introduce un campo microscópico de naturales geométrica o micro rotación.

Biot postula la existencia de dos dinámicas acopladas que describen: desplazamientos a través de la Ecuación de Navier-Cauchy, solo que los coeficientes de Lamé se sustituyen por coeficientes poroelásticos, cuyos valores pueden calcularse experimentalmente, o estimarse a través de métodos variacionales como los de Hashin y Shtrikman (1963), y una dinámica de tipo difusiva asociada a las porosidades, y a los demás campos ya mencionados, de manera que en este caso la ley de Darcy, la ley de Fourier y la de Fick junto con sus respectivas generalizaciones son utilizadas para describir las acciones del sector de campos escalares:

$$p_1, p_2, \dots, p_n, c_1, c_2, \dots, c_n, v_1, \dots, v_n, T$$

En definitiva, tendremos en todos los casos, salvo los completamente degenerados (dinámica viscosa), un sistema hiperbólico parabólico, cuya formulación en términos del problema de Cauchy y de borde ha sido extensamente estudiada probándose existencia unicidad y estabilidad de las soluciones fuertes, además también está probada la existencia y unicidad de los problemas débiles (Svanadze, 2019).

4.2 Caso poroelástico

En un medio poroso con dos porosidades, el tensor efectivo, suponiendo isotropía y homogeneidad, se expresa en la forma siguiente (Mroginiski et al., 2011; Mroginiski y Etse, 2014)

$$\sigma_{ij}^{eff}(\vec{x}, t) = \sigma_{ij}^e(\vec{x}, t) - \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e(\vec{x}, t) &= C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t); \quad C_{ijkl}^{(e)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \alpha_i &> 0 \quad \forall i \in N \quad ; \quad \lambda, \mu : \text{Lame poroelásticos} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si existe una inclusión, el tensor efectivo deberá incluir un término de la forma:

$$\sigma_{ij}^I(\vec{x}, t) = S_{ijklm}^{(Es)} \varepsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \quad (4.3)$$

Donde el tensor de Eshelby de cuarto orden es:

$$S_{ijklm}^{(Es)}$$

El cual debe calcularse en términos de la geometría de la inclusión que se considere con los procedimientos desarrollados por Mura (1987).

$\varepsilon_{lm}^*(q, \bar{q})$: Son las deformaciones producidas por campos no mecánicos como, por ejemplo: dislocaciones, disclinaciones, vacíos, y en general defectos de material incluido. El nuevo tensor efectivo será

$$\sigma_{ij}^{eff}(\vec{x}, t) = \sigma_{ij}^e(\vec{x}, t) - \alpha_1 M_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 M_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) - S_{ijklm}^{(Es)} \varepsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \quad (4.4)$$

$$\sigma_{ij}^e(\vec{x}, t) = C_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) ; \quad C_{ijkl}^{(e)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.5)$$

$$\alpha_i > 0 \quad \forall i \in N \quad ; \quad \lambda, \mu : \text{Lame poroelásticos}$$

Escribimos a continuación algunas relaciones útiles entre el tensor efectivo poroelástico y los tensores de Piola Kirchhoff, Mandel y Biot

$$P_{iA} = J(C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \cdot F_{jA}^T + J p_a \delta_{ij} F_{jA}^T + J p_b \delta_{ij} F_{jA}^T \quad (4.6)$$

$$S_{AB} = J F_{Ai}^{-1} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \cdot F_{jB}^{-T} + J F_{Ai}^{-1} p_a \delta_{ij} F_{jB}^{-T} + J F_{Ai}^{-1} p_b \delta_{ij} F_{jB}^{-T} \quad (4.7)$$

$$T_{AB} = R_{Ai}^T P_{iB} = J R_{Ai}^T (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \cdot F_{jB}^T + J R_{Ai}^T p_a \delta_{ij} F_{jB}^T + J R_{Ai}^T p_b \delta_{ij} F_{jB}^T \quad (4.8)$$

$$C_{AB} = F_{Aj}^T F_{jB} = U_{AB}^2 \quad ; \quad J^{-1} = \det(F_{iB}^{-1}) \quad (4.9)$$

$$M_{AB} = C_{AL} (J F_{Li}^{-1} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \cdot F_{jB}^{-T} + J F_{Li}^{-1} p_a \delta_{ij} F_{jB}^{-T} + J F_{Li}^{-1} p_b \delta_{ij} F_{jB}^{-T}) \quad (4.10)$$

Se escriben a continuación las leyes de conservación para la distribución de presiones de poro de aire y agua respectivamente, en donde se incluyen ciertas funciones V_1 y V_2 representativas de ciertos comportamientos histeréticos que enmarcan las interacciones entre las presiones de poro y el esqueleto elástico del medio. Se supone válida la ley de Darcy asociada al flujo de presiones de poro.

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) + (J_j^a(\vec{x}, t))_{,j} + \alpha_1 M_{ij}^a \dot{u}_{i,j} + \bar{\theta}_a \partial_t V_1(t, p_w, p_a) = h(x, t) \text{ en } R_k \quad (4.11)$$

$$\theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) + (J_j^w(\vec{x}, t))_{,j} + \alpha_2 M_{ij}^w \dot{u}_{i,j} + \bar{\theta}_w \partial_t V_2(t, p_w, p_a) = \bar{h}(x, t) \text{ en } R_k \quad (4.12)$$

$$V_1, V_2 \text{ — Lipschitz} \quad ; \quad \theta_i, \bar{\theta}_i, \alpha_i \in R_0^+ \quad \forall i = 1, 2 \quad ; \quad h, \bar{h} \in L^2(R_k)$$

Las leyes de Darcy se escriben de la siguiente forma

$$J_j^a(\vec{x}, t) = -K_{ij}^a(p_a(\vec{x}, t))_{,i} \text{ en } R_k \quad (4.13)$$

$$J_j^w(\vec{x}, t) = -K_{ij}^w(p_a(\vec{x}, t))_{,i} \text{ en } R_k \quad (4.14)$$

Las derivadas de las funciones V_1, V_2 , se expresan en la forma siguiente:

$$\partial_t V_1(t, p_w, p_a) = \theta_2 \partial_t p_w(\vec{x}, t) \quad ; \quad \partial_t V_2(t, p_w, p_a) = \bar{\theta}_2 \partial_t p_a(\vec{x}, t) \quad (4.15)$$

Finalmente, las leyes de conservación se escribirán:

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) + (J_j^a(\vec{x}, t))_{,j} + \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a \dot{u}_{i,j} - \bar{\theta}_a \partial_t p_w = h(x, t) \text{ en } R_k \quad (4.16)$$

$$\theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) + (J_j^w(\vec{x}, t))_{,j} + \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w \dot{u}_{i,j} + \bar{\theta}_w \partial_t p_a = \bar{h}(x, t) \text{ en } R_k \quad (4.17)$$

Sustituyendo en ellas las expresiones de Darcy obtenemos:

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{ij}^a(p_a(\vec{x}, t))_{,i})_{,j} + \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a \dot{u}_{i,j} - \bar{\theta}_a \partial_t p_w = h(x, t) \text{ en } R_k \quad (4.18)$$

$$\theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{ij}^w(p_w(\vec{x}, t))_{,i})_{,j} + \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w \dot{u}_{i,j} + \bar{\theta}_w \partial_t p_a = \bar{h}(x, t) \text{ en } R_k \quad (4.19)$$

La ley de conservación del momentum lineal para el medio poroelástico será:

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \sigma_{jk,k}^{eff}(\vec{x}, t) = \rho f_i(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (4.20)$$

En términos del tensor efectivo tendremos:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \sigma_{jk,k}^e(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{ik}^w p_{w,k}(\vec{x}, t) = \\ = -\mathbf{S}_{jklm}^{(Es)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (4.21)$$

Finalmente sustituyendo la expresión del tensor elástico tendremos:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{jklm}^{(e)} u_{m,lk}(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{ik}^w p_{w,k}(\vec{x}, t) = \\ = -\mathbf{S}_{jklm}^{(Es)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad ; \quad f_j = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

El sistema de ecuaciones de gobierno junto con las condiciones iniciales y de borde se escriben para el medio poroelástico no saturado, con dos porosidades, y una inclusión en el esqueleto sólido como se indica a continuación

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{jklm}^{(e)} u_{m,lk}(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{ik}^w p_{w,k}(\vec{x}, t) = \\ = -\mathbf{S}_{jklm}^{(Es)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad ; \quad \rho > 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{kj}^a(p_a(\vec{x}, t))_{,k})_{,j} + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{kj}^a \dot{u}_{k,j} + \bar{\theta}_a \partial_t p_w(x, t) = h(x, t) \quad (4.24)$$

$$\theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{ij}^w(p_w(\vec{x}, t))_{,i})_{,j} + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{ij}^w \dot{u}_{i,j} - \bar{\theta}_w \partial_t p_a = \bar{h}(x, t) \text{ en } R_k \quad (4.25)$$

$$h, \bar{h} \in L^2(R_k) \quad ; \quad \mathbf{K}_{ij}^a, \mathbf{K}_{ij}^w, \mathbf{M}_{ij}^a, \mathbf{M}_{ij}^w \in V^{3 \times 3} \quad ; \quad \alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in R_0^+$$

Condiciones iniciales y de borde

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_\tau))^3 \quad ; \quad \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_\tau))^3 \quad (4.26)$$

$$p_a(\vec{x}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in \mathbf{H}_0^1(D_\tau) \quad ; \quad p_w(\vec{x}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in \mathbf{H}_0^1(D_\tau) \quad (4.27)$$

Condiciones de borde mixtas

$$\begin{aligned} & (-C_{jklm}^{(e)} u_{l,m}(\vec{x}, t) + \alpha_1 M_{jk}^a p_a(\vec{x}, t) + \alpha_2 M_{jk}^w p_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = \\ & = -S_{jklm}^{Es} \varepsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} ; \quad u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \bar{u}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} ; \quad \bar{u}_j(\vec{x}, t) \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$-K_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t) + \alpha_1 M_{jk}^a \dot{u}_k(\vec{x}, t) n_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = q \Big|_{\partial\Gamma_{in}} ; \quad p_a(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} & (-K_{jk}^w p_{w,k}(\vec{x}, t) + \bar{\alpha}_2 M_{jk}^w \dot{u}_j(\vec{x}, t) n_j) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \bar{q} ; \quad p_w(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0 \\ & \bar{q} \in L^2(\partial\Gamma_1) ; \quad q_m \in L^2(\partial\Gamma_{in}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.3 Caso poro-visco-elástico

Para el caso **poro-viscoelástico** (Mroginiski, 2013), se introduce un tensor viscoelástico, que es construido análogicamente, teniendo en mente la estructura del tensor elástico ya discutido anteriormente

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(v)}(\vec{x}, t) &= C_{ijkl}^{(v)} \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) ; \quad C_{ijkl}^{(v)} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \bar{\lambda}, \bar{\mu} &: \text{Lame poro-viscoelásticos} \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones constitutivas para este caso serán:

$$\sigma_{ij}^{eff}(\vec{x}, t) = \sigma_{ij}^e(\vec{x}, t) + \sigma_{ij}^{(v)}(\vec{x}, t) - \alpha_1 M_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 M_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \quad (4.31)$$

$$\sigma_{ij}^e(\vec{x}, t) = C_{ijkl}^{(e)} u_{k,l}(\vec{x}, t) ; \quad C_{ijkl}^{(e)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.32)$$

$$\sigma_{ij}^{(v)}(\vec{x}, t) = C_{ijkl}^{(v)} \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) ; \quad C_{ijkl}^{(v)} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.33)$$

$$\lambda, \mu : \text{Lame poro-elásticos} ; \quad \bar{\lambda}, \bar{\mu} : \text{Lame poro-viscoelásticos}$$

De manera simétrica se pueden introducir en la ley de Darcy, términos de viscosidad en la forma:

$$J_j^a(\vec{x}, t) = -K_{ij}^a p_a(\vec{x}, t)_{,i} - \tilde{K}_{ij}^a \dot{p}_a(\vec{x}, t)_{,i} \text{ en } R_k \quad (4.34)$$

$$J_j^w(\vec{x}, t) = -K_{ij}^w (p_w(\vec{x}, t))_{,i} - \tilde{K}_{ij}^w \dot{p}_w(\vec{x}, t)_{,i} \text{ en } R_k \quad (4.35)$$

$$K_{ij}^a, \tilde{K}_{ij}^a, K_{ij}^w, \tilde{K}_{ij}^w \in V^{3 \times 3}$$

$K_{ij}^a, \tilde{K}_{ij}^a, K_{ij}^w, \tilde{K}_{ij}^w$ son matrices simétricas, definidas positivas con normas pertenecientes a algún espacio de Banach convenientemente definido.

Las ecuaciones de conservación para las porosidades son ahora:

$$\begin{aligned} & \theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (K_{jk}^a (p_a(\vec{x}, t))_{,k})_{,j} - (\tilde{K}_{jk}^a \dot{p}_a(\vec{x}, t))_{,k} + \\ & + \bar{\alpha}_1 M_{jk}^a \dot{u}_{j,k} + \bar{\theta}_a \partial_t p_w = h(x, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & \theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) - (K_{jk}^w (p_w(\vec{x}, t))_{,i})_{,j} - (\tilde{K}_{jk}^w \dot{p}_w(\vec{x}, t))_{,k} + \\ & + \bar{\alpha}_2 M_{ij}^w \dot{u}_{i,j} - \bar{\theta}_w \partial_t p_a = \bar{h}(x, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (4.37)$$

De acuerdo con Dormieux et al. (2006), $h(x, t)$ y $\bar{h}(x, t)$ expresan fuerzas impulsoras generalizadas que provienen de las inhomogeneidades existentes

$$h(x, t) = -(S_{jklm}^{(Es)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t))_{,j} \quad ; \quad \bar{h}(x, t) = -(S_{jklm}^{(Es)} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t))_{,j} \quad (4.38)$$

De manera que el nuevo modelo poroviscoelástico es:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^{(e)} u_{m,lk}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^{(v)} \dot{u}_{m,lk}(\vec{x}, t) + \\ + \alpha_1 M_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t) + \alpha_2 M_{jk}^w p_{w,k}(\vec{x}, t) = \rho f_j(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (4.39)$$

Sistema de ecuaciones para las presiones de poro

$$\begin{aligned} \theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (K_{jk}^a (p_a(\vec{x}, t))_{,k})_{,j} - (\tilde{K}_{jk}^a (\dot{p}_a(\vec{x}, t))_{,k})_{,j} + \\ + \bar{\alpha}_1 M_{jk}^a \dot{u}_{j,k} - \bar{\theta}_a \partial_t p_w = h(x, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) - (K_{kj}^w (p_w(\vec{x}, t))_{,i})_{,j} - (\tilde{K}_{kj}^w (\dot{p}_w(\vec{x}, t))_{,k})_{,j} + \\ + \bar{\alpha}_2 M_{kj}^w \dot{u}_{j,k} - \bar{\theta}_2 \partial_t p_a = \bar{h}(x, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} h, \bar{h} \in L^2(R_k) \quad ; \quad K_{ij}^a, K_{ij}^w, \tilde{K}_{ij}^a, \tilde{K}_{ij}^w, M_{ij}^a, M_{ij}^w \in V^{3 \times 3} \\ \alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in R_0^+ \quad ; \quad f_j \in (L^2(R_k))^3 \end{aligned}$$

Las matrices son simétricas y definidas positivas

$$K_{ij}^a = K_{ji}^a, K_{ij}^w = K_{ji}^w, \tilde{K}_{ij}^a = \tilde{K}_{ji}^a, \tilde{K}_{ij}^w = \tilde{K}_{ji}^w, M_{ij}^a = M_{ji}^a, M_{ij}^w = M_{ji}^w$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^a \xi_i \xi_j > a_0 \xi_i \xi_i \quad ; \quad \tilde{K}_{ij}^a \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j > b_0 \dot{\xi}_i \dot{\xi}_i \quad ; \quad K_{ij}^w \eta_i \eta_j > c_0 \eta_i \eta_i \quad ; \quad \tilde{K}_{ij}^w \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j > d_0 \dot{\eta}_i \dot{\eta}_i \\ M_{ij}^a \chi_i \chi_j > e_0 \chi_i \chi_i \quad ; \quad M_{ij}^w \bar{\chi}_i \bar{\chi}_j > q_0 \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i \\ a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, q_0 \in R_0^+ \\ \xi_i \in F(K_{ij}^a), \dot{\xi}_i \in F(\tilde{K}_{ij}^a), \eta_i \in F(K_{ij}^w), \dot{\eta}_i \in F(\tilde{K}_{ij}^w), \chi_i \in F(M_{ij}^a), \bar{\chi}_i \in F(M_{ij}^w) \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

$$u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_\tau))^3 \quad ; \quad \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_\tau))^3 \quad (4.42)$$

$$p_a(\vec{x}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_\tau) \quad ; \quad p_w(\vec{x}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_\tau) \quad (4.43)$$

Condiciones de borde de mixtas para los campos de desplazamientos y los de porosidad

respectivos

$$(-C_{jklm}^{(e)} u_{l,m}(\vec{x}, t) - C_{jklm}^{(v)} \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t) + \alpha_1 M_{jk}^a p_a + \alpha_2 M_{jk}^a p_w) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = \hat{t}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (4.44)$$

$$u_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{u}_j \Big|_{\partial\Gamma_2} / \bar{u}_j \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 ; \quad \hat{t}_j \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad (4.45)$$

$$(-K_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t) - \tilde{K}_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t) + \bar{\alpha}_1 M_{jk}^a \dot{u}_k(\vec{x}, t)) n_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = q \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (4.46)$$

$$(-K_{jk}^w p_{w,k}(\vec{x}, t) - \tilde{K}_{jk}^w p_{w,k}(\vec{x}, t) + \bar{\alpha}_2 M_{jk}^w \dot{u}_k(\vec{x}, t)) n_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \bar{q} \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (4.47)$$

$$q \in L^2(\partial\Gamma_1) ; \quad \bar{q} \in L^2(\partial\Gamma_1) ; \quad p_a(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0 ; \quad p_w(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0 \quad (4.48)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \alpha'_2 \in R_0^+ ; \quad f_j \in (L^2(R_k))^3 ; \quad \hat{t}_j \in (L^2(\partial\Gamma_1))^3 ; \quad h, \bar{h} \in L^2(R_k)$$

4.4 Problema poroelastodinámico en la representación lagrangiana con fuerzas configuracionales

Además de las fuerzas newtonianas estándar de la mecánica del continuo clásica, (Gurtin, 2000) se ocupa de un nuevo tipo de fuerzas de distancia y contacto, que él denomina “configuracionales”; otros nombres propuestos para este último son “material” (Mauguin, 1993) y, más recientemente, “Eshelbiana”, de modo que se pueden, formar los pares coherentes: estándar/configuracional (o estándar/material) y newtoniano/eshelbiano.

Las fuerzas estándar están relacionadas con la posición espacial y la forma de un cuerpo en el momento actual; son observables en el sentido de que realizan trabajo cuando cambia la posición y/o la forma del sólido. Para estudiar los efectos de las fuerzas estándar sobre los sólidos, los observadores actuales encuentran conveniente comparar la posición y la forma actuales de un cuerpo, con alguna referencia fija. Una forma de derivar la ley de equilibrio que las fuerzas estándar deben obedecer es establecer el requisito de que su acción, en cualquier parte del cuerpo, sea invariante bajo traslaciones de los observadores actuales.

Las fuerzas configuracionales se consideran como acciones que alteran la geometría del defecto, más precisamente, están relacionadas con las estructuras materiales de un cuerpo (Gurtin, 2000). Las estructuras materiales pueden ser: una textura cristalina dada (una disposición de átomos en una red); frentes de solidificación, inclusiones, vacancias, dislocaciones y grietas. Estas estructuras pueden evolucionar por acreción, o transferencia de material. (Podio-Guidugli, 2002)

Las fuerzas configuracionales son observables en el sentido de que realizan trabajo cuando cualquiera de estas estructuras materiales evoluciona en el tiempo. Para estudiar las fuerzas configuracionales, los observadores referenciales comparan las formas de los materiales, independientemente de la deformación y el movimiento, en la configuración no deformada. A continuación, y en términos del trabajo de Maugin y Trimarco (1992), escribimos un conjunto de problemas poro-micromecánicos utilizando el formalismo configuracional o material (Mariano, 2020)

Ecuaciones de movimiento

Campo de desplazamiento lagrangiano configuracional, en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff

$$\rho_0 \partial_t^2 x_j(\vec{X}, t) - P_{jA,A}(\vec{X}, t) + \alpha_1 M_{jA}^a p_{a,A}(\vec{X}, t) + \alpha_2 M_{jA}^w p_{w,A}(\vec{X}, t) = - S_{jAkB}^E (\epsilon_{k,B}^*(\vec{X}, t))_{,A} \quad (4.49)$$

Condición de hiperbolicidad fuerte

$$\rho_0 \partial_t^2 x_j(\vec{X}, t) - \mathbf{P}_{jA,A} > 0$$

Campo de porosidades en la formulación lagrangiana en la configuración no deformada

Poros de aire:

$$\begin{aligned} \theta_a \partial_t p_a(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jA}^a \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(\vec{X}, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Condición de parabolicidad fuerte

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t))_{,A} > 0$$

Poros de agua

$$\begin{aligned} \theta_w \partial_t p_w(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jA}^w \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) - \bar{\theta}_w \partial_t p_a(\vec{X}, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Condición de parabolicidad fuerte

$$\theta_w \partial_t p_w(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t))_{,A} > 0$$

Condiciones iniciales

$$x_j(\vec{X}, 0) = x_j^0 / x_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t x_j(\vec{X}, 0) = v_j^0 / v_j^0 \in (\mathbf{L}^2(D_k))^3 \quad (4.52)$$

$$p_a(\vec{X}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(\vec{X}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k) \quad (4.53)$$

Condición de consistencia termodinámica

$$\begin{aligned} \rho_0 (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta}) - p_a(\mathbf{X}, t)) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \rho_0 (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta}) - p_w(\mathbf{X}, t)) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \\ + (\mathbf{J}_B^a(\mathbf{X}, t) / p_a) (\mathbf{K}_{BA}^a p_{a,A}) + (\mathbf{J}_B^w(\mathbf{X}, t) / p_w) (\mathbf{K}_{BA}^w p_{w,A}) + \\ + (\rho_0 \partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_{jA}) : \dot{\mathbf{F}}_{Aj} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Condiciones de contorno en la interface inclusión micromecánica-matriz

$$\begin{aligned} (-\mathbf{P}_{jA}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (p_a(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w (p_w(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = \\ = -\mathbf{S}_{jAkB}^E (\boldsymbol{\epsilon}_{k,B}^*(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t) + \mathbf{M}_{iA}^a \dot{x}_i(\mathbf{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad (4.56)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t) + \mathbf{M}_{iA}^w \dot{x}_i(\mathbf{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad (4.57)$$

Condiciones de contorno sobre la superficie exterior de la matriz

$$(-\mathbf{P}_{jA}(\vec{X}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a(p_a(\vec{X}, t))\hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w p_w(\vec{X}, t))\hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (4.58)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t) + \mathbf{M}_{iA}^a \dot{x}_i(X, t))\hat{n}_a \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.59)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t) + \mathbf{M}_{iA}^w \dot{x}_i(X, t))\hat{n}_a \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.60)$$

Definimos la función de Green de la forma

$$\rho_0 \partial_t^2 g_{jk}(\Delta\vec{X}, \Delta t) - g_{jk,AA}(\Delta\vec{X}, \Delta t) = \delta_{jk}(\delta(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (1/V)) \quad (4.61)$$

$$g_{jk}(\Delta\vec{X}, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_{jk}(\Delta\vec{X}, 0) = 0 \quad (4.62)$$

$$-g_{jk,A}(\Delta\vec{X}, \Delta t)\hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad ; \quad -g_{jk,A}(\Delta\vec{X}, \Delta t)\hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.63)$$

Y encontramos la representación integral siguiente

$$\begin{aligned} & \rho_0 \iiint_V dV \{g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) - x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0)\} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \{ \alpha_1 \mathbf{M}_{jA}^a p_{a,A}(\vec{X}', t') + \alpha_2 \mathbf{M}_{jA}^w p_{w,A}(\vec{X}', t') \} \} \right\} + \\ & + \oint_{\partial\Gamma} dS (x_k(\vec{X}', t) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t'))\hat{n}_A - (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}, t'))n_A = \\ & = - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{S}_{kAnB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \right\} - \\ & \quad - x_j(\vec{X}, t) + \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle \quad (4.64) \end{aligned}$$

Donde hemos impuesto la condición

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{g_{jk,A} \mathbf{P}_{kA}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') - x_k(\vec{X}, t)_{,A} g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t')\} \right\} \quad (4.65)$$

La representación anterior está referida al problema de Neumann, tendremos, con la definición de la función de Green dada precedentemente

$$\begin{aligned} x_j(\vec{X}, t) &= \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{S}_{kAnB}^{Es} \boldsymbol{\epsilon}_{nB,A}^*(\vec{X}, t) \right\} - \\ & - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \{ \alpha_1 \mathbf{M}_{jA}^a p_{a,A}(\vec{X}', t') + \alpha_2 \mathbf{M}_{jA}^w p_{w,A}(\vec{X}', t') \} \} \right\} + \\ & + \rho_0 \iiint_V dV \{x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) - g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0)\} + \\ & + \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a(p_a(\vec{X}, t))\hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w(p_w(\vec{X}, t))n_A + \\ & + \oint_{\partial\Gamma_1} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a(p_a(\vec{X}, t))\hat{n}_A + \\ & \quad + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w(p_w(\vec{X}, t))n_A \quad (4.66) \end{aligned}$$

Y se añade la condición de resolubilidad siguiente

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a(p_a(\vec{X}, t))\hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w p_w(\vec{X}, t))\hat{n}_A = \\ = \iiint_V dV S_{kAnB}^{Es} \epsilon_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a(p_a(\vec{X}, t))\hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w p_w(\vec{X}, t))\hat{n}_A = 0 \quad (4.68)$$

Se propone ahora una técnica análoga a la desarrollada precedentemente, a efectos de obtener representaciones analíticas de las soluciones asociadas ahora, a los campos de porosidades. Definimos las funciones de Green de la forma siguiente

Para el poro de aire

$$\begin{aligned} -\theta_a \partial_t g_a(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{AB}^a g_{a,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{g}_{a,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A} = \\ = \delta(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (1/V) ; g(\Delta\vec{X}, -T) = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$-(\mathbf{K}_{AB}^a g_{a,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{g}_{a,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)\hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad (4.70)$$

$$-(\mathbf{K}_{AB}^a g_{a,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{g}_{a,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)\hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.71)$$

Para el poro de agua

$$\begin{aligned} -\theta_w \partial_t g_w(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{AB}^w g_{w,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{g}_{w,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A} = \\ = \delta(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (1/V) ; g(\Delta\vec{X}, -T) = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$-(\mathbf{K}_{AB}^w g_{w,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{g}_{w,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)\hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad (4.73)$$

$$-(\mathbf{K}_{AB}^w g_{w,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{g}_{w,B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)\hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.74)$$

Utilizando de nuevo, el segundo teorema de Green, obtenemos la representación integral siguiente para ambas porosidades

$$\begin{aligned} \theta_a \iiint_V dV g(\vec{X} - \vec{X}', t - t') p_a(\vec{X}', 0) + \\ + \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS p_a(\vec{X}', t') \mathbf{K}_{AB}^a g_{a,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t')\hat{n}_A - \\ - \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t')\hat{n}_A + \\ + \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS p_a(\vec{X}', t') \mathbf{K}_{AB}^a \dot{g}_{a,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t')\hat{n}_A - \\ - \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{K}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t')\hat{n}_A = \\ = -\bar{\alpha}_1 \int_0^t dt' \iiint_V dV g(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{M}_{jA}^a \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) + \\ + \bar{\theta}_a \iiint_V dV g(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \partial_t p_a(\vec{X}', t') - p_a(\vec{X}, t) \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned}
 \theta_w \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') p_w(\vec{X}', 0) + \\
 + \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS p_w(\vec{X}', t') \mathbf{K}_{AB}^w g_{w,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \hat{n}_A - \\
 - \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \hat{n}_A + \\
 + \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS p_w(\vec{X}', t') \mathbf{K}_{AB}^w \dot{g}_{w,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \hat{n}_A - \\
 - \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{K}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \hat{n}_A = \\
 = -\bar{\alpha}_2 \int_0^t dt' \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{M}_{jA}^w \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) + \\
 + \bar{\theta}_w \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \partial_{t'} p_w(\vec{X}', t') - p_w(\vec{X}, t) \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

Para el problema de Neumann tendremos

$$\begin{aligned}
 p_a(\vec{X}, t) = \langle p_a(\vec{X}, t) \rangle - \bar{\alpha}_1 \int_0^t dt' \iiint_V dV g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{M}_{jA}^a \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) + \\
 + \bar{\theta}_a \iiint_V dV g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \partial_{t'} p_a(\vec{X}', t') - \theta_a \iiint_V dV g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') p_a(\vec{X}', 0) + \\
 + \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_1} dS g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}', t')) \hat{n}_A + \\
 + \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_1} dS g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}', t')) \hat{n}_A \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_w(\vec{X}, t) = \langle p_w(\vec{X}, t) \rangle - \bar{\alpha}_2 \int_0^t dt' \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{M}_{jA}^w \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) + \\
 + \bar{\theta}_a \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \partial_{t'} p_w(\vec{X}', t') - \theta_w \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') p_w(\vec{X}', 0) + \\
 + \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_1} dS g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}', t')) \hat{n}_A + \\
 + \int_0^t dt' \oint_{\partial\Gamma_1} dS g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}', t')) \hat{n}_A \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones integrales representativa de las soluciones, a las que denominamos semi-analíticas es el siguiente:

Representación integral de la solución asociada al campo de desplazamiento lagran-

giano $x_j(\vec{X}, t)$:

$$\begin{aligned}
 x_j(\vec{X}, t) = & \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') S_{kAnB}^{Es} \epsilon_{nB,A}^*(\vec{X}', t') \right\} - \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \left\{ g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \{ \alpha_1 \mathbf{M}_{jA}^a p_{a,A}(\vec{X}', t') + \alpha_2 \mathbf{M}_{jA}^w p_{w,A}(\vec{X}', t') \} \right\} \right\} + \\
 & + \rho_0 \iiint_V dV \left\{ x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) - g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) \right\} + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (p_a(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w p_w(\vec{X}, t)) n_A + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t') + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (p_a(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w p_w(\vec{X}, t)) n_A
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Representación integral de la solución asociada al campo de presiones de poro de aire $p_a(\vec{X}, t)$

$$\begin{aligned}
 p_a(\vec{X}, t) = & \langle p_a(\vec{X}, t) \rangle - \bar{\alpha}_1 \int_0^t dt' \iiint_V dV g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{M}_{jA}^a \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) + \\
 & + \bar{\theta}_a \iiint_V dV g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \partial_{t'} p_a(\vec{X}', t') - \theta_a \iiint_V dV g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') p_a(\vec{X}', 0) + \\
 & + \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \\
 & + \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_a(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Representación integral de la solución asociada al campo de presiones de poro de agua $p_w(\vec{X}, t)$

$$\begin{aligned}
 p_w(\vec{X}, t) = & \langle p_w(\vec{X}, t) \rangle - \bar{\alpha}_2 \int_0^t dt' \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{M}_{jA}^w \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) + \\
 & + \bar{\theta}_w \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \partial_{t'} p_w(\vec{X}', t') - \theta_w \iiint_V dV g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') p_w(\vec{X}', 0) + \\
 & + \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \\
 & + \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_w(\vec{X} - \vec{X}', t - t') (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A + \mathbf{K}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}', t') \hat{n}_A
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Condiciones de resolubilidad del problema de Neumann

$$\iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t) \hat{n}_A = 0 \tag{4.82}$$

$$\iint_{\partial\Gamma_1} dS (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t) \hat{n}_A = 0 \tag{4.83}$$

$$\oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t) \hat{n}_A = 0 \quad (4.84)$$

$$\oint_{\partial\Gamma_1} dS (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t) \hat{n}_A = 0 \quad (4.85)$$

Condiciones de integrabilidad

$$\begin{aligned} \iiint_V dV g_{a,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}', t') &= \\ &= \iiint_V dV p_{,A}(\vec{X}', t') \mathbf{K}_{AB}^a g_{a,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \\ \iiint_V dV g_{w,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{K}_{AB}^a p_{w,B}(\vec{X}', t') &= \\ &= \iiint_V dV p_{w,A}(\vec{X}', t') \mathbf{K}_{AB}^w g_{w,B}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones para el análisis del fenómeno de consolidación se escribirá de la siguiente forma

$$-\dot{\mathbf{P}}_{jA,A}(\vec{X}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{jA}^a \dot{p}_{a,A}(\vec{X}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{jA}^w \dot{p}_{w,A}(\vec{X}, t) = -\mathbf{S}_{jAkB}^E (\boldsymbol{\varepsilon}_{k,B}^*(\vec{X}, t)),_A \quad (4.86)$$

Campo de porosidades

Poros de aire:

$$\begin{aligned} \theta_a \partial_t p_a(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t)),_A - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t)),_A + \\ + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jA}^a \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(\vec{X}, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

Poros de agua

$$\begin{aligned} \theta_w \partial_t p_w(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t)),_A - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t)),_A + \\ + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jA}^w \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) - \bar{\theta}_w \partial_t p_a(\vec{X}, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

Condiciones iniciales

$$x_j(\vec{X}, 0) = x_j^0 / x_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (4.89)$$

$$p_a(\vec{X}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(\vec{X}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k) \quad (4.90)$$

Condiciones de contorno

$$(-\dot{\mathbf{P}}_{jA}(\vec{X}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (\dot{p}_a(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w \dot{p}_w(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (4.91)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t) + \mathbf{M}_{iA}^a \dot{x}_i(\vec{X}, t)) \hat{n}_a \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.92)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t) + \mathbf{M}_{iA}^w \dot{x}_i(\vec{X}, t)) \hat{n}_a \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (4.93)$$

Estos operadores se denominan tasa-independientes, y son un ejemplo de operadores parabólicos completamente degenerados (Showalter, 1997, 2005)

CAPÍTULO 5

Micromecánica configuracional Aplicada al sistema de Biot en la Formulación de Segundo Gradiente

«...Fluctuat nec mergitur...»
Lema de Lutetia

Resumen y objetivos:

Se formula el problema micromecánico configuracional aplicado al sistema (u_i, p_w, p_a) de Biot, concretándose así lo declarado en el título de esta tesis.

- Formular consistentemente el problema dinámico micro-poroelástico, en la formulación de Biot, en la configuración no deformada, es decir, conteniendo fuerzas configuracionales con la notación de Maugin y Trimarco (1992); Maugin (1992).

5.1 Consideraciones previas respecto del marco teórico a desarrollar

Se desarrolla un modelo micromecánico configuracional de Biot, con dos porosidades en el referencial no deformado, en términos de del primer tensor de Piola-Kirchoff (Maugin, 2011), con condiciones de borde tipo Neumann y consistencia termodinámica (Mindlin y Eshel, 1968), (Mindlin y Tiersten, 1962), (Polizzotto, 2012).

Ecuaciones de movimiento

Campo de desplazamiento microelástico configuracional, en función del primer tensor de Piola-Kirchoff (Maugin, 1993, 1995), (Askas y Aifantis, 2011)

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial_t^2 x_i(\vec{X}, t) - b_\mu^2 (\partial_t^2 x_i(\vec{X}, t))_{,AA} - \mathbf{P}_{jA,A}(\vec{X}, t) - \partial_t \mathbf{P}_{jA,A}(\vec{X}, t) + \\ + l_\mu^2 (\mathbf{P}_{jA,KK}(\vec{X}, t))_{,A} + \tilde{l}_\mu^2 \partial_t (\mathbf{P}_{jA,KK}(\vec{X}, t))_{,A} + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (P_a(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w (P_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,A} - l_\mu^2 \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (P_{a,KK}(\vec{X}, t))_{,A} - \\ - l_\mu^2 \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w (P_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,A} = -\mathbf{S}_{iAjB}^E (\epsilon_{j,B}^*(\vec{X}, t))_{,A} + \mathbf{S}_{iAjB}^E ((\epsilon_{j,KK}^*(\vec{X}, t))_{,B})_{,A} \quad (5.1) \end{aligned}$$

Campo de porosidades en la formulación de segundo gradiente en la configuración no deformada

Poros de aire

$$\begin{aligned} \theta_a \partial_t p_a(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^a p_{a,B}(\vec{X}, t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{p}_{a,B}(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + l_a^2 (\mathbf{K}_{AB}^a (p_{a,KK}(\vec{X}, t))_{,B})_{,A} + \tilde{l}_a^2 (\tilde{\mathbf{K}}_A^a (\dot{p}_{a,KK}(\vec{X}, t))_{,B})_{,A} + \mathbf{M}_{iA}^a \dot{x}_i(X, t)_{,A} - \end{aligned}$$

$$-l_a^2 \mathbf{M}_{iA}^a (\dot{x}_i(X, t))_{,KK},_A - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(\vec{X}, t) + l_a^2 \bar{\theta}_a (\partial_t p_w(\vec{X}, t))_{,AA} = 0 \quad (5.2)$$

Poros de agua

$$\begin{aligned} & \theta_w \partial_t p_w(\vec{X}, t) - (\mathbf{K}_{AB}^w p_{w,B}(\vec{X}, t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{p}_{w,B}(\vec{X}, t))_{,A} + \\ & + l_w^2 (\mathbf{K}_{AB}^w (p_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,B})_{,A} + \tilde{l}_w^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w (\dot{p}_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,i})_{,A} + \mathbf{M}_{AB}^w \dot{x}_i(X, t)_{,A} - \\ & - l_w^2 \mathbf{M}_{AB}^w (\dot{x}_i(X, t))_{,KK},_A - \bar{\theta}_w \partial_t p_a(\vec{X}, t) + l_w^2 \bar{\theta}_w (\partial_t p_a(\vec{X}, t))_{,AA} = 0 \quad (5.3) \end{aligned}$$

Condición de consistencia termodinámica

$$\begin{aligned} & \rho_0 (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - p_a(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \rho_0 (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - p_w(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \\ & + (\mathbf{J}_A^a(\vec{x}, t)/p_a)(\mathbf{M}_{AB}^a p_{a,B} - l_a^2 (\mathbf{M}_{AB}^a p_{a,KK})_{,B}) + \\ & + (\mathbf{J}_A^w(\vec{x}, t)/p_w)(\mathbf{M}_{AB}^w p_{w,B} - l_w^2 (\mathbf{M}_{AB}^w p_{a,KK})_{,B}) + \\ & + (\rho_0 \partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_{iA}) : \dot{\mathbf{F}}_{Ai} \geq 0 \quad (5.4) \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

$$x_i(\vec{X}, 0) = x_i^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t x_i(\vec{X}, 0) = v_i^0 / v_i^0 \in (\mathbf{L}^2(D_k))^2 \quad (5.5)$$

$$x_i(\vec{X}, 0) \Big|_{\partial \Pi} = \bar{x}_i^0 \Big|_{\partial \Pi} / \bar{x}_i^0 \Big|_{\partial \Pi} \in (\mathbf{H}_0^1(\partial \Pi))^2 \quad (5.6)$$

$$(\partial_t x_i(\vec{X}, 0))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial \Pi} = v_i^0 \Big|_{\partial \Pi} / v_i^0 \in (\mathbf{L}^2(\partial \Pi))^2 \quad (5.7)$$

$$p_a(\vec{X}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(\vec{X}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in (\mathbf{L}^2(D_k)) \quad (5.8)$$

Condiciones de contorno en la interface inclusión micromecánica-matriz

$$\begin{aligned} & (-\mathbf{P}_{iA}(\vec{X}, t) - \partial_t \mathbf{P}_{jA}(\vec{X}, t) + l_\mu^2 (\mathbf{P}_{jA,KK}(\vec{X}, t))) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\ & + (\tilde{l}_\mu^2 \partial_t (\mathbf{P}_{jA,KK}(\vec{X}, t))) \hat{n}_A + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (p_a(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w (p_{w,KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\ & + (-l_\mu^2 \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a (p_{a,KK}(\vec{X}, t))) \hat{n}_A - l_\mu^2 \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w (p_{w,KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} = \\ & = -\mathbf{S}_{iAjB}^E (\epsilon_{j,B}^*(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \mathbf{S}_{iAjB}^E ((\epsilon_{j,KK}^*(\vec{X}, t))_{,B}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} \quad (5.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-\mathbf{K}_{iA}^a p_{a,i}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{iA}^a \dot{p}_{a,i}(\vec{X}, t) + l_a^2 \mathbf{K}_{iA}^a (p_{a,KK}(\vec{X}, t))_{,i}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\ & + (\tilde{l}_a^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{iA}^a (\dot{p}_{a,KK}(\vec{X}, t))_{,i}) + \mathbf{M}_{iA}^a \dot{x}_i(X, t) - l_a^2 \mathbf{M}_{iA}^a (\dot{x}_i(X, t))_{,KK}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\ & + l_a^2 \bar{\theta}_a (\partial_t p_w(\vec{X}, t))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} = 0 \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-\mathbf{K}_{iA}^w p_{w,i}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{iA}^w \dot{p}_{w,i}(\vec{X}, t) + l_w^2 \mathbf{K}_{iA}^w (p_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,i}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\ & + (\tilde{l}_w^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{iA}^w (\dot{p}_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,i}) + \mathbf{M}_{iA}^w \dot{x}_i(X, t) - l_w^2 \mathbf{M}_{iA}^w (\dot{x}_i(X, t))_{,KK}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\ & + l_w^2 \bar{\theta}_w (\partial_t p_a(\vec{X}, t))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} = 0 \quad (5.11) \end{aligned}$$

Condiciones de contorno sobre la superficie exterior de la matriz

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{P}_{jA}(\vec{X}, t) - \partial_t \mathbf{P}_{jA}(\vec{X}, t) + l_\mu^2 (\mathbf{P}_{jA, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\
 & + (\tilde{l}_\mu^2 \partial_t (\mathbf{P}_{jA, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a(p_a(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w(p_{w, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\
 & + (-l_\mu^2 \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a(p_{a, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - l_\mu^2 \alpha_2 \mathbf{M}_{iA}^w(p_{w, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (-\mathbf{K}_{iA}^a p_{a,i}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{iA}^a \dot{p}_{a,i}(\vec{X}, t) + l_a^2 \mathbf{K}_{iA}^a(p_{a, KK}(\vec{X}, t))_{,i} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\
 & + (\tilde{l}_a^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{iA}^a (\dot{p}_{a, KK}(\vec{X}, t))_{,i} + \mathbf{M}_{iA}^a \dot{x}_i(X, t) - l_a^2 \mathbf{M}_{iA}^a(\dot{x}_i(X, t)_{, KK})) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\
 & + l_a^2 \bar{\theta}_a (\partial_t p_w(\vec{X}, t))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (-\mathbf{K}_{iA}^w p_{w,i}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{iA}^w \dot{p}_{w,i}(\vec{X}, t) + l_w^2 \mathbf{K}_{iA}^w(p_{w, KK}(\vec{X}, t))_{,i} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\
 & + (\tilde{l}_w^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{iA}^w (\dot{p}_{w, KK}(\vec{X}, t))_{,i} + \mathbf{M}_{iA}^w \dot{x}_i(X, t) - l_w^2 \mathbf{M}_{iA}^w(\dot{x}_i(X, t)_{, KK})) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\
 & + l_w^2 \bar{\theta}_w (\partial_t p_a(\vec{X}, t))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Definimos la función de Green micromecánica en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 \partial_t^2 g_{jk}(\Delta \vec{X}, \Delta t) - b_\mu^2 (\partial_t^2 g_{jk}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,AA} - g_{jk,AA}(\Delta \vec{X}, \Delta t) - \\
 & - \dot{g}_{jk,AA}(\Delta \vec{X}, \Delta t) + l_\mu^2 ((g_{jk,A}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{KK})_{,A} + \\
 & + \tilde{l}_\mu^2 ((g_{jk,A}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{KK})_{,A} = \delta_{jk} (\delta(\Delta \vec{X}, \Delta t) - (1/V)) \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Y utilizando el tercer teorema de Green tenemos la representación integral siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 \iiint_V dV \{g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) - x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0)\} + \\
 & + b_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma} dS (x_k(\vec{X}', 0) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t)) \hat{n}_A - b_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) (\partial_t x_k(\vec{X}', 0))_{,A} + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (x_k(\vec{X}, t) g_{jk,A}(\Delta \vec{X}, \Delta t) - g_{jk}(\vec{X}, t) \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (x_k(\vec{X}, t) \dot{g}_{jk,A}(\Delta \vec{X}, \Delta t) - g_{jk}(\vec{X}, t) \dot{\mathbf{P}}_{kA}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \\
 & + l_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}, t))_{,KK} - x_k(\vec{X}, t) (g_{jk, KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,A}) \hat{n}_A + \\
 & + \tilde{l}_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\dot{\mathbf{P}}_{kA}(\vec{X}, t))_{,KK} - x_k(\vec{X}, t) (\dot{g}_{jk, KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,A}) \hat{n}_A = \\
 & = \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') J_k(\vec{X}', t) \right\} - x_j(\vec{X}, t) + \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Donde

$$J_j = -g_{jk} S_{kAnB}^E(\epsilon_{n,B}^*(\vec{X}, t))_{,A} + g_{jk} S_{kAnB}^E((\epsilon_{n,KK}^*(\vec{X}, t))_{,B})_{,A} - \\ - \alpha_1 g_{jk} \mathbf{M}_{kA}^a(p_a(\vec{X}, t))_{,A} + \alpha_2 g_{jk} \mathbf{M}_{kA}^w(p_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + l_\mu^2 \alpha_1 g_{jk} \mathbf{M}_{kA}^a(p_{a,KK}(\vec{X}, t))_{,A} + l_\mu^2 \alpha_2 g_{jk} \mathbf{M}_{kA}^w(p_{w,KK}(\vec{X}, t))_{,A} \quad (5.17)$$

Donde hemos impuesto las condiciones de integrabilidad siguientes

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{ g_{jk,A} \mathbf{P}_{kA}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') - \right. \\ \left. - x_k(\vec{X}, t)_{,A} g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \} \right\} = 0 \quad (5.18)$$

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{ g_{jk,A} \dot{\mathbf{P}}_{kA}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') - \right. \\ \left. - x_k(\vec{X}, t)_{,A} \dot{g}_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \} \right\} = 0 \quad (5.19)$$

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{ g_{jk,A} \mathbf{P}_{kA,KK}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') - \right. \\ \left. - x_k(\vec{X}, t)_{,A} (g_{jk,KK}(\vec{X} - \vec{X}', t - t'))_{,A} \} \right\} = 0 \quad (5.20)$$

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV \{ g_{jk,A} \dot{\mathbf{P}}_{kA,KK}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') - \right. \\ \left. - x_k(\vec{X}, t)_{,A} (\dot{g}_{jk,KK}(\vec{X} - \vec{X}', t - t'))_{,A} \} \right\} = 0 \quad (5.21)$$

La representación semi-analítica de la solución, asociada a los campos lagrangianos, para el problema mixto se escribirá:

$$x_j(\vec{X}, t) = \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') J_k(\vec{X}', t') \right\} + \\ + \rho_0 \iiint_V dV \left\{ x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) - g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) \right\} - \\ - b_\mu^2 \oint_{\partial\Pi} dS (x_k(\vec{X}', 0) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t)) \hat{n}_A + b_\mu^2 \oint_{\partial\Pi} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0))_{,A} + \\ + \oint_{\partial\Gamma} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t')) \hat{n}_A - x_k(\vec{X}', t) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \hat{n}_A - \\ - \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (x_k(\vec{X}, t) g_{jk,A}(\Delta\vec{X}, \Delta t) - g_{jk}(\vec{X}, t) \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - \\ - \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (x_k(\vec{X}, t) \dot{g}_{jk,A}(\Delta\vec{X}, \Delta t) - g_{jk}(\vec{X}, t) \dot{\mathbf{P}}_{kA}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - \\ - l_\mu^2 \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}, t))_{,KK} - x_k(\vec{X}, t) (g_{jk,KK}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A}) \hat{n}_A - \\ - \tilde{l}_\mu^2 \oint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\dot{\mathbf{P}}_{kA}(\vec{X}, t))_{,KK} - x_k(\vec{X}, t) (\dot{g}_{jk,KK}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A}) \hat{n}_A \quad (5.22)$$

Para el problema de Neumann tendremos:

$$\begin{aligned}
 x_j(\vec{X}, t) = & \langle x_j(\vec{X}, t) \rangle + \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V dV g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') J_k(\vec{X}', t') \right\} + \\
 & + \rho_0 \iiint_V dV \left\{ x_k(\vec{X}', 0) \partial_t g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', 0) - g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) \partial_t x_k(\vec{X}, 0) \right\} - \\
 & - b_\mu^2 \iint_{\partial\Pi} dS (x_k(\vec{X}', 0) g_{jk,A}(\vec{X} - \vec{X}', t)) \hat{n}_A + b_\mu^2 \iint_{\partial\Pi} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t) (\partial_t x_k(\vec{X}', 0))_{,A}) \hat{n}_A + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma} dS (g_{jk}(\vec{X} - \vec{X}', t - t') \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}', t')) n_A + \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\vec{X}, t) \mathbf{P}_{kA}(\vec{X}, t)) n_A + \\
 & + \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\Delta\vec{X}, \Delta t) \dot{\mathbf{P}}_{kA}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - l_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\mathbf{P}_{kA}(\vec{X}, t))_{,KK}) \hat{n}_A - \\
 & - \tilde{l}_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (g_{jk}(\dot{\mathbf{P}}_{kA}(\vec{X}, t))_{,KK}) \hat{n}_A \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Las condiciones de resolubilidad serán:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\partial\Gamma_1} dS (-\mathbf{P}_{jA}(\vec{X}, t) - \dot{\mathbf{P}}_{jA}(\vec{X}, t) + l_\mu^2 \mathbf{P}_{jA, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \\
 & + \tilde{l}_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_1} dS (\dot{\mathbf{P}}_{jA, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a p_a(\vec{X}, t) \hat{n}_A + \\
 & + \alpha_2 l_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_1} dS \mathbf{SM}_{iA}^w(p_{w, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - l_\mu^2 \alpha_1 \iint_{\partial\Gamma_1} dS \mathbf{SM}_{iA}^a(p_{a, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - \\
 & - l_\mu^2 \alpha_2 \iint_{\partial\Gamma_1} dS \mathbf{SM}_{iA}^w(p_{w, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A = 0 \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (-\mathbf{P}_{jA}(\vec{X}, t) - \dot{\mathbf{P}}_{jA}(\vec{X}, t) + l_\mu^2 \mathbf{P}_{jA, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \\
 & + \tilde{l}_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS (\dot{\mathbf{P}}_{jA, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A + \alpha_1 \mathbf{M}_{iA}^a p_a(\vec{X}, t) \hat{n}_A + \\
 & + \alpha_2 l_\mu^2 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS \mathbf{SM}_{iA}^w(p_{w, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - l_\mu^2 \alpha_1 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS \mathbf{SM}_{iA}^a(p_{a, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A - \\
 & - l_\mu^2 \alpha_2 \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS \mathbf{SM}_{iA}^w(p_{w, KK}(\vec{X}, t)) \hat{n}_A = - \iiint_V dV \mathbf{S}_{iAjB}^E(\epsilon_{j, B}^*(\vec{X}, t))_{,A} + \\
 & + - l_\mu^2 \iiint_V dV \mathbf{S}_{iAjB}^E((\epsilon_{j, KK}^*(\vec{X}, t))_{,B})_{,A} \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Para el poro de aire se plantea una función de Green que deberá satisfacer el siguiente problema de condiciones iniciales y de borde

$$\begin{aligned}
 & - \theta_a \partial_t g_a(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{AB}^a g_{a, B}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{g}_{a, B}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,A} + \\
 & + l_a^2 \mathbf{K}_{AB}^a (g_{a, KK}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,B})_{,A} + \tilde{l}_a^2 \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a (\dot{g}_{a, KK}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,B})_{,A} = \\
 & = \delta(\Delta\vec{X}, \Delta t) - (1/V) \quad ; \quad g_a(\Delta\vec{X}, -T) = 0 \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (-\mathbf{K}_{AB}^a g_{a, B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{g}_{a, B}(\Delta\vec{X}, \Delta t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\
 & + l_a^2 (\mathbf{K}_{AB}^a (g_{a, KK}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,B})_{,A} + \tilde{l}_a^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a (\dot{g}_{a, KK}(\Delta\vec{X}, \Delta t))_{,B}) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^a \mathcal{G}_{a,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a \dot{\mathcal{G}}_{a,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_1} + \\ + l_a^2 (\mathbf{K}_{AB}^a (\mathcal{G}_{a,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B} + \tilde{l}_a^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^a (\dot{\mathcal{G}}_{a,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_1} = 0 \quad (5.28)$$

Análogamente para el poro de agua

$$-\theta_a \partial_t \mathcal{G}_w(\Delta \vec{X}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{AB}^w \mathcal{G}_{w,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,A} - (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{\mathcal{G}}_{w,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,A} + \\ + l_w^2 \mathbf{K}_{AB}^w (\mathcal{G}_{a,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B},_A + \tilde{l}_a^2 \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w (\dot{\mathcal{G}}_{a,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B},_A = \\ = \delta(\Delta \vec{X}, \Delta t) - (1/V) \quad ; \quad \mathcal{G}_w(\Delta \vec{X}, -T) = 0 \quad (5.29)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^w \mathcal{G}_{w,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{\mathcal{G}}_{w,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\ + l_a^2 (\mathbf{K}_{AB}^w (\mathcal{G}_{a,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B} + \tilde{l}_a^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w (\dot{\mathcal{G}}_{w,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_{in}} = 0 \quad (5.30)$$

$$(-\mathbf{K}_{AB}^w \mathcal{G}_{a,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t)) - \tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w \dot{\mathcal{G}}_{w,B}(\Delta \vec{X}, \Delta t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_1} + \\ + l_a^2 (\mathbf{K}_{AB}^w (\mathcal{G}_{a,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B} + \tilde{l}_w^2 (\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^w (\dot{\mathcal{G}}_{w,KK}(\Delta \vec{X}, \Delta t))_{,B}) \hat{n}_A \Big|_{\partial \Gamma_1} = 0 \quad (5.31)$$

5.2 Sistema de Biot Micro-poromecánico configuracional en la formulación de segundo gradiente

Sistema de Biot Microporomecánico configuracional en la formulación de segundo gradiente con dos porosidades, vacíos y consistencia termodinámica en el referencial deformado (Dormieux et al., 2006).

La densidad de lagrangiano para el problema poro-visco-elastodinámico en la formulación de segundo gradiente en un medio con microestructuras (Ver Apéndice C)

$$\mathcal{L}(u_j, u_{j,k}, \partial_t u_j, v_{j,k}, \vec{x}, t) = \\ = \left\{ (1/2) \rho (\partial_t u_j(\vec{x}, t))^2 - (1/2) \rho l_1^2 ((\partial_t u_j(\vec{x}, t))^2)_{,kk} - (1/2) u_{j,k}(\vec{x}, t) \mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + \right. \\ + (1/2) l_1^2 \{ \hat{\nabla}^2 u_{j,k}(\vec{x}, t) \mathbf{C}_{jklm}^e \hat{\nabla}^2 u_{l,m}(\vec{x}, t) \} + (1/2) v_{j,k}(\vec{x}, t) \mathbf{C}_{jklm}^v v_{l,m}(\vec{x}, t) - \\ - (1/2) l_1^2 \{ \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t) \mathbf{C}_{jklm}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t) \} - a_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) p_{a,k} u_j(\vec{x}, t) - \\ - a_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) p_{w,k} u_j(\vec{x}, t) - (\mathbf{S}_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*) u_j(\vec{x}, t) \} + \\ + \{ p_w(\vec{x}, t) \partial_t p_a(\vec{x}, t) + p_a(\vec{x}, t) \partial_t p_w(\vec{x}, t) - \\ - (1/2) \mathbf{K}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) p_{a,k}(\vec{x}, t) p_{a,j}(\vec{x}, t) - (1/2) \mathbf{K}_{jk}^w (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) p_{w,k}(\vec{x}, t) p_{w,j}(\vec{x}, t) - \\ - (1/2) \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_{a,k}(\vec{x}, t) \dot{p}_{a,j}(\vec{x}, t) - (1/2) \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^w (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_{w,k}(\vec{x}, t) \dot{p}_{w,j}(\vec{x}, t) + \\ + \bar{a}_1 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,k} p_a(\vec{x}, t) + \bar{a}_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,k} p_w(\vec{x}, t) - \tau H(p_a, p_w) \} \quad (5.32)$$

La acción asociada a la densidad de lagrangiano anterior es

$$S = \int_0^t dt \left\{ \iiint_{V_k} d^3x \left\{ (1/2) \rho (\partial_t u_j(\vec{x}, t))^2 - (1/2) \rho l_1^2 ((\partial_t u_j(\vec{x}, t))^2)_{,kk} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1/2) u_{j,k}(\vec{x}, t) \mathbf{C}_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (1/2)l_1^2\{\hat{\nabla}^2 u_{j,k}(\vec{x}, t)C_{jklm}^e \hat{\nabla}^2 u_{l,m}(\vec{x}, t)\} + (1/2)v_{j,k}(\vec{x}, t)C_{jklm}^v v_{l,m}(\vec{x}, t) - \\
 & - (1/2)l_1^2\{\hat{\nabla}^2 \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t)C_{jklm}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{l,m}(\vec{x}, t)\} - a_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) p_{a,k} u_j(\vec{x}, t) - \\
 & - a_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) p_{w,k} u_j(\vec{x}, t) - (\mathbf{S}_{jklm}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{lm,k}^*) u_j(\vec{x}, t) \} + \\
 & + \int_0^t dt \left\{ \iiint_{V_k} d^3x \{ p_w(\vec{x}, t) \partial_t p_a(\vec{x}, t) + p_a(\vec{x}, t) \partial_t p_w(\vec{x}, t) - \right. \\
 & - (1/2) \mathbf{K}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) p_{a,k}(\vec{x}, t) p_{a,j}(\vec{x}, t) - (1/2) \mathbf{K}_{jk}^w (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) p_{w,k}(\vec{x}, t) p_{w,j}(\vec{x}, t) - \\
 & - (1/2) \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_{a,k}(\vec{x}, t) \dot{p}_{a,j}(\vec{x}, t) - (1/2) \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^w (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_{w,k}(\vec{x}, t) \dot{p}_{w,j}(\vec{x}, t) + \\
 & \left. + \bar{a}_1 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,k} p_a(\vec{x}, t) + \bar{a}_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,k} p_w(\vec{x}, t) - \tau H(p_a, p_w) \} \right\} \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Utilizando el principio de mínima acción se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

Ecuaciones de movimiento

Campos de desplazamiento

$$\begin{aligned}
 & \rho \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - b^2 (\partial_t^2 u_i(\vec{x}, t))_{,jj} - C_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) - B_{ij} \varphi_{,j}(\vec{x}, t) + \\
 & + l_\mu^V B_{ij} \hat{\nabla}^2 \varphi_{,j}(\vec{x}, t) + l_\mu^2 C_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,lj}(\vec{x}, t) + \tilde{l}_\mu^2 C_{ijkl}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) + a_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t) + \\
 & + a_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_{w,j}(\vec{x}, t) - l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t) = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}, t) + \\
 & + \mathbf{S}_{ijkl}^E \hat{\nabla}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k ; a_{1,2}, l_\mu^V, l_\mu^2, l_{1\mu}^2, l_{2\mu}^2, \rho \in R_0^+ \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Vacíos

$$\begin{aligned}
 & \rho k \partial_t^2 \varphi(\vec{x}, t) - A_{jk}^V \varphi_{,kj}(\vec{x}, t) - (\mathbf{D}_{ijk}^V u_{k,i}(\vec{x}, t))_{,j} + B_{ij} u_{i,j}(\vec{x}, t) - \\
 & - b_j \varphi_{,j}(\vec{x}, t) + \xi_1 \varphi(\vec{x}, t) + \xi_1 \partial_t \varphi(\vec{x}, t) = \rho f^V(\vec{x}, t) \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

Porosidades de aire y agua

$$\begin{aligned}
 & \theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) + \mathbf{J}_{j,j}^a(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^a (\dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t)) - \\
 & - \mathbf{B}_{ij}^V (\varphi_{i,j}(\vec{x}, t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \varphi_{i,j}(\vec{x}, t)) - \partial_t V_a(\vec{x}, t, \|p_a - p_w\|, \varphi) = 0 \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) + \mathbf{J}_{j,j}^w(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^w (\dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t)) - \\
 & - \mathbf{B}_{ij}^V (\varphi_{i,j}(\vec{x}, t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \varphi_{i,j}(\vec{x}, t)) - \partial_t V_w(\vec{x}, t, \|p_w - p_a\|, \varphi) = 0 \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

Flujos y desigualdad de Clausius Duhem

$$\mathbf{J}_i^a(\vec{x}, t) = -\mathbf{K}_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t) - \mathbf{K}_{ij}^w \dot{p}_{a,j}(\vec{x}, t) + l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t) \quad (5.38)$$

$$\mathbf{J}_i^w(\vec{x}, t) = -\mathbf{K}_{ij}^w p_{a,j}(\vec{x}, t) - \mathbf{K}_{ij}^w \dot{p}_{a,j}(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t) \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned}
 & \rho (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - p_a(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \rho (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - p_w(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \\
 & + \rho (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - \varphi(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \rho (\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - (1 - \hat{\nabla}^2) \boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{F}_{jA}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}}_{Ai} + \\
 & + (\mathbf{J}_i^a(\vec{x}, t)/p_a) (\mathbf{M}_{ij}^a p_{a,j} - l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t)) + \\
 & + (\mathbf{J}_i^w(\vec{x}, t)/p_w) (\mathbf{M}_{ij}^w p_{a,j} - l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t)) + \\
 & + (\mathbf{J}_i^V(\vec{x}, t)/\varphi) (\mathbf{M}_{ij}^V \varphi_{,j} - l_\mu^V \mathbf{M}_{ij}^V \hat{\nabla}^2 \varphi_{,j}(\vec{x}, t)) \geq 0 \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

$$u_i(\vec{x}, 0) = u_i^0 / u_i^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t u_i(\vec{x}, 0) = v_i^0 / v_i^0 \in (L^2(D_k))^2 \quad (5.41)$$

$$u_i(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial\Pi} = \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} \in (H_0^1(\partial\Pi))^2 \quad (5.42)$$

$$(\partial_t u_i(\vec{x}, 0))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Pi} = v_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / v_i^0 \Big|_{\partial\Pi} \in (L^2(\partial\Pi))^2 \quad (5.43)$$

$$p_a(\vec{x}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(\vec{x}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in L^2(D_k) \quad (5.44)$$

$$\varphi(\vec{x}, 0) = \varphi_0 / \varphi_0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad \partial_t \varphi(\vec{x}, 0) = \varphi_1^0 / \varphi_1^0 \in L^2(D_k) \quad (5.45)$$

Condiciones de borde entre: inclusión-matriz y superficie limitadora exterior

$$\begin{aligned} & (-\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\ & + (-\mathbf{B}_{ij} \varphi(\vec{x}, t) + l_\mu^V \mathbf{B}_i \hat{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}, t) + l_\mu^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\ & + (\tilde{l}_\mu^2 \mathbf{C}_{ijk}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) + a_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) + a_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\ & + (l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_a(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = -\mathbf{S}_{ijkl}^E \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\ & + \mathbf{S}_{ijkl}^E \hat{\nabla}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} \text{ en } R_k \quad ; \quad a_{1,2}, l_\mu^V, l_\mu^2, l_{1\mu}^2, l_{2\mu}^2, \rho \in R_0^+ \end{aligned} \quad (5.46)$$

Sobre la superficie limitadora externa

$$\begin{aligned} & (-\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ & + (-\mathbf{B}_{ij} \varphi(\vec{x}, t) + l_\mu^V \mathbf{B}_i \hat{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}, t) + l_\mu^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ & + (\tilde{l}_\mu^2 \mathbf{C}_{ijk}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) + a_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) + a_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ & + (l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_a(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = -\mathbf{S}_{ijkl}^E \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ & + \mathbf{S}_{ijkl}^E \hat{\nabla}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} \text{ en } R_k \quad ; \quad a_{1,2}, l_\mu^V, l_\mu^2, l_{1\mu}^2, l_{2\mu}^2, \rho \in R_0^+ \end{aligned} \quad (5.47)$$

Para el campo de vacíos y la inclusión y sobre la superficie limitadora externa

$$(-\mathbf{A}_{jk}^V \varphi_{,k}(\vec{x}, t) - (\mathbf{D}_{ijk}^V u_{k,i}(\vec{x}, t)) + \mathbf{B}_{ij} u_i(\vec{x}, t) - g_j \varphi(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad (5.48)$$

$$(-\mathbf{A}_{jk}^V \varphi_{,k}(\vec{x}, t) - (\mathbf{D}_{ijk}^V u_{k,i}(\vec{x}, t)) + \mathbf{B}_{ij} u_i(\vec{x}, t) - g_j \varphi(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} & (J_j^a(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^a (\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \mathbf{B}_{ij}^V (\varphi_{,i}(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \\ & - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \varphi_{,i}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} & (J_j^w(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^w (\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \mathbf{B}_{ij}^V (\varphi_{,i}(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \\ & - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \varphi_{,i}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\left. (J_j^a(\vec{x}, t) + M_{ij}^a(\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t))) \right|_{\partial\Gamma_1} - B_{ij}^V(\varphi_{,i}(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_1} - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \varphi_{,i}(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (5.52)$$

$$\left. (J_j^w(\vec{x}, t) + M_{ij}^w(\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t))) \right|_{\partial\Gamma_1} - B_{ij}^V(\varphi_{,i}(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_1} - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \varphi_{,i}(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (5.53)$$

Cálculo de las funciones de Green, para el campo de desplazamientos

$$\rho \partial_t^2 g_{in}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - b^2 (\partial_t^2 g_{in}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,jj} - C_{ijkl}^e g_{nk,lj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - C_{ijkl}^v \dot{g}_{nk,lj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - l_\mu^2 C_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 g_{nk,lj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) + \tilde{l}_\mu^2 C_{ijkl}^v \hat{\nabla}^2 \dot{g}_{nk,lj}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = \delta_{in} (\delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) - 1/V) \quad (5.54)$$

Para el campo de vacíos

$$\rho k \partial_t^2 g_V(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (A_{jk}^V g_{V,k}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,j}(\vec{x}, t) - b_j g_{V,j}(\Delta \vec{x}, \Delta t) = \delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (1/V) \quad (5.55)$$

Para el campo de porosidades

$$- \theta_a \partial_t g_a(\Delta \vec{x}, \Delta t) - K_{ij}^a (g_{a,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 g_{a,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,j} - K_{ij}^a (\dot{g}_{a,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \dot{g}_{a,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,j} = \delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) \quad (5.56)$$

$$- \theta_w \partial_t g_w(\Delta \vec{x}, \Delta t) - K_{ij}^w (g_{w,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 g_{w,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,j} - K_{ij}^w (\dot{g}_{w,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \dot{g}_{w,i}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,j} = \delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) \quad (5.57)$$

Representación integral de las soluciones idénticas a las obtenidas para el primer caso solo se incorpora el términos de vacíos

5.3 Sistema de Biot Micro-poromecánico configuracional en la formulación de segundo gradiente con pre-stressed

Sistema de Biot Microporomecánico configuracional en la formulación de segundo gradiente con pre-stressed (Bažant, 1971), (Biot, 1965), (Biot y Temple, 1972), (Singh et al., 2010) en la formulación de segundo gradiente con dos porosidades, vacíos (Cowin y Nunziato, 1983) y consistencia termodinámica en el referencial deformado

Ecuaciones de movimiento

Campos de desplazamiento

$$\rho \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - b^2 (\partial_t^2 u_i(\vec{x}, t))_{,jj} - C_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^v \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) - ((\sigma_{ik}^0 u_{k,j}(x, t))_{,j} - B_{ij} \varphi_{,j}(x, t) + l_\mu^V B_{ij} \hat{\nabla}^2 \varphi_{,j}(\vec{x}, t) + l_\mu^2 C_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,lj}(\vec{x}, t) + \tilde{l}_\mu^2 C_{ijkl}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) + \sigma_{ik}^0 (\hat{\nabla}^2 u_{k,j}(x, t))_{,j} + a_1 M_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t) + a_2 M_{ij}^w p_{w,j}(\vec{x}, t) - l_{1\mu}^2 M_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 M_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t) = -S_{ijkl}^E \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t) + S_{ijkl}^E \hat{\nabla}^2 \epsilon_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \quad (5.58)$$

Vacíos

$$\rho k \partial_t^2 \varphi(x, t) - A_{jk}^V \varphi_{,kj}(x, t) - (D_{ijk}^V u_{k,i}(x, t))_{,j} + B_{ij} u_{i,j}(\vec{x}, t) - g_j \varphi_{,j}(x, t) + \xi_1 \varphi(\vec{x}, t) + \xi_1 \partial_t \varphi(x, t) = \rho f^V(\vec{x}, t) \quad (5.59)$$

Porosidades

$$J_i^a(\vec{x}, t) = -K_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t) - K_{ij}^a \dot{p}_{a,j}(\vec{x}, t) + l_{1\mu}^2 M_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t) \quad (5.60)$$

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) + J_{j,j}^a(\vec{x}, t) + M_{ij}^a \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - B_{ij}^V \varphi_{i,j}(\vec{x}, t) - \partial_t V_a(\vec{x}, t, \|p_a - p_w\|, \varphi) = 0 \quad (5.61)$$

$$J_i^w(\vec{x}, t) = -K_{ij}^w p_{w,j}(\vec{x}, t) - K_{ij}^w \dot{p}_{w,j}(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 M_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t) \\ \theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) + J_{j,j}^w(\vec{x}, t) + M_{ij}^w \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - B_{ij}^V \varphi_{i,j}(\vec{x}, t) - \partial_t V_w(\vec{x}, t, \|p_w - p_a\|, \varphi) = 0 \quad (5.62)$$

Desigualdad de Clausius Duhem

$$\rho(\partial_\eta \bar{e}(F, \eta) - p_a(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \rho(\partial_\eta \bar{e}(F, \eta) - p_w(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \\ + \rho(\partial_\eta \bar{e}(F, \eta) - \varphi(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + (\rho \partial_\eta \bar{e}(F, \eta) - (1 - \hat{\nabla}^2) \sigma_{ij} F_{jA}^{-T}) : \dot{F}_{Ai} + \\ + (\rho \partial_\eta \bar{e}(F, \eta) - (1 - \hat{\nabla}^2) \sigma_{ik}^0 u_{k,j} F_{jA}^{-T}) : \dot{F}_{Ai} + \\ + (J_i^a(\vec{x}, t)/p_a)(M_{ij}^a p_{a,j} - l_{1\mu}^2 M_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t)) + \\ + (J_i^w(\vec{x}, t)/p_w)(M_{ij}^w p_{w,j} - l_{1\mu}^2 M_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t)) + \\ (J_i^V(\vec{x}, t)/\varphi)(M_{ij}^V \varphi_{j,j} - l_\mu^V M_{ij}^V \hat{\nabla}^2 \varphi_{j,j}(\vec{x}, t)) \geq 0 \quad (5.63)$$

Condiciones iniciales

$$u_i(\vec{x}, 0) = u_i^0 / u_i^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t u_i(\vec{x}, 0) = v_i^0 / v_i^0 \in (L^2(D_k))^3 \quad (5.64)$$

$$u_i(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial\Pi} = \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial\Pi} \in (H_0^1(\partial\Pi))^2 \quad (5.65)$$

$$(\partial_t u_i(\vec{x}, 0))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial\Pi} = v_i^0 \Big|_{\partial\Pi} / v_i^0 \Big|_{\partial\Pi} \in (L^2(\partial\Pi))^2 \quad (5.66)$$

$$p_a(\vec{x}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(\vec{x}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in (L^2(D_k)) \quad (5.67)$$

Se escribe a continuación el modelo poroelastodinámico de Biot en la configuración no deformada con fuerzas configuracionales y de inhomogeneidad, este sistema tiene solución única y es equivalente al problema de Biot en función del primer Piola Kirchhoff (Maugin, 1992). Multiplicando la (5.1) sin los términos de segundo gradiente por F_{Bj}^\top y utilizando la definición del tensor de Eshelby en la configuración material, y recordando que $J M_{ij} F_{jA}^{-\top} = M_{iA}$ obtenemos la siguiente estructura formal (Coussy et al., 1998; Martinec, 2019; Steinmann, 2022)

$$\partial_t(\rho_0 F_{Bj}^\top (\partial_t x_j(\vec{X}, t))) + K_{BA,A}(\vec{X}, t) + F_{Bj}^\top (\alpha_1 M_{jA}^a p_a(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + F_{Bj}^\top (\alpha_2 M_{jA}^w p_w)_{,A} = b_A^{inh}(\vec{X}, t) - \delta_{BA} W_{,A}(\vec{X}, t) \quad \text{en } R_k \quad (5.68)$$

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{X}, t) - (K_{jA}^a p_{a,j}(\vec{X}, t))_{,A} - (K_{jA}^v \dot{p}_{a,j}(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + \bar{\alpha}_1 M_{jA}^a \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t V_1(t, p_w(\vec{X}, t)) = 0 \quad (5.69)$$

$$\theta_w \partial_t p_w(\vec{X}, t) - (K_{jA}^w p_{w,j}(\vec{X}, t))_{,A} - (K_{jA}^v \dot{p}_{w,j}(\vec{X}, t))_{,A} + \\ + \bar{\alpha}_2 M_{jA}^w \dot{x}_{j,A}(\vec{X}, t) + \bar{\theta}_w \partial_t V_2(t, p_a(\vec{X}, t)) = 0 \quad (5.70)$$

$\rho_0 \mathbf{F}_{Bj}^\top (\partial_t \mathbf{x}_j(\vec{X}, t)) = P_A$: Pseudomomentum; $-\delta_{BA} \mathbf{W}_{,A}(\vec{X}, t)$: fuerza configuracional.

Condiciones iniciales y de borde

$$\mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{x}_j(\vec{X}, 0) = \mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{x}_j^0 / \mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{x}_j^0 \in (H_0^1(D_\tau))^3 \quad (5.71)$$

$$\partial_t (\mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{x}_j(\vec{X}, 0)) = \mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{w}_j^0 / \mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{w}_j^0 \in (L^2(D_\tau))^3 \quad (5.72)$$

$$(-\mathbf{W} \delta_{AB} + \mathbf{K}_{BA} - \alpha_1 \mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{M}_{jA}^a p_a - \alpha_2 \mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{M}_{jA}^w p_w) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{t}_B \Big|_{\partial\Omega} \quad (5.73)$$

$$\mathbf{t}_B \in (L^2(\partial\Omega))^2 \quad ; \quad \mathbf{F}_{Bj}^\top \mathbf{x}_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\bar{\Omega}} = \mathbf{F}_{Bj}^\top \bar{x} \Big|_{\partial\bar{\Omega}} / \mathbf{F}_{Bj}^\top \bar{x} \in (L^2(\partial\Omega))^2 \quad (5.74)$$

$$(-\mathbf{K}_{jA}^a p_{a,j}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{jA}^a \dot{p}_{a,j}(\vec{X}, t) + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jA}^a \mathbf{x}_j(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = q \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (5.75)$$

$$(-\mathbf{K}_{jA}^w p_{w,j}(\vec{X}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{jA}^w \dot{p}_{w,j}(\vec{X}, t) + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jA}^w \mathbf{x}_j(\vec{X}, t)) \hat{n}_A \Big|_{\partial\Gamma_1} = \bar{q} \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (5.76)$$

$$q \in L^2(\partial\Gamma_1) \quad ; \quad \bar{q} \in L^2(\partial\Gamma_1) \quad ; \quad \hat{\mathbf{t}}_j \in (L^2(\partial\Gamma_1))^2 \quad \rho_0 > 0$$

$$p_a(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = p_w(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0 \quad ; \quad b_A^{in} \in (L^2(\Omega))^3 \quad (5.77)$$

$$\mathbf{x}_j(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_2} = \bar{x}_j \Big|_{\partial\Gamma_2} / \bar{x}_j \in (L^2(\partial\Gamma_1))^3 \quad ; \quad V_1, V_2 \text{ — Lipschitz} \quad (5.78)$$

Las matrices y constantes han sido definidas previamente. Nuevamente utilizando el tercer teorema de representación de Green-Lagrange, encontramos la representación semi-analítica, también denominada representación integral de la solución, la cual se obtiene multiplicando (5.22), (5.23), (5.25) por \mathbf{F}_{Bj}^\top e introduciendo la relación entre el primer tensor de Piola-Kirchhoff y el tensor de Eshelby. En términos de una generalización para teorías de gradientes de alto orden se introducen el operador de Mindlin-Aifantis.

CAPÍTULO 6

Problemas de aplicación

«...No puede haber sino borradores. El concepto de texto definitivo no corresponde sino a la religión o al cansancio...»

Prefacio al cementerio marino de Valéry, Jorge L. Borges

Resumen y objetivos:

Se formulan problemas de aplicación micro-poroelastodinámicos en $2+1$ dimensiones, obteniéndose la representación integral de las soluciones, las aproximaciones utilizando el teorema de Picard y, en algunos casos, se construyen las formas cerradas de las soluciones a partir de la utilización de funciones de Green conocidas. Se realiza un experimento computacional que nos permite observar la distribución de tensiones y deformaciones en un material, en la aproximación micromecánica, asumiendo que las fuerzas configuracionales (fuerzas de Peach-Koehler) están asociadas a defectos de todo tipo en un dado espécimen. (Lubarda, 2019)

- Formular y construir modelos micro-poroelastodinámicos en 2 dimensiones, y sus soluciones semianalíticas.
- Analizar críticamente la estructura de las soluciones cuando se imponen condiciones iniciales no locales.
- Construir soluciones cerradas a partir del uso sistemático de funciones de Green definidas según el tipo de condiciones de borde impuestas.

6.1 Dinámica de un medio poroso en la formulación micromecánico-configuracional, en la representación deformada

En este capítulo se formulan algunos problemas de aplicación del modelado teórico desarrollado en los capítulos precedentes en la configuración deformada teniendo en cuenta diversas acciones de naturaleza configuracional. En general, las fuerzas configuracionales no sólo están representadas por inclusiones o inhomogeneidades tales como las que describen Eshelby (1958), o Mura (1987) (Qu y Cherkaoui, 2006), (Nemat-Nasser y Hori, 1993), (Coussy, 2004), (Cheng, 2016). Los defectos (dislocaciones, disclinaciones, etc.), desde un punto de vista macroscópico producen un efecto similar al de las inclusiones citadas anteriormente, la diferencia radica en que estas estructuras son esencialmente dinámicas, aunque su formulación matemática no siempre incluye la dependencia respecto del tiempo. Se asume que el flujo de defectos satisface el modelo siguiente

(Mura, 1963, 1968), (Maurel et al., 2004), (Sitiro, 1985).

$$\partial_t J_i(\vec{x}, t) + \varepsilon_{ijk}(v_k^D J_j(\vec{x}, t)) - \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{kmn} J_{m,n}(\vec{x}, t))_{,j} = 0 \text{ en } R_k \quad (6.1)$$

$$J_i(\vec{x}, 0) = J_i^0 / J_i^0 \in (H_0^1(D_\tau))^3 ; v_k^D \in (L^2(R_k^+))^3 \quad (6.2)$$

Condiciones de borde:

$$- \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{kmn} J_{m,n}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (6.3)$$

$$- \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{kmn} J_{m,n}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_2} = 0 \quad (6.4)$$

Donde la superficies limitadoras se definen $\partial M = \partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2$. También es posible acoplar el campo de desplazamiento micromecánico y el flujo de defectos tal como lo hacen Dascalu et al. (2008).

Las fuentes del flujo de defectos pueden modelarse suponiendo una estructura discreta de la forma

$$f_i(\vec{x}, t) = \|f_i\| \hat{e}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \mathcal{G}(t - t_0)$$

Donde $\|f_i\|$ es el modulo de la fuerza aplicada en \vec{x}_0 al tiempo t_0 . \hat{e}_i es la dirección de la fuerza f_i , $\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ es la función de Dirac y $\mathcal{G}(t - t_0)$ una función arbitraria describiendo la variación de la fuerza, respecto de la escala temporal. En forma continua se escribe de la siguiente forma

$$f_i(\vec{x}, t) = (M_{ij}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0))_{,j}$$

Donde M_{ij} es un tensor simétrico que admite la siguiente representación $M_{ij} = M_{ij}^0 \mathcal{G}(t - t_0)$. M_{ij}^0 es equivalente al tensor de tensiones. En los problemas subsiguientes analizamos problemas bidimensionales referidos a la siguiente geometría

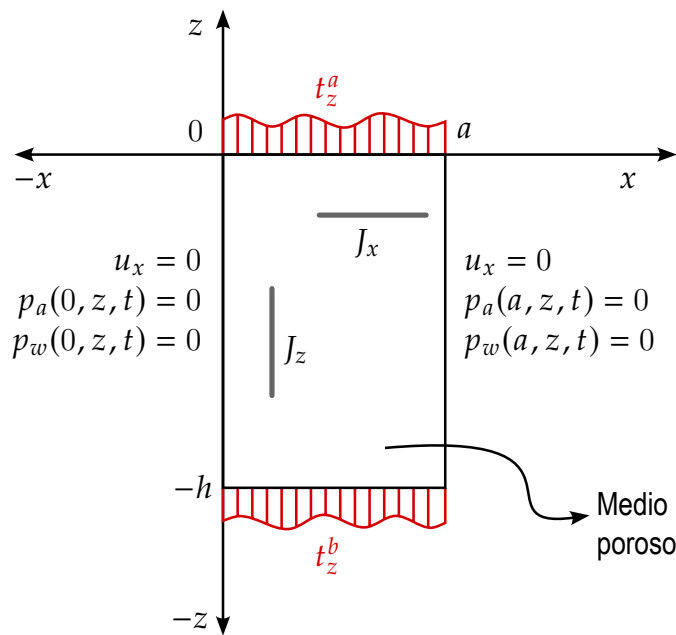


Figura 6.1: Recinto de integración

Donde los flujos de defectos

$$J_x(x, z, t) = \sum_i^n p_i(t) \delta(x - v_1 t) \delta(z + z_1) \mathbb{1}_{(a,b)}$$

$$J_z(x, z, t) = \sum_i^n \bar{p}_i(t) \delta(z - v_2 t) \delta(x + x_1) \mathbb{1}_{(c,d)}$$

$v_1, v_2, x_1, z_1 \in R_0^+$; $p_i(t), \bar{p}_i \in L^2(R_k^+)$. $\mathbb{1}_{(a,b)}$ es llamada función indicatriz o función característica, puede escribirse así $\mathbb{1}_{(a,b)}(x) = [x \in (a, b)]$ (corchete de Iverson). Las corrientes de defectos satisfacen las condiciones de clausura siguientes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_i^n \int_0^\infty dt p_i(t) \left\{ \int_{-\infty}^\infty dx \delta(x - v_1 t) \left\{ \int_{-\infty}^\infty dz \delta(z + z_1) \right\} \right\} \right\} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_i^n \int_0^\infty dt \bar{p}_i(t) \left\{ \int_{-\infty}^\infty dz \delta(z - v_2 t) \left\{ \int_{-\infty}^\infty dx \delta(x + x_1) \right\} \right\} \right\} = 1$$

Siguiendo a Cheng y Detournay (1998) el tensor efectivo corregido por segundo gradiente y fuerzas configuracionales (inclusiones) (Sciarra et al., 2007), (dell'Isola y Gavrilyuk, 2012), (dell'Isola et al., 2009), (Andreus et al., 2016)

$$\sigma_{ij}^{eff} = C_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_{k,l} - \alpha_1 M_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) p_a - \alpha_2 M_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) p_w - S_{ijkl}^E (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) \quad (6.5)$$

6.1.1 Primer modelo: Medio microporomecánico configuracional con dos porosidades en la representación deformada

Se propone el sistema de Biot en la aproximación de segundo gradiente tanto para los campos de desplazamiento como para las distribuciones de presiones de poro de agua y aire respectivamente (Mroginiski et al., 2015; Smyrlis et al., 2016).

Ecuaciones de gobierno

Recordando la (5.31) hasta la (5.42) se escriben los campos de desplazamientos en 2 + 1-dimensiones con componentes $u_x(x, z, t)$, $u_z(x, z, t)$

$$\rho \partial_t^2 u_x(x, z, t) - b_M^2 \hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 u_x(x, z, t)) - \mu \hat{\nabla}^2 u_x(x, z, t) + l_M^2 \hat{\nabla}^4 u_x(x, z, t) = f_x(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.6)$$

$$\rho \partial_t^2 u_z(x, z, t) - b_M^2 \hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 u_z(x, z, t)) - \mu \hat{\nabla}^2 u_z(x, z, t) + l_M^2 \hat{\nabla}^4 u_z(x, z, t) = f_z(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.7)$$

Flujos de fuerzas micromecánico-configuracionales

$$f_x(x, z, t) = -(S_{xjkl}^{Es} (\epsilon_{kl,j}^*(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 \epsilon_{kl,j}^*(x, z, t))) +$$

$$+ (\mu + \lambda) \partial_x (\hat{\nabla} (u_j(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 u_j(x, z, t))) -$$

$$- \alpha_1 M_{xx}^a \partial_x (p_a(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_a(x, z, t)) -$$

$$- \alpha_1 M_{zz}^a \partial_z (p_a(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_a(x, z, t)) -$$

$$- \alpha_2 M_{xx}^w \partial_x (p_w(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_w(x, z, t)) -$$

$$- \alpha_2 M_{zz}^w \partial_z (p_w(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_w(x, z, t)) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 f_z(x, z, t) = & -(S_{zjkl}^{Es}(\epsilon_{kl,j}^*(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 \epsilon_{kl,j}^*(x, z, t))) + \\
 & + (\mu + \lambda) \partial_z (\hat{\nabla} (u_j(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 u_j(x, z, t))) - \\
 & - \alpha_1 M_{xx}^a \partial_x (p_a(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_a(x, z, t)) - \\
 & - \alpha_1 M_{zz}^a \partial_z (p_a(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_a(x, z, t)) - \\
 & - \alpha_2 M_{xx}^w \partial_x (p_w(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_w(x, z, t)) - \\
 & - \alpha_2 M_{zz}^w \partial_z (p_w(x, z, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 p_w(x, z, t)) \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Campo de porosidades

Poros de aire

$$\begin{aligned}
 \rho_a s_a \partial_t p_a(x, z, t) - \partial_x (K_{xx}^a \partial_x (p_a(x, z, t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 p_a(x, z, t))) - \\
 - \partial_z (K_{zz}^a \partial_z (p_a(x, z, t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 p_a(x, z, t))) - \partial_t p_w(x, z, t) = \\
 = q_a(x, z, t) \text{ en } R_k ; \rho_a, s_a \in R_0^+ \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

Flujo microporo-mecánico del poro de aire

$$\begin{aligned}
 q_a(x, z, t) = & -\bar{\alpha}_1 M_{xx}^a (\partial_x \dot{u}_x(x, z, t) - l_a^2 \partial_x (\hat{\nabla}^2 \dot{u}_x(x, z, t))) - \\
 & - \bar{\alpha}_1 M_{zz}^a (\partial_z \dot{u}_z(x, z, t) - l_a^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 \dot{u}_x(x, z, t))) \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

Poros de agua

$$\begin{aligned}
 \rho_w s_w \partial_t p_w(x, z, t) - \partial_x (K_{xx}^w \partial_x (p_a(x, z, t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 p_w(x, z, t))) - \\
 - \partial_z (K_{zz}^w \partial_z (p_a(x, z, t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 p_w(x, z, t))) - \partial_t p_a(x, z, t) = \\
 = q_w(x, z, t) \text{ en } R_k ; \rho_w, s_w \in R_0^+ \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

Flujo microporo-mecánico del poro de agua

$$\begin{aligned}
 q_w(x, z, t) = & -\bar{\alpha}_2 M_{xx}^w (\partial_x \dot{u}_x(x, z, t) - l_w^2 \partial_x (\hat{\nabla}^2 \dot{u}_x(x, z, t))) - \\
 & - \bar{\alpha}_2 M_{zz}^w (\partial_z \dot{u}_z(x, z, t) - l_w^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 \dot{u}_x(x, z, t))) \text{ en } R_k \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

$$M_{xx}^a, M_{zz}^a, M_{xx}^w, M_{zz}^w > 0 \quad ; \quad K_{xx}^a, K_{zz}^a, K_{xx}^w, K_{zz}^w > 0$$

Condiciones iniciales

$$u_x(x, z, 0) = u_x^0 / u_x^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_x(x, z, 0) = w_x^0 / w_x^0 \in L^2(D_k) \quad (6.14)$$

$$u_x(x, z, 0) \Big|_{\partial D_k} = u_x^0 \Big|_{\partial D_k} / u_x^0 \Big|_{\partial D_k} \in H_0^1(\partial D_k) \quad (6.15)$$

$$\hat{n}_x \cdot \partial_x (\partial_t u_x(x, z, 0)) \Big|_{\partial D_k} = w_x^0 \Big|_{\partial D_k} / w_x^0 \Big|_{\partial D_k} \in L^2(\partial D_k) \quad (6.16)$$

$$u_z(x, z, 0) = u_z^0 / u_z^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_z(x, z, 0) = w_z^0 / w_z^0 \in L^2(D_k) \quad (6.17)$$

$$u_z(x, z, 0) \Big|_{\partial D_k} = u_z^0 \Big|_{\partial D_k} / u_z^0 \Big|_{\partial D_k} \in H_0^1(\partial D_k) \quad (6.18)$$

$$\hat{n}_z \cdot \partial_z (\partial_t u_z(x, z, 0)) \Big|_{\partial D_k} = w_z^0 \Big|_{\partial D_k} / w_z^0 \Big|_{\partial D_k} \in L^2(\partial D_k) \quad (6.19)$$

$$p_a(x, z, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) ; p_w(x, z, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k) \quad (6.20)$$

Condiciones de frontera

Sobre la superficie $z = 0$

$$\begin{aligned} -\mu \partial_z u_z(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} + l_\mu^2 \partial_z \hat{\nabla}^2 u_z(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} &= \\ &= \mathbf{t}_z^a \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} / \mathbf{t}_z^a \in L^2(\partial\Gamma_{z=0}) \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$-(\mathbf{K}_{zz}^a (\partial_z p_a(x, 0, t) - l_M^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 p_a(x, 0, t))) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.22)$$

$$-(\mathbf{K}_{zz}^w (\partial_z p_w(x, 0, t) - l_M^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 p_w(x, 0, t))) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.23)$$

$$u_x(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = u_x(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.24)$$

Sobre la superficie $z = -h$

$$\begin{aligned} -\mu \partial_z u_z(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} + l_\mu^2 \partial_z \hat{\nabla}^2 u_z(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} &= \\ &= \mathbf{t}_z^b \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} / \mathbf{t}_z^b \in L^2(\partial\Gamma_{z=-h}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} &-(\mathbf{K}_{zz}^a (\partial_z p_a(x, -h, t) - l_\mu^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 p_a(x, -h, t))) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} + \\ &-(\mathbf{K}_{zz}^w (\partial_z p_w(x, -h, t) - l_\mu^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 p_w(x, -h, t))) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sobre las superficies $x = 0$; $x = a$

$$p_a(a, z, t) = 0 \quad ; \quad p_w(a, z, t) = 0 \quad ; \quad u_x(a, z, t) = 0 \quad (6.27)$$

$$p_a(0, z, t) = 0 \quad ; \quad p_w(0, z, t) = 0 \quad ; \quad u_x(0, z, t) = 0 \quad (6.28)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = 0 \quad (6.29)$$

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \mu, \lambda, \alpha_1, \alpha_2 \in R_0^+$$

Funciones de Green para las componentes del campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 g_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - b_\mu^2 \hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 g_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) - \mu \hat{\nabla}^2 g_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) + \\ + l_\mu^2 \hat{\nabla}^4 g_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - (1/V) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 g_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - b_\mu^2 \hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 g_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) - \mu \hat{\nabla}^2 g_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) + \\ + l_\mu^2 \hat{\nabla}^4 g_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - (1/V) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.31)$$

Condiciones iniciales

$$g_x(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_x(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad (6.32)$$

$$g_x(\Delta x, \Delta z, 0) \Big|_{\partial D_k} = 0 \quad ; \quad \hat{n}_x \cdot \partial_x (\partial_t g_x(\Delta x, \Delta z, 0)) \Big|_{\partial D_k} = 0 \quad (6.33)$$

$$g_z(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_z(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad (6.34)$$

$$g_z(\Delta x, \Delta z, 0) \Big|_{\partial D_k} = 0 \quad ; \quad \hat{n}_z \cdot \partial_z (\partial_t g_z(\Delta x, \Delta z, 0)) \Big|_{\partial D_k} = 0 \quad (6.35)$$

Condiciones de borde

$$-\mu \partial_z g_z(\Delta x, 0, \Delta t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} + l_M^2 \partial_z \hat{\nabla}^2 g_z(\Delta x, 0, \Delta t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.36)$$

$$-\mu \partial_z g_z(\Delta x, -h, \Delta t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} + l_\mu^2 \partial_z \hat{\nabla}^2 g_z(\Delta x, -h, \Delta t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.37)$$

$$g_z(0, \Delta x, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=0}} = g_z(a, \Delta x, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=a}} = 0 \quad (6.38)$$

$$g_x(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=0}} = g_x(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=a}} = 0 \quad (6.39)$$

$$g_x(\Delta x, 0, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta z=0}} = g_x(\Delta x, -h, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta z=-h}} = 0 \quad (6.40)$$

Funciones de Green para las porosidades

$$\begin{aligned} & -\rho_a s_a \partial_t g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ & \quad -\partial_x (K_{xx}^a \partial_x (g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t))) - \\ & \quad -\partial_z (K_{zz}^a \partial_z (g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t))) = \\ & \quad = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - (1/V) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} & -\rho_w s_w \partial_t g_w(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ & \quad -\partial_x (K_{xx}^w \partial_x (g_w(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 g_w(\Delta x, \Delta z, \Delta t))) - \\ & \quad -\partial_z (K_{zz}^w \partial_z (g_w(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 g_w(\Delta x, \Delta z, \Delta t))) = \\ & \quad = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - (1/V) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.42)$$

Condiciones iniciales

$$g_a(\Delta x, \Delta z, -T) = 0 \quad ; \quad g_w(\Delta x, \Delta z, -T) = 0 \quad (6.43)$$

Condiciones de borde

$$(-(K_{zz}^a (\partial_z g_a(\Delta x, 0, t) - l_M^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 g_a(\Delta x, 0, \Delta t)))) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.44)$$

$$(-(K_{zz}^w (\partial_z g_w(\Delta x, 0, t) - l_M^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 g_w(\Delta x, 0, \Delta t)))) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.45)$$

$$(-(K_{zz}^a (\partial_z g_a(\Delta x, -h, \Delta t) - l_M^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 g_a(\Delta x, -h, \Delta t)))) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.46)$$

$$(-(K_{zz}^w (\partial_z g_w(\Delta x, -h, \Delta t) - l_M^2 \partial_z (\hat{\nabla}^2 g_w(\Delta x, -h, \Delta t)))) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.47)$$

Sobre las superficies $x = 0$; $x = a$

$$g_a(0, \Delta z, \Delta t) = 0 \quad ; \quad g_w(0, \Delta z, \Delta t) = 0 \quad (6.48)$$

$$g_a(a, \Delta z, \Delta t) = 0 \quad ; \quad g_w(a, \Delta z, \Delta t) = 0 \quad (6.49)$$

Utilizando el segundo teorema de Green obtenemos:

Representación de los campos de desplazamientos

$$\begin{aligned}
 & \oint_S dS \{ g_x(x-x', z-z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \\
 & \quad - u_x(x', z', 0) \partial_t g_x(x-x', z-z', t) \} + \\
 & + b_\mu^2 \oint_{S_{in}} dS_{in} \{ u_x(x', z', 0) (n_x \cdot \partial_x) (\partial_t g_x(x-x', z-z', t)) - \\
 & \quad - g_x(x-x', z-z', t) (n_x \cdot \partial_x) \partial_t u_x(x', z', 0) \} + \\
 & + \mu \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \{ g_x(x-x', z, t-t') (n_x \cdot \partial_x) u_x(x', t') - \right. \\
 & \quad \left. - u_x(x', t') (n_x \cdot \partial_x) g_x(x-x', z, t-t') \} \right\} + \\
 & + l_M^2 \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \{ g_x(x-x', z, t-t') (n_x \cdot \partial_x) \partial_x^2 u_x(x', t') - \right. \\
 & \quad \left. - u_x(x', t') (n_x \cdot \partial_x) \partial_x^2 g_x(x-x', z, t-t') \} \right\} = \\
 & = \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_x(x-x', z-z', t-t') J_x(x', z', t') \right\} - \\
 & \quad - u_x(x, z, t) + \langle u_x(x, z, t) \rangle \quad (6.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \oint_S dS \{ g_z(x-x', z-z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - u_z(x', z', 0) \partial_t g_z(x-x', z-z', t) \} + \\
 & + b_\mu^2 \oint_{S_{in}} dS_{in} \{ u_z(x', z', 0) (n_z \cdot \partial_z) (\partial_t g_z(x-x', z-z', t)) - \\
 & \quad - g_z(x-x', z-z', t) (n_z \cdot \partial_z) \partial_t u_z(x', z', 0) \} + \\
 & + \mu \int_0^t dt' \left\{ \int_{-h}^z dz' \{ g_z(x-x', z, t-t') (n_z \cdot \partial_z) u_z(x', t') - \right. \\
 & \quad \left. - u_z(x', t') (n_z \cdot \partial_z) g_z(x-x', z, t-t') \} \right\} + \\
 & + l_\mu^2 \int_0^t dt' \left\{ \int_{-h}^z dz' \{ g_x(x-x', z, t-t') (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 u_z(x', t') - \right. \\
 & \quad \left. - u_z(x', t') (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 g_x(x-x', z, t-t') \} \right\} = \\
 & = \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_z(x-x', z-z', t-t') J_z(x', z', t') \right\} - \\
 & \quad - u_z(x, z, t) + \langle u_z(x, z, t) \rangle \quad (6.51)
 \end{aligned}$$

Representación de los campos de porosidades

Poros de aire

$$\begin{aligned}
 & \rho_a s_a \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t) p_a(x', z', 0) + \\
 & + \int_0^t dt' \int_0^x dx' p_a(x', t') K_{xx}^a \hat{n}_{x'} \partial_{x'} \{g_a(x - x', z, t) - l_a^2 \hat{\nabla}'^2 g_a(x - x', z, t - t')\} - \\
 & - \int_0^t dt' \int_0^x dx' g_a(x - x', z, t) K_{xx}^a \hat{n}_{x'} \partial_{x'} \{p_a(x', t') - l_a^2 \hat{\nabla}'^2 p_a(x - x', z, t - t')\} + \\
 & + \int_0^t dt' \int_{-h}^z dz' p_a(z', t') K_{zz}^a \hat{n}_{z'} \partial_{z'} \{g_a(x, z - z', t - t') - l_a^2 \hat{\nabla}'^2 g_a(x, z - z', t - t')\} - \\
 & - \int_0^t dt' \int_{-h}^z dz' g_a(x, z - z', t) K_{zz}^a \hat{n}_{z'} \partial_{z'} \{p_a(z', t') - l_a^2 \hat{\nabla}'^2 p_a(x, z - z', t - t')\} = \\
 & = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a(x', z', t') \right\} - \\
 & - p_a(x, y, t) + \langle p_a(x, y, t) \rangle \quad (6.52)
 \end{aligned}$$

Poros de agua

$$\begin{aligned}
 & \rho_w s_w \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t) p_w(x', z', 0) + \\
 & + \int_0^t dt' \int_0^x dx' p_w(x', t') K_{xx}^w \hat{n}_{x'} \partial_{x'} \{g_w(x - x', z, t) - l_w^2 \hat{\nabla}'^2 g_w(x - x', z, t - t')\} - \\
 & - \int_0^t dt' \int_0^x dx' g_w(x - x', z, t) K_{xx}^w \hat{n}_{x'} \partial_{x'} \{p_w(x', t') - l_w^2 \hat{\nabla}'^2 p_w(x - x', z, t - t')\} + \\
 & + \int_0^t dt' \int_{-h}^z dz' p_w(z', t') K_{zz}^w \hat{n}_{z'} \partial_{z'} \{g_w(x, z - z', t - t') - l_w^2 \hat{\nabla}'^2 g_w(x, z - z', t - t')\} - \\
 & - \int_0^t dt' \int_{-h}^z dz' g_w(x, z - z', t) K_{zz}^w \hat{n}_{z'} \partial_{z'} \{p_w(z', t') - l_w^2 \hat{\nabla}'^2 p_w(x, z - z', t - t')\} = \\
 & = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w(x', z', t') \right\} - \\
 & - p_w(x, y, t) + \langle p_w(x, y, t) \rangle \quad (6.53)
 \end{aligned}$$

Para el problema de mixto planteado tendremos las amplitudes de las componentes del campo de desplazamiento, expresadas en la forma:

$$\begin{aligned}
 & \iint_S dS \{g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - u_x(x', z', 0) \partial_t g_x(x - x', z - z', t)\} + \\
 & + b_\mu^2 \iint_{S_{in}} dS_{in} \{u_x(x', z', 0) (n_x \cdot \partial_x) (\partial_t g_x(x - x', z - z', t)) - \\
 & - g_x(x - x', z - z', t) (n_x \cdot \partial_x) \partial_t u_x(x', z', 0)\} = \\
 & = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x(x', z', t') \right\} - u_x(x, z, t) \\
 & \quad (6.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_S dS \{ g_z(x-x', z-z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - u_z(x', z', 0) \partial_t g_z(x-x', z-z', t) \} + \\ & + b_\mu^2 \iint_{S_{in}} dS_{in} \{ u_z(x', z', 0) (n_z \cdot \partial_z) (\partial_t g_z(x-x', z-z', t)) - \\ & - g_z(x-x', z-z', t) (n_z \cdot \partial_z) \partial_t u_z(x', z', 0) \} + \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} & + \mu \int_0^t dt' \left\{ \int_{-h}^z dx' \{ g_z(x-x', z, t-t') (n_z \cdot \partial_z) u_z(x', t') - \right. \\ & \quad \left. - u_z(x', t') (n_z \cdot \partial_z) g_z(x-x', z, t-t') \} \right\} + \\ & + l_\mu^2 \int_0^t dt' \left\{ \int_{-h}^z dx' \{ g_z(x-x', z, t-t') (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 u_z(x', t') - \right. \\ & \quad \left. - u_z(x', t') (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 g_z(x-x', z, t-t') \} \right\} = \\ & = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_z(x-x', z-z', t-t') J_z(x', z', t') \right\} - u_z(x, z, t) \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \rho_a s_a \iint_S dS g_a(x-x', z-z', t) p_a(x', z') = \\ = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_a(x-x', z-z', t-t') q_a(x', z', t') \right\} - p_a(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \rho_w s_w \iint_S dS g_w(x-x', z-z', t) p_w(x', z') = \\ = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_w(x-x', z-z', t-t') q_w(x', z', t') \right\} - p_w(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.58)$$

Finalmente, el sistema de soluciones semi-analíticas (sistema de ecuaciones integrales acopladas) será:

Componente del campo de desplazamiento $u_x(x, z, t)$

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x-x', z-z', t-t') J_x(x', z', t') \right\} - \\ - \iint_S dS \{ g_x(x-x', z-z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - u_x(x', z', 0) \partial_t g_x(x-x', z-z', t) \} - \\ - b_\mu^2 \iint_{S_{in}} dS_{in} \{ u_x(x', z', 0) (n_x \cdot \partial_x) (\partial_t g_x(x-x', z-z', t)) - \\ - g_x(x-x', z-z', t) (n_x \cdot \partial_x) \partial_t u_x(x', z', 0) \} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Componente del campo de desplazamientos $u_z(x, z, t)$

$$\begin{aligned} u_z(x, z, t) = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_z(x-x', z-z', t-t') J_z(x', z', t') \right\} - \\ - \iint_S dS \{ g_z(x-x', z-z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -u_z(x', z', 0) \partial_t g_z(x - x', z - z', t) \} - \\
 & -b_\mu^2 \iint_{S_{in}} dS_{in} \{ u_z(x', z', 0) (n_z \cdot \partial_z) (\partial_t g_z(x - x', z - z', t)) - \\
 & -g_z(x - x', z - z', t) (n_z \cdot \partial_z) \partial_t u_z(x', z', 0) \} - \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \mu g_z(x - x', z, t - t') \{ (n_z \cdot \partial_z) u_z(x', t') - l_\mu^2 (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 u_z(x', t') \} \right\} \Big|_{z=0} + \right. \\
 & \left. + \mu g_z(x - x', z + h, t - t') \{ (n_z \cdot \partial_z) u_z(x', t') - l_\mu^2 (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 u_z(x', t') \} \Big|_{z=-h} \right\} \quad (6.60)
 \end{aligned}$$

Poros de aire

$$\begin{aligned}
 p_a(x, y, t) = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a(x', z', t') \right\} - \\
 - \rho_a s_a \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t) p_a(x', z', 0) \quad (6.61)
 \end{aligned}$$

Poros de agua

$$\begin{aligned}
 p_w(x, y, t) = \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w(x', z', t') \right\} - \\
 - \rho_w s_w \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t) p_w(x', z') \quad (6.62)
 \end{aligned}$$

Una alternativa al sistema de condiciones iniciales usuales es introducir el concepto de no localidad, se escribe a continuación un conjunto de condiciones iniciales no locales, que se transforman en las usuales cuando $q_j, \bar{q}_j, s_j, \bar{s}_j$ se anulan

$$\begin{aligned}
 u_x(x, z, 0) + \sum_{j=1}^m q_j u_x(x, z, t_j) &= u_x^0 / u_x^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \quad \forall q_j, t_j \in R_0^+ \\
 \sum_{j=1}^m q_j u_x(x, z, t_j) &= \sum_{j=1}^m q_j \varphi_x(x, z) (\delta(t - t_j^a) - \delta(t - t_j^b)) \quad \forall t_j^a, t_j^b \in R_0^+ \\
 u_z(x, z, 0) + \sum_{j=1}^m \bar{q}_j u_z(x, z, \bar{t}_j) &= u_z^0 / u_z^0 \in (H_0^1(D_k))^3 ; \quad \forall \bar{q}_j, \bar{t}_j \in R_0^+ \\
 \sum_{j=1}^m \bar{q}_j u_z(x, z, \bar{t}_j) &= \sum_{j=1}^m \bar{q}_j \varphi_z(x, z) (\delta(t - \bar{t}_j^c) - \delta(t - \bar{t}_j^d)) \quad \forall \bar{t}_j^c, \bar{t}_j^d \in R_0^+ \\
 \partial_t u_x(x, z, 0) &= w_x^0 / w_x^0 \in (L^2(D_k))^3 ; \quad \partial_t u_z(x, z, 0) = w_z^0 / w_z^0 \in (L^2(D_k))^3 \\
 p_a(x, z, 0) + \sum_{j=1}^m s_j p_a(x, z, t_j) &= p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) ; \quad s_j, t_j \in R_0^+ \\
 p_w(x, z, 0) + \sum_{j=1}^m \bar{s}_j p_w(x, z, \bar{t}_j) &= p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k) ; \quad \bar{s}_j, \bar{t}_j \in R_0^+ \\
 \varphi_z, \varphi_x &\in L^2(D_k)
 \end{aligned}$$

El sistema de condiciones de borde para el problema de Mandel, por ejemplo, también podría modificarse imponiendo condiciones de borde no locales sobre las superficies $x = 0$, $x = a$, en la forma siguiente (Dormieux et al., 2006), (Maugin, 2011), (Pride y Berryman, 2003)

$$\begin{aligned} (u_x(0, z, t) + \sum_{j=1}^m r_j^a u_x(x_j, z, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} &= 0 \quad ; \quad p_a(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \\ (u_x(a, z, t) + \sum_{j=1}^m r_j^b u_x(x_j, z, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} &= 0 \quad ; \quad p_a(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 \\ p_w(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} &= 0 \quad ; \quad p_w(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \end{aligned}$$

Permaneciendo el resto de las condiciones sin cambios, otros modos de expresar situaciones de no localidad podrían escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^a dx' u_x(x', z', t) &= 0 \\ \sum_{j=1}^m q_j \left\{ \int_0^{x_j} dx' u_x(x', z', t) \right\} &= 0 \quad \forall x_j / 0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_q = a \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones integrales representativas de las soluciones, puede resolverse por aproximaciones sucesivas (aproximantes de Picard), se procede de la siguiente manera, recordemos que los flujos definidos oportunamente dependían de las funciones de desplazamiento, de sus correcciones micromecánicas, de las fuerzas configuracionales, y de las porosidades y sus derivadas corregidas por términos de segundo gradiente, de manera que, primero desacoplamos las porosidades, quedando estas en función de los campos de desplazamiento y de sus correcciones micromecánicas, posteriormente sustituimos esta sucesión de aproximaciones en las ecuaciones de las amplitudes de los campos de desplazamiento, con lo cual llegamos a un sistema de dos ecuaciones integrales para los campos de desplazamiento que se escribirán, ya desacopladas en la forma siguiente (Ciarlet, 1988), (Germain y Nayroles, 1976), (Ito y Kappel, 2002).

$$\begin{aligned} u_x^{(n+1)}(x, z, t) &\cong -K_X^0(x, z, t) + \\ &+ \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x \{ x', z', t', u_z^{(n)} - l_\mu^2 M u_z^{(n)}, \right. \\ &\quad \left. , u_z^{(n)} - M u_x^{(n)}, p_a^{(n)} - M p_a^{(n)}, p_w^{(n)} - M p_w^{(n)} \} \right\} \quad (6.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_a^{(n+1)}(x, y, t) &\cong -K_{p_a}^0(x, y, t) + \\ &+ \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a \{ x', z', t', p_a^{(n)} - H p_a^{(n)}, \right. \\ &\quad \left. , p_w^{(n)} - H p_w^{(n)}, \dot{u}_x - l_M^2 H \dot{u}_x, \dot{u}_z - l_M^2 H \dot{u}_z \} \right\} \quad (6.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_w^{(n+1)}(x, y, t) &\cong -K_{p_w}^0(x, y, t) + \\ &+ \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w \{ x', z', t', p_a^{(n)} - H p_a^{(n)}, \right. \\ &\quad \left. , p_w^{(n)} - H p_w^{(n)}, \dot{u}_x - l_\mu^2 H \dot{u}_x, \dot{u}_z - l_\mu^2 H \dot{u}_z \} \right\} \quad (6.65) \end{aligned}$$

Donde hemos definido las aproximaciones de orden cero en la forma

$$K_{p_a}^0(x, y, t) = -\rho_a s_a \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t) p_a(x', z', 0) \quad (6.66)$$

$$K_{p_w}^0(x, y, t) = -\rho_w s_w \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t) p_w(x', z') \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} K_Z^0 = & - \iint_S dS \{ g_z(x - x', z - z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \\ & - u_z(x', z', 0) \partial_t g_z(x - x', z - z', t) \} - \\ & - b_\mu^2 \iint_{S_{in}} dS_{in} \{ u_z(x', z', 0) (n_z \cdot \partial_z) (\partial_t g_z(x - x', z - z', t)) - \\ & - g_z(x - x', z - z', t) (n_z \cdot \partial_z) \partial_t u_z(x', z', 0) \} - \\ & - \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \mu g_z(x - x', z, t - t') \{ (n_z \cdot \partial_z) u_z(x', t') - \right. \right. \\ & \left. \left. - l_\mu^2 (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 u_z(x', t') \} \right|_{z=0} + \right. \\ & \left. + \mu g_z(x - x', z + h, t - t') \{ (n_z \cdot \partial_z) u_z(x', t') - \right. \\ & \left. - l_\mu^2 (n_z \cdot \partial_z) \partial_z^2 u_z(x', t') \} \right|_{z=-h} \} \quad (6.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_X^0(x, z, t) = & - \iint_S dS \{ g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \\ & - u_x(x', z', 0) \partial_t g_x(x - x', z - z', t) \} - \\ & - b_\mu^2 \iint_{S_{in}} dS_{in} \{ u_x(x', z', 0) (n_x \cdot \partial_x) (\partial_t g_x(x - x', z - z', t)) - \\ & - g_x(x - x', z - z', t) (n_x \cdot \partial_x) \partial_t u_x(x', z', 0) \} \quad (6.69) \end{aligned}$$

Las funciones de Green para el problema mixto serán calculadas por media del sistema de ecuaciones integrales siguiente

$$\begin{aligned} g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = & g_a^0(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ & - l_a^2 \int_0^{\Delta t} dt' \left\{ \iint_S dS G_a^0(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') \{ K_{xx}^a \partial_{x'} (\hat{V}'^2 g_a(x', z', t')) + \right. \\ & \left. + K_{zz}^a \partial_{z'} (\hat{V}'^2 g_a(x', z', t')) \} \right\} \quad (6.70) \end{aligned}$$

Sujeta a las condiciones inicial y de borde, nulas, especificadas anteriormente

$$\begin{aligned} g_w(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = & g_w^0(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ & - l_w^2 \int_0^{\Delta t} dt' \left\{ \iint_S dS G_w^0(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') \{ K_{xx}^w \partial_{x'} (\hat{V}'^2 g_w(x', z', t')) + \right. \\ & \left. + K_{zz}^w \partial_{z'} (\hat{V}'^2 g_w(x', z', t')) \} \right\} \quad (6.71) \end{aligned}$$

Sujeta a las condiciones inicial y de borde nulas, especificadas anteriormente.

Los propagadores de Green para los campos de desplazamiento son:

$$g_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = g_x^0(\Delta x, \Delta z, \Delta t) + b_\mu^2 \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS G_x(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') (\hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 g_x(x', z', t'))) \right\} - l_M^2 \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS G_x(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') (\hat{\nabla}'^4 g_x(x', z', t')) \right\} \quad (6.72)$$

$$g_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = g_z^0(\Delta x, \Delta z, \Delta t) + b_\mu^2 \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS G_z(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') (\hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 g_z(x', z', t'))) \right\} - l_M^2 \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS G_z(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') (\hat{\nabla}'^4 g_z(x', z', t')) \right\} \quad (6.73)$$

Sujeta a las condiciones inicial y de borde nulas, especificadas anteriormente.

Los segundos propagadores de Green satisfarán:

$$G_a(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t'), G_w(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t')$$

Se tiene el siguiente sistema

$$-\partial_t G_a(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - K_{xx}^a \partial_{\Delta x}^2 G_a(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - (K_{zz}^a \partial_{\Delta z}^2 (G_a(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t'))) = \delta(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - (1/V) \text{ en } R_k \quad (6.74)$$

$$-\partial_t G_w(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - K_{xx}^w \partial_{\Delta x}^2 G_w(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - (K_{zz}^w \partial_{\Delta z}^2 (G_w(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t'))) = \delta(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - (1/V) \text{ en } R_k \quad (6.75)$$

Con condiciones iniciales y de borde nulas.

Los segundos propagadores de Green satisfacen las ecuaciones de onda clásicas

$$\rho \partial_t^2 G_x(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - \mu \hat{\nabla}^2 G_x(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') = \delta((\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - (1/V)) \text{ en } R_k \quad (6.76)$$

$$\rho \partial_t^2 G_z(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - \mu \hat{\nabla}^2 G_z(\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') = \delta((\Delta x - x', \Delta z - z', \Delta t - t') - (1/V)) \text{ en } R_k \quad (6.77)$$

Con condiciones iniciales y de borde nulas.

6.2 Modelado del fenómeno dinámico de consolidación de un medio poroso viscoelástico no saturado, con una inclusión en el esqueleto solido considerando diversas condiciones de borde

Sistema de Biot (u_i, p_a, p_w) (Beneyto et al., 2015).

Ecuaciones de gobierno

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_x(x, z, t) - \mu \hat{\nabla}^2 u_x(x, z, t) - (\mu + \lambda) \partial_x (\hat{\nabla} u_j(x, z, t)) - \\ - \bar{\mu} \hat{\nabla}^2 \dot{u}_x(x, z, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_x (\hat{\nabla} \dot{u}_j(x, z, t)) + \\ + \alpha_1 \partial_x p_a(x, z, t) + \alpha_2 \partial_x p_w(x, z, t) = -S_{xklm}^E \epsilon_{kl,m}^*(x, z, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_z(x, z, t) - \mu \hat{\nabla}^2 u_z(x, z, t) - (\mu + \lambda) \partial_z (\hat{\nabla} u_j(x, z, t)) - \\ - \bar{\mu} \hat{\nabla}^2 \dot{u}_z(x, z, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z (\hat{\nabla} \dot{u}_j(x, z, t)) + \\ + \alpha_1 \partial_z p_a(x, z, t) + \alpha_2 \partial_z p_w(x, z, t) = -S_{zklm}^E \epsilon_{kl,m}^*(x, z, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} \theta_a \partial_t p_a(x, z, t) - (K_{jk}^a p_{a,k}(x, z, t))_{,j} + \bar{\alpha}_1 \dot{u}_{k,k}(x, z, t) + \\ + \bar{\theta}_a \partial_t p_w(x, z, t) = h \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \theta_w \partial_t p_w(x, z, t) - (K_{jk}^w p_{w,i}(x, z, t))_{,j} + \bar{\alpha}_2 \dot{u}_{k,k}(x, z, t) + \\ + \bar{\theta}_w \partial_t p_a(x, z, t) = \bar{h} \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.81)$$

$$K_{jk}^a, K_{jk}^w \in V^{3 \times 3}$$

$$\theta_a, \bar{\theta}_a, \theta_w, \bar{\theta}_w \in R_0^+ \quad ; \quad h, \bar{h} \in L^2(R_k)$$

$$\mu, \lambda, \bar{\mu}, \bar{\lambda}, \alpha_j, \bar{\alpha}_j \in R_0^+ \quad \forall j = 1, 2$$

Condiciones iniciales

$$u_x(x, z, 0) = u_x^0 / u_x^0 \in (H_0^1(D_k))^2 \quad (6.82)$$

$$\partial_t u_x(x, z, 0) = w_x^0 / w_x^0 \in (L^2(D_k))^2 \quad (6.83)$$

$$u_z(x, z, 0) = u_z^0 / u_z^0 \in (L^2(D_k))^2 \quad (6.84)$$

$$\partial_t u_z(x, z, 0) = w_z^0 / w_z^0 \in (L^2(D_k))^2 \quad (6.85)$$

$$p_a(x, z, 0) = p_a / p_a \in (H_0^1(D_k))^2 \quad (6.86)$$

$$p_w(x, z, 0) = p_w / p_w \in (H_0^1(D_k))^2 \quad (6.87)$$

Primer grupo de condiciones de contorno de tipo mixto:

$$\begin{aligned} (-\mu \partial_z u_z(x, 0, t) - (\mu + \lambda) \partial_z u_z(x, 0, t) - \bar{\mu} \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t)) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} - \\ - ((\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) + \alpha_1 p_a(x, 0, t) + \alpha_2 p_w(x, 0, t)) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = t_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} \end{aligned} \quad (6.88)$$

$$(-k_{zz}^a \partial_z p_a(x, 0, t) + \alpha_1 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t)) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = p \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / p \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.89)$$

$$(-k_{zz}^w \partial_z p_w(x, 0, t) + \alpha_2 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t)) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \bar{p} \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / \bar{p} \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.90)$$

$$u_z(x, -h, t) = p_a(x, -h, t) = p_w(x, -h, t) = 0 \quad ; \quad t_z \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.91)$$

$$u_x(0, z, t) = u_x(a, z, t) = 0 \quad ; \quad \partial_x p_a(0, z, t) = \partial_x p_w(0, z, t) = 0 \quad (6.92)$$

$$\partial_x p_a(a, z, t) = \partial_x p_w(a, z, t) = 0 \quad (6.93)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = u_x(x, 0, t) = u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.94)$$

$$\mu, \lambda, \bar{\mu}, \bar{\lambda}, \alpha_j, k_{zz}^a, k_{zz}^w, k_{xx}^a, k_{xx}^w \in R_0^+$$

Segundo grupo de condiciones de borde, de tipo Neumann:

$$\begin{aligned} & \left(-\mu \partial_z u_z(x, 0, t) - (\mu + \lambda) \partial_z u_z(x, 0, t) - \bar{\mu} \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} + \\ & + \left((-\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) + \alpha_1 p_a(x, 0, t) + \alpha_2 p_w(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \mathbf{t}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} \end{aligned} \quad (6.95)$$

$$\left(-k_{zz}^a \partial_z p_a(x, 0, t) + \alpha_1 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = p \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / p \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.96)$$

$$\left(-k_{zz}^w \partial_z p_w(x, 0, t) + \alpha_2 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \bar{p} \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / \bar{p} \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.97)$$

$$u_z(x, -h, t) = p_a(x, -h, t) = p_w(x, -h, t) = 0 ; \mathbf{t}_z \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\mu \partial_x u_x(0, z, t) - (\mu + \lambda) \partial_x u_x(0, z, t) - \bar{\mu} \partial_x \dot{u}_x(0, z, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} + \\ & + \left((-\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_x \dot{u}_x(0, z, t) + \alpha_1 p_a(0, z, t) + \alpha_2 p_w(0, z, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = \mathbf{t}_x \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} \end{aligned} \quad (6.99)$$

$$\left(-k_{xx}^a \partial_x p_a(0, z, t) + \alpha_1 \partial_x \dot{u}_x(0, z, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = \bar{p}_1 \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} / p_1 \in L^2(\partial \Gamma_{x=0}) \quad (6.100)$$

$$\left(-\bar{k}_{xx}^w \partial_x p_w(0, z, t) + \alpha_2 \partial_x \dot{u}_x(0, z, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = \bar{p}_1 \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} / \bar{p}_1 \in L^2(\partial \Gamma_{x=0}) \quad (6.101)$$

$$u_x(a, z, t) = u_x(0, z, t) ; p_a(a, z, t) = p_w(a, z, t) = 0 ; \mathbf{t}_x \in L^2(\partial \Gamma_{x=0}) \quad (6.102)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = u_x(x, 0, t) = u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.103)$$

Condiciones de borde para el problema de Mandel:

$$\begin{aligned} & \left(-\mu \partial_z u_z(x, 0, t) - (\mu + \lambda) \partial_z u_z(x, 0, t) - \bar{\mu} \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} - \\ & - \left((\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) + \alpha_1 p_a(x, 0, t) + \alpha_2 p_w(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \mathbf{t}_z^b \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} \end{aligned} \quad (6.104)$$

$$\left(-k_{zz}^a \partial_z p_a(x, 0, t) + \alpha_1 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = p_1 \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / p_1 \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.105)$$

$$\left(-k_{zz}^w \partial_z p_w(x, 0, t) + \alpha_2 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \bar{p}_1 \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / \bar{p}_1 \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.106)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\mu \partial_z u_z(x, -h, t) - (\mu + \lambda) \partial_z u_z(x, -h, t) - \bar{\mu} \partial_z \dot{u}_z(x, -h, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} - \\ & \left((-\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z \dot{u}_z(x, -h, t) + \alpha_1 p_a(x, -h, t) + \alpha_2 p_w(x, -h, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = -\mathbf{t}_z^a \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} \end{aligned} \quad (6.107)$$

$$\left(-k_{zz}^a \partial_z p_a(x, -h, t) + \alpha_1 \partial_z \dot{u}_z(x, -h, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = \bar{p}_2 \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} / p_2 \in L^2(\partial \Gamma_{z=-h}) \quad (6.108)$$

$$\left(-\bar{k}_{zz}^w \partial_z p_w(x, -h, t) + \alpha_2 \partial_z \dot{u}_z(x, -h, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = \bar{p}_2 \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} / \bar{p}_2 \in L^2(\partial \Gamma_{z=-h}) \quad (6.109)$$

$$u_x(a, z, t) = u_x(0, z, t) = 0 ; p_a(0, z, t) = p_w(a, z, t) = 0 \quad (6.110)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = 0 \quad (6.111)$$

$$u_x(x, 0, t) = u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.112)$$

$$\mathbf{t}_z^b \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) ; \mathbf{t}_z^a \in L^2(\partial \Gamma_{z=-h})$$

Condiciones de borde para el problema del talud (Derivada oblicua):

$$\begin{aligned} & \left(-\mu \partial_z u_z(x, 0, t) - (\mu + \lambda) \partial_z u_z(x, 0, t) - \bar{\mu} \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} - \\ & - \left((\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) + \alpha_1 p_a(x, 0, t) + \alpha_2 p_w(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = t_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} \end{aligned} \quad (6.113)$$

$$\left(-k_{zz}^a \partial_z p_a(x, 0, t) + \alpha_1 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = p \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / p \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.114)$$

$$\left(-k_{zz}^w \partial_z p_w(x, 0, t) + \alpha_2 \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \bar{p} \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} / \bar{p} \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.115)$$

$$u_z(x, -h, t) = p_a(x, -h, t) = p_w(x, -h, t) = 0 ; t_z \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.116)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\mu \partial_x u_x(x, z, t) - (\mu + \lambda) \partial_x u_x(x, z, t) - \bar{\mu} \partial_x \dot{u}_x(x, z, t) - \right. \\ & \left. - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_x \dot{u}_x(x, z, t) + \alpha_1 p_a(x, z, t) + \alpha_2 p_w(x, z, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{x=x(z)}} = t_x \Big|_{\partial \Gamma_{x=x(z)}} \end{aligned} \quad (6.117)$$

$$\left(-k_{xx}^a \partial_x p_a(x, z, t) + \alpha_1 \partial_x \dot{u}_x(x, z, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{x=x(z)}} = p \Big|_{\partial \Gamma_{x=x(z)}} / p \in L^2(\partial \Gamma_{x=x(z)}) \quad (6.118)$$

$$\left(-k_{xx}^w \partial_x p_w(x, z, t) + \alpha_2 \partial_x \dot{u}_x(x, z, t) \right) \Big|_{\partial \Gamma_{x=x(z)}} = \bar{p} \Big|_{\partial \Gamma_{x=x(z)}} / \bar{p} \in L^2(\partial \Gamma_{x=x(z)}) \quad (6.119)$$

$$u_x(0, z, t) = 0 ; p_a(0, z, t) = p_w(0, z, t) = 0 \quad (6.120)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = u_x(x, 0, t) = u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.121)$$

Problema poroelastodinámico en un medio con vacíos (Voids) en 2+1-dimensiones

En este problema se trata el acoplamiento de un medio poro-elástico con vacíos para lo cual se hace uso de la teoría de Cowin y Nunziato (1983). Esta teoría es una linealización de otra, descrita anteriormente Nunziato y Cowin (1979) que consideraba un material elástico constitutivamente no lineal con vacíos, capaz de desarrollar deformaciones finitas.

Se considera un material sólido con vacíos pequeños y distribuidos, que podrían asimilarse a defectos micromecánicos y que se alojan en el esqueleto sólido del material poroelástico. La premisa básica que subyace en esta teoría, es el concepto de que, la densidad aparente de un material poro-elástico se puede escribir como el producto de dos campos, el campo de densidad del material de la matriz y el campo de fracción de volumen, más los campos de presiones de poro.

Esta representación de la densidad aparente del material introduce un grado de libertad adicional en la descripción cinemática y fue empleada previamente por Goodman y Cowin (1972); Cowin y Goodman (1976) para desarrollar una teoría continua asociada a materiales granulares fluidos.

El modelo considerado emplea las mismas ecuaciones de equilibrio propuestas por Goodman y Cowin (1972), e incluye un efecto de velocidad en la respuesta volumétrica que puede deberse a efectos superficiales inelásticos en las proximidades de los límites vacíos.

El tensor efectivo, y el vector de campos de vacíos, para el caso anisótropo general es:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{x}, t) = & C_{ijkl}^e u_{j,k}(\vec{x}, t) + D_{ijk} \varphi_{,k}(\vec{x}, t) + B_{ij} \varphi(\vec{x}, t) - S_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) - \\ & - \alpha_1 M_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 M_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.122)$$

$$J_i^V(\vec{x}, t) = A_{ij} \varphi_{,j}(\vec{x}, t) + D_{ijk} u_{j,k}(\vec{x}, t) - f_i \varphi(\vec{x}, t) - h_i^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (6.123)$$

$$J_i^a(\vec{x}, t) = -K_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (6.124)$$

$$J_i^a(\vec{x}, t) = -\mathbf{K}_{ij}^w p_{w,j}(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (6.125)$$

Las magnitudes con asterisco son residuales, deformaciones y vectores de vacío.

El sistema de ecuaciones de conservación para los campos de desplazamiento, vacíos y presiones de poro será:

$$\rho \partial_t^2 u_j - \sigma_{ij}(\vec{x}, t) = 0 \text{ en } R_k \quad (6.126)$$

$$\rho k \partial_t \varphi(\vec{x}, t) + (\mathbf{J}_i^V(\vec{x}, t))_{,i} = 0 \text{ en } R_k \quad ; \quad k \in R_0^+ \quad (6.127)$$

$$\partial_t \mathbf{J}_i^V(\vec{x}, t) = -\mathbf{A}_{ij} \varphi_{,j}(\vec{x}, t) - \mathbf{D}_{ijk} u_{j,k}(\vec{x}, t) + f_i \varphi(\vec{x}, t) + h_i^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad (6.128)$$

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) + (\mathbf{J}_i^a(\vec{x}, t))_{,i} + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{ij}^a \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(\vec{x}, t) = 0 \text{ en } R_k \quad (6.129)$$

$$\theta_a \partial_t p_w(\vec{x}, t) + (\mathbf{J}_i^w(\vec{x}, t))_{,i} + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{ij}^w \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(\vec{x}, t) = 0 \text{ en } R_k \quad (6.130)$$

Todas las matrices son definidas positivas y las de cuarto orden, además, tienen simetría mayor y menor, k es una constante que caracteriza la distribución de vacíos y se denomina constante de inercia equilibrada.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{ijkl}^e (u_{k,l}(\vec{x}, t))_{,j} - (\mathbf{D}_{ijk} \varphi_{,k}(\vec{x}, t))_{,j} - (\mathbf{B}_{ij} \varphi(\vec{x}, t))_{,j} + \\ + \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \epsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.131)$$

$$\begin{aligned} \rho k \partial_t^2 \varphi(\vec{x}, t) - (\mathbf{A}_{ij} \varphi_{,j}(\vec{x}, t))_{,i} - (\mathbf{D}_{ijk} u_{j,k}(\vec{x}, t))_{,i} + (f_i \varphi(\vec{x}, t))_{,i} = \\ = -h_{i,i}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.132)$$

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t))_{,i} + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{ij}^a \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(\vec{x}, t) = 0 \text{ en } R_k \quad (6.133)$$

$$\theta_a \partial_t p_w(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{ij}^w p_{a,j}(\vec{x}, t))_{,i} + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{ij}^w \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(\vec{x}, t) = 0 \text{ en } R_k \quad (6.134)$$

Para que el sistema hiperbólico-parabólico anterior sea consistente deben agregarse condiciones iniciales y de borde adecuadas

En el problema que se modela y resuelve seguidamente, suponemos un cuerpo poroelástico, homogéneo e isótropo, con una distribución de vacíos también homogénea sobre el esqueleto sólido, Además hacemos:

$$\mathbf{D}_{ijk} = 0 \quad ; \quad f_j = 0 \quad ; \quad \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} = 0 \quad ; \quad \mathbf{M}_{ij}^a = \mathbf{M}_{ij}^w = \mathbf{A}_{ij} = \delta_{ij} \quad ; \quad h_i^* = 0$$

Recinto de integración

$$\begin{aligned} R_k &= \{(x, z, t) / x \in [0, a] ; z \in [-h, 0] ; t \geq 0\} \\ D_k &= \{(x, z) / x \in [0, a] ; z \in [-h, 0] ; t = 0\} \end{aligned}$$

Distribución de las componentes $u_x(x, z, t)$, $u_z(x, z, t)$ de los campos de desplazamiento aco-

plados a los campos de porosidades y vacíos

$$\partial_t^2 u_x(x, z, t) - a^2 \hat{\nabla}^2 u_x(x, z, t) = J_x(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.135)$$

$$J_x(x, z, t) = -b^2 \partial_x (\hat{\nabla} u_j(x, z, t)) + (\xi_1 / \rho) \partial_x \varphi(x, z, t) - (\alpha_1 / \rho) \partial_x p_a(x, z, t) - (\alpha_2 / \rho) \partial_x p_w(x, z, t) \quad (6.136)$$

$$\partial_t^2 u_z(x, z, t) - a^2 \hat{\nabla}^2 u_z(x, z, t) = J_z(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.137)$$

$$J_z(x, z, t) = -b^2 \partial_z (\hat{\nabla} u_j(x, z, t)) + (\xi_1 / \rho) \partial_z \varphi(x, z, t) - (\alpha_1 / \rho) \partial_z p_a(x, z, t) - (\alpha_2 / \rho) \partial_z p_w(x, z, t) \quad (6.138)$$

$$a = \sqrt{\mu / \rho} \quad ; \quad b = \sqrt{(\mu + \lambda) / \rho} \quad ; \quad \rho, \alpha_1, \alpha_2, \lambda, \mu, \xi_1 \in R_0^+$$

Distribución de los campos de presiones de poro de aire y agua respectivamente $p_a(x, z, t)$, $p_w(x, z, t)$

$$\theta_a \partial_t p_a(x, z, t) - K_{xx}^a \partial_x^2 p_a(x, z, t) - K_{zz}^a \partial_z^2 p_a(x, z, t) = q_a(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.139)$$

$$q_a(x, z, t) = -\bar{\alpha}_1 \hat{\nabla} \dot{u}_j(x, z, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w(x, z, t) \quad (6.140)$$

$$K_{xx}^a = K_{zz}^a = s_1^a > 0 \quad ; \quad \theta_a, \bar{\theta}_a, \bar{\alpha}_1 \in R_0^+$$

$$\theta_w \partial_t p_w(x, z, t) - K_{xx}^w \partial_x^2 p_w(x, z, t) - K_{zz}^w \partial_z^2 p_w(x, z, t) = q_w(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.141)$$

$$q_w(x, z, t) = -\bar{\alpha}_2 \hat{\nabla} \dot{u}_j(x, z, t) + \bar{\theta}_w \partial_t p_a(x, z, t) \quad (6.142)$$

$$K_{xx}^w = K_{zz}^w = s_2^w > 0 \quad ; \quad \theta_w, \bar{\theta}_w, \bar{\alpha}_2 \in R_0^+$$

Distribución de los campos de vacíos:

$$\partial_t^2 \varphi(x, z, t) - c^2 \hat{\nabla}^2 \varphi(x, z, t) = V_a(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.143)$$

$$V_a(x, z, t) = (\xi_1 / k \rho) \hat{\nabla} u_j(x, z, t) \quad ; \quad c, \xi_1 \in R_0^+ \quad (6.144)$$

- Condiciones iniciales

$$u_x(x, z, 0) = u_x^0 / u_x^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad \partial_t u_x(x, z, 0) = w_x^0 / w_x^0 \in L^2(D_k) \quad (6.145)$$

$$u_z(x, z, 0) = u_z^0 / u_z^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad \partial_t u_z(x, z, 0) = w_z^0 / w_z^0 \in L^2(D_k) \quad (6.146)$$

$$\varphi(x, z, 0) = \varphi_1 / \varphi_1 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad \partial_t \varphi(x, z, 0) = \varphi_2 / \varphi_2 \in L^2(D_k) \quad (6.147)$$

$$p_a(x, z, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(x, z, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k) \quad (6.148)$$

- Primer grupo de condiciones de borde mixtas

$$-a^2 \partial_z u_z(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \bar{t}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} \quad ; \quad \bar{t}_z \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) \quad (6.149)$$

$$-a^2 \partial_z u_z(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = \bar{t}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} \quad ; \quad \bar{t}_z \in L^2(\partial \Gamma_{z=-h}) \quad (6.150)$$

$$(-K_{zz}^a \partial_z p_a(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad (-K_{zz}^w \partial_z p_w(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.151)$$

$$(-K_{zz}^a \partial_z p_a(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad ; \quad (-K_{zz}^w \partial_z p_w(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.152)$$

$$(-c^2 \partial_z \varphi(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad (-c^2 \partial_z \varphi(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.153)$$

$$u_x(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = u_x(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = p_a(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 \quad (6.154)$$

$$p_w(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = p_w(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = p_a(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.155)$$

$$\varphi(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = \varphi(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.156)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = u_x(x, 0, t) = u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.157)$$

• Segundo grupo de condiciones de borde mixtas

$$-a^2 \partial_x u_x(0, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = \mathbf{t}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} ; \mathbf{t}_x \in L^2(\partial\Gamma_{x=0}) \quad (6.158)$$

$$-a^2 \partial_x u_x(a, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = \bar{\mathbf{t}}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} ; \bar{\mathbf{t}}_x \in L^2(\partial\Gamma_{x=a}) \quad (6.159)$$

$$(-K_{xx}^a \partial_x p_a(0, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 ; (-K_{xx}^w \partial_x p_w(0, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 \quad (6.160)$$

$$(-K_{xx}^a \partial_x p_a(a, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 ; (-K_{xx}^w \partial_x p_w(a, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.161)$$

$$(-c^2 \partial_x \varphi(0, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 ; (-c^2 \partial_x \varphi(a, z, t) \hat{n}_x \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.162)$$

$$u_z(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = u_z(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = p_a(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.163)$$

$$p_w(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = p_w(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = p_a(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.164)$$

$$\varphi(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = \varphi(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.165)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = u_x(x, 0, t) = u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.166)$$

• Tercer grupo de condiciones de borde mixtas absorbentes

$$-a^2 \partial_z u_z(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = -v_1 \partial_z u_z(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} + \mathbf{t}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} \quad (6.167)$$

$$-a^2 \partial_z u_z(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = -v_2 \partial_z u_z(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} + \bar{\mathbf{t}}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} \quad (6.168)$$

$$(-K_{zz}^a \partial_z p_a(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 ; (-K_{zz}^w \partial_z p_w(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.169)$$

$$(-K_{zz}^a \partial_z p_a(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 ; (-K_{zz}^w \partial_z p_w(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.170)$$

$$(-c^2 \partial_z \varphi(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 ; (-c^2 \partial_z \varphi(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.171)$$

$$u_x(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = u_x(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = p_a(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 \quad (6.172)$$

$$p_w(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = p_w(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = p_a(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.173)$$

$$\varphi(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = \varphi(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.174)$$

$$u_z(0, x, t) = u_z(a, x, t) = u_x(x, 0, t) = u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.175)$$

$$v_1, v_2 \in R_0^+ ; \mathbf{t}_z \in L^2(\partial\Gamma_{z=0}) ; \bar{\mathbf{t}}_z \in L^2(\partial\Gamma_{z=-h})$$

a) Representación integral de las soluciones para el primer juego de condiciones de borde

$$u_x(x, z, t) = \iint_S dS \{ g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \partial_t g_x(x - x', z - z', t) u_x(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x(x', z', t') \right\} \quad (6.176)$$

$$u_z(x, z, t) = \iint_S dS \{ g_z(x - x', z - z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \partial_t g_z(x - x', z - z', t) u_z(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_z(x - x', z - z', t - t') J_z(x', z', t') \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z - 0, t - t') \mathbf{t}_{z=0}^a(x', t') \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z + h, t - t') \mathbf{t}_{z=-h}^b(x', t') \right\} \quad (6.177)$$

$$\varphi(x, z, t) = \iint_S dS \{ g_v(x - x', z - z', t) \partial_t \varphi(x', z', 0) - \partial_t g_v(x - x', z - z', t) \varphi(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') V_a(x', z', t') \right\} \quad (6.178)$$

$$p_a(x, z, t) = \iint_S dS \{ g_a(x - x', z - z', t) p_a^0(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a(x', z', t') \right\} \quad (6.179)$$

$$p_w(x, z, t) = \iint_S dS \{ g_w(x - x', z - z', t) p_w^0(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w(x', z', t') \right\} \quad (6.180)$$

b) Representación integral de las soluciones para el segundo juego de condiciones de borde

$$u_x(x, z, t) = \iint_S dS \{ g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \partial_t g_x(x - x', z - z', t) u_x(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x(x', z', t') \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_{-h}^z dx' g_x(x - 0, z - z', t - t') \mathbf{t}_{x=0}^a(z', t') \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_x(x - a, z - z', t - t') \mathbf{t}_{x=a}^b(z', t') \right\} \quad (6.181)$$

$$u_z(x, z, t) = \oint_S dS \{ g_z(x - x', z - z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \partial_t g_z(x - x', z - z', t) u_z(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_z(x - x', z - z', t - t') J_z(x', z', t') \right\} \quad (6.182)$$

$$\varphi(x, z, t) = \oint_S dS \{ g_v(x - x', z - z', t) \partial_t \varphi(x', z', 0) - \partial_t g_v(x - x', z - z', t) \varphi(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_v(x - x', z - z', t - t') V_a(x', z', t') \right\} \quad (6.183)$$

$$p_a(x, z, t) = \oint_S dS \{ g_a(x - x', z - z', t) p_a^0(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a(x', z', t') \right\} \quad (6.184)$$

$$p_w(x, z, t) = \oint_S dS \{ g_w(x - x', z - z', t) p_w^0(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w(x', z', t') \right\} \quad (6.185)$$

c) Representación integral de las soluciones para el tercer juego de condiciones de borde

$$u_x(x, z, t) = \oint_S dS \{ g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \partial_t g_x(x - x', z - z', t) u_x(x', z', 0) \} + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x(x', z', t') \right\} \quad (6.186)$$

$$\begin{aligned} u_z(x, z, t) = & \oint_S dS \{ g_z(x - x', z - z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \partial_t g_z(x - x', z - z', t) u_z(x', z', 0) \} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_z(x - x', z - z', t - t') J_z(x', z', t') \right\} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z - 0, t - t') \{ -v_1 \partial_t u_z(x - x', z - 0, t) + \right. \\ & \quad \left. + t_{z=0}^a(x', t') \} \right\} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z + h, t - t') \{ -v_1 \partial_t u_z(x - x', z + h, t) + \right. \\ & \quad \left. + t_{z=-h}^b(x', t') \} \right\} \quad (6.187) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) = & \iint_S dS \{ g_v(x - x', z - z', t) \partial_t \varphi(x', z', 0) - \\ & - \partial_t g_v(x - x', z - z', t) \varphi(x', z', 0) \} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_v(x - x', z - z', t - t') V_a(x', z', t') \right\} \end{aligned} \quad (6.188)$$

$$\begin{aligned} p_a(x, z, t) = & \iint_S dS \{ g_a(x - x', z - z', t) p_a^0(x', z', 0) \} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a(x', z', t') \right\} \end{aligned} \quad (6.189)$$

$$\begin{aligned} p_w(x, z, t) = & \iint_S dS \{ g_w(x - x', z - z', t) p_w^0(x', z', 0) \} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w(x', z', t') \right\} \end{aligned} \quad (6.190)$$

Las funciones de Green son: del campo de presiones de poro de aire y agua, de los campos de desplazamientos en las direcciones x y z , y del campo de vacíos respectivamente (Polyanin y Nazaikinskii, 2016)

$$\begin{aligned} g_a(x - x', z - z', t - t') = & \frac{4}{l_1 l_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l_1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x'}{l_1} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_1^2}\right) \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi z}{l_2} \cos \frac{m\pi z'}{l_2} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 a t}{l_2^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.191)$$

$$\begin{aligned} g_w(x - x', z - z', t - t') = & \frac{4}{l_1 l_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l_1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x'}{l_1} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 b t}{l_1^2}\right) \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi z}{l_2} \cos \frac{m\pi z'}{l_2} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 b t}{l_2^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.192)$$

$$\begin{aligned} g_x(x - x', z - z', t - t') = & \frac{4}{a l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}} \operatorname{sen}(p_n x) \operatorname{sen}(q_m z) \cdot \\ & \cdot \operatorname{sen}(p_n x') \operatorname{sen}(q_m z') \operatorname{sen}(a \lambda_{nm} (t - t')) \end{aligned} \quad (6.193)$$

$$\begin{aligned} g_z(x - x', z - z', t - t') = & \frac{2}{a l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_{nm}} \operatorname{sen}(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \\ & \cdot \operatorname{sen}(p_n x') \cos(q_m z') \operatorname{sen}(a \lambda_{nm} (t - t')) \end{aligned} \quad (6.194)$$

$$\begin{aligned} g_v(x - x', z - z', t - t') = & \frac{4}{c l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}} \operatorname{sen}(p_n x) \operatorname{sen}(q_m z) \cdot \\ & \cdot \operatorname{sen}(p_n x') \operatorname{sen}(q_m z') \operatorname{sen}(c \lambda_{nm} (t - t')) \end{aligned} \quad (6.195)$$

$$a = \sqrt{\frac{k_{xx}^a}{\theta_a} + \frac{k_{zz}^a}{\theta_a}}, \quad p_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad q_m = \frac{m\pi}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2}, \quad l_1 = a, l_2 = h$$

$$b = \sqrt{\frac{k_{xx}^w}{\theta_w} + \frac{k_{zz}^w}{\theta_w}}, \quad A_m = \begin{cases} 1 & \text{para } m = 0 \\ 2 & \text{para } m \neq 0 \end{cases}$$

Los flujos:

$$J_x(x, z, t) \quad ; \quad J_z(x, z, t) \quad ; \quad q_a(x, z, t) \quad ; \quad q_w(x, z, t) \quad ; \quad V_v(x, z, t)$$

acoplan los distintos campos intervinientes.

La construcción de los aproximantes de Picard se realiza de la siguiente manera:

$$K_x^0 \cong \iint_S dS \{ g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \partial_t g_x(x - x', z - z', t) u_x(x', z', 0) \} \quad (6.196)$$

$$K_z^0 \cong \iint_S dS \{ g_z(x - x', z - z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \partial_t g_z(x - x', z - z', t) u_z(x', z', 0) \} \quad (6.197)$$

$$K_a^0 \cong \iint_S dS \{ g_a(x - x', z - z', t) p_a^0(x', z', 0) \} \quad (6.198)$$

$$K_w^0 \cong \iint_S dS \{ g_w(x - x', z - z', t) p_w^0(x', z', 0) \} \quad (6.199)$$

$$K_v^0 \cong \iint_S dS \{ g_v(x - x', z - z', t) \partial_t \varphi(x', z', 0) - \partial_t g_v(x - x', z - z', t) \varphi(x', z', 0) \} \quad (6.200)$$

Cálculo de la primera aproximación para los campos de desplazamientos, porosidades y vacíos

- Primer juego de condiciones de borde

$$u_x^1(x, z, t) \cong K_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x^0(x', z', t') \right\} \quad (6.201)$$

$$\begin{aligned} u_z^1(x, z, t) \cong & K_z^0(t, u_z^0, w_z^0) + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_z(x - x', z - z', t - t') J_z^0(x', z', t') \right\} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z - 0, t - t') t_{z=0}^a(x', t') \right\} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z + h, t - t') t_{z=-h}^b(x', t') \right\} \end{aligned} \quad (6.202)$$

$$\varphi^1(x, z, t) \cong K_v^0(t, \varphi_1, \varphi_2) + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') V_a^0(x', z', t') \right\} \quad (6.203)$$

$$p_a^1(x, z, t) \cong K_v^0(t, p_a^0) + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a^0(x', z', t') \right\} \quad (6.204)$$

$$p_w^1(x, z, t) \cong K_w^0(t, p_w^0) + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w^0(x', z', t') \right\} \quad (6.205)$$

Los flujos a primer orden tienen la forma siguiente:

$$J_x^0(x, z, t) \cong -b^2 \{ \partial_x^2 K_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \partial_{xz}^2 K_z^0(t, u_z^0, w_z^0) \} + \\ + (\xi_1/\rho) \partial_x (K_v^0(t, \varphi_1, \varphi_2)) - (\alpha_1/\rho) \partial_x (K_a^0(t, p_a^0)) - \\ - (\alpha_2/\rho) \partial_x (K_w^0(t, p_w^0)) \quad (6.206)$$

$$J_z^0(x, z, t) \cong -b^2 \{ \partial_z^2 K_z^0(t, u_z^0, w_z^0) + \partial_{zx}^2 K_x^0(t, u_x^0, w_x^0) \} + \\ + (\xi_1/\rho) \partial_z (K_v^0(t, \varphi_1, \varphi_2)) - (\alpha_1/\rho) \partial_z (K_a^0(t, p_a^0)) - \\ - (\alpha_2/\rho) \partial_z (K_w^0(t, p_w^0)) \quad (6.207)$$

$$q_a^1(x, z, t) = -\bar{\alpha}_1 (\partial_x \dot{K}_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \partial_z \dot{K}_z^0(t, u_z^0, w_z^0)) - \bar{\theta}_a \partial_t K_w^0(t, p_w^0) \quad (6.208)$$

$$q_w^1(x, z, t) = -\bar{\alpha}_2 (\partial_x \dot{K}_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \partial_z \dot{K}_z^0(t, u_z^0, w_z^0)) - \bar{\theta}_w \partial_t K_a^0(t, p_w^0) \quad (6.209)$$

$$V_a^1(x, z, t) \cong (\xi_1/k\rho) (\partial_x K_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \partial_z K_z^0(t, u_z^0, w_z^0)) \quad (6.210)$$

Finalmente, las aproximaciones de orden k serán:

$$u_x^k(x, z, t) \cong K_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.211)$$

$$u_z^k(x, z, t) \cong K_z^0(t, u_z^0, w_z^0) + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_z(x - x', z - z', t - t') J_z^{k-1}(x', z', t') \right\} + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z - 0, t - t') t_{z=0}^a(x', t') \right\} + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z + h, t - t') t_{z=-h}^b(x', t') \right\} \quad (6.212)$$

$$\varphi^k(x, z, t) \cong K_v^0(t, \varphi_1, \varphi_2) + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') V_a^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.213)$$

$$p_a^k(x, z, t) \cong K_v^0(t, p_a^0) + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.214)$$

$$p_w^k(x, z, t) \cong K_w^0 + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.215)$$

- Segundo juego de condiciones de borde, aproximaciones de orden k

$$u_x^k(x, z, t) \cong K_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x^{k-1}(x', z', t') \right\} + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_x(x - 0, z - z', t - t') t_{x=0}^a(z', t') \right\} + \\ + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dz' g_x(x - x', z - z', t - t') t_{x=a}^b(z', t') \right\} \quad (6.216)$$

$$u_z^k(x, z, t) \cong K_z^{k-1}(t, u_z^0, w_z^0) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_z(x - x', z - z', t - t') J_z^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.217)$$

$$\varphi^k(x, z, t) \cong K_v^0(t, \varphi_1, \varphi_2) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_v(x - x', z - z', t - t') V_a^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.218)$$

$$p_a^k(x, z, t) \cong K_v^0(t, p_a^0) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.219)$$

$$p_w^k(x, z, t) \cong K_w^0 + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.220)$$

- Tercer juego de condiciones de borde, aproximaciones de orden k

$$u_x^k(x, z, t) \cong K_x^0(t, u_x^0, w_x^0) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_x^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.221)$$

$$u_z^k(x, z, t) \cong K_z^0(t, u_z^0, w_z^0) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_z(x - x', z - z', t - t') J_z^{k-1}(x', z', t') \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z - 0, t - t') t_{z=0}^a(x', t') \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z + h, t - t') t_{z=-h}^b(x', t') \right\} \quad (6.222)$$

$$\varphi^k(x, z, t) \cong K_v^0(t, \varphi_1, \varphi_2) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_v(x - x', z - z', t - t') V_a^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.223)$$

$$p_a^k(x, z, t) \cong K_v^0(t, p_a^0) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_a(x - x', z - z', t - t') q_a^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.224)$$

$$p_w^k(x, z, t) \cong K_w^0(t, p_w^0) + \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS g_w(x - x', z - z', t - t') q_w^{k-1}(x', z', t') \right\} \quad (6.225)$$

6.3 Experimentos computacionales

Se formulan dos problemas que pretenden mostrar la distribución de campos en dos tipos de materiales ideales, que difieren en la microestructura; el primero de ellos, poroelástico clásico con una distribución de presión de poro y un flujo de defectos, representativos de la microestructura del material. El segundo problema es típicamente de naturaleza microelastodinámica, en el

cual el medio sigue una ley constitutiva de la forma de Mindlin-Aifantis (Kunin, 1968); se consideran dos campos de presiones de poro y un flujo de defectos (dislocaciones) representativos de la microestructura propia del material.

Se obtienen las soluciones semi-analíticas utilizando funciones de Green que resultan de resolver el problema de Sturm-Liouville asociado a la parte estacionaria del operador. La idea que se desarrolla a continuación está centrada en la comparación cualitativa de las dos respuestas dinámicas. En un trabajo futuro podría proponerse una comparación cuantitativa utilizando materiales reales.

a) Soluciones aproximadas al problema de propagación de ondas poroelásticas en un medio saturado conteniendo dislocaciones

$$R_k = \{(x, z, t) / x \in [0, a] ; z \in [-h, 0] ; t \geq 0\}$$

$$D_k = \{(x, z) / x \in [0, a] ; z \in [-h, 0]\}$$

Ecuaciones de gobierno

$$\partial_t^2 u_z(x, z, t) - c_1^2 \hat{\nabla}^2 u_z(x, z, t) - c_2^2 \partial_z (\hat{\nabla} u_j(x, z, t)) + a_1 \partial_z p(x, z, t) =$$

$$= (1/\rho) J_Z(x, z, t) \text{ en } R_k ; a_1 = (\alpha_1/\rho) \quad (6.226)$$

$$\partial_t^2 u_x(x, z, t) - c_1^2 \hat{\nabla}^2 u_x(x, z, t) - c_2^2 \partial_x (\hat{\nabla} u_j(x, z, t)) + a_1 \partial_x p_a(x, z, t) =$$

$$= (1/\rho) J_X(x, z, t) \text{ en } R_k ; a_1 = (\alpha_1/\rho) \quad (6.227)$$

$$\partial_t p_a(x, z, t) - b^2 \hat{\nabla}^2 p_a(x, z, t) + \bar{a}_1 \partial_z \dot{u}_z(x, z, t) = 0 \text{ en } R_k \quad (6.228)$$

Condiciones iniciales

$$u_x(x, z, 0) = u_x^0 / u_x^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad \partial_t u_x(x, z, 0) = w_x^0 / w_x^0 \in L^2(D_k) \quad (6.229)$$

$$u_z(x, z, 0) = u_z^0 / u_z^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad \partial_t u_z(x, z, 0) = w_z^0 / w_z^0 \in L^2(D_k) \quad (6.230)$$

$$p_a(x, z, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad (6.231)$$

Condiciones de borde

$$(-2\mu + \lambda) \partial_z u_z(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = t_z^a \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} \quad ; \quad \partial_x u_z(0, z, t) = 0 \quad (6.232)$$

$$(-2\mu + \lambda) \partial_z u_z(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = t_z^a \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} \quad ; \quad \partial_x u_z(a, z, t) = 0 \quad (6.233)$$

$$(-2\mu + \lambda) \partial_x u_x(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad \partial_z u_x(x, 0, t) = 0 \quad (6.234)$$

$$(-2\mu + \lambda) \partial_x u_x(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad ; \quad \partial_z u_x(x, -h, t) = 0 \quad (6.235)$$

$$-b^2 \partial_z p_a(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad -b^2 \partial_z p_a(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.236)$$

$$-b^2 \partial_z p_a(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 \quad ; \quad -b^2 \partial_z p_a(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.237)$$

$$u_x(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad u_x(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.238)$$

$$u_x(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 \quad ; \quad u_x(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.239)$$

Representaciones integrales de las soluciones asociadas a los campos de desplazamientos:

$$\begin{aligned}
 u_z(x, z, t) = & \langle u_z \rangle + \iint_S dS \{ g_z(x - x', z - z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \\
 & - u_z(x', z', 0) \partial_t g_z(x - x', z - z', t) \} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_z(x - x', z - z', t - t') (J_z(x', z', t')) \right\} \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_z(x - x', z - z', t - t') \{ c_2^2 \partial_{z'} (\hat{\nabla}' u_j(x', z', t')) - \right. \right. \\
 & - a_1 \partial_{z'} p_a(x', z', t') \} \} \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z - 0, t - t') t_z^b(x', t') \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z + h, t - t') t_z^b(x', t') \right\} \quad (6.240)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_x(x, z, t) = & \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_x(x - x', z - z', t - t') (J_X(x', z', t')) + \right. \right. \\
 & + c_2^2 \partial_{z'} (\hat{\nabla}' u_j(x', z', t')) - a_1 \partial_{x'} p_a(x', z', t') \} \} + \\
 & + \iint_S dS \{ g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \\
 & - u_x(x', z', 0) \partial_t g_x(x - x', z - z', t) \} \quad (6.241)
 \end{aligned}$$

Representación de la solución asociada a la distribución de presiones de poro

$$\begin{aligned}
 p_a(x, z, t) = & K_a^0(t, p_a^0) + \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_a(x - x', z - z', t - t') (\bar{a}_1 (\partial_{x'} (\partial_t u_x(x', z', t')) + \right. \right. \\
 & + \partial_{z'} (\partial_t u_z(x', z', t')))) \} \} \quad (6.242)
 \end{aligned}$$

$$K_a^0(t, p_a^0) = \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_a(x - x', z - z', t) p_a(x', z', 0) \right\} \quad (6.243)$$

Determinación de los aproximantes de Picard para el sistema de soluciones semi-analíticas

$$\begin{aligned}
 u_x(x, z, t) = & K_x^0(x, z, t) + \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') \{ c_2^2 (\partial_{x'}^2 u_x(x', z', t') + \right. \\
 & + \partial_{x'} (\partial_z u_z(x', z', t'))) - a_1 \partial_{x'} p_a(x', z', t') \} \} \quad (6.244)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z(x, z, t) = & K_z^0(x, z, t) + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_z(x - x', z - z', t - t') \{ c_2^2 (\partial_{z'}^2 u_z(x', z', t') + \right. \right. \\
 & + \partial_{z'} (\partial_x u_x(x', z', t'))) - a_1 \partial_{z'} p_a(x', z', t') \} \} \} \quad (6.245)
 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 K_z^0(x, z, t) = & \langle u_z \rangle + \oint\!\!\!\oint_S dS \{ g_z(x - x', z - z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \\
 & - u_z(x', z', 0) \partial_t g_z(x - x', z - z', t) \} + \\
 & + (1/\rho) \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_z(x - x', z - z', t - t') (J_Z(x', z', t')) \right\} \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z - 0, t - t') t_z^b(x', t') \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' g_z(x - x', z + h, t - t') t_z^b(x', t') \right\} \quad (6.246)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_x^0(x, z, t) = & \int_0^t dt' \left\{ \oint\!\!\!\oint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') J_X(x', z', t') \right\} + \\
 & + \oint\!\!\!\oint_S dS \{ g_x(x - x', z - z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \\
 & - u_x(x', z', 0) \partial_t g_x(x - x', z - z', t) \} \quad (6.247)
 \end{aligned}$$

De modo que la primera aproximación se escribe

$$\begin{aligned}
 p_a(x, z, t) \cong & K_a^0(t, p_a^0) - \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_a(x - x', z - z', t - t') (\bar{a}_1(\partial_{x'}(\partial_{t'} K_x^0(x', z', t')) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \partial_{z'}(\partial_{t'} K_z^0(x', z', t')) \right) \right\} \right\} \quad (6.248)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_x^{(1)}(x, z, t) \cong & K_x^0(x, z, t) + \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \oint\!\!\!\oint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') \{ c_2^2(\partial_{x'}^2 K_x^0(x', z', t') + \right. \\
 & \left. + \partial_{x'}(\partial_{z'} K_z^0(x, z, t)) - a_1 \partial_{x'} K_a^0(t, p_a^0) \} \right\} \quad (6.249)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z^{(1)}(x, z, t) = & K_z^0(x, z, t) + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_z(x - x', z - z', t - t') \{ c_2^2(\partial_{z'}^2 K_z^0(x', z', t') + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \partial_{z'}(\partial_{x'} K_x^0(x', z', t')) - a_1 \partial_{z'} K_a^0(t', p_a^0) \} \right\} \right\} \quad (6.250)
 \end{aligned}$$

La aproximación enésima será:

$$\begin{aligned}
 p_a^{(n)}(x, z, t) \cong & K_a^0(t, p_a^0) + \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \left\{ \int_{-h}^z dz' g_a(x - x', z - z', t - t') (\bar{a}_1(\partial_{x'}(\partial_{t'} u_x^{(n-1)}(x', z', t')) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \partial_{z'}(\partial_{t'} u_x^{(n-1)}(x', z', t')) \right) \right\} \right\} \quad (6.251)
 \end{aligned}$$

$$u_x^{(n)}(x, z, t) \cong K_x^0(x, z, t) + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS g_x(x - x', z - z', t - t') \left\{ c_2^2 (\partial_x^2 u_x^{(n-1)}(x', z', t') + \partial_{x'} (\partial_z u_z^{(n-1)}(x, z, t))) - a_1 \partial_{x'} p_a^{(n-1)}(x', z', t') \right\} \right\} \quad (6.252)$$

Funciones de Green para los campos de desplazamiento y presión de poro respectivamente, asociadas al problema de Neumann planteado (Budak et al., 1984)

$$g_z(x - x', z - z', t - t') = -\frac{t - t'}{ah} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{mn} \cos\left\{\frac{m\pi}{a} x\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h} z\right\} \cdot \cos\left\{\frac{m\pi}{a} x'\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h} z'\right\} \frac{\text{sen}\left\{\pi c_1(t - t') \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}\right\}}{c_1 \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}} \quad (6.253)$$

$$g_x(x - x', z - z', t - t') = \frac{4}{ah} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}\left\{\frac{m\pi}{a} x\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h} z\right\} \cdot \text{sen}\left\{\frac{m\pi}{a} x'\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h} z'\right\} \frac{\text{sen}\left\{\pi c_1(t - t') \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}\right\}}{c_1 \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}} \quad (6.254)$$

$$q_{mn} = 2; \forall m \cdot n = 0; q_{mn} = 4; \forall m \cdot n \neq 0; m + n \neq 0 \quad (6.255)$$

$$g_a(x - x', z - z', t - t') = \frac{1}{2q} \sum_n^{\infty} \sum_k^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \left\{ \frac{e^{-\frac{(z-z'+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}} - e^{-\frac{(z+z'+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \quad (6.256)$$

$$g_w(x - x', z - z', t - t') = \frac{1}{2\bar{q}} \sum_n^{\infty} \sum_k^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \left\{ \frac{e^{-\frac{(z-z'+2kl_2)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}} - e^{-\frac{(z+z'+2kl_2)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \quad (6.257)$$

Integrando y asumiendo estructuras funcionales conocidas para las condiciones iniciales y de borde, tenemos las expresiones siguientes.

$$u_x(x, z, t) = K_x^0(u_x(x, z, 0), \partial_t u_x(x, z, 0)) + \frac{4}{al_1 l_2} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-h}^z \frac{dz'}{\lambda_{nm}} \text{sen}(p_n x) \text{sen}(q_m z) \cdot \text{sen}(p_n x') \text{sen}(q_m z') \text{sen}(a\lambda_{nm}(t - t')) J_x(x', z', t') \right\} \right. \\ \left. + \frac{4}{al_1 l_2} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-h}^z \frac{dz'}{\lambda_{nm}} \text{sen}(p_n x) \text{sen}(q_m z) \cdot \text{sen}(p_n x') \text{sen}(q_m z') \text{sen}(a\lambda_{nm}(t - t')) \left\{ c_2^2 (\partial_x^2 K_x^0 + \partial_{x'} (\partial_z K_z^0)) - a_1 \partial_{x'} K_a^0(x', z', t') \right\} \right\} \right\} \quad (6.258)$$

$$\begin{aligned}
 u_z(x, z, t) = & K_z^0(u_z(x, z, 0), \partial_t u_z(x, z, 0)) + \\
 & + \frac{2}{al_1 l_2} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-h}^z dz' \frac{A_m}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \sin(p_n x') \cos(q_m z') \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) J_z(x', z', t') \left. \left. \right\} \right\} + \\
 & + \frac{2}{al_1 l_2} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-h}^z dz' \frac{A_m}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \sin(p_n x') \cos(q_m z') \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) \left\{ c_2^2(\partial_z^2 K_z^0 + \partial_{z'}(\partial_{x'} K_x^0)) - \right. \\
 & \left. \left. - a_1 \partial_{z'} K_a^0(x', z', t') \right\} \right\} \left. \right\} + \\
 & + \frac{2}{al_1 l_2} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \sin(p_n x') \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) \mathbf{t}_z^a(x', t') \left. \left. \right\} \right\} + \\
 & + \frac{2}{al_1 l_2} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \sin(p_n x') \cos(q_m h) \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) \mathbf{t}_z^b(x', t') \left. \left. \right\} \right\} \quad (6.259)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_a(x, z, t) \cong & K_a^0(t, p_a^0) - \\
 & - \frac{1}{2q} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n \int_0^x dx' \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \cdot \right. \\
 & \cdot \left\{ \sum_k \int_{-h}^z dz' \left\{ \frac{e^{-\frac{(z-z'+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}} - e^{-\frac{(z+z'+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \cdot \right. \\
 & \cdot (\bar{a}_1(\partial_{x'}(\partial_{t'} K_x^0(x', z', t')) + \partial_{z'}(\partial_{t'} K_z^0(x', z', t')))) \left. \left. \right\} \right\} \quad (6.260)
 \end{aligned}$$

b) Problema poro-elastodinámico en la formulación de segundo gradiente, en la configuración deformada

Distribución de los campos de desplazamiento: $u_x(x, z, t)$; $u_z(x, z, t)$ en la formulación de segundo gradiente (Polizzotto, 2013):

$$\begin{aligned}
 & \rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 u_x(x, z, t) - \mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 u_x(x, z, t) - \\
 & - (\mu + \lambda) \partial_x((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla} u_j(x, z, t)) - \bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 \dot{u}_x(x, z, t) - \\
 & - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_x((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla} \dot{u}_j(x, z, t)) + \alpha_1(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_x p_a(x, z, t) + \\
 & + \alpha_2(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_x p_b(x, z, t) = \rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) f_x(x, z, t) \quad \text{en } R_k \quad (6.261)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 u_z(x, z, t) - \mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 u_z(x, z, t) - \\ & - (\mu + \lambda) \partial_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla} u_j(x, z, t)) - \bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 \dot{u}_z(x, z, t) - \\ & - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla} \dot{u}_j(x, z, t)) + \alpha_2(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z p_a(x, z, t) + \\ & + \alpha_2(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z p_b(x, z, t) = \rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) f_z(x, z, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.262)$$

Distribución de los campos de presiones de poro: $p_a(x, z, t), p_b(x, z, t)$

$$\begin{aligned} & \theta_a \partial_t p_a(x, z, t) - K_{xx}^a \partial_x^2 p_a(x, z, t) - K_{zz}^a \partial_z^2 p_a(x, z, t) - \tilde{K}_{xx}^a \partial_x^2 \dot{p}_a(x, z, t) - \\ & - \tilde{K}_{zz}^a \partial_z^2 \dot{p}_a(x, z, t) + \bar{\alpha}_1(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,j}(x, z, t) - \bar{\theta}_a \partial_t p_a(x, z, t) = 0 \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.263)$$

$$\begin{aligned} & \theta_b \partial_t p_b(x, z, t) - K_{xx}^b \partial_x^2 p_b(x, z, t) - K_{zz}^b \partial_z^2 p_b(x, z, t) - \tilde{K}_{xx}^b \partial_x^2 \dot{p}_b(x, z, t) - \\ & - \tilde{K}_{zz}^b \partial_z^2 \dot{p}_b(x, z, t) + \bar{\alpha}_2(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,j}(x, z, t) - \bar{\theta}_b \partial_t p_b(x, z, t) = 0 \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.264)$$

Condiciones iniciales

$$u_x(x, z, 0) = u_x^0 / u_x^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_x(x, z, 0) = w_x^0 / w_x^0 \in L^2(D_k) \quad (6.265)$$

$$u_z(x, z, 0) = u_z^0 / u_z^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_z(x, z, 0) = w_z^0 / w_z^0 \in L^2(D_k) \quad (6.266)$$

$$\rho l_1^2 u_x(x, z, t) \Big|_{\partial \Lambda} = 0 ; \rho l_1^2 (u_x(x, z, t))_{,l} \hat{n}_j \Big|_{\partial \Lambda} = 0 \quad (6.267)$$

$$p_a(x, z, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) ; p_b(x, z, 0) = p_b^0 / p_b^0 \in H_0^1(D_k) \quad (6.268)$$

Condiciones de borde mixtas para los campos de desplazamiento

$$\begin{aligned} & (-\mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z u_z(x, 0, t) - (\mu + \lambda) \hat{n}_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z u_z(x, 0, t))) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} - \\ & - (\bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \hat{n}_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t))) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} + \\ & + (\alpha_1(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z p_a(x, 0, t) + \alpha_2(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z p_b(x, 0, t)) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = \mathbf{t}_z^a \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} \end{aligned} \quad (6.269)$$

$$\begin{aligned} & (-\mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z u_z(x, 0, t) - (\mu + \lambda) \hat{n}_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z u_z(x, 0, t))) \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} - \\ & - (\bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \hat{n}_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z \dot{u}_z(x, 0, t))) \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} + \\ & + (\alpha_1(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z p_a(x, 0, t) + \alpha_2(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z p_b(x, 0, t)) \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = \mathbf{t}_z^b \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} \end{aligned} \quad (6.270)$$

$$u_x(0, z, t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = u_x(a, z, t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = 0 ; \mathbf{t}_z^a \in L^2(\partial \Gamma_{z=0}) ; \mathbf{t}_z^b \in L^2(\partial \Gamma_{z=-h}) \quad (6.271)$$

Condiciones de borde mixtas para los campos de presiones de poro:

$$(-K_{zz}^a \partial_z p_a(x, 0, t) - \tilde{K}_{zz}^a \partial_z \dot{p}_a(x, 0, t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} + \bar{\alpha}_1 \wp \dot{u}_z(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.272)$$

$$(-K_{zz}^b \partial_z p_b(x, 0, t) - \tilde{K}_{zz}^b \partial_z \dot{p}_b(x, 0, t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} + \bar{\alpha}_2 \wp \dot{u}_z(x, 0, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.273)$$

$$\begin{aligned} & (-K_{zz}^a \partial_z p_a(x, -h, t) - \tilde{K}_{zz}^a \partial_z \dot{p}_a(x, -h, t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} + \\ & + \bar{\alpha}_1 \wp \dot{u}_z(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \end{aligned} \quad (6.274)$$

$$(-K_{zz}^b \partial_z p_b(x, -h, t) - \tilde{K}_{zz}^b \partial_z \dot{p}_b(x, -h, t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} + \bar{\alpha}_2 \wp \dot{u}_z(x, -h, t) \hat{n}_z \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.275)$$

$$p_a(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = p_a(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = p_b(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = p_b(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.276)$$

$$\partial_z p_a(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = \partial_z p_b(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.277)$$

$$\partial_z p_a(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = \partial_z p_b(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = 0 \quad (6.278)$$

Condiciones sobre las constantes, elementos de Matriz, y funciones intervinientes

$$\rho, \mu, \lambda, \bar{\mu}, \bar{\lambda}, \alpha_{1,2}, \bar{\alpha}_{1,2}, \theta_a, \bar{\theta}_a, \theta_b, \bar{\theta}_b, l_1 \in R_0^+; f_x \in L^2(R_k) \\ K_{xx}^a, K_{zz}^a, \tilde{K}_{xx}^a, \tilde{K}_{zz}^a, K_{xx}^b, K_{zz}^b, \tilde{K}_{xx}^b, \tilde{K}_{zz}^b \in R_0^+; f_z \in L^2(R_k)$$

Construcción de las funciones de Green para los campos de desplazamientos

$$\rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 g_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 g_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ - (\mu + \lambda) \partial_x((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) g_{xn,n}(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) - \bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 \dot{g}_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_x((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{xn,n}(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) = \\ = \delta_{xx}(\delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - (1/v)) \text{ en } R_k \quad (6.279)$$

$$\rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 g_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 g_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ - (\mu + \lambda) \partial_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) g_{zn,n}(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) - \bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{\nabla}^2 \dot{g}_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_z((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{zn,n}(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) = \\ = \delta_{zz}(\delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - (1/v)) \text{ en } R_k \quad (6.280)$$

Para las presiones de poro serán

$$\theta_a \partial_t g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{xx}^a \partial_x^2 g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{zz}^a \partial_z^2 g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ - \tilde{K}_{xx}^a \partial_x^2 \dot{g}_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \tilde{K}_{zz}^a \partial_z^2 \dot{g}_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) \text{ en } R_k \quad (6.281)$$

$$\theta_b \partial_t g_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{xx}^b \partial_x^2 g_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{zz}^b \partial_z^2 g_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \\ - \tilde{K}_{xx}^b \partial_x^2 \dot{g}_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \tilde{K}_{zz}^b \partial_z^2 \dot{g}_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) \text{ en } R_k \quad (6.282)$$

Las respectivas condiciones iniciales son:

$$g_x(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_x(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad (6.283)$$

$$g_z(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_z(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad (6.284)$$

$$\rho l_1^2 g_x(\Delta x, \Delta z, 0) \Big|_{\partial\Lambda} = 0 \quad ; \quad \rho l_1^2 (u_x(\Delta x, \Delta z, 0))_{,l} \hat{n}_j \Big|_{\partial\Lambda} = 0 \quad (6.285)$$

$$p_a(\Delta x, \Delta z, -T) = 0 \quad ; \quad p_b(\Delta x, \Delta z, -T) = 0 \quad (6.286)$$

Finalmente, las condiciones de borde para las funciones de Green asociadas a los campos de

desplazamiento se escriben:

$$\begin{aligned} & (-\mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z g_z(\Delta x, 0, \Delta t) - \\ & \quad - (\mu + \lambda) \hat{n}_z ((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z g_z(\Delta x, 0, \Delta t))) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} - \\ & \quad - (\bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z \dot{g}_z(\Delta x, 0, \Delta t) - \\ & \quad - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \hat{n}_z ((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z \dot{g}_z(\Delta x, 0, \Delta t))) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \end{aligned} \quad (6.287)$$

$$\begin{aligned} & (-\mu(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z g_z(\Delta x, -h, \Delta t) - \\ & \quad - (\mu + \lambda) \hat{n}_z ((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z g_z(\Delta x, -h, \Delta t))) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta z=-h}} - \\ & \quad - (\bar{\mu}(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \hat{n}_z \partial_z \dot{g}_z(\Delta x, -h, \Delta t) - \\ & \quad - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \hat{n}_z ((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_z \dot{g}_z(\Delta x, -h, \Delta t))) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta z=-h}} = 0 \end{aligned} \quad (6.288)$$

$$g_x(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=0}} = g_z(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=a}} = 0 \quad (6.289)$$

Para los campos de presiones de poro tendremos:

$$(-K_{zz}^a \partial_z g_a(\Delta x, 0, \Delta t) - \tilde{K}_{zz}^a \partial_z \dot{g}_a(\Delta x, 0, \Delta t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.290)$$

$$(-K_{zz}^b \partial_z g_b(\Delta x, 0, \Delta t) - \tilde{K}_{zz}^b \partial_z \dot{g}_b(\Delta x, 0, \Delta t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad (6.291)$$

$$(-K_{zz}^a \partial_z g_a(\Delta x, -h, \Delta t) - \tilde{K}_{zz}^a \partial_z \dot{g}_a(\Delta x, -h, \Delta t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.292)$$

$$(-K_{zz}^b \partial_z g_b(\Delta x, -h, \Delta t) - \tilde{K}_{zz}^b \partial_z \dot{g}_b(\Delta x, -h, \Delta t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad (6.293)$$

$$g_a(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = g_a(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = g_b(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = 0 \quad (6.294)$$

$$g_b(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = 0 ; \partial_z g_a(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = \partial_z g_b(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.295)$$

$$\partial_z g_a(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = \partial_z g_b(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = 0 \quad (6.296)$$

Reescribimos las ecuaciones de movimiento en la forma siguiente, a efectos de poder construir las representaciones integrales de las soluciones, utilizando el segundo teorema de representación de Green-Lagrange

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_x(x, z, t) - a^2 \hat{\nabla}^2 u_x(x, z, t) &= (1/\rho) \{ \Xi_x(x, z, t) - \tau_1 \partial_x p_a(x, z, t) - \\ & \quad - \tau_2 \partial_x p_b(x, z, t) + F_x(\rho(\phi f_x(x, z, t)), l_1^2 \hat{\nabla}^4 u_x(x, z, t) \dots) \} \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.297)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_z(x, z, t) - a^2 \hat{\nabla}^2 u_z(x, z, t) &= (1/\rho) \{ \Xi_z(x, z, t) - \tau_1 \partial_z p_a(x, z, t) - \\ & \quad - \tau_2 \partial_z p_b(x, z, t) + F_z(\rho(\phi f_z(x, z, t)), l_1^2 \hat{\nabla}^4 u_z(x, z, t) \dots) \} \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (6.298)$$

$$\theta_a \partial_t p_a(x, z, t) - K_{xx}^a \partial_x^2 p_a(x, z, t) - K_{zz}^a \partial_z^2 p_a(x, z, t) = J_a(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.299)$$

$$\theta_b \partial_t p_b(x, z, t) - K_{xx}^b \partial_x^2 p_b(x, z, t) - K_{zz}^b \partial_z^2 p_b(x, z, t) = J_b(x, z, t) \text{ en } R_k \quad (6.300)$$

$$\begin{aligned} \Xi_x(x, z, t) &= \{ (\mu + \lambda) \partial_x (\hat{\nabla} u_j(x, z, t)) - \bar{\mu} \hat{\nabla}^2 \dot{u}_x(x, z, t) - \\ & \quad - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \partial_x (\hat{\nabla} \dot{u}_j(x, z, t)) \} \end{aligned} \quad (6.301)$$

$$\Xi_z(x, z, t) = \{(\mu + \lambda)\partial_z(\hat{\nabla}u_j(x, z, t)) - \bar{\mu}\hat{\nabla}^2\dot{u}_z(x, z, t) - (\bar{\mu} + \bar{\lambda})\partial_z(\hat{\nabla}\dot{u}_j(x, z, t))\} \quad (6.302)$$

$$J_a(x, z, t) = \{\tilde{K}_{xx}^a\partial_x^2\dot{p}_a(x, z, t) + \tilde{K}_{zz}^a\partial_z^2\dot{p}_a(x, z, t) - \bar{\alpha}_1(1 - l_1^2\hat{\nabla}^2)\dot{u}_{j,j}(x, z, t) + \bar{\theta}_a\partial_t p_b(x, z, t)\} \quad (6.303)$$

$$J_w(x, z, t) = \{\tilde{K}_{xx}^w\partial_x^2\dot{p}_a(x, z, t) + \tilde{K}_{zz}^w\partial_z^2\dot{p}_a(x, z, t) - \bar{\alpha}_1(1 - l_1^2\hat{\nabla}^2)\dot{u}_{j,j}(x, z, t) + \bar{\theta}_w\partial_t p_a(x, z, t)\} \quad (6.304)$$

Las representaciones integrales de las soluciones son:

$$u_x(x, z, t) = \iint_S dS \{\bar{g}_x(x - x', z - z', t)\partial_t u_x(x', z', 0) - u_x(x', z', 0)\partial_t \bar{g}_x(x - x', z - z', t)\} + \frac{1}{\rho} \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_x(x - x', z - z', t - t') \{ \bar{\Xi}_x(u_x, \tau_1 \partial_{x'} p_a, \tau_2 \partial_{x'} p_b + F_x(\rho(\varnothing f_x), l_1^2 \hat{\nabla}'^4 u_x, l_1^2 \hat{\nabla}'^2 \partial_{x'}(\hat{\nabla}' u_j)) \} \right\} \quad (6.305)$$

$$u_z(x, z, t) = \iint_S dS \{\bar{g}_z(x - x', z - z', t)\partial_t u_z(x', z', 0) - u_z(x', z', 0)\partial_t \bar{g}_z(x - x', z - z', t)\} + \frac{1}{\rho} \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_z(x - x', z - z', t - t') \{ \bar{\Xi}_z(u_z, \tau_1 \partial_{z'} p_a, \tau_2 \partial_{z'} p_b + F_z(\rho(\varnothing f_z), l_1^2 \hat{\nabla}'^4 u_z, l_1^2 \hat{\nabla}'^2 \partial_{z'}(\hat{\nabla}' u_j)) \} \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_z(x - x', z - 0, t - t') q_z^a(x', t', \Pi_z^a(u_z(x', 0, t'))) \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_z(x - x', z + h, t - t') q_z^b(x', t', \Pi_z^b(u_z(x', -h, t'))) \right\} \quad (6.306)$$

$$p_a(x, z, t) = \iint_S dS \bar{g}_a(x - x', z - z', t) p_a^0 + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_a(x - x', z - z', t - t') G_a^I(t', \Sigma_a(p_a, p_b, \varnothing \hat{\nabla}' u_j)) \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_a(x - x', z + h, t - t') h_a^I(t', \bar{\Sigma}_a(p_a, \varnothing \hat{\nabla}' u_j)) \right\} + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_a(x - x', z + h, t - t') h_a^{II}(t', \bar{\Sigma}_a(p_a, \varnothing \hat{\nabla}' u_j)) \right\} \quad (6.307)$$

$$p_b(x, z, t) = \iint_S dS \bar{g}_b(x - x', z - z', t) p_b^0 + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_b(x - x', z - z', t - t') G_b^I(t', \Sigma_b(p_b, p_b, \varnothing \hat{\nabla}' u_j)) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_b(x-x', z+h, t-t') h_b^I(t', \bar{\Sigma}_b(p_b, \wp \hat{\nabla}' u_j)) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_b(x-x', z+h, t-t') h_b^{II}(t', \bar{\Sigma}_b(p_b, \wp \hat{\nabla}' u_j)) \right\} \quad (6.308)
 \end{aligned}$$

Los aproximantes de Picard se escriben

$$\begin{aligned}
 u_x^{(j+1)}(x, z, t) & \cong K_x^0(u_x^0, w_x^0) + \\
 & + \frac{1}{\rho} \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_x(x-x', z-z', t-t') \{ \bar{\Xi}_x(u_x^{(j)}, \tau_1 \partial_{x'} p_x^{(j)}, \tau_2 \partial_{x'} p_x^{(j)} + \right. \\
 & \left. + F_x(\rho(\wp f_x), l_1^2 \hat{\nabla}'^4 u_x^{(j)}, l_1^2 \hat{\nabla}'^2 \partial_{x'} (\hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \} \right\} \quad (6.309)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_x^0(u_x^0, w_x^0) & = \iint_S dS \{ \bar{g}_x(x-x', z-z', t) \partial_t u_x(x', z', 0) - \\
 & - u_x(x', z', 0) \partial_t g_x(x-x', z-z', t) \} \quad (6.310)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z^{(j+1)}(x, z, t) & \cong K_z^0(u_z^0, w_z^0) + \\
 & + \frac{1}{\rho} \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_z(x-x', z-z', t-t') \{ \bar{\Xi}_z(u_z^{(j)}, \tau_1 \partial_{z'} p_a^{(j)}, \tau_2 \partial_{z'} p_b^{(j)} + \right. \\
 & \left. + F_z(\rho(\wp f_z), l_1^2 \hat{\nabla}'^4 u_z^{(j)}, l_1^2 \hat{\nabla}'^2 \partial_{z'} (\hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \} \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_z(x-x', z-0, t-t') q_z^a(x', t', \Pi_z^a(u_z^{(j)}(x', 0, t'))) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_z(x-x', z+h, t-t') q_z^b(x', t', \Pi_z^b(u_z^{(j)}(x', -h, t'))) \right\} \quad (6.311)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_z^0(u_z^0, w_z^0) & = \iint_S dS \{ \bar{g}_z(x-x', z-z', t) \partial_t u_z(x', z', 0) - \\
 & - u_z(x', z', 0) \partial_t g_z(x-x', z-z', t) \} \quad (6.312)
 \end{aligned}$$

Para las distribuciones de presiones de poro

$$\begin{aligned}
 p_a^{(j+1)}(x, z, t) & \cong K_a^0(p_a^0) + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_a(x-x', z-z', t-t') G_a^I(t', \Sigma_a(p_a^{(j)}, p_b^{(j)}, \wp \hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_a(x-x', z+h, t-t') h_a^I(t', \bar{\Sigma}_a(p_a^{(j)}, \wp \hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_a(x-x', z+h, t-t') h_a^{II}(t', \bar{\Sigma}_a(p_a^{(j)}, \wp \hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \right\} \quad (6.313)
 \end{aligned}$$

$$K_a^0(p_a^0) = \iint_S dS \bar{g}_a(x-x', z-z', t) p_a^0 \quad (6.314)$$

$$\begin{aligned}
 p_b^{(j+1)}(x, z, t) \cong & K_b^0(p_b^0) + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \iint_S dS \bar{g}_b(x - x', z - z', t - t') G_b^I(t', \Sigma_b(p_b^{(j)}, p_a^{(j)}, \phi \hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_b(x - x', z, t - t') h_b^I(t', \bar{\Sigma}_b(p_b^{(j)}, \phi \hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \right\} + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \int_0^x dx' \bar{g}_b(x - x', z + h, t - t') h_b^{II}(t', \bar{\Sigma}_b(p_b^{(j)}, \phi \hat{\nabla}' u_k^{(j)})) \right\} \quad (6.315)
 \end{aligned}$$

$$K_b^0(p_b^0) = \iint_S dS \bar{g}_b(x - x', z - z', t) p_b^0 \quad (6.316)$$

Donde las funciones de Green también han sido redefinidas de la forma siguiente

$$\rho \partial_t^2 \bar{g}_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \mu \hat{\nabla}^2 \bar{g}_x(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \delta_{xx}(\delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) \text{ en } R_k \quad (6.317)$$

$$\rho \partial_t^2 \bar{g}_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - \mu \hat{\nabla}^2 \bar{g}_z(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \delta_{zz}(\delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t)) \text{ en } R_k \quad (6.318)$$

Para las presiones de poro serán

$$\begin{aligned}
 \theta_a \partial_t g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{xx}^a \partial_x^2 g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{zz}^a \partial_z^2 g_a(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \\
 = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) \text{ en } R_k \quad (6.319)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_b \partial_t g_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{xx}^b \partial_x^2 g_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) - K_{zz}^b \partial_z^2 g_b(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = \\
 = \delta(\Delta x, \Delta z, \Delta t) \text{ en } R_k \quad (6.320)
 \end{aligned}$$

Las respectivas condiciones iniciales son:

$$g_x(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_x(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad (6.321)$$

$$g_z(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_z(\Delta x, \Delta z, 0) = 0 \quad (6.322)$$

$$p_a(\Delta x, \Delta z, -T) = 0 \quad ; \quad p_b(\Delta x, \Delta z, -T) = 0 \quad (6.323)$$

Finalmente, las condiciones de borde para las funciones de Green asociadas a los campos de desplazamiento y de presiones de poro se escriben, respectivamente:

$$(-\mu \hat{n}_z \partial_z g_z(\Delta x, 0, \Delta t)) \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad (-\mu \hat{n}_z \partial_z g_z(\Delta x, -h, \Delta t)) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta z=-h}} = 0 \quad (6.324)$$

$$g_x(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=0}} = g_x(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{\Delta x=a}} = 0 \quad (6.325)$$

$$(-K_{zz}^a \partial_z \bar{g}_a(\Delta x, 0, \Delta t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad g_a(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = g_a(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.326)$$

$$(-K_{zz}^b \partial_z \bar{g}_b(\Delta x, 0, \Delta t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad g_b(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = g_b(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.327)$$

$$(-K_{zz}^a \partial_z p_a(x, -h, t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=0}} = 0 \quad ; \quad \partial_z g_a(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = \partial_z g_b(a, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=a}} = 0 \quad (6.328)$$

$$(-K_{zz}^b \partial_z p_b(x, -h, t)) \hat{n}_z \Big|_{\partial \Gamma_{z=-h}} = 0 \quad ; \quad \partial_z g_b(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = \partial_z g_a(0, \Delta z, \Delta t) \Big|_{\partial \Gamma_{x=0}} = 0 \quad (6.329)$$

Funciones de Green para los campos de desplazamiento (Budak, Samarski y Tijonov, 1984)

$$g_z(x - x', z - z', t - t') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{nm} \cos\left\{\frac{m\pi}{a}x\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h}z\right\} \cos\left\{\frac{m\pi}{a}x'\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h}z'\right\} \cdot \frac{\sin\left\{\pi c_1(t - t')\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}\right\}}{c_1\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}} \quad (6.330)$$

$$g_x(x - x', z - z', t - t') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left\{\frac{m\pi}{a}x\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h}z\right\} \sin\left\{\frac{m\pi}{a}x'\right\} \cos\left\{\frac{n\pi}{h}z'\right\} \cdot \frac{\sin\left\{\pi c_1(t - t')\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}\right\}}{c_1\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2}}} \quad (6.331)$$

$$q_{mn} = 2; \forall m \cdot n = 0 \quad ; \quad q_{mn} = 4; \forall m \cdot n \neq 0; m + n \neq 0$$

De manera que la primera aproximación es calculable por cuadraturas exactamente, y así todas las demás aproximaciones

$$u_x(x, z, t) = K_x^0(u_x(x, z, 0), \partial_t u_x(x, z, 0)) + \frac{4}{al_1 l_2 \gamma} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-h}^z \frac{dz'}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \sin(q_m z) \cdot \sin(p_n x') \sin(q_m z') \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) \right\} \left\{ \bar{\Xi}_x(K_x^0, \tau_1 \partial_{x'} K_a^0, \tau_2 \partial_{x'} K_b^0 + F_x(\rho(\phi f_x), l_1^2 \hat{\nabla}'^4 K_x^0, l_1^2 \hat{\nabla}'^2 (\partial_{x'}^2 K_x^0 + \partial_{x'} (\partial_{z'} K_z^0))) \right\} \right\} \right\} \quad (6.332)$$

$$u_z(x, z, t) = K_z^0(u_z(x, z, 0), \partial_t u_z(x, z, 0)) + \frac{2}{al_1 l_2 \gamma} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-h}^z \frac{dz'}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \sin(p_n x') \cos(q_m z') \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) \right\} \left\{ \bar{\Xi}_z(K_z^0, \tau_1 \partial_{z'} K_a^0, \tau_2 \partial_{z'} K_b^0 + F_z(\rho(\phi f_z), l_1^2 \hat{\nabla}'^4 K_z^0, l_1^2 \hat{\nabla}'^2 (\partial_{z'}^2 K_z^0 + \partial_{z'} (\partial_{x'} K_x^0))) \right\} \right\} \right\} + \frac{2}{al_1 l_2 \gamma} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \sin(p_n x') \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) \mathbf{t}_z^a(x', t') \right\} \right\} + \frac{2}{al_1 l_2 \gamma} \int_0^t dt' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dx' \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m z) \cdot \sin(p_n x') \cos(q_m h) \sin(a \lambda_{nm}(t - t')) \mathbf{t}_z^b(x', t') \right\} \right\} \quad (6.333)$$

$$\gamma = \frac{1}{c_1} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{h^2} \right)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
 p_a(x, z, t) \cong & K_a^0(t, p_a^0) - \\
 & - \frac{1}{2q} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n \int_0^x dx' \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ \sum_k \int_{-h}^z dz' \left\{ \frac{e^{-\frac{(z-z'+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(z+z'+2kl_2)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} G_a^I(t', \Sigma_a(K_a^0, K_b^0, \wp(\partial_x \dot{K}_x^0 + \partial_z \dot{K}_z^0))) \right\} \right\} + \\
 & + \frac{1}{2q} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n \int_0^x dx' \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ \sum_k \int_{-h}^0 dz' \left\{ \frac{e^{-\frac{(2kl_2-z)^2}{4q^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(2kl_2+z)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} h_a^I(t', \bar{\Sigma}_a(K_a^0, \wp(\partial_x \dot{K}_x^0 + \partial_z \dot{K}_z^0))) \right\} \right\} + \\
 & + \frac{1}{2q} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n \int_0^x dx' \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ \sum_k \int_{-h}^0 dz' \left\{ \frac{e^{-\frac{(z+h+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(z-h+2kl_2)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} h_a^{II}(t', \bar{\Sigma}_a(K_a^0, \wp(\partial_x \dot{K}_x^0 + \partial_z \dot{K}_z^0))) \right\} \right\} \\
 & (6.334)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_b(x, z, t) \cong & K_b^0(t, p_b^0) - \\
 & - \frac{1}{2q} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n \int_0^x dx' \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ \sum_k \int_{-h}^z dz' \left\{ \frac{e^{-\frac{(z-z'+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(z+z'+2kl_2)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} G_b^I(t', \Sigma_b(K_b^0, K_a^0, \wp(\partial_x \dot{K}_x^0 + \partial_z \dot{K}_z^0))) \right\} \right\} + \\
 & + \frac{1}{2q} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n \int_0^x dx' \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ \sum_k \int_{-h}^0 dz' \left\{ \frac{e^{-\frac{(2kl_2-z)^2}{4q^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(2kl_2+z)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} h_b^I(t', \bar{\Sigma}_b(K_b^0, \wp(\partial_x \dot{K}_x^0 + \partial_z \dot{K}_z^0))) \right\} \right\} + \\
 & + \frac{1}{2q} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n \int_0^x dx' \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4q^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ \sum_k \int_{-h}^0 dz' \left\{ \frac{e^{-\frac{(z+h+2kl_2)^2}{4q^2(t-t')}}} - e^{-\frac{(z-h+2kl_2)^2}{4\bar{q}^2(t-t')}}}{\sqrt{\pi(t-t')}} \right\} h_b^{II}(t', \bar{\Sigma}_b(K_b^0, \wp(\partial_x \dot{K}_x^0 + \partial_z \dot{K}_z^0))) \right\} \right\} \\
 & (6.335)
 \end{aligned}$$

6.4 Problemas de aplicación: experimentos computacionales

El experimento computacional que a continuación se desarrolla describe la propagación de ondas elásticas en un medio anisótropo, débilmente no lineal, en el que existen distribuciones conocidas de defectos, el paper utilizado es el de Bécache et al. (2003) y Carcione et al. (1988). En este problema, la operación que realizan E. Bécache y P. Joly consiste en establecer una analogía dinámica entre la presencia de microestructuras y las condiciones materiales de un sólido vertical transversalmente isotrópico, débilmente no lineal. El defecto se halla incrustado en una matriz absorbente, induciendo el decaimiento exponencial de la solución a gran distancia de la fuente, aunque en el modelo escrito en el párrafo siguiente las condiciones de borde expresadas son de tipo Neumann, el tratamiento computacional del modelo supone una región bidimensional infinita.

Sólido transversalmente isotrópico en 3 + 1-dimensiones

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Sólido transversalmente isotrópico en 2 + 1-dimensiones

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix}$$

Propagación de ondas elásticas en un medio transversalmente isotrópico en 2 + 1-dimensiones con defectos

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_x(x, z, t) - a_1^2 \partial_x^2 u_x(x, z, t) - a_2^2 \partial_z^2 u_x(x, z, t) - b^2 \partial_x (\partial_z u_z(x, z, t)) - \\ - \partial_x (\partial_z u_z(x, z, t) \cdot \partial_x u_x(x, z, t)) = \rho f_x(x, z, t) \text{ en } R_k \\ \rho \partial_t^2 u_z(x, z, t) - a_2^2 \partial_x^2 u_z(x, z, t) - a_3^2 \partial_z^2 u_z(x, z, t) - b^2 \partial_z (\partial_x u_x(x, z, t)) = \\ = \rho f_z(x, z, t) \text{ en } R_k \end{aligned}$$

$$u_x(x, z, 0) = u_x^0 / u_x^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_x(x, z, 0) = w_x^0 / w_x^0 \in L^2(D_k)$$

$$u_z(x, z, 0) = u_z^0 / u_z^0 \in H_0^1(D_k) ; \partial_t u_z(x, z, 0) = w_z^0 / w_z^0 \in L^2(D_k)$$

$$a_1^2 = c_{11}/\rho ; a_2^2 = c_{44}/\rho ; a_3^2 = c_{33}/\rho ; b^2 = (c_{13} + c_{44})/\rho ; c_{11}, c_{33}, c_{44}, c_{13}, \rho \in R_0^+$$

$$(-a_3^2 n_z \partial_z u_z(x, 0, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = -v_1 \partial_t u_z(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} ; v_1 \in R_0^+$$

$$(-a_3^2 n_z \partial_z u_z(x, -h, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = -v_2 \partial_t u_z(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} ; v_2 \in R_0^+$$

$$u_x(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = u_x(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = u_z(0, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=0}} = u_z(a, z, t) \Big|_{\partial\Gamma_{x=a}} = 0$$

$$u_x(x, 0, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=0}} = u_x(x, -h, t) \Big|_{\partial\Gamma_{z=-h}} = 0$$

6.4.1 Cuestiones respecto del Abordaje Computacional

Respecto de las estrategias computacionales; se considera factible el uso de método de diferencias finitas no standard llamadas también diferencias finitas adaptativas, que, en oposición

a las conocidas, permiten convergencia rápida aun en el caso explícito. Estas se construyen sobre una analogía respecto de las soluciones exactas del operador de que se trate.

El laplaciano exacto en términos de diferencias finitas no estándar con un factor de peso de tipo exponencial se vería así:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}^2 u(x, y, z) = & \frac{1}{h_1^2}((e^{\lambda/h_1} - 1)/\lambda)^{-1}(u_{j+1,k,l} - 2u_{j,k,l} + u_{j-1,k,l}) + \\ & + \frac{1}{h_2^2}((e^{\lambda/h_2} - 1)/\lambda)^{-1}(u_{j,k+1,l} - 2u_{j,k,l} + u_{j,k-1,l}) + \\ & + \frac{1}{h_3^2}((e^{\lambda/h_3} - 1)/\lambda)^{-1}(u_{j,k,l+1} - 2u_{j,k,l} + u_{j,k,l-1})\end{aligned}$$

$h_i = \Delta x, \Delta y, \Delta z$, λ : factor de escala

Métodos en diferencias finitas implícitos, tipo Crank-Nicolson los cuales son incondicionalmente estables, claro que, el costo computacional es elevado, y, el desarrollo de algoritmos en este caso está poco explorado.

La otra posibilidad es el uso de métodos de semi-discretización, lo cual en general nos conduce a un sistema infinito numerable de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de primero y segundo orden, para el caso lineal, el sistema es estable localmente, estos sistemas, pueden tratarse con métodos de Runge-Kutta de alto orden implícitos, lográndose convergencia y estabilidad según Von Neumann.

En algunos casos por ejemplo en geometrías semi-infinitas podría aplicarse la transformada rápida de Fourier o de Hilbert, también con costo computacional elevado.

Los sistemas de ecuaciones integrales representativos de las soluciones semi-analíticas, para cada modelo analizado, podrían resolverse también utilizando wavelets de la siguiente forma.

Base de Haar y formula de cuadratura asociada

$$\begin{aligned}\{t \rightarrow \psi_{n,k}(t) = \psi(2^n t - k) ; n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt \, 2^m \psi(2^m t - n) \psi(2^{m_1} t - n_1) = \delta_{m,m_1} \delta_{n,n_1} \\ S_N(f) = \frac{(b-a)(d-c)(h-e)}{8N^3} \sum_{k=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \sum_{i=1}^{2N} f\{a + (\delta_x/2)(2i-1), c + (\delta_y/2)(2j+1), \\ e + (\delta_z/2)(2k+1)\}\end{aligned}$$

Finalmente puede probarse que el error cometido tiene la estructura siguiente

$$d\{\|u_j^* - u_j^{(m)}\|\} \leq \frac{\sigma^{m+1}}{1-\sigma} M_0 \quad ; \quad M_0 = \sup_{\vec{x}, t \in R_k} \{\|F(\vec{x}, t, u_j^*)\|\}$$

Las representaciones integrales se expresarían en la forma siguiente

$$\begin{aligned}\bar{u}_j^{(m)}(\vec{x}, t) = \hat{u}_j^0(\vec{x}, t) + \\ + \delta_x \delta_y \delta_z \sum_{k=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \int_0^t dt' H_{jk}\{x, y, z, t-t', a + (\delta_x/2)(2i-1), c + (\delta_y/2)(2j+1),\right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e + (\delta_z/2)(2k + 1) \} \psi_k \{ u_j^{(m+1)} \{ a + (\delta_x/2)(2i - 1), c + (\delta_y/2)(2j + 1), \\
 & \quad e + (\delta_z/2)(2k + 1) \} \} + \\
 & + \delta_x \delta_y \delta_z \sum_{k=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \int_0^t dt' \bar{H}_{jk} \{ x, y, 0, t - t', a + (\delta_x/2)(2i - 1), c + (\delta_y/2)(2j + 1), \right. \\
 & \quad e + (\delta_z/2)(2k + 1) \} \bar{\psi}_k \{ u_j^{(m+1)} \{ a + (\delta_x/2)(2i - 1), c + (\delta_y/2)(2j + 1), \\
 & \quad \left. e + (\delta_z/2)(2k + 1) \} \} \right\}
 \end{aligned}$$

6.4.2 Simulación numérica

Los gráficos siguientes muestran las distribuciones de tensiones bidimensionales $\sigma_x(x, z, t)$, $\sigma_z(x, z, t)$, en el problema previamente analizado, surgidas en un espécimen conteniendo defectos puntuales y extendidos: el código utilizado como referencia, convenientemente adaptado, está en: https://github.com/ovcharenkoo/WaveProp_in_MATLAB/tree/master/elastic_2D_FDTD_wave_propagation_in_VTI

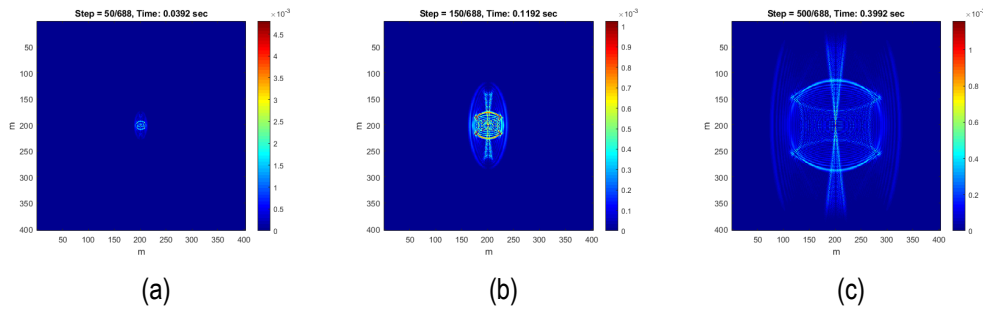


Figura 6.2: Fuente puntual (6.336) y su interacción con la matriz circundante

Código de la fuente:

Código 6.1: Fuente puntual

```

1 % coeficientes
2 factor = 1e10;
3 a = pi*pi*f0*f0;
4 % término fuente
5 source_term = factor * sin(-a*(t-t0));

```

En todas las simulaciones realizadas se modificó la estructura de las fuentes de defectos y también el tipo de no linealidad considerado respecto del código citado previamente.

Se utilizó el método de diferencias finitas explícitas, las cuales son estables con la verificación de la condición CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) que en el caso bidimensional es

$$\frac{u_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_z \Delta t}{\Delta z} < C$$

Micromecánica Configuracional Aplicada al Sistema de Biot

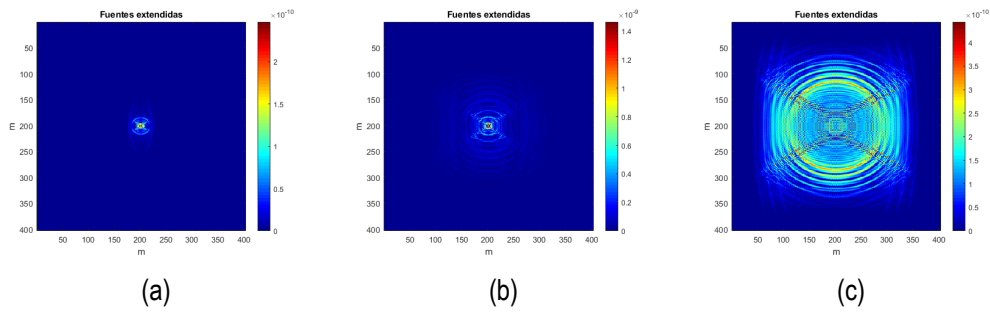


Figura 6.3: Primera fuente extendida (6.338)

Código 6.2: Primera fuente extendida

```

1 % coeficientes
2 kx = 1;
3 kz = 1;
4 % matrices de tiempo, dimensiones de X y Z
5 [T, ~] = meshgrid(t, 1:size(X, 1));
6 % término fuente
7 source_term = factor * sin(kx*X.^2 + kz*Z.^2) * tan(-a*(T-t0));

```

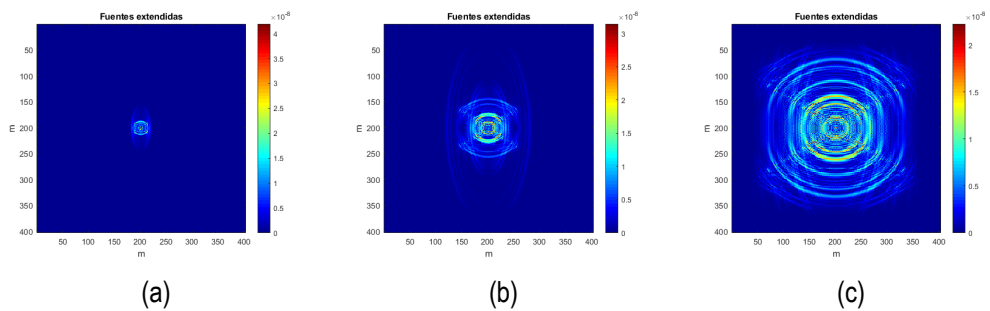


Figura 6.4: Segunda fuente extendida (6.338)

Código 6.3: Segunda fuente extendida

```

1 % término fuente
2 source_term = factor * tan(kx*X.^2 + kz*Z.^2) * sin(-a*(T-t0));

```

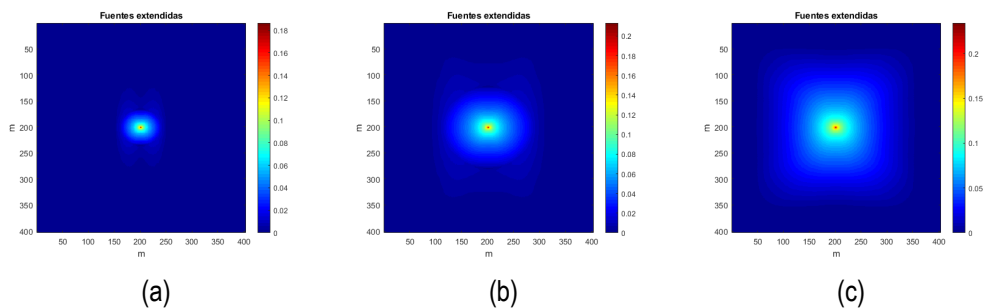


Figura 6.5: Primera fuente puntual de atenuación (6.336)

Código 6.4: Fuente puntual de atenuación

```

1 % término fuente
2 % source_term = factor * (sin(-a*(t-t0))).^2;

```

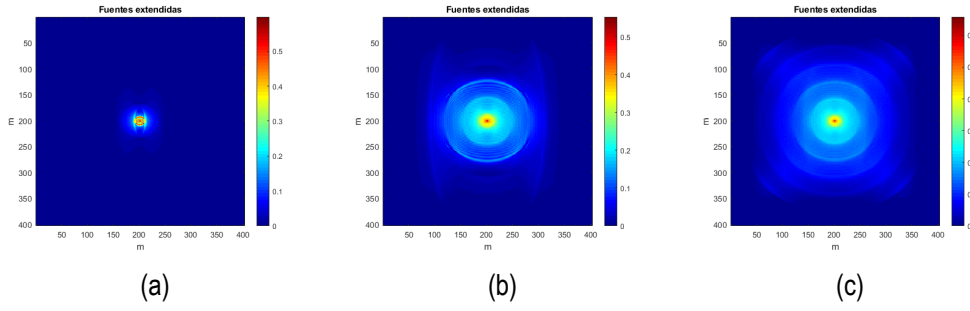



Figura 6.6: Segunda fuente puntual de atenuación (6.336)

Código 6.5: Segunda fuente puntual de atenuación

```
1 % término fuente
2 source_term = factor * log((sin(-a*(t-t0))).^2);
```

Las fuentes asociadas a defectos y/o inclusiones se modelan, en general, siguiendo las siguientes prescripciones:

a) Fuentes puntuales. Representación de defectos puntuales

$$f_j(\vec{x}, t) = \|f\| \cdot \hat{e}_j \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \mathcal{G}(t - t_0) \text{ en } R_k \quad (6.336)$$

$$\int_0^\infty dt \left\{ f_j(t) \cdot \mathcal{G}(t - t_0) \left\{ \iiint_{-\infty}^\infty d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \right\} \right\} = 1 \quad (6.337)$$

$$f_j \in (L^2(R_k^+))^3 \quad ; \quad \mathcal{G} \in L^2(R_k^+)$$

Donde f_j es la magnitud de la fuerza aplicada, \mathcal{G} es una función arbitraria que mide la amplitud temporal de la fuerza, \hat{e}_j dirección de aplicación de la fuerza

b) Fuentes tensoriales extendidas. Representación de inclusiones

$$f_j(\vec{x}, t) = -(\mathcal{M}_{jk}(\vec{x}, t))_{,k} / \mathcal{M}_{jk}(\vec{x}, t) = m_{jk}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (6.338)$$

$$m_{jk}(t) = m_{jk}^0 \mathcal{G}(t - t_0) \quad (6.339)$$

$$m_{jk}^0 \in V^{3 \times 3} \quad ; \quad m_{jk}^0 = m_{kj}^0 \quad ; \quad m_{kj}^0 q_k q_j > 0$$

6.4.3 Conclusiones respecto del experimento computacional

En los experimentos computacionales precedentes puede observarse dos áreas de influencia: a) la estructura de las fuentes y b) la figura de atenuación generada por la matriz circundante.

Se observan diferentes respuestas estructurales, donde predomina la concentración de tensiones en la interfaz inclusión-matriz y defecto-matriz lo cual puede interpretarse como un primer germen de daño estructural, el cual, al progresar dinámicamente, generará una región de fractura dúctil.

En este punto se hace imperioso conocer con precisión las constantes estructurales de Lamé micro-elastodinámicas, a efectos de conocer precisamente la tendencia del daño. Se ve además que, asintóticamente, la solución se extingue en completo acuerdo con el principio de Saint-Venant.

La tendencia de la fractura en un material, bajo la acción de una cierta dinámica de defectos, tendría que manifestarse tal como se indica en la Figure 6.8, que describe una fractografía SEM, mostrando el crecimiento de una inclusión y los efectos que sobre su entorno ella ejerce.

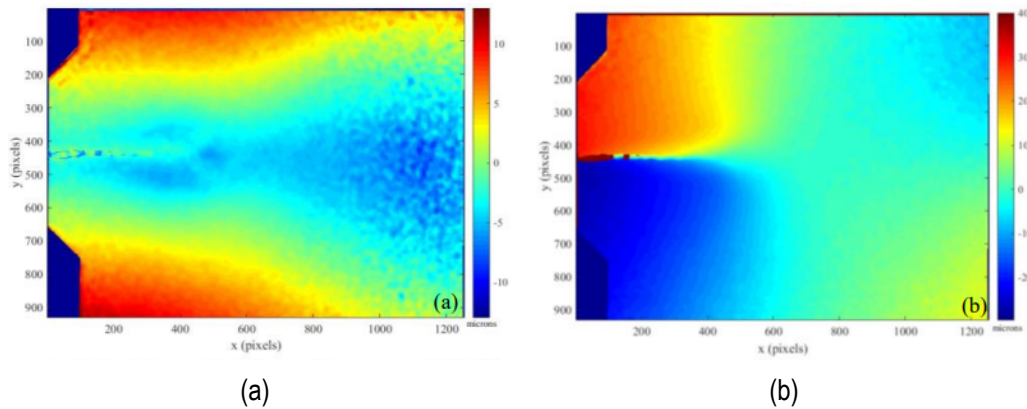


Figura 6.7: (a) Campos de desplazamientos residuales correspondientes al espécimen testado. (b) Campos de desplazamiento vertical. (Vasco-Olmo et al., 2022)

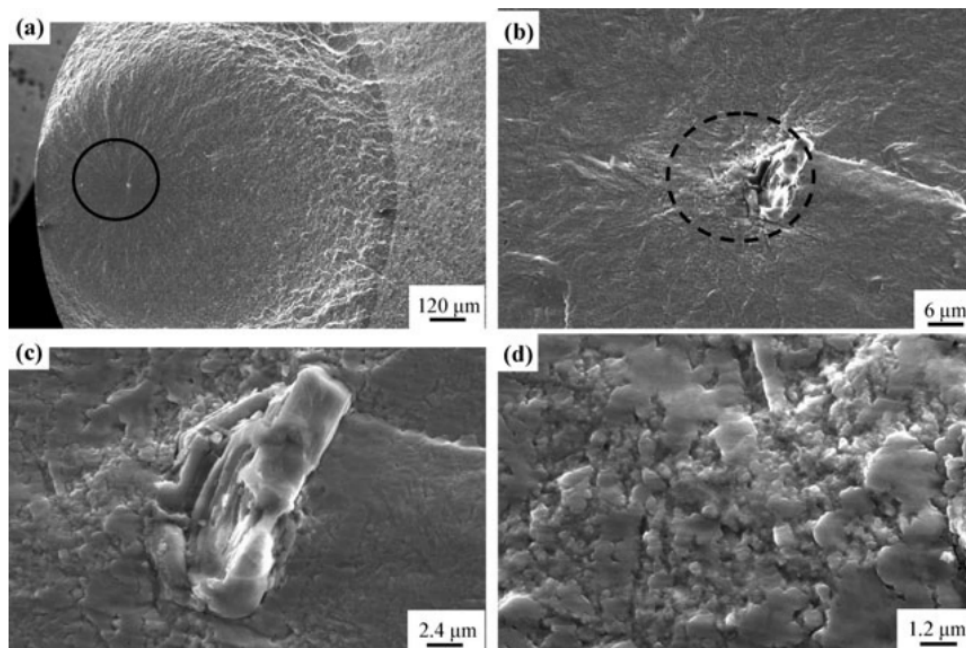


Figura 6.8: Fractografía SEM (microscopio electrónico de barrido) mostrando un “ojo de pez” (a) con una inclusión en el centro (b) y el GBF (*Granular bright facet*) rodeando la inclusión (c) y su magnificación de alta resolución (d) del sitio de inicio de fisura de la muestra B-M1 ($\sigma_a = 800$ Mpa, $N_f = 3.25 \times 10^7$ ciclos) (Nie et al., 2009).

CAPÍTULO 7

Conclusiones

«...Podemos decir que todo lo que es afirmado por un enunciado provisto de sentido posee una cierta especie de posibilidad...»

Bertrand Russell

En apretada síntesis se recorre evolutivamente, la forma que adopta el problema Microelastodinámico, desde su concepción propuesta por Eshelby (1957), Tsuchida y Mura (1983), Mori y Tanaka (1973), observando el impacto que ha tenido sobre su formulación las diversas teorías de segundo gradiente propuestas por Mindlin (1964), Aifantis (1984), Polizzotto (2013) entre otros.

7.1 Resultados obtenidos

- Se formula y resuelve, semi-analíticamente, el problema poroviscoelástico de segundo gradiente con inclusiones, es decir con fuerzas configuracionales expresadas en el referencial deformado, y, en términos del esquema teórico de Biot.
- Se construyen representaciones integrales para cada uno de los casos, los sistemas de ecuaciones integrales que se obtienen a partir del uso sistemático de la técnica de cálculo de funciones de Green y del teorema de representación de Green Lagrange, pueden resolverse por aproximaciones sucesivas o utilizando métodos de interpolación adecuados.
- También se propone un nuevo tipo de problema de Cauchy, el cual surge asociado al carácter no local de la teoría, en este sentido son posibles diversas generalizaciones de las condiciones iniciales, expresándolas de manera no local y en las que podrán incluirse retardos, impulsos y derivadas fraccionarias.
- Un resultado fundamental de la tesis es la generalización del teorema de Gauss expresado en términos de múltiples escalas.
- Se formula rigurosamente el problema de Eshelby dinámico, asumiendo que la distribución de inclusiones actúa como fuente de perturbaciones del campo elástico circundante.
- Se formulan problemas de aplicación escribiendo exhaustivamente todas las condiciones de borde lineales posibles, asociadas al problema micromecánico.

7.2 Propuesta de trabajos futuros

Soluciones semi-analíticas e implementación computacional para un sistema poroelastodinámico configuracional en la formulación de segundo gradiente acoplado a campos de temperatura de tipo Lord-Shulman, y a campos de micro temperaturas, conteniendo además el término de Kröner

(1967), referido a la presencia de fuerzas cohesivas de largo alcance.

$$\mathcal{H}_i(u_i) = - \iiint_{V_k} d^3x' V_{ij}(\vec{x} - \vec{x}', \theta) \wp(u_i) \quad (7.1)$$

Donde $V_{ij} \in (L^2(D_\tau))^{3 \times 3}$ es el llamado potencial de Lenard-Jones de largo alcance, representativo de fuerzas cohesivas en el medio microporomecánico.

El sistema se escribe en la forma siguiente (excluimos el campo de micro temperaturas) (Zaera et al., 2019; Polizzotto, 2013)

Campos de desplazamiento

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - b_M^2 (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t))_{,kk} - \mu(1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_{j,kk}(\vec{x}, t) - \\ - (\mu + \lambda) (((1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_n(\vec{x}, t))_{,n})_{,j} - (\mu_{nk}(1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_{j,n}(\vec{x}, t))_{,k} - \\ - (\xi_{jk} ((1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_p(\vec{x}, t))_{,p})_{,k} - \bar{\mu}(1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{j,kk}(\vec{x}, t) - \\ - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) (((1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_n(\vec{x}, t))_{,n})_{,j} - (\bar{\mu}_{nk}(1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{j,n}(\vec{x}, t))_{,k} - \\ - (\bar{\xi}_{jk} ((1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_p(\vec{x}, t))_{,p})_{,k} - \mathcal{H}_i(u_i) + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{a,k}(\vec{x}, t) + \\ + \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{w,k}(\vec{x}, t) + \beta \mathbf{Q}_{jk}^T (1 - l_M^2 \hat{V}^2) (1 - \tau_1 \partial_t) T_k(x, t) = \\ = - \mathbf{S}_{jklm}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) - \tilde{\mathbf{S}}_{jklm}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{\epsilon}_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \quad \text{en } R_k \end{aligned}$$

Campos de porosidades

$$\begin{aligned} \theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{V}^2) p_a(\vec{x}, t))_{,k} - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{V}^2) \dot{p}_a(\vec{x}, t))_{,k} + \\ + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t) - \bar{\theta}_a \partial_t V_1(t, T(\vec{x}, t), p_w(\vec{x}, t)) = 0 \quad \text{en } R_k \\ \theta_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{V}^2) p_w(\vec{x}, t))_{,k} - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{V}^2) \dot{p}_w(\vec{x}, t))_{,k} + \\ + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t) - \bar{\theta}_w \partial_t V_2(t, T(\vec{x}, t), p_a(\vec{x}, t)) = 0 \quad \text{en } R_k \end{aligned}$$

Campo de temperatura en la formulación de Lord-Shulman de segundo gradiente:

$$\begin{aligned} \rho c_v \tau_1 \partial_t^2 T(\vec{x}, t) - b^2 (\partial_t^2 T(\vec{x}, t))_{,kk} - (\mathbf{K}_{jk}^E (1 - l_1^2 \hat{V}^2) T(\vec{x}, t))_{,j,k} + \\ + \bar{\beta} \mathbf{Q}_{jk} (1 - l_1^2 \hat{V}^2) (\dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t) + \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t)) + \rho c_v (1 - l_1^2 \hat{V}^2) \partial_t T(\vec{x}, t) + \\ + \partial_t V_3(p_a, p_w) = \rho (1 - l_1^2 \hat{V}^2) (f(\vec{x}, t) + \tau_1 \dot{f}(\vec{x}, t)) \quad \text{en } R_k \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

$$\begin{aligned} T(\vec{x}, 0) = T_0 / T_0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad \partial_t T(\vec{x}, 0) = q_0 / q_0 \in L^2(D_k) \\ T(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial \Gamma_{In}} = T_0 \Big|_{\partial \Gamma_{In}} / T_0 \Big|_{\partial \Gamma_{In}} \in H_0^1(D_k) \\ \partial_t T(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial \Gamma_{In}} = q_0 \Big|_{\partial \Gamma_{In}} / q_0 \Big|_{\partial \Gamma_{In}} \in L^2(D_k) \\ u_j(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t u_j(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \\ u_j(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial \Gamma_{Si}} = u_j^0 \Big|_{\partial \Gamma_{Si}} / u_j^0 \Big|_{\partial \Gamma_{Si}} \in (L^2(\partial \Gamma_{Si}))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t u_j(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial\Gamma_{Si}} &= w_j^0 \Big|_{\partial\Gamma_{Si}} / w_j^0 \Big|_{\partial\Gamma_{Si}} \in (L^2(\partial\Gamma_{Si}))^2 \\ p_a(\vec{x}, 0) + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) u_{j,k}(\vec{x}, 0) &= p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \\ p_w(\vec{x}, 0) + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) u_{j,k}(\vec{x}, 0) &= p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k)\end{aligned}$$

Condiciones de borde de tipo Neuman

Interface matriz viscoelástica -inclusión viscoelástica

$$\begin{aligned}& (-b_M^2 \hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t))_{,k} - \mu(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_{j,k}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \\& - (-(\mu + \lambda)((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_j(\vec{x}, t))_{,k} - (\mu_{nk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_{j,n}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \\& - (-(\xi_{jk}(((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_p(\vec{x}, t))_{,p}) - \bar{\mu}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \\& - (-(\bar{\mu} + \bar{\lambda})((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_j(\vec{x}, t))_{,k} - (\bar{\mu}_{nk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,n}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \\& - (\bar{\xi}_{jk}(((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_p(\vec{x}, t))_{,p}) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) p_a(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\& + \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) p_w(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \beta \mathbf{Q}_{jk}^T (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) (1 - \tau_1 \partial_t) T(x, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = \\& = -S_{jklm}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \tilde{S}_{jklm}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}}\end{aligned}$$

Matriz viscoelástica-superficie limitadora exterior

$$\begin{aligned}& (-b_M^2 \hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 u_j(\vec{x}, t))_{,k} - \mu(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_{j,k}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\& - (-(\mu + \lambda)((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_j(\vec{x}, t))_{,k} - (\mu_{nk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_{j,n}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\& - (-(\xi_{jk}(((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) u_p(\vec{x}, t))_{,p}) - \bar{\mu}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,k}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\& - (-(\bar{\mu} + \bar{\lambda})((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_j(\vec{x}, t))_{,k} - (\bar{\mu}_{nk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_{j,n}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\& - (\bar{\xi}_{jk}(((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_p(\vec{x}, t))_{,p}) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) p_a(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\& + \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) p_w(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} + \beta \mathbf{Q}_{jk}^T (1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) (1 - \tau_1 \partial_t) T(x, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_j^a \Big|_{\partial\Gamma_1}\end{aligned}$$

Porosidades-inclusión viscoelástica

$$\begin{aligned}& (-\mathbf{K}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) p_a(\vec{x}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_a(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\& + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_j(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \\& (-\mathbf{K}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) p_w(\vec{x}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \\& + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_j(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0\end{aligned}$$

Porosidades-superficie limitadora exterior

$$\begin{aligned}
 & (-\mathbf{K}_{jk}^a(1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) p_a(\vec{x}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a(1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_a(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\
 & \quad + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jk}^a(1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_j(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} = 0 \\
 & (-\mathbf{K}_{jk}^w(1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) p_w(\vec{x}, t) - \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^w(1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} + \\
 & \quad + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{jk}^w(1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) \dot{u}_j(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} = 0
 \end{aligned}$$

Condiciones Dirichlet para el campo de temperaturas en la interface inclusión-matriz y sobre la superficie limitadora exterior

Cálculo de las funciones de Green

Para el campo de desplazamiento

$$\begin{aligned}
 & \rho \partial_t^2 g_{jn}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - b_M^2 (\partial_t^2 g_{jn}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,kk} - \mu(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{jn,kk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - \\
 & \quad - (\mu + \lambda) (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{nk}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,k})_{,j} - (\mu_{mk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{jn,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,k} - \\
 & \quad - (\xi_{jk} (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{np}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,p})_{,k} - \bar{\mu}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{jn,kk}(\Delta \vec{x}, \Delta t) - \\
 & \quad - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{nm}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,m})_{,j} - (\bar{\mu}_{mk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{jn,m}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,k} - \\
 & \quad - (\bar{\xi}_{jk} (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{np}(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,p})_{,k} = \delta_{jn} (\delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (1/V)) \text{ en } R_k
 \end{aligned}$$

Para las porosidades de aire y agua respectivamente

$$\begin{aligned}
 & \theta_a \partial_t g_a(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{jk}^a(1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) g_a(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,k} - \\
 & \quad - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a(1 - l_a^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_a(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,k} = \delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) \text{ en } R_k \\
 & \theta_w \partial_t g_w(\Delta \vec{x}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{jk}^w(1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) g_w(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,k} - \\
 & \quad - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^w(1 - l_w^2 \hat{\nabla}^2) \dot{p}_w(\Delta \vec{x}, \Delta t))_{,k} = \delta(\Delta \vec{x}, \Delta t) \text{ en } R_k
 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales y de borde para la función de Green asociada a los campos de desplazamiento satisfarán

$$\begin{aligned}
 & g_{jn}(\vec{x}, 0) = 0 \quad ; \quad \partial_t g_{jn}(\vec{x}, 0) = 0 \\
 & g_{jn}(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial \Gamma_{Si}} = 0 \quad ; \quad \partial_t g_{jn}(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial \Gamma_{Si}} = 0 \\
 & (-b_M^2 \hat{\nabla}^2 (\partial_t^2 g_{jn}(\vec{x}, t))_{,k} - \mu(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{jn,k}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} - \\
 & \quad - (-(\mu + \lambda) (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{jn}(\vec{x}, t))_{,k}) - (\mu_{mk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{j,m}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} - \\
 & \quad - (-\xi_{jk} (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) g_{np}(\vec{x}, t))_{,p}) - \bar{\mu}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{jn,k}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} - \\
 & \quad - (-(\bar{\mu} + \bar{\lambda}) (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{jn}(\vec{x}, t))_{,k}) - (\bar{\mu}_{mk}(1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{j,m}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} - \\
 & \quad - \bar{\xi}_{jk} (((1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2) \dot{g}_{np}(\vec{x}, t))_{,p}) \hat{n}_k \Big|_{\partial \Gamma_{in}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (-b_M^2 \hat{V}^2 (\partial_t^2 g_{jn}(\vec{x}, t))_{,k} - \mu(1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{jn,k}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\
 & - (-(\mu + \lambda) (((1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{jn}(\vec{x}, t))_{,k}) - (\mu_{mk} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{j,m}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\
 & - (-\xi_{jk} (((1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{np}(\vec{x}, t))_{,p}) - \bar{\mu} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{jn,k}(\vec{x}, t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\
 & - (-(\bar{\mu} + \bar{\lambda}) (((1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{jn}(\vec{x}, t))_{,k}) - (\bar{\mu}_{mk} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{jn,m}(\vec{x}, t))) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\
 & - \bar{\xi}_{jk} (((1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{np}(\vec{x}, t))_{,p}) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0
 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales y de borde para la función de Green asociada a los campos de porosidades satisfarán:

$$\begin{aligned}
 & g_a(\Delta\vec{x}, -T) = 0 \quad ; \quad g_w(\Delta\vec{x}, -T) = 0 \\
 & (-K_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{V}^2) g_a(\Delta\vec{x}, \Delta t) - \tilde{K}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{V}^2) \dot{g}_a(\Delta\vec{x}, \Delta t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \\
 & (-K_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{V}^2) g_w(\Delta\vec{x}, \Delta t) - \tilde{K}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{V}^2) \dot{g}_w(\Delta\vec{x}, \Delta t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \\
 & (-K_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{V}^2) g_a(\Delta\vec{x}, \Delta t) - \tilde{K}_{jk}^a (1 - l_a^2 \hat{V}^2) \dot{g}_a(\Delta\vec{x}, \Delta t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \\
 & (-K_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{V}^2) g_w(\Delta\vec{x}, \Delta t) - \tilde{K}_{jk}^w (1 - l_w^2 \hat{V}^2) \dot{g}_w(\Delta\vec{x}, \Delta t)) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0
 \end{aligned}$$

Se procede análogamente para los campos de temperatura



Maurice A.
Biot



John D.
Eshelby



Toshio Mura



Raymond D.
Mindlin



Cemal
Eringen



Gérard
Maugin



Elias C.
Aifantis



Paul
Steinmann



Olivier
Coussy



Luc Dormieux



Francesco
dell'Isola

APÉNDICE A

Teoremas de representación de Green-Lagrange

Primer Teorema de Green

Para campos escalares Se conocen las funciones $\varphi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}, t)$ ambas son $\varphi, \psi \in L^2(R_k)$ se enuncia el primer teorema de Green en la forma:

$$\iiint_{V_k} d^3x \varphi \hat{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) = \oint_{\partial\Gamma} dS \varphi(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla}) \psi - \iiint_{V_k} d^3x \hat{\nabla} \varphi \cdot \hat{\nabla} \psi$$

$$(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla}) \psi \Big|_{\partial\Gamma} = q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in L^2(\partial\Gamma)$$

Utilizando la identidad: $\varphi \hat{\nabla}^2 \psi = \hat{\nabla}(\varphi \hat{\nabla} \psi) - \hat{\nabla} \varphi \cdot \hat{\nabla} \psi$ y el teorema de la divergencia obtenemos el resultado anterior, en notación indicial se escribe:

$$\iiint_{V_k} d^3x \varphi \cdot \psi_{,kk} = \oint_{\partial\Gamma} dS \varphi(\psi_{,k} \cdot \hat{n}_k) - \iiint_{V_k} d^3x \varphi_{,k} \psi_{,k} \quad (A.1)$$

$$J_k \cdot \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in L^2(\partial\Gamma); J_k = \psi_{,k}; J_k \in L^2(\partial\Gamma)$$

Para campos vectoriales

$$u_j(\vec{x}, t), v_j(\vec{x}, t) / u_j, v_j \in V^3; u_j, v_j \in (L^2(R_k))^3$$

Se tiene

$$\iiint_{V_K} d^3x (u_j \cdot v_{j,kk}) = \iiint_{V_K} d^3x (u_j (v_{k,k})_j - u_j \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m})_{,k}) =$$

$$= \oint_S dS \{ (u_j \cdot v_{k,k}) \hat{n}_j + (u_j \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m})) \hat{n}_k \} - \iiint_{V_K} d^3x u_{j,j} v_{k,k} -$$

$$- \iiint_{V_K} d^3x u_{j,k} \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m}) \quad (A.2)$$

$$((u_j \cdot v_{k,k}) \hat{n}_j + (u_j \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m})) \hat{n}_k) \Big|_{\partial\Gamma} = q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in L^2(\partial\Gamma)$$

$$J_j \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma} = ((u_j \cdot v_{k,k}) \hat{n}_j - u_k \cdot \epsilon_{kjl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m})) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma}$$

$$J_j = u_j \cdot v_{k,k} - u_k \cdot \epsilon_{kjl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m}) / J_j \in (L^2(\partial\Gamma))^2$$

Utilizando las siguientes identidades y el teorema de la divergencia se llega al resultado exhibido en el teorema

$$v_{j,kk} = (v_{k,k})_j - \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m})_{,k}$$

$$u_j (v_{k,k})_j - u_j \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m})_{,k} = (u_j v_{k,k})_{,j} - u_{j,j} v_{k,k} +$$

$$+ (u_j \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m}))_{,k} - u_{j,k} \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{n,m})$$

Definidos los siguientes campos vectoriales

$$u_j(\vec{x}, t), v_j(\vec{x}, t) / u_j, v_j \in V^3 ; u_j, v_j \in (L^2(R_k))^3$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \iiint_{V_k} d^3x (u_j \cdot \varepsilon_{jkl} v_{k,l}) &= \oint_S dS (u_j \cdot \varepsilon_{jkl} v_k) \hat{n}_l - \iiint_{V_k} d^3x (v_k \cdot \varepsilon_{jkl} u_{j,l}) \quad (A.3) \\ (u_j \cdot \varepsilon_{jkl} v_k) \hat{n}_l \Big|_{\partial\Gamma} &= q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in L^2(\partial\Gamma) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la identidad siguiente y el teorema de la divergencia tenemos el resultado

$$u_j \cdot \varepsilon_{jkl} v_{k,l} = (u_j \cdot \varepsilon_{jkl} v_k)_{,l} - \varepsilon_{jkl} u_{j,l} v_k$$

Campos tensoriales

Para el caso de campos tensoriales de segundo orden: $\sigma_{jk}(\vec{x}, t), \varepsilon_{jk}(\vec{x}, t)$, que verifican:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}, \varepsilon_{jk} &\in V^{3 \times 3} ; \sigma_{jk}, \varepsilon_{jk} \in (L^2(R_k))^{3 \times 3} ; \sigma_{jk} = \sigma_{kj} ; \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj} \\ \sigma_{jk} s_j s_k &> a_0 s_j s_j ; a_0 \in R_0^+ ; s_j \in F(\sigma) \\ \varepsilon_{jk} \bar{s}_j \bar{s}_k &> b_0 \bar{s}_j \bar{s}_j ; b_0 \in R_0^+ ; \bar{s}_j \in F(\varepsilon) \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \iiint_{V_K} d^3x (\varepsilon_{jn} \cdot \sigma_{nk,k}) &= \iiint_{V_K} d^3x \{(\varepsilon_{jn} \sigma_{nk})_{,k} - \varepsilon_{jn,k} \cdot \sigma_{nk}\} = \\ &= \oint_S dS (\varepsilon_{jn} \sigma_{nk}) \hat{n}_k - \iiint_{V_k} d^3x (\varepsilon_{jn,k} \cdot \sigma_{nk}) \quad (A.4) \\ \sigma_{nk} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} &= q_n \Big|_{\partial\Gamma} / q_n \in (L^2(\partial\Gamma))^2 \end{aligned}$$

Campos vectoriales

$$\begin{aligned} u_j(\vec{x}, t), v_j(\vec{x}, t) / u_j, v_j &\in V^3 ; u_j, v_j \in (L^2(R_k))^3 \\ - \iiint_{V_K} d^3x (v_j \cdot u_{j,kk}) &= \iiint_{V_k} d^3x \{(\varepsilon_{jkl} u_{k,l}) \cdot (\varepsilon_{jkl} v_{k,l}) + (u_{j,j} \cdot v_{j,j})\} - \\ &- \oint_S dS \{(\varepsilon_{jkl} u_{l,k})(\varepsilon_{jkl} v_l n_k) + u_{j,j}(n_k v_k)\} \end{aligned}$$

Utilizando las siguientes identidades y el teorema de la divergencia se llega al resultado exhibido en el teorema

$$\begin{aligned} v_{j,kk} &= (v_{k,k})_j - \varepsilon_{jkl} (\varepsilon_{lmn} v_{n,m})_{,k} \\ u_j (v_{k,k})_j - u_j \varepsilon_{jkl} (\varepsilon_{lmn} v_{n,m})_{,k} &= (u_j v_{k,k})_{,j} - u_{j,j} v_{k,k} \end{aligned}$$

Campos vectoriales

$$\begin{aligned} u_j(\vec{x}, t), v_j(\vec{x}, t) / u_j, v_j &\in V^3 ; u_j, v_j \in (L^2(R_k))^3 \\ \iiint_{V_K} d^3x (v_j \cdot \varepsilon_{jkl} u_{k,l} - u_j \cdot \varepsilon_{jkl} v_{k,l}) &= \oint_S dS \{(v_j \cdot \varepsilon_{jkl} u_l n_k)\} \end{aligned}$$

Segundo Teorema de Green

Se conocen las funciones $\varphi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}, t)$ ambas son: $\varphi, \psi \in L^2(R_k)$ se enuncia el segundo teorema de Green en la forma:

$$\iiint_{V_k} d^3x (\varphi \hat{\nabla}^2 \psi - \psi \hat{\nabla}^2 \varphi) = \iint_{\partial\Gamma} dS (\varphi(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\psi - \psi(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\varphi) \\ (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\psi \Big|_{\partial\Gamma} = q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in L^2(\partial\Gamma) ; (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\varphi \Big|_{\partial\Gamma} = \bar{q} \Big|_{\partial\Gamma} / \bar{q} \in L^2(\partial\Gamma)$$

Utilizando la identidad: $\varphi \hat{\nabla}^2 \psi = \hat{\nabla}(\varphi \hat{\nabla} \psi) - \hat{\nabla} \varphi \cdot \hat{\nabla} \psi$ y luego intercambiando las funciones, posteriormente restando convenientemente, y aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos el resultado anterior. En notación indicial se escribe:

$$\iiint_{V_k} d^3x (\varphi \cdot \psi_{,kk} - \psi \cdot \varphi_{,kk}) = \iint_{\partial\Gamma} dS (\varphi(\psi_{,k} \cdot \hat{n}_k) - \psi(\varphi_{,k} \cdot \hat{n}_k)) \quad (A.5) \\ \psi_{,k} \cdot \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in L^2(\partial\Gamma) ; \varphi_{,k} \cdot \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = \bar{q} \Big|_{\partial\Gamma} / \bar{q} \in L^2(\partial\Gamma)$$

Representación para el bi-laplaciano

Se conocen las funciones $\chi_1 = \hat{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}, t), \chi_2 = \hat{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t)$, todas: $\varphi, \psi, \chi_1, \chi_2 \in L^2(R_k)$ se enuncia el segundo teorema de Green en la forma:

$$\iiint_{V_k} d^3x (\chi_2 \hat{\nabla}^2 \chi_1 - \chi_1 \hat{\nabla}^2 \chi_2) = \iint_{\partial\Gamma} dS (\chi_2(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\chi_1 - \chi_1(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\chi_2) \\ (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\chi_1 \Big|_{\partial\Gamma} = q_1 \Big|_{\partial\Gamma} / q_1 \in L^2(\partial\Gamma) ; (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\chi_2 \Big|_{\partial\Gamma} = q_2 \Big|_{\partial\Gamma} / q_2 \in L^2(\partial\Gamma)$$

Finalmente

$$\iiint_{V_k} d^3x (\varphi_{,kk} \cdot (\psi_{,kk})_{,kk} - \psi_{,kk}(\varphi_{,kk})_{,kk}) = \\ = \iint_{\partial\Gamma} dS (\varphi_{,kk}(\hat{n}_k \cdot (\psi_{,kk})_{,k}) - \psi_{,kk}(\hat{n}_k(\varphi_{,kk})_{,k})) \quad (A.6) \\ \hat{n}_k \cdot (\psi_{,kk})_{,k} \Big|_{\partial\Gamma_1} = q_1 \Big|_{\partial\Gamma_1} / q_1 \in L^2(\partial\Gamma) ; \hat{n}_k \cdot (\varphi_{,kk})_{,k} \Big|_{\partial\Gamma_1} = q_2 \Big|_{\partial\Gamma_1} / q_2 \in L^2(\partial\Gamma)$$

Utilizando la identidad: $\chi_1 \hat{\nabla}^2 \chi_2 = \hat{\nabla}(\chi_1 \hat{\nabla} \chi_2) - \hat{\nabla} \chi_1 \cdot \hat{\nabla} \chi_2$ y luego intercambiando las funciones, posteriormente restando convenientemente, y aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos el resultado anterior.

Se conocen las funciones $\varphi(\vec{x}, t), u_j(\vec{x}, t)$ ambas son: $\varphi \in L^2(R_k), u_j \in (L^2(R_k))^3$ se enuncia el segundo teorema de Green en la forma:

$$\iiint_{V_k} d^3x (\varphi \hat{\nabla}^2 u_j - u_j \hat{\nabla}^2 \varphi) = \iint_{\partial\Gamma} dS (\varphi(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})u_j - u_j(\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla})\varphi) \\ \iiint_{V_k} d^3x (\varphi u_{j,kk} - u_j \varphi_{,kk}) = \iint_{\partial\Gamma} dS (\varphi \cdot (u_{j,k} \hat{n}_k) - u_j(\hat{n}_k \varphi_{,k})) \\ u_{j,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = q_j \Big|_{\partial\Gamma} / q_j \in (L^2(\partial\Gamma))^2 ; \varphi_{,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in (L^2(\partial\Gamma))^2$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_{V_k} d^3x (\varphi \hat{\nabla}^2 u_j - u_j \hat{\nabla}^2 \varphi) &= \iiint_{V_k} d^3x (\varphi ((u_{k,k})_{,j} - \varphi \varepsilon_{jkl} (\varepsilon_{lmn} u_{m,n})_{,k}) - u_j \hat{\nabla}^2 \varphi) \\
 &= \iint_{\partial\Gamma} dS (\varphi (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla}) u_j - u_j (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla}) \varphi) \\
 \iiint_{V_k} d^3x (\varphi u_{j,kk} - u_j \varphi_{,kk}) &= \iint_{\partial\Gamma} dS (\varphi \cdot (u_{j,k} \hat{n}_k) - u_j (\hat{n}_k \varphi_{,k})) \\
 u_{j,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} &= q_j \Big|_{\partial\Gamma} / q_j \in (L^2(\partial\Gamma))^2 ; \varphi_{,k} \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma} = q \Big|_{\partial\Gamma} / q \in L^2(\partial\Gamma)
 \end{aligned}$$

Tercer Teorema de Green

Se conocen las funciones $v_j(\vec{x}, t)$, $u_j(\vec{x}, t)$ ambas son: $v_j \in (L^2(R_k))^3$; $u_j \in (L^2(R_k))^3$ se enuncia el tercer teorema de Green en la forma:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{V_k} d^3x (v_j \cdot \hat{\nabla}^2 u_j - u_j \cdot \hat{\nabla}^2 v_j) &= \\
 &= \iint_S dS \{ v_j (\hat{n} \cdot \hat{\nabla} u_j) - u_j (\hat{n} \cdot \hat{\nabla} v_j) - (v_j \times (\hat{\nabla} \times u_j)) \cdot \hat{n} + (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j)) \cdot \hat{n} \} \\
 \hat{n} \cdot \hat{\nabla} u_j \Big|_{\partial\Gamma} &= q_j \Big|_{\partial\Gamma} / q_j \in (L^2(\partial\Gamma))^3 ; \hat{n} \cdot \hat{\nabla} v_j \Big|_{\partial\Gamma} = \bar{q}_j \Big|_{\partial\Gamma} / \bar{q}_j \in (L^2(\partial\Gamma))^3 \\
 (\hat{n} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) \Big|_{\partial\Gamma} &= p_j \Big|_{\partial\Gamma} / p_j \in (L^2(\partial\Gamma))^3 \\
 (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j)) \Big|_{\partial\Gamma} &= p_j \Big|_{\partial\Gamma} / p_j \in (L^2(\partial\Gamma))^3
 \end{aligned}$$

Se utilizan las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
 \hat{\nabla}^2 w_j &= (\hat{\nabla}(\hat{\nabla} w_j)) - (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times w_j)) ; w_j \in (L^2(R_k))^3 \\
 v_j \hat{\nabla}^2 u_j &= v_j \cdot (\hat{\nabla}(\hat{\nabla} u_j)) - v_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) \\
 v_j \cdot (\hat{\nabla}(\hat{\nabla} u_j)) &= \hat{\nabla}(v_j \hat{\nabla} u_j) - \hat{\nabla} v_j \cdot \hat{\nabla} u_j \\
 - u_j \cdot (\hat{\nabla}(\hat{\nabla} v_j)) &= -\hat{\nabla}(u_j \hat{\nabla} v_j) + \hat{\nabla} u_j \cdot \hat{\nabla} v_j \\
 v_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) &= \hat{\nabla} \cdot (v_j \times (\hat{\nabla} \times u_j)) - (\hat{\nabla} \times v_j) \cdot (\hat{\nabla} \times u_j) \\
 u_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times v_j)) &= \hat{\nabla} \cdot (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j)) - (\hat{\nabla} \times u_j) \cdot (\hat{\nabla} \times v_j)
 \end{aligned}$$

Prueba del teorema

$$\begin{aligned}
 \iiint_{V_k} d^3x (v_j \cdot \hat{\nabla}^2 u_j - u_j \cdot \hat{\nabla}^2 v_j) &= \\
 &= \iiint_{V_k} d^3x \{ v_j (\hat{\nabla}(\hat{\nabla} u_j)) - v_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) - u_j \cdot (\hat{\nabla}(\hat{\nabla} v_j)) + u_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times v_j)) \} = \\
 &= \iiint_{V_k} d^3x \{ \hat{\nabla}(v_j \hat{\nabla} u_j) - \hat{\nabla} v_j \cdot \hat{\nabla} u_j - \hat{\nabla}(u_j \hat{\nabla} v_j) + \hat{\nabla} u_j \cdot \hat{\nabla} v_j - \\
 &- \hat{\nabla} \cdot (v_j \times (\hat{\nabla} \times u_j)) + (\hat{\nabla} \times v_j) \cdot (\hat{\nabla} \times u_j) + \hat{\nabla} \cdot (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j)) - (\hat{\nabla} \times u_j) \cdot (\hat{\nabla} \times v_j) \} = \\
 &= \iiint_{V_k} d^3x \{ \hat{\nabla}(v_j \hat{\nabla} u_j) - \hat{\nabla}(u_j \hat{\nabla} v_j) - \hat{\nabla} \cdot (v_j \times (\hat{\nabla} \times u_j)) + \hat{\nabla} \cdot (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j)) \} =
 \end{aligned}$$

$$= \oint_S dS \{ v_j (\hat{n} \cdot \hat{\nabla} u_j) - u_j (\hat{n} \cdot \hat{\nabla} v_j) - (v_j \times (\hat{\nabla} \times u_j)) \cdot \hat{n} + (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j)) \cdot \hat{n} \}$$

Se conocen las funciones $v_j(\vec{x}, t), u_j(\vec{x}, t)$ ambas son: $v_j \in (L^2(R_k))^3; u_j \in (L^2(R_k))^3$ se enuncia un corolario del tercer teorema de Green en la forma

$$\begin{aligned} \iiint_{V_k} d^3x (v_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) - u_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times v_j))) = \\ = \oint_S dS \{ ((v_j \times (\hat{\nabla} \times u_j)) - (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j))) \cdot \hat{n} \} \end{aligned}$$

Se utilizan las siguientes identidades

$$\begin{aligned} v_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) &= \hat{\nabla} \cdot (v_j \times (\hat{\nabla} \times u_j)) - (\hat{\nabla} \times v_j) \cdot (\hat{\nabla} \times u_j) \\ u_j \cdot (\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times v_j)) &= \hat{\nabla} \cdot (u_j \times (\hat{\nabla} \times v_j)) - (\hat{\nabla} \times u_j) \cdot (\hat{\nabla} \times v_j) \end{aligned}$$

Teorema de la representación integral de la solución de una ecuación de onda vectorial

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_k} d^3x' \{ g_{kj} \cdot (\partial_t^2 u_j - a^2 \hat{\nabla}^2 u_j - f_j) - u_j \cdot (\partial_t^2 g_{kj} - a^2 \hat{\nabla}^2 g_{kj} - \delta_{kj}(\delta)) \} \right\} = \\ = \int_0^t dt' \left\{ \oint_S dS \{ -g_{kj} (\hat{n} \cdot \hat{\nabla} u_j) + u_j (\hat{n} \cdot \hat{\nabla} g_{kj}) + \right. \\ \left. + (g_{kj} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) \cdot \hat{n} - (u_j \times (\hat{\nabla} \times g_{kj})) \cdot \hat{n} \} \right\} \end{aligned}$$

$$u_j(x, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3; \partial_t u_j(x, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3$$

$$\hat{n} \cdot \hat{\nabla} u_j \Big|_{\partial\Gamma} = q_j \Big|_{\partial\Gamma} / q_j \in (L^2(\partial\Gamma))^3; \hat{n} \cdot \hat{\nabla} g_{kj} \Big|_{\partial\Gamma} = 0$$

$$(\hat{n} \times (\hat{\nabla} \times u_j)) \Big|_{\partial\Gamma} = p_j \Big|_{\partial\Gamma} / p_j \in (L^2(\partial\Gamma))^3$$

$$(\hat{n} \times (\hat{\nabla} \times g_{kj})) \Big|_{\partial\Gamma} = 0$$

Triple producto vectorial

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C) \cdot B - (A \cdot B) \cdot C$$

$$A \equiv \hat{\nabla} \quad ; \quad B = u_j \quad ; \quad C = v_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\nabla} \times (u_j \times v_j) = u_j (\hat{\nabla} \cdot v_j) - v_j \cdot (\hat{\nabla} u_j) + (v_j \cdot \hat{\nabla}) \cdot u_j - (u_j \cdot \hat{\nabla}) v_j$$

Fórmulas de integración

$$\begin{aligned} a) \quad \iiint_{V_k} d^3x \{ (v_j(\vec{x}, t) \cdot \epsilon_{jkl} u_{l,k}(\vec{x}, t)) - u_j(\vec{x}, t) \cdot \epsilon_{jkl} v_{l,k}(\vec{x}, t) \} = \\ = \oint_{\partial\Gamma} dS v_j(\vec{x}, t) \cdot (\epsilon_{jkl} \hat{n}_k \cdot u_l(\vec{x}, t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & - \iiint_{V_k} d^3x u_{j,kk}(\vec{x}, t) v_j(\vec{x}, t) = \iiint_{V_k} d^3x \{ \epsilon_{jkl} u_{k,l}(\vec{x}, t) \cdot \epsilon_{jkl} v_{k,l}(\vec{x}, t) + \\
 & \quad + u_{j,j}(\vec{x}, t) v_{j,j}(\vec{x}, t) \} - \\
 & \quad - \iint_{\partial\Gamma} dS \epsilon_{jkl} u_{k,l}(\vec{x}, t) \cdot \epsilon_{jkl} (\hat{n}_l \cdot u_k(\vec{x}, t)) + u_{j,j}(\vec{x}, t) (\hat{n}_j \cdot v_j(\vec{x}, t)) \\
 \text{c) } & \iiint_{V_k} d^3x \{ v_j(\vec{x}, t) \cdot (\epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} u_{n,m}(\vec{x}, t))_{,k}) \} = \\
 & = \iiint_{V_k} d^3x \{ (\epsilon_{jkl} v_{l,k}(\vec{x}, t)) \cdot (\epsilon_{jkl} u_{l,k}(\vec{x}, t)) \} + \\
 & \quad + \iint_{\partial\Gamma} dS \hat{n}_j (\epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} u_{m,n}(\vec{x}, t) \cdot v_k)) \\
 \text{d) } & \iiint_{V_k} d^3x \{ v_j \cdot (\epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} u_{m,n}(\vec{x}, t))) - u_j \cdot (\epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{m,n}(\vec{x}, t))) \} = \\
 & = \iint_{\partial\Gamma} dS \hat{n}_j \{ \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} v_{m,n}(\vec{x}, t) \cdot u_k(\vec{x}, t)) - \epsilon_{jkl} (\epsilon_{lmn} u_{m,n}(\vec{x}, t) \cdot v_k(\vec{x}, t)) \} \\
 & v_j \in (\mathbf{L}^2(R_k))^3 \quad ; \quad u_j \in (\mathbf{L}^2(R_k))^3 \quad ; \quad \|v_{m,n}\|_{\partial\Gamma}, \|u_{m,n}\|_{\partial\Gamma} < M / M \in R_0^+
 \end{aligned}$$

Operadores diferenciales definidos sobre superficies

$$\begin{aligned}
 \hat{\nabla}_\Gamma v(\vec{x}, t) &= \hat{\nabla} v(\vec{x}, t) - (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla}) v(\vec{x}, t) / v \in L^2(R_k) \\
 \hat{\nabla}_\Gamma v_j(\vec{x}, t) &= \hat{\nabla} v_j(\vec{x}, t) - (\hat{n}_k \cdot \hat{\nabla}) v_j(\vec{x}, t) / v_j \in (\mathbf{L}^2(R_k))^3 \\
 \hat{\nabla}_\Gamma \times v_j &= \epsilon_{ijk} v_{k,j} - \epsilon_{ijk} (\hat{n}_j \cdot (\hat{n}_p \cdot \hat{\nabla}) v_k(\vec{x}, t)) \\
 \hat{\nabla}_\Gamma^2 u(\vec{x}, t) &= \hat{\nabla}_\Gamma (\hat{\nabla}_\Gamma u(\vec{x}, t)) \\
 \hat{\nabla}_\Gamma^2 v_j(\vec{x}, t) &= \hat{\nabla}_\Gamma (\hat{\nabla}_\Gamma v_j(\vec{x}, t)) - \epsilon_{ijk\Gamma} (\hat{n}_k \cdot \epsilon_{jlm\Gamma} v_{l,m}(\vec{x}, t))
 \end{aligned}$$

APÉNDICE B

Consideraciones accesorias sobre el problema de Eshelby y su generalización dinámica

Una inclusión se puede caracterizar según cinco atributos:

- Forma
- Volumen
- Desajuste con la matriz en términos de geometría
- Desajuste con la matriz en términos de propiedades del material
- Nivel de unión (también llamado nivel de coherencia) en la interfaz matriz-inclusión.

En los textos referenciados, las inclusiones con enlace perfecto en la interfaz con la matriz se subdividen en tres categorías, como se describe a continuación.

1. Inclusión con geometría mal ajustada (inclusión homogénea) En este caso, la inclusión tiene las mismas propiedades elásticas de la matriz, descritas por el tensor de elasticidad \mathbb{C} . Por lo tanto, solo existe el desajuste geométrico causado por la deformación residual ε^* . Este tipo de inclusión se estudia directamente mediante el procedimiento de Eshelby, que se describe en la sección siguiente. De hecho, este tipo de inclusión, denominada “inclusión homogénea” por Eshelby (1957), es el caso al que se pueden reducir todas las demás, con métodos de equivalencia adecuados.
2. Inclusión con propiedades de desajuste (inclusión no homogénea) La inclusión tiene propiedades elásticas diferentes a las de la matriz, por lo que su tensor de elasticidad \mathbb{S} es diferente al de la matriz \mathbb{C} . Sin embargo, la deformación residual ε^* , es igual a cero y, por lo tanto, no hay desajuste geométrico. En ausencia de un campo de tensión causado por tracciones externas, la tensión y la deformación en la matriz y la inclusión son idénticamente cero. Cuando se aplican fuerzas externas, el desajuste en las propiedades del material de la inclusión provoca una perturbación en los campos de tensión y deformación. El método de solución de Eshelby para este tipo de inclusión, al que llamó “inclusión no homogénea” (J.D. Eshelby, 1956), consiste en reducir su efecto al de una “inclusión homogénea equivalente”, es decir, en encontrar la deformación de transformación ficticia que causa la misma perturbación que la diferencia en las propiedades del material. (J.D. Eshelby, 1961)
3. Inclusión con geometría y propiedades mal ajustadas (inclusión general) Este es el caso más general, en el que la inclusión tiene un desajuste geométrico, descrito por una deformación ε^* , así como un desajuste en las propiedades del material, es decir, no son iguales los tensores elásticos de la matriz y de la inclusión. Este caso también se resuelve mediante el método de Eshelby de la “inclusión homogénea equivalente”. Llamamos a este tipo de inclusión “inclusión general” porque los casos (1) y (2) se obtienen estableciendo $\mathbb{C} = \mathbb{S}$

y $\varepsilon^* = 0$, respectivamente. Observamos que Eshelby (1956) llamó “inclusión general” a la inclusión de formas arbitrarias, pero esto no debe ser una fuente de confusión en este contexto, en el que nos limitamos al caso de las inclusiones elipsoidales.

Fuerzas configuracionales en la configuración deformada y no deformada

Fuerzas configuracionales en la configuración deformada y no deformada respectivamente en términos de los tensores de Eshelby escritos en las dos representaciones

$$\mathbb{F}_j^{Conf}(\vec{x}) = \oint_{\partial D} da (\mathbf{K}_{jk} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k) = \oint_{\partial D} da \{W \delta_{jk} \hat{\mathbf{n}}_k - \sigma_{jl} (\partial_{\hat{\mathbf{n}}_k} u_{l,k})\} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbb{F}_C^{Conf}(\mathbf{X}_C) = \oint_{\partial D} dA (\mathbf{K}_{CB} \cdot \hat{\mathbf{N}}_B) = \oint_{\partial D} dA \{W \delta_{CB} \hat{\mathbf{N}}_B - \mathbf{F}_{Cj}^T \mathbf{P}_{jB} \hat{\mathbf{N}}_B\} \quad (\text{B.2})$$

Fuerza configuracional en la representación deformada en la formulación de segundo gradiente

$$\begin{aligned} s_g \mathbb{F}_j^{Conf}(\vec{x}) &= \oint_{\partial D} da ((1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_g \mathbb{F}_j^{Conf}(\vec{x}) = \oint_{\partial D} da \{ (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) W \delta_{jk} \hat{\mathbf{n}}_k - (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \sigma_{jl} (\partial_{\hat{\mathbf{n}}_k} u_{l,k}) \} \\ &\Rightarrow s_g \mathbb{F}_j^{Conf}(\vec{x}) = \oint_{\partial D} da (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k) - l_1^2 \oint_{\partial \bar{D}} d\bar{a} \partial_{\hat{\mathbf{n}}_k} [W] \delta_{jk} + l_1^2 \oint_{\partial \bar{D}} d\bar{a} \hat{\nabla}^2 \sigma_{jl} (\partial_{\hat{\mathbf{n}}_k} u_{l,k}(\vec{x})) + \\ &\quad + l_1^2 \oint_{\partial \bar{D}} d\bar{a} (\sigma_{jl} (\partial_{\hat{\mathbf{n}}_k} (\hat{\nabla}^2 u_{l,k}(\vec{x})))) \end{aligned}$$

Una línea de razonamiento alternativa a la de M. F. Alhasadi y S. Federico desarrollada en su trabajo “Relation between Eshelby stress and Eshelby fourth-order tensor within an ellipsoidal inclusion” de 2016, es la que se expone seguidamente

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{x}) &= \mathbf{C}_{ijkl}^M : \varepsilon_{kl}(\vec{x}) \wedge \mathbf{K}_{ij}(\vec{x}) = -\mathbf{S}_{ijkl}^I : \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}) \\ \mathbf{K}_{ij}(\vec{x}) &= W \delta_{ij} - \sigma_{il}(\vec{x}) : \varepsilon_{lj}(\vec{x}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\mathbf{S}_{ijkl}^I : \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}) = W \delta_{ij} - \{ \mathbf{C}_{ilmn}^M : \varepsilon_{mn}^M(\vec{x}) \} : \varepsilon_{lj}^M(\vec{x}) \\ &\Rightarrow W_{,j} \delta_{ij} = \{ \{ \mathbf{C}_{ilmn}^M : \varepsilon_{mn}^M(\vec{x}) \} : \varepsilon_{lj}^M(\vec{x}) \}_{,j} - \{ \mathbf{S}_{ijkl}^I : \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}) \}_{,j} / \mathbf{F}_i^{Config} = W_{,j} \delta_{ij} \\ &\left\{ \begin{aligned} \mathbf{F}_i^{Conf} &= \{ \varepsilon_{lj}^M(\vec{x}) : \mathbf{C}_{ilmn}^M : \varepsilon_{mn}^M(\vec{x}) \}_{,j} - \{ \mathbf{S}_{ijkl}^I : \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}) \}_{,j} \\ \mathbb{T}_i \Big|_{\partial \Gamma_{M-I}} &= \{ \varepsilon_{lj}^M(\vec{x}) \cdot \mathbf{C}_{ilmn}^M : \varepsilon_{mn}^M(\vec{x}) \} \hat{\mathbf{n}}_j - \{ \mathbf{S}_{ijkl}^I : \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}) \} \hat{\mathbf{n}}_j \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Sistema elastodinámico inclusión-matriz: Primer Problema Dinámico de Eshelby

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j^M(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{jklm}^e u_{m,l}^M(\vec{x}, t) &= 0 \text{ en } R_{\Omega-I} \\ \rho \partial_t^2 u_j^I(\vec{x}, t) - \mathbf{S}_{jklm}^{Es} u_{m,l}^I(\vec{x}, t) &= -\rho \mathbf{F}_i^{Config}(\vec{x}, t) \text{ en } R_I \end{aligned}$$

$$u_j^M(\vec{x}, 0) = u_j^M / u_j^M \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j^M(\vec{x}, 0) = w_j^M / w_j^M \in (\mathbf{L}^2(D_k))^3$$

$$u_j^I(\vec{x}, 0) = \partial_t u_j^I(\vec{x}, 0) = 0$$

Condiciones de borde

$$- \mathbf{C}_{jklm}^e u_{m,l}^M \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{M-In}} + \mathbf{S}_{jklm}^{Es} u_{m,l}^I(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{In-M}} = -\mathbb{T}_i \Big|_{\partial\Gamma_{M-In}}$$

$$u_j^M(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_{M-In}} - u_j^I(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_{In-M}} = 0$$

Representación integral de las soluciones

$$u_j^M(\vec{x}, t) = \iiint_{V_{M-In}} d^3x' \{ \mathbf{g}_{jk}^M(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_k^M(\vec{x}', 0) - u_k^M(\vec{x}', 0) \partial_t \mathbf{g}_{jk}^M(\vec{x} - \vec{x}', t) \} +$$

$$+ \int_0^t ds \left\{ \iint_{\partial M-In} da \mathbf{g}_{jk}^M(\vec{x} - \vec{x}', t - s) \left\{ \mathbb{T}_k \Big|_{\partial\Gamma_{M-I}} + \mathbf{S}_{kplm}^{Es} u_{m,l}^I(\vec{x}', s) \hat{n}_p \Big|_{\partial\Gamma_{In-M}} \right\} \right\}$$

$$u_j^I(\vec{x}, t) = \int_0^t ds \left\{ \iiint_{V_I} d^3x' \mathbf{g}_{jk}^I(\vec{x} - \vec{x}', t - s) \rho \mathbf{F}_k^{Config}(\vec{x}', s) \right\} +$$

$$+ \int_0^t ds \left\{ \iint_{\partial In-M} da \mathbf{g}_{jk}^I(\vec{x} - \vec{x}', t - s) \left\{ -\mathbb{T}_k \Big|_{\partial\Gamma_{In-M}} + \mathbf{C}_{jplm}^e u_{m,l}^M(\vec{x}', s) \hat{n}_p \Big|_{\partial\Gamma_{M-In}} \right\} \right\}$$

Sistema elastodinámico-Inclusión-matriz: Problema Dinámico de Eshelby de segundo gradiente

$$\rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 u_j^M(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{jklm}^e (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) u_{m,l}^M(\vec{x}, t) = -\mathbf{S}_{jklm}^{Es} (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \epsilon_{m,l}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_{\Omega-I}$$

$$\rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \partial_t^2 u_j^I(\vec{x}, t) - \mathbf{S}_{jklm}^{Es} (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) u_{m,l}^I(\vec{x}, t) = -\rho(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \mathbf{F}_i^{Config}(\vec{x}, t) \text{ en } R_I$$

$$u_j^M(\vec{x}, 0) = u_j^M / u_j^M \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 ; \partial_t u_j^M(\vec{x}, 0) = w_j^M / w_j^M \in (\mathbf{L}^2(D_k))^3$$

$$u_j^M(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial V_M} / u_j^M \Big|_{\partial V_M} \in (\mathbf{H}_0^1(\partial V_M))^3$$

$$\partial_{\hat{n}}(\partial_t u_j^M(\vec{x}, 0)) \Big|_{\partial V_M} = w_j^M \Big|_{\partial V_M} / w_j^M \Big|_{\partial V_M} \in (\mathbf{L}^2(V_M))^3$$

$$u_j^I(\vec{x}, 0) = \partial_t u_j^I(\vec{x}, 0) = u_j^I(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial V_I} = \partial_{\hat{n}}(\partial_t u_j^I(\vec{x}, 0)) \Big|_{\partial V_I} = 0$$

$$- \mathbf{C}_{jklm}^e (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) u_{m,l}^M(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{M-In}} +$$

$$+ \mathbf{S}_{jklm}^{Es} (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) u_{m,l}^I(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{In-M}} = -(1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \mathbb{T}_i \Big|_{\partial\Gamma_{M-In}}$$

$$u_j^M(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_{M-In}} - u_j^I(\vec{x}, t) = 0$$

Relación entre el tensor elástico y el tensor elástico de Eshelby de cuarto orden

$$\mathbf{S}_{ijkl}^I = \{ \{ \mathbf{C}_{ilmn}^M : \epsilon_{mn}^M(\vec{x}) \} : \epsilon_{ij}^M(\vec{x}) \} (\epsilon_{kl}^I(\vec{x}))^{-1} - W \delta_{ij} (\epsilon_{kl}^I(\vec{x}))^{-1}$$

Secuencia de operaciones del experimento pensado de Eshelby

1. Se remueve la inclusión de la matriz que la contiene

Matriz	Inclusión	Interface
$\sigma_{ij}^M = 0 ; \epsilon_{ij}^M = 0$	$\sigma_{ij}^I = 0 ; \epsilon_{ij}^I = \epsilon_{ij}^*$	$b_j = 0$

2. Se aplica una tracción a efectos de que la forma de la inclusión quede invariante en la matriz

Matriz	Inclusión	Interface
$\sigma_{ij}^M = 0 ; \epsilon_{ij}^M = 0$	$\sigma_{ij}^I = -C_{ijkl}^M \epsilon_{kl}^* ; \epsilon_{ij}^I = 0$ $t_i^{In} = -C_{ijkl}^M \epsilon_{kl}^* \hat{n}_j$	$b_j = 0$

3. Se vuelve a colocar la inclusión y se pega la interfaz

Matriz	Inclusión	Interface
$\sigma_{ij}^M = 0 ; \epsilon_{ij}^M = 0$	$\sigma_{ij}^I = -C_{ijkl}^M \epsilon_{kl}^* ; \epsilon_{ij}^I = 0$ $t_i^{In} = -C_{ijkl}^M \epsilon_{kl}^* \hat{n}_j$	$b_j = 0$

4. Se remueve la tracción antes aplicada

Matriz	Inclusión	Interface
$\sigma_{ij}^M = \sigma_{ij}^e(\vec{x})$ $\epsilon_{ij}^M = \epsilon_{ij}^e(\vec{x})$	$\sigma_{ij}^I = \sigma_{ij}^e(\vec{x})$ $\epsilon_{ij}^I = \epsilon_{ij}^e(\vec{x})$	$b_j = -t_i^{In} = C_{ijkl}^M \epsilon_{kl}^* \hat{n}_j$

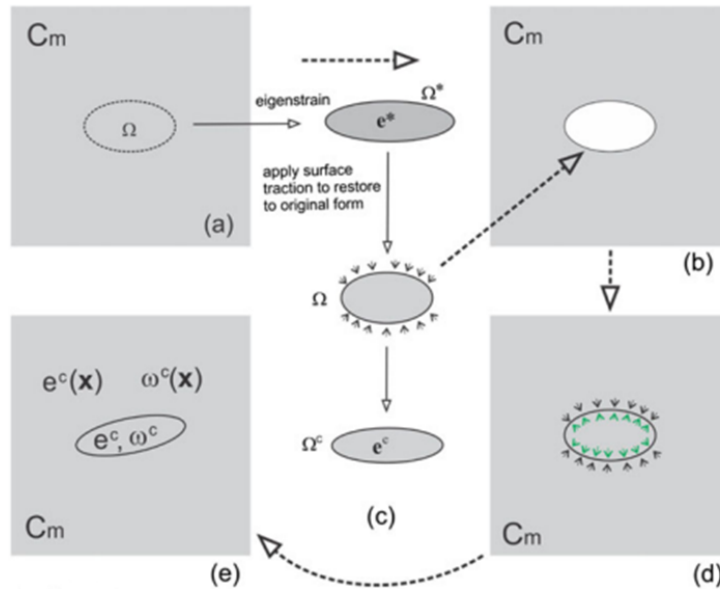


Figura B.1: Fig. extraída de *Continuum Micromechanics Theory and Application to Multiscale Tectonics* (Jiang, 2023, pág. 223)

APÉNDICE C

Operaciones Push-Forward Y Pull-Back Para Tensores De Segundo Orden. Derivada Temporal De Lie

Transformaciones de Piola

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{jk} &= J \cdot \bar{\Sigma}_{jA} F_{Ak}^{-1} \Leftrightarrow \bar{\Sigma}_{Ak} = J^{-1} F_{Aj} \cdot \Sigma_{jk} \\
 \Sigma_{AB} &= J F_{Ak}^{-T} \bar{\Sigma}_{kB} \Leftrightarrow \bar{\Sigma}_{Ak} = J^{-1} \Sigma_{AB} \cdot F_{Bk}^T \\
 \Sigma_{jk} &= F_{jA}^{-1} \cdot \bar{\Sigma}_{AB} \cdot F_{Bk}^T \Leftrightarrow \bar{\Sigma}_{AB} = F_{Aj}^{-T} \cdot \Sigma_{jk} \cdot F_{kB} \\
 P_{jA} &= J \sigma_{kl} \cdot F_{kA}^{-T} \Leftrightarrow \sigma_{kj} = J^{-1} F_{kA} \cdot P_{Aj} \\
 \Gamma_{jA} &= J \cdot e_{jk} \cdot F_{kA}^{-1} \Leftrightarrow e_{jk} = J \Gamma_{jA} \cdot F_{Ak}
 \end{aligned}$$

σ_{jk} : Tensor de Cauchy; e_{jk} : Tensor de Euler-Almansi

Operaciones push-forward y pull-back para tensores de segundo orden

- Operación Pull-back sobre un tensor de segundo orden de tipo espacial (configuración deformada a la no deformada)

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= a_{ij}(g^i \otimes g^j) = a^{ij}(g_i \otimes g_j) = a_i^j(g_i \otimes g^j) = a_i^j(g^i \otimes g_j) \\
 \chi^{-1}(a_{ij}) &= a_{ij}(G^i \otimes G^j) = a_{ij}(F_{Ai}^T g^i \otimes F_{Bj}^T g^j) = F_{Ai}^T \cdot a_{ij} \cdot F_{Bj} \\
 \chi_1^{-1}(a_{ij}) &= a^{ij}(G_i \otimes G_j) = a^{ij}(F_{Ai}^{-1} g_i \otimes F_{Bj}^{-1} g_j) = F_{Ai}^{-1} \cdot a_{ij} \cdot F_{Bj}^{-T} \\
 \chi_2^{-1}(a_{ij}) &= a_i^j(G_i \otimes G^j) = a_i^j(F_{Ai}^{-1} g_i \otimes F_{Bj}^T g^j) = F_{Ai}^{-1} \cdot a_{ij} \cdot F_{Bj} \\
 \chi_3^{-1}(a_{ij}) &= a_i^j(G_j \otimes G^i) = a_i^j(F_{Ai}^T g^i \otimes F_{Bj}^{-1} g_j) = F_{Ai}^T \cdot a_{ij} \cdot F_{Bj}^{-T}
 \end{aligned}$$

- Operación Push-forward sobre un tensor de segundo orden de tipo material (configuración no deformada a la deformada)

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= A_{ij}(G^i \otimes G^j) = A^{ij}(G_i \otimes G_j) = A_j^i(G_i \otimes G^j) = A_j^i(G^i \otimes G_j) \\
 \chi(A_{ij}) &= A_{ij}(g^i \otimes g^j) = A_{ij}(F_{Ai}^{-T} G^i \otimes F_{Bj}^{-T} G^j) = F_{iA}^{-T} \cdot A_{AB} \cdot F_{Bj}^{-1} \\
 \chi_1(A_{ij}) &= A^{ij}(g_i \otimes g_j) = A^{ij}(F_{Ai} G_i \otimes F_{Bj} G_j) = F_{iA} \cdot A_{AB} \cdot F_{Bj}^T \\
 \chi_2(A_{ij}) &= A_j^i(g_i \otimes g^j) = A_j^i(F_{Ai} G_i \otimes F_{Bj}^T G^j) = F_{iA} \cdot A_{AB} \cdot F_{Bj}^{-1} \\
 \chi_3(A_{ij}) &= A_i^j(g_j \otimes g^i) = A_i^j(F_{Ai}^{-T} G^i \otimes F_{Bj} G_j) = F_{iA}^{-T} \cdot A_{AB} \cdot F_{Bj}^T
 \end{aligned}$$

- Operaciones Push-Forward y pull-back para tensores de deformación. Operaciones push-forward para el tensor de deformaciones derecho de Cauchy Green

$$\begin{aligned}\chi(C_{ij}) &= C_{ij}(g^i \otimes g^j) = C_{ij}(F_{Ai}^{-T} G^i \otimes F_{Bj}^{-T} G^j) = F_{iA}^{-T} \cdot C_{AB} \cdot F_{Bj}^{-1} \\ \chi(C_{ij}^{-1}) &= C_{ij}^{-1}(g^i \otimes g^j) = C_{ij}^{-1}(F_{Ai}^{-T} G^i \otimes F_{Bj}^{-T} G^j) = F_{iA} \cdot C_{AB}^{-1} \cdot F_{Bj}^T\end{aligned}$$

- Operaciones pull-pack y push-forward para tensor de deformaciones de Cauchy-Green izquierdo y el tensor de Euler-Almansi

$$\begin{aligned}\chi(E) &= E_{ij}(g^i \otimes g^j) = F_{iA}^{-T} \cdot E_{AB} \cdot F_{Bj}^{-1} = e_{ij} \\ \chi^{-1}(e) &= e_{ij}(G^i \otimes G^j) = F_{Ai}^T \cdot e_{ij} \cdot F_{jB} = E_{AB}\end{aligned}$$

- Operaciones push-forward y pull-back con descomposición polar en configuraciones intermedias

Operación push forward de un tensor material A de la configuración $\{G_i\} \rightarrow \{\hat{G}_i\}$. Reemplazando F por R se tiene

$$\begin{aligned}\chi(A_{ij})_{R(G)} &= A_{ij}(\hat{G}^i \otimes \hat{G}^j) = A_{ij}(R_{Ai}^{-T} G^i \otimes R_{Bj}^{-T} G^j) = R_{iA}^{-T} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \chi(A_{ij})_{R(G)} = R_{iA}^{-T} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^{-1} = R \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^T \\ \chi_1(A_{ij})_{R(G)} &= A^{ij}(\hat{G}_i \otimes \hat{G}_j) = A^{ij}(R_{Ai} G_i \otimes R_{Bj} G_j) = R_{iA} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^T \\ \chi_2(A_{ij})_{R(G)} &= A_j^i(\hat{G}_i \otimes \hat{G}^j) = A_j^i(R_{Ai} G_i \otimes R_{Bj}^{-T} G^j) = R_{iA} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \chi_2(A_{ij})_{R(G)} = R_{iA} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^{-1} = R_{iA} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^T \\ \chi_3(A_{ij})_{R(G)} &= A_i^j(\hat{G}_j \otimes \hat{G}^i) = A_i^j(R_{Ai}^{-T} G^i \otimes R_{Bj} G_j) = R_{iA}^{-T} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \chi_3(A_{ij})_{R(G)} = R_{iA}^{-T} \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^T = R \cdot A_{AB} \cdot R_{Bj}^T\end{aligned}$$

El pull back de un tensor material \hat{A} de la configuración $\{\hat{G}_i\} \rightarrow \{G_i\}$ será

$$\begin{aligned}\chi(\hat{A}_{ij})_{R(\hat{G})} &= \hat{A}_{ij}(G^i \otimes G^j) = R_{iA}^T \cdot \hat{A}_{AB} \cdot R_{Bj} \\ \chi_1(\hat{A}_{ij})_{R(\hat{G})} &= \hat{A}^{ij}(G_i \otimes G_j) = R_{jA}^T \cdot \hat{A}_{AB} \cdot R_{Bj} \\ \chi_2(\hat{A}_{ij})_{R(\hat{G})} &= A_j^i(G_i \otimes G^j) = R_{jA}^T \cdot \hat{A}_{AB} \cdot R_{Bj} \\ \chi_3(\hat{A}_{ij})_{R(\hat{G})} &= A_i^j(G_j \otimes G^i) = R_{iA}^T \cdot \hat{A}_{AB} \cdot R_{Bj}\end{aligned}$$

El push forward de un tensor espacial \hat{a} de la configuración $\{\hat{g}_i\} \rightarrow \{g_i\}$ será

$$\begin{aligned}\chi(\hat{a}_{ij})_{R(\hat{g})} &= \hat{a}_{ij}(g^i \otimes g^j) = R_{ik} \cdot \hat{a}_{kj} \cdot R_{jl}^T \\ \chi_1(\hat{a}_{ij})_{R(\hat{g})} &= \hat{a}^{ij}(g_i \otimes g_j) = R_{ik} \cdot \hat{a}_{kj} \cdot R_{jl}^T \\ \chi_2(\hat{a}_{ij})_{R(\hat{g})} &= \hat{a}_j^i(g_i \otimes g^j) = R_{ik} \cdot \hat{a}_{kj} \cdot R_{jl}^T \\ \chi_3(\hat{a}_{ij})_{R(\hat{g})} &= \hat{a}_i^j(g_j \otimes g^i) = R_{ik} \cdot \hat{a}_{kj} \cdot R_{jl}^T\end{aligned}$$

El pull-back es

$$\begin{aligned}\chi^{-1}(\mathbf{a}_{ij})_{R(g)} &= \mathbf{a}_{ij}(\hat{\mathbf{g}}^i \otimes \hat{\mathbf{g}}^j) = \mathbf{R}_{ik}^T \cdot \hat{\mathbf{a}}_{kj} \cdot \mathbf{R}_{jl} \\ \chi_1^{-1}(\mathbf{a}_{ij})_{R(g)} &= \mathbf{a}^{ij}(\hat{\mathbf{g}}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}_j) = \mathbf{R}_{ik}^T \cdot \hat{\mathbf{a}}_{kj} \cdot \mathbf{R}_{jl} \\ \chi_2^{-1}(\mathbf{a}_{ij})_{R(g)} &= \mathbf{a}_j^i(\hat{\mathbf{g}}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}^j) = \mathbf{R}_{ik}^T \cdot \hat{\mathbf{a}}_{kj} \cdot \mathbf{R}_{jl} \\ \chi_3^{-1}(\mathbf{a}_{ij})_{R(g)} &= \mathbf{a}_j^i(\hat{\mathbf{g}}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}^j) = \mathbf{R}_{ik}^T \cdot \hat{\mathbf{a}}_{kj} \cdot \mathbf{R}_{jl}\end{aligned}$$

Derivada de Lie temporal

La derivada temporal de Lie, es un concepto de análisis tensorial que permite distinguir cambios de alguna función tensorial en relación con los cambios que suceden en esa misma entidad excluyendo aquellos devenidos por procesos de movimiento y/o configuración. En términos de las operaciones pull-back y push-forward, la derivada Lie de un vector: \mathbf{v}_j y de un tensor \mathbf{a}_{jk} se escribe:

$$\mathbf{L}_v \mathbf{v}_j(t) = \chi_* \left\{ \frac{d}{dt} [\chi_*^{-1}(\mathbf{v}(t))] \right\} \quad ; \quad \mathbf{L}_v \mathbf{a}_{jk}(t) = \chi_* \left\{ \frac{d}{dt} [\chi_*^{-1}(\mathbf{a}_{jk}(t))] \right\}$$

Calculo de la derivada de lie temporal de un tensor espacial

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v \mathbf{a}_{jk}(t) &= \chi_* \left\{ \frac{d}{dt} [\chi_*^{-1}(\mathbf{a}_{jk}(t))] \right\} = \mathbf{F}_{jA}^{-T} \left\{ \frac{d}{dt} \{ \mathbf{F}_{Al}^T \cdot \mathbf{a}_{lm}(t) \cdot \mathbf{F}_{mB} \} \right\} \mathbf{F}_{Bk}^{-1} \\ \mathbf{L}_v \mathbf{a}_{jk}(t) &= \mathbf{F}_{jA}^{-T} \{ \dot{\mathbf{F}}_{Al}^T \cdot \mathbf{a}_{lm} \cdot \mathbf{F}_{mB} + \mathbf{F}_{Al}^T \cdot \dot{\mathbf{a}}_{lm}(t) \cdot \mathbf{F}_{mB} + \mathbf{F}_{Al}^T \cdot \mathbf{a}_{lm} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{mB} \} \mathbf{F}_{Bk}^{-1} \\ \mathbf{L}_v \mathbf{a}_{jk}(t) &= \mathbf{F}_{jA}^{-T} \{ \mathbf{F}_{Al}^T \mathbf{I}_{ll}^T \cdot \mathbf{a}_{lm} \cdot \mathbf{F}_{mB} + \mathbf{F}_{Al}^T \cdot \dot{\mathbf{a}}_{lm} \cdot \mathbf{F}_{mB} + \mathbf{F}_{Al}^T \cdot \mathbf{a}_{lm} \cdot \mathbf{I}_{mm} \mathbf{F}_{mB} \} \mathbf{F}_{Bk}^{-1} \\ \mathbf{L}_v \mathbf{a}_{jk}(t) &= \mathbf{I}_{jl}^T \cdot \mathbf{a}_{lk} + \dot{\mathbf{a}}_{jk} + \mathbf{a}_{jm} \cdot \mathbf{I}_{mk}\end{aligned}$$

Las derivadas Lie para expresiones co-rotadas serán

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v \mathbf{a}_{jk}(t) &= \chi_* \left\{ \frac{d}{dt} [\chi_*^{-1}(\mathbf{a}_{jk}(t))] \right\} = \mathbf{R}_{jA} \left\{ \frac{d}{dt} [\mathbf{R}_{Al}^T \cdot \mathbf{a}_{lm}(t) \cdot \mathbf{R}_{mB}] \right\} \mathbf{R}_{Bk}^T \\ \mathbf{L}_v \mathbf{a}_{jk}(t) &= \dot{\mathbf{a}}_{jk} - \boldsymbol{\Omega}_{jl} \cdot \mathbf{a}_{lk} + \mathbf{a}_{jl} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{lk} \quad / \quad \boldsymbol{\Omega}_{jl} = \dot{\mathbf{R}}_{jA} \cdot \mathbf{R}_{Al} = -\mathbf{R}_{lA} \dot{\mathbf{R}}_{Aj}\end{aligned}$$

APÉNDICE D

Formulación lagrangiana de la elastodinámica

Definimos una densidad lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{L}(u_j, \dot{u}_j, u_{j,k}, \dot{u}_{j,k}) = (\rho/2)\dot{u}_j(\vec{x}, t)\dot{u}_k(\vec{x}, t) - (1/2)u_{j,k}(\vec{x}, t)C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - (1/2)\epsilon_{jk}^*(\vec{x}, t)S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t)$$

Y el lagrangiano

$$S(t) = \frac{1}{2} \iiint_V d^3x \dot{u}_j(\vec{x}, t)\rho\dot{u}_k(\vec{x}, t) - \frac{1}{2} \iiint_V d^3x u_{j,k}(\vec{x}, t)C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) - \frac{1}{2} \iiint_V d^3x \epsilon_{jk}^*(\vec{x}, t)S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t)$$

Utilizamos el principio de Hamilton obteniendo

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt S(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iiint_V d^3x \rho F_j^e \delta u_j(\vec{x}, t) \right\} + \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iiint_{V-V_{in}} d^3x S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \delta u_j(\vec{x}, t) \right\} + \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \oint \partial \Gamma_j \delta u_j(\vec{x}, t) \right\} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \oint \partial \Gamma_{in} t_j^m(\vec{x}, t) \delta u_j(\vec{x}, t) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iiint_V d^3x \{ C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) - \rho \partial_t^2 u_k(\vec{x}, t) + \rho F_k^e(\vec{x}, t) + F_j^m(\vec{x}, t) \} \right\} \delta u_j(\vec{x}, t) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \partial \Gamma_1 dS \{ t_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \} \delta u_j(\vec{x}, t) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \partial \Gamma_{in} dS \{ S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm}^*(\vec{x}, t) + C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \} \delta u_j(\vec{x}, t) = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento, las condiciones iniciales y de borde asociadas son:

$$\begin{aligned}
 & \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{jklm}^e u_{l,mk}(\vec{x}, t) = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \\
 & u_k(\vec{x}, 0) = u_j^0 / u_j^0 \in (H_0^1(D_k))^3 \\
 & \partial_t u_k(\vec{x}, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \\
 & -C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = -S_{jklm}^{Es} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} \\
 & -C_{jklm}^e u_{l,m}(\vec{x}, t) \hat{n}_k \Big|_{\partial\Gamma_1} = t_j \Big|_{\partial\Gamma_1} / t_j \in (L^2(\partial\Gamma_1))^3 \\
 & C_{jklm}^e, S_{jklm}^{Es} \in V^{3 \times 3} \quad ; \quad C_{jklm}^e = C_{kjl m}^e = C_{j k m l}^e = C_{l m j k}^e \\
 & S_{jklm}^{Es} = S_{kjl m}^{Es} = S_{j k m l}^{Es} \quad ; \quad C_{jklm}^e \xi_{jk} \xi_{lm} > a_0 \xi_{jk} \xi_{jk} \quad ; \quad a_0 \in R_0^+ \\
 & S_{jklm}^{Es} \bar{\xi}_{jk} \bar{\xi}_{lm} > b_0 \bar{\xi}_{jk} \bar{\xi}_{jk} \quad ; \quad b_0 \in R_0^+ \quad ; \quad \epsilon_{lm}^* \text{--- residual strain} \\
 & \xi_{jk} \in F(C^e) \quad ; \quad \bar{\xi}_{jk} \in F(S^{Es})
 \end{aligned}$$

Definimos una densidad lagrangiana poroelástica de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\epsilon_{jk}, \dot{\epsilon}_{jk}, p_a, p_b) = & (1/2) \rho \dot{u}_j(\vec{x}, t) \dot{u}_j(\vec{x}, t) - (1/2) \epsilon_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^e : \epsilon_{lm}(\vec{x}, t) - \\
 & - (1/2) \dot{\epsilon}_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^v : \dot{\epsilon}_{lm}(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a : \epsilon_{jk}(\vec{x}, t) p_a(\vec{x}, t) - \\
 & - a_1 u_j \cdot S_{jklm} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^b : \epsilon_{jk}(\vec{x}, t) p_b(\vec{x}, t) + \\
 & + \xi V_1(p_a, p_b) + p_b(\vec{x}, t) \{ s_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t))_{,j} - \\
 & - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a \dot{p}_{a,k}(\vec{x}, t))_{,j} + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jk}^a : \dot{\epsilon}_{jk}(\vec{x}, t) - h_a(\vec{x}, t) \} + \\
 & + p_a(\vec{x}, t) \{ s_b \partial_t p_b(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^b p_{b,k}(\vec{x}, t))_{,j} - \\
 & - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^b \dot{p}_{b,k}(\vec{x}, t))_{,j} + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{jk}^b : \dot{\epsilon}_{jk}(\vec{x}, t) - h_b(\vec{x}, t) \}
 \end{aligned}$$

La acción será:

$$\begin{aligned}
 S = & \iiint_{V_s} dV_s \{ (1/2) \rho \dot{u}_j(\vec{x}, t) \dot{u}_j(\vec{x}, t) - (1/2) \epsilon_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^e : \epsilon_{lm}(\vec{x}, t) - \\
 & - (1/2) \dot{\epsilon}_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^v : \dot{\epsilon}_{lm}(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a : \epsilon_{jk}(\vec{x}, t) p_a(\vec{x}, t) - \\
 & - a_1 u_j \cdot S_{jklm} \epsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^b : \epsilon_{jk}(\vec{x}, t) p_b(\vec{x}, t) \} + \\
 & + \iiint_{V_s} dV_s \{ \xi V_1(p_a, p_b) + p_b(\vec{x}, t) \{ s_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t))_{,j} - \\
 & - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a \dot{p}_{a,k}(\vec{x}, t))_{,j} + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jk}^a : \dot{\epsilon}_{jk}(\vec{x}, t) - h_a(\vec{x}, t) \} + \\
 & + p_a(\vec{x}, t) \{ s_b \partial_t p_b(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^b p_{b,k}(\vec{x}, t))_{,j} - \\
 & - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^b \dot{p}_{b,k}(\vec{x}, t))_{,j} + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{jk}^b : \dot{\epsilon}_{jk}(\vec{x}, t) - h_b(\vec{x}, t) \} \}
 \end{aligned}$$

Utilizando el principio de Hamilton se obtienen las ecuaciones del Capítulo 4, pág. 72.

Densidad de energía, para la poro-visco-elastodinámica, en la formulación de segundo

gradiente

$$\begin{aligned}
 W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b) = & (1/2)\rho \dot{u}_j(\vec{x}, t) \cdot \dot{u}_j(\vec{x}, t) - (1/2)\rho l_1^2 \dot{u}_{j,kk} \cdot \dot{u}_{j,kk} + \\
 & + (1/2)\varepsilon_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^e : \varepsilon_{lm}(\vec{x}, t) - (l_1^2/2)\hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^e : \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{lm}(\vec{x}, t) + \\
 & + (1/2)\dot{\varepsilon}_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^v : \dot{\varepsilon}_{lm}(\vec{x}, t) - (l_1^2/2)\hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}(\vec{x}, t) : C_{jklm}^v : \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{lm}(\vec{x}, t) + \\
 & + \alpha_1 \mathbf{M}_{jk}^a : (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \varepsilon_{jk}(\vec{x}, t) p_a(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{jk}^b : (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \varepsilon_{jk}(\vec{x}, t) p_b(\vec{x}, t) + \\
 & + \xi V_1(p_a, p_b) - a_1 u_j \cdot \mathbf{S}_{jklm} (1 - l_1^2 \hat{\nabla}^2) \varepsilon_{lm,k}^*(\vec{x}, t) + \\
 & + p_b(\vec{x}, t) \{ s_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^a p_{a,k}(\vec{x}, t))_{,j} - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^a \dot{p}_{a,k}(\vec{x}, t))_{,j} \} + \\
 & + \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{jk}^a : \dot{\varepsilon}_{jk}(\vec{x}, t) - h_a(\vec{x}, t) \} + p_a(\vec{x}, t) \{ s_b \partial_t p_b(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{jk}^b p_{b,k}(\vec{x}, t))_{,j} - \\
 & - (\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^b \dot{p}_{b,k}(\vec{x}, t))_{,j} + \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{jk}^b : \dot{\varepsilon}_{jk}(\vec{x}, t) - h_b(\vec{x}, t) \}
 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Euler Lagrange para los campos

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial \dot{u}_j} \right\} + \\
 + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial \dot{u}_{j,kk}} \right\} \\
 + \left\{ \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial \varepsilon_{jk}} \right\}_{,k} - \\
 - \left\{ \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial (\hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk})} \right\}_{,k} + \\
 + \left\{ \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial \dot{\varepsilon}_{jk}} \right\}_{,k} - \\
 - \left\{ \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial (\hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk})} \right\}_{,k} \\
 - \left\{ \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial u_j} \right\} = 0 \\
 \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial p_a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial W(\varepsilon_{jk}, \dot{\varepsilon}_{jk}, \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{jk}, \hat{\nabla}^2 \dot{\varepsilon}_{jk}, p_a, p_b, \dot{u}_j, u_j)}{\partial p_b} = 0
 \end{aligned}$$

APÉNDICE E

Teorema de Noether

Teorema de Noether para un campo escalar

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t dt \left\{ \iiint_{V_k} d^3x' \{ \psi (\partial_t^2 \varphi - a^2 \hat{\nabla}^2 \varphi) - \varphi (\partial_t^2 \psi - a^2 \hat{\nabla}^2 \psi) \} \right\} = \\ = -\delta \int_0^t dt \left\{ \iiint_{V_k} d^3x (q_k - J_k(\varphi, \psi))_{,k} \right\} / \psi = R\varphi \\ (q_k - J_k(\varphi, \psi)) = 0 \implies q_k = J_k(\varphi, \psi) \end{aligned}$$

Teorema de Noether para un campo vectorial de segundo gradiente

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t dt \left\{ \iiint_{V_k} d^3x' \{ u_j (\rho \partial_t^2 H v_j - C_{jklm}^e H v_{l,mk}) - \right. \\ \left. - v_j (\rho \partial_t^2 H u_j - C_{jklm}^e H u_{l,mk} - \rho \bar{f}_j) \} \right\} = \\ = \delta \int_0^t dt \left\{ \iiint_{V_k} d^3x (\rho \bar{f} + S_{jklm} \epsilon_{lm,k}^*)_{,j} \right\} \implies \rho \bar{f}_j = -S_{jklm} \epsilon_{lm,k}^* \\ v_j = T_{jlk} u_{l,k} \quad ; \quad v_j = R_{jk} u_k \quad H \equiv 1 - l_M^2 \hat{\nabla}^2 \end{aligned}$$

APÉNDICE F

Tensores antisimétricos para la determinación de ecuaciones de evolución

A partir de un vector covariante $u_i(x, t)$, se obtiene el rotacional en la forma:

$$\text{rot } u_i(\vec{x}, t) = \varepsilon_{ijk} u_{k,j}(\vec{x}, t) = \varepsilon_{ijk} r_{kj}(\vec{x}, t) \Rightarrow r_{kj}(\vec{x}, t) = u_{k,j}(\vec{x}, t) - u_{j,k}(\vec{x}, t)$$

$r_{ij}(\vec{x}, t)$ es un tensor de segundo orden covariante antisimétrico. La divergencia de $r_{ij}(\vec{x}, t)$ es:

$$r_{ij,j}(\vec{x}, t) = u_{i,jj}(\vec{x}, t) - u_{j,ij}(\vec{x}, t)$$

El primer término del segundo miembro puede identificarse con el laplaciano, de modo que podemos construir un operador vectorial hiperbólico de segundo orden, la ecuación de movimiento y el problema de Cauchy asociados a este campo vectorial se escriben de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - u_{i,jj}(\vec{x}, t) &= -u_{j,ij}(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \\ u_j(x, 0) &= u_j^0 / u_j^0 \in (L^2(D_k))^3 ; \partial_t u_j(x, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 \end{aligned}$$

Representación integral de la solución

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= \iiint_{V_k} d^3 x' g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t) \{ \partial_t u_k(\vec{x}, 0) g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t) - u_k(\vec{x}, 0) \partial_t g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t) \} - \\ &\quad - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_k} d^3 x g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') u_{j,ij}(\vec{x}', t') \right\} \end{aligned}$$

A partir del anterior tensor covariante antisimétrico de segundo orden construimos su rotacional en la forma:

$$r_{jkl} = (u_{j,k}(\vec{x}, t))_{,l} + (u_{k,l}(\vec{x}, t))_{,j} + (u_{l,j}(\vec{x}, t))_{,k}$$

Contrayéndolo respecto de uno de sus índices obtenemos

$$r_{jkk} = u_{j,kk}(\vec{x}, t) + u_{k,kj}(\vec{x}, t) + u_{k,jk}(\vec{x}, t)$$

De nuevo primer término del segundo miembro puede identificarse con el laplaciano, de modo que podemos construir un operador vectorial hiperbólico de segundo orden, la ecuación de movimiento y el problema de Cauchy asociado se escriben en la manera siguiente

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - u_{j,kk}(\vec{x}, t) &= f_j(\vec{x}, t) ; u_{k,kj}(\vec{x}, t) = -u_{k,jk}(\vec{x}, t) \\ u_j(x, 0) &= u_j^0 / u_j^0 \in (L^2(D_k))^3 ; \partial_t u_j(x, 0) = w_j^0 / w_j^0 \in (L^2(D_k))^3 ; f_j \in (L^2(R_k))^3 \end{aligned}$$

Donde la condición de contracción sobreviene debido al carácter antisimétrico del tensor original.

Representación integral de la solución:

$$u_i(x, t) = \iiint_{V_k} d^3x' g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t) \{ \partial_t u_k(\vec{x}, 0) g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t) - u_k(\vec{x}, 0) \partial_t g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t) \} - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_k} d^3x g_{ik}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') f_k(\vec{x}', t') \right\}$$

Definimos las siguientes operaciones para tensores antisimétricos covariantes

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } u_i) &= \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{kmn} u_{m,n}(\vec{x}, t))_{,j} = \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{kmn} r_{mnj}(\vec{x}, t)) \\ r_{mnj}(\vec{x}, t) &= u_{ij,k}(\vec{x}, t) + u_{jk,i}(\vec{x}, t) + u_{ki,j}(\vec{x}, t) \\ \text{rot}(\text{rot } u_{ij}) &= \varepsilon_{ilk} (\varepsilon_{kmp} u_{jp,m}(\vec{x}, t))_{,l} = \varepsilon_{ilk} (\varepsilon_{kmp} r_{jp,ml}(\vec{x}, t)) \\ r_{ijkm}(\vec{x}, t) &= u_{ijk,m}(\vec{x}, t) - u_{jkm,i}(\vec{x}, t) + u_{kmi,j}(\vec{x}, t) - u_{mij,k}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Definimos las siguientes operaciones para tensores mixtos antisimétricos covariantes

$$\begin{aligned} \text{rot } P_{iA} &= \varepsilon_{ijk} P_{kA,j} = \varepsilon_{ijk} p_{kAj}(\vec{x}, t) \\ p_{kAj}(\vec{x}, t) &= P_{kA,j}(\vec{x}, t) + P_{Aj,k}(\vec{x}, t) + P_{jk,A}(\vec{x}, t) \\ \text{rot}(\text{rot } P_{iA}) &= \varepsilon_{ilk} (\varepsilon_{kmp} P_{pA,m}(\vec{x}, t))_{,l} = \varepsilon_{ilk} (\varepsilon_{kmp} p_{pAml}(\vec{x}, t)) \\ p_{iAk m}(\vec{x}, t) &= P_{iA,k m}(\vec{x}, t) - P_{Ak,mi}(\vec{x}, t) + P_{km,iA}(\vec{x}, t) - P_{mi,Ak}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

El rotacional de un tensor de segundo orden antisimétrico se escribe:

$$\begin{aligned} B_{kp mn} &= (P_{kp,m}(\vec{x}, t))_{,n} - (P_{pm,n}(\vec{x}, t))_{,k} + (P_{mn,k}(\vec{x}, t))_{,p} - (P_{nk,p}(\vec{x}, t))_{,m} \\ B_{kp nn} &= P_{kp,nn}(\vec{x}, t) - P_{pn,nk}(\vec{x}, t) + P_{nn,kp}(\vec{x}, t) - P_{nk,pn}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Contrayendo respecto de un par de índices y aplicando la condición de antisimetría tendríamos

$$B_{kp nn} = P_{kp,nn}(\vec{x}, t) + P_{nn,kp}(\vec{x}, t) \quad ; \quad P_{pn,nk}(\vec{x}, t) = -P_{nk,pn}(\vec{x}, t)$$

La ecuación de movimiento y condiciones de Cauchy serán:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 P_{jk}(\vec{x}, t) - P_{jk,nn}(\vec{x}, t) - P_{nn,jk}(\vec{x}, t) &= 0 \text{ en } R_k \\ P_{jk}(\vec{x}, 0) = P_{jk}^0 / P_{jk}^0 &\in (H_0^1(D_k))^{3 \times 3} ; \partial_t P_{jk}(\vec{x}, 0) = Q_{jk}^0 / Q_{jk}^0 \in (L^2(D_k))^{3 \times 3} \\ P_{pn,nk}(\vec{x}, t) &= -P_{nk,pn}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Representación integral de la solución para un campo tensorial covariante antisimétrico

$$\begin{aligned} P_{ij}(x, t) &= \iiint_{V_k} d^3x' g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t) \{ \partial_t P_{kl}(\vec{x}, 0) g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t) - \\ &\quad - P_{kl}(\vec{x}, 0) \partial_t g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t) \} - \\ &\quad - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_k} d^3x g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') P_{nn,kl}(\vec{x}', t') \right\} \\ P_{pn,nk}(\vec{x}, t) &= -P_{nk,pn}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Respecto de un tensor mixto antisimétrico:

$$p_{iAkm}(\vec{x}, t) \equiv P_{iA,km}(\vec{x}, t) - P_{Ak,mi}(\vec{x}, t) + P_{km,iA}(\vec{x}, t) - P_{mi,Ak}(\vec{x}, t)$$

Contrayendo respecto dos de sus índices:

$$\begin{aligned} p_{iAkk}(\vec{x}, t) &\equiv P_{iA,kk}(\vec{x}, t) - P_{Ak,ki}(\vec{x}, t) + P_{kk,iA}(\vec{x}, t) - P_{ki,Ak}(\vec{x}, t) \\ P_{Ak,ki}(\vec{x}, t) + P_{ki,Ak}(\vec{x}, t) &= 0 \end{aligned}$$

En la formulación de Lagrange tendremos la ecuación de movimiento y sus condiciones iniciales asociadas:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 P_{iA}(\vec{x}, t) - P_{iA,kk}(\vec{x}, t) - P_{kk,iA}(\vec{x}, t) &= 0 \quad \text{en } R_k \\ P_{iA}(\vec{x}, 0) = P_{iA}^0 / P_{iA}^0 &\in (H_0^1(D_k))^{3 \times 3} ; \quad \partial_t P_{iA}(\vec{x}, 0) = Q_{iA}^0 / Q_{iA}^0 \in (L^2(D_k))^{3 \times 3} \end{aligned}$$

Representación integral de solución:

$$\begin{aligned} P_{iA}(\vec{x}, t) &= \iiint_{V_k} d^3x' g_{iAkB}(\vec{x} - \vec{x}', t) \{ \partial_t P_{kB}(\vec{x}, 0) g_{iAkB}(\vec{x} - \vec{x}', t) - \\ &\quad - P_{kB}(\vec{x}, 0) \partial_t g_{iAkB}(\vec{x} - \vec{x}', t) \} - \\ &\quad - \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_k} d^3x g_{iAkB}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') P_{nn,kB}(\vec{x}', t') \right\} \\ P_{pA,nk}(\vec{x}, t) &= -P_{nk,Ap}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Derivada covariante de un vector

Como es sabido las derivadas parciales ordinarias de un vector no son componentes de un tensor en general, si para el caso cartesiano, lo mismo ocurre con las derivadas de cualquier tensor, sus derivadas ordinarias no son componentes de ningún tensor. Se presenta entonces, el problema de ver si es posible generalizar la operación de derivación parcial, de manera que, aplicada a tensores, de como resultado nuevos tensores. A esta operación se la llama *derivación covariante*. La condición esencial que se impone a esta derivación covariante, a efectos de que no difiera mucho del cálculo diferencial clásico es la siguiente

Postulado:

Para la derivación de un producto debe valer la misma regla que para la derivación ordinaria, con este supuesto en mente se propone, se demuestra que tal expresión tiene la forma siguiente, para un vector covariante $u_j(\vec{x}, t)$

$$u_{j;k}(\vec{x}, t) = u_{j,k}(\vec{x}, t) - \Gamma_{kj}^h u_h(\vec{x}, t)$$

Donde Γ_{kj}^h se denomina conexión afín del espacio, estas no son tensores.

Definimos el tensor de deformaciones en la forma:

$$\epsilon_{jk}(\vec{x}, t) = u_{j;k}(\vec{x}, t) - u_{k;j}(\vec{x}, t)$$

Finalmente obtenemos

$$\epsilon_{jk}(x, t) = u_{j,k} - u_{k,j} + \Gamma_{kj}^i u_i - \Gamma_{jk}^i u_i = u_{j,k} - u_{k,j} - T_{kj}^i u_i$$

Donde $T_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i$ es el tensor de torsión del espacio.

Para el tensor simétrico de tensiones tendremos

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \epsilon_{jk} = C_{ijkl}^e u_{l,k} - C_{ijkl}^e T_{kl}^m u_m$$

La ecuación de movimiento será:

$$\rho \partial_t^2 u_j(\vec{x}, t) - C_{ijkl}^e u_{l,kj} = -(C_{ijkl}^e T_{kl}^m u_m)_{,j}$$

Es la fuerza configuracional de tipo estrictamente geométrico

$$f_j^c = -(C_{ijkl}^e T_{kl}^m u_m)_{,j}$$

La derivada covariante del tensor de tensiones puede escribirse en la forma

$$\sigma_{ij;k}(x, t) = \sigma_{ij,k} - \Gamma_{ik}^h \sigma_{hj} - \Gamma_{jk}^h \sigma_{ih}$$

Así que la ecuación de movimiento asociada a este tensor será:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_j(x, t) - \sigma_{ij,k} + \Gamma_{ik}^h \sigma_{hj} + \Gamma_{jk}^m \sigma_{im} &= 0 \\ \rho \partial_t^2 u_j(x, t) - \sigma_{ij,j}(u) &= -(\Gamma_{ij}^h \sigma_{hj} + \Gamma_{jj}^m \sigma_{im}) \end{aligned}$$

Donde la nueva fuerza configuracional ahora se escribe: $f_i^c = -(\Gamma_{ij}^h \sigma_{hj} + \Gamma_{jj}^m \sigma_{im})$

Igualando las dos expresiones obtenemos

$$\Gamma_{ij}^h \sigma_{hj} + \Gamma_{jj}^m \sigma_{im} = C_{ijkl}^e T_{kl}^m u_{m,j}$$

Luego obtenemos la expresión final para la fuerza configuracional en la forma:

$$f_h^c = \sigma_{hj,j} = C_{hpk}^e \{T_{kl}^n u_{n,m} (T_{pj}^m)^{-1}\} = -S_{hjn}^{Es} \epsilon_{nm,j}^*$$

Donde la última igualdad expresa la naturaleza del defecto llamada inclusión, como deformación residual, en la notación de Eshelby-Mura.

Finalmente, con un tensor simétrico de nueve componentes pueden escribirse ecuaciones de onda según las siguientes combinaciones

$$\sigma_{ij,kk} \quad ; \quad \sigma_{ip,pj} + \sigma_{jp,pi} \quad ; \quad \sigma_{pq,qp} \delta_{ij} \quad ; \quad \sigma_{kk,ij} \quad ; \quad \sigma_{ll,kk} \delta_{ij}$$

Cualquier combinación de estos tensores con coeficientes constantes pueden, igualada a cero o aun tensor energía impuso pueden servir como ecuaciones de campo, por ejemplo

$$\sigma_{ij,kk} + \tau \sigma_{kk,ij} = K_{ij}$$

K_{ij} : es el tensor de Eshelby no conservativo

Para el caso dinámico tendremos:

$$\begin{aligned} \xi \partial_t^2 \sigma_{ij}(\vec{x}, t) - \sigma_{ij,kk}(\vec{x}, t) - \tau_1 \sigma_{kk,ij}(\vec{x}, t) &= K_{ij}(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \quad ; \quad \xi, \tau_1 \in R_0^+ \\ \sigma_{jk}(\vec{x}, 0) &= \sigma_{jk}^0 / \sigma_{jk}^0 \in (H_0^1(D_k))^{3 \times 3} \quad ; \quad \partial_t \sigma_{jk}(\vec{x}, 0) = Q_{jk}^0 / Q_{jk}^0 \in (L^2(D_k))^{3 \times 3} \end{aligned}$$

Representación integral de solución:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = & \iiint_{V_k} d^3x' g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t) \{ \partial_t \sigma_{kl}(\vec{x}, 0) g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t) - \\ & - \sigma_{kl}(\vec{x}, 0) \partial_t g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t) \} + \\ & + \tau_1 \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_k} d^3x g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \sigma_{nn,kl}(\vec{x}', t') \right\} + \\ & + \int_0^t dt' \left\{ \iiint_{V_k} d^3x g_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \mathbf{K}_{kl}(\vec{x}', t') \right\}\end{aligned}$$

APÉNDICE G

Código de MATLAB

Código G.1: Propagación de ondas elásticas en un medio transversalmente isotrópico

```

1
2   close all;
3   clear all;
4
5   % Output periodicity in time steps
6   IT_DISPLAY = 50;
7   %% MODEL
8   % Model dimensions
9   nx = 401;
10  nz = 401;
11  dx = 10;    % [m]
12  dz = 10;    % [m]
13
14  % Anisotropic parameters parameters
15  % model I from Becache, Fauqueux and Joly, which is stable
16  co_aniso = 1e10 * ones(nz, nx);
17  c11 = 4.0 * co_aniso;
18  c13 = 3.8 * co_aniso;
19  c33 = 20.0 * co_aniso;
20  c44 = 2.0 * co_aniso;
21  rho = 4000.0 * ones(nz, nx);
22
23  vp = sqrt(c33(:) ./ rho(:));    % VP0
24  vs = sqrt(c44(:) ./ rho(:));    % VS0
25  %% TIME STEPPING
26  t_total = 1;                    % [sec] recording duration
27  dt = 0.8/(max(vp(:)) * sqrt(1.0/dx^2 + 1.0/dz^2));
28  nt = round(t_total/dt);         % number of time steps
29  t = [0:nt]*dt;
30  x = [0:nx-1]*dx;
31  z = [0:nz-1]*dz;
32  [X, Z] = meshgrid(x, z); % Crear matrices de coordenadas
33
34  CFL = max(vp(:))*dt * sqrt(1.0/dx^2 + 1.0/dz^2);
35  %% SOURCE
36  f0 = 10.0;                      % dominant frequency of the
    wavelet
37  t0 = 1.20 / f0;                  % excitation time
38  factor = 1e10;                   % amplitude coefficient
39  angle_force = 90.0;              % spatial orientation
40
41  jsrc = round(nz/2);              % source location along OZ
42  isrc = round(nx/2);              % source location along OX
43

```

```

44 a = pi*pi*f0*f0;
45 dt2rho_src = dt^2/rho(jsrc, isrc);
46 % Parámetros de la función seno
47 kx = 1;%2*pi/100;
48 kz = 1;%2*pi/100;
49
50 % matrices de tiempo, dimensiones de X y Z
51 [T, ~] = meshgrid(t, 1:size(X, 1));
52
53 % término fuente
54 source_term = factor * log((sin(-a*(t-t0))).^2);% fuente puntual de
    atenuación con log
55 % source_term = factor * (sin(-a*(t-t0))).^2;% fuente puntual de
    atenuación
56 % source_term = factor * sin(-a*(t-t0));% fuente puntual
57 % source_term = factor * sin(kx*X.^2 + kz*Z.^2) * tan(-a*(T-t0));%
    fuente extendida 1
58 % source_term = factor * tan(kx*X.^2 + kz*Z.^2) * sin(-a*(T-t0));%
    fuente extendida 2
59
60 force_x = sin(angle_force * pi / 180) * source_term * dt2rho_src /
    (dx * dz);
61 force_z = cos(angle_force * pi / 180) * source_term * dt2rho_src /
    (dx * dz);
62
63 min_wavelength = min(vs(vs>0.1))/f0;% shortest wavelength bounded by
    velocity in the air
64
65 %% ABSORBING BOUNDARY (ABS)
66 abs_thick = min(floor(0.20*nx), floor(0.20*nz));% thicknes of the
    layer
67 abs_rate = 0.3/abs_thick;% decay rate
68
69 lmargin = [abs_thick abs_thick];
70 rmargin = lmargin;
71 weights = ones(nz+2,nx+2);
72 for iz = 1:nz+2
73     for ix = 1:nx+2
74         i = 0;
75         j = 0;
76         k = 0;
77         if (ix < lmargin(1) + 1)
78             i = lmargin(1) + 1 - ix;
79         end
80         if (iz < lmargin(2) + 1)
81             k = lmargin(2) + 1 - iz;
82         end
83         if (nx - rmargin(1) < ix)
84             i = ix - nx + rmargin(1);
85         end
86         if (nz - rmargin(2) < iz)
87             k = iz - nz + rmargin(2);
88         end
89         if (i == 0 && j == 0 && k == 0)
90             continue
91         end
92         rr = abs_rate * abs_rate * double(i*i + j*j + k*k);
93         weights(iz, ix) = exp(-rr);

```

```

94     end
95     end
96
97 %% SUMMARY
98 fprintf('#####\n');
99 fprintf('2D elastic FDTD wave propagation in TI medium \nin
    displacement formulation with Cerjan(1985) \nboundary
    conditions\n');
100 fprintf('#####\n');
101 fprintf('Model:\n\t%d x %d\tgrid nz x nx\n\t%.1e x %.1e\t[m] dz x
    dx\n',nz, nx, dz,dx);
102 fprintf('\t%.1e x %.1e\t[m] model size\n',nx*dx, nz*dz);
103 fprintf('\t%.1e...%.1e\t c11\n', min(c11(:)), max(c11(:)));
104 fprintf('\t%.1e...%.1e\t c13\n', min(c13(:)), max(c13(:)));
105 fprintf('\t%.1e...%.1e\t c33\n', min(c33(:)), max(c33(:)));
106 fprintf('\t%.1e...%.1e\t c44\n', min(c44(:)), max(c44(:)));
107 fprintf('\t%.0f...%.0f\t[kg/m3] rho\n', min(rho(:)), max(rho(:)));
108 fprintf('Time:\n\t%.1e\t[sec] total\n\t%.1e\t\t\t\t\ttime steps\n
    ',t_total,dt,nt);
109 fprintf('Source:\n\t%.1e\t[Hz] dominant frequency\n\t%.1f\t[sec]
    index time\n',f0,t0);
110 fprintf('Other:\n\t%.1f\tCFL number\n', CFL);
111 fprintf('\t%.2f\t[m] shortest wavelength\n\t%d, %d\t points-per-
    wavelength OX, OZ\n', min_wavelength, floor(min_wavelength/dx),
    floor(min_wavelength/dz));
112 fprintf('#####\n');
113
114 %% ALLOCATE MEMORY FOR WAVEFIELD
115 ux3 = zeros(nz+2,nx+2);           % Wavefields at t
116 uz3 = zeros(nz+2,nx+2);
117 ux2 = zeros(nz+2,nx+2);           % Wavefields at t-1
118 uz2 = zeros(nz+2,nx+2);
119 ux1 = zeros(nz+2,nx+2);           % Wavefields at t-2
120 uz1 = zeros(nz+2,nx+2);
121 % Coefficients for derivatives
122 co_dxx = 1/dx^2;
123 co_dzz = 1/dz^2;
124 co_dxz = 1/(4.0 * dx * dz);
125 co_dzx = 1/(4.0 * dx * dz);
126 dt2rho=(dt^2)./rho;
127
128 %% Loop over TIME
129 tic;
130 for it = 1:nt
131     ux3 = zeros(size(ux2));
132     uz3 = zeros(size(uz2));
133     % Second-order derivatives
134     % Ux
135     dux_dxx = co_dxx * (ux2(2:end-1,1:end-2) - 2*ux2(2:end-1,2:end-1) +
        ux2(2:end-1,3:end));
136     dux_dzz = co_dzz * (ux2(1:end-2,2:end-1) - 2*ux2(2:end-1,2:end-1) +
        ux2(3:end,2:end-1));
137     dux_dxz = co_dxz * (ux2(1:end-2,3:end) - ux2(3:end,3:end) ...
        - ux2(1:end-2,1:end-2) + ux2(3:end,1:end-2));
138     dux_dzx = dux_dxz;
139     % Uz
140     duz_dxx = co_dxx * (uz2(2:end-1,1:end-2) - 2*uz2(2:end-1,2:end-1) +
        uz2(2:end-1,3:end));

```

```

142     duz_dzz = co_dzz * (uz2(1:end-2,2:end-1) - 2*uz2(2:end-1,2:end-1) +
143         uz2(3:end,2:end-1));
143     duz_dxz = co_dxz * (uz2(1:end-2,3:end) - uz2(3:end,3:end) ...
144     - uz2(1:end-2,1:end-2) + uz2(3:end,1:end-2));
145     duz_dzx = duz_dxz;
146
147     % Stress G (Términos de tensión no lineales)
148     sigmas_ux = c11 .* dux_dxx + c13 .* duz_dzx + c44 .* dux_dzz + c44
149     .* duz_dxz + nonlinear_term(ux2, uz2);
149     sigmas_uz = c44 .* dux_dzx + c44 .* duz_dxx + c13 .* dux_dxz + c33
150     .* duz_dzz + nonlinear_term(ux2, uz2);
151
151     % Campos de onda U(t) = 2*U(t-1) - U(t-2) + G dt2/rho;
152     ux3(2:end-1,2:end-1) = 2.0*ux2(2:end-1,2:end-1) - ux1(2:end-1,2:end
153     -1) + sigmas_ux.*dt2rho;
153     uz3(2:end-1,2:end-1) = 2.0*uz2(2:end-1,2:end-1) - uz1(2:end-1,2:end
154     -1) + sigmas_uz.*dt2rho;
154     % Add source term
155     ux3(jsrc, isrc) = ux3(jsrc, isrc) + force_x(it);
156     uz3(jsrc, isrc) = uz3(jsrc, isrc) + force_z(it);
157     % Exchange data between t-2 (1), t-1 (2) and t (3) and apply ABS
158     ux1 = ux2 .* weights;
159     ux2 = ux3 .* weights;
160     uz1 = uz2 .* weights;
161     uz2 = uz3 .* weights;
162     % Output
163     if mod(it, IT_DISPLAY) == 0
164         fprintf('Tiempo (paso): %d \t %.4f s\n', it, single(t(it)));
165         u=sqrt(ux3.^2 + uz3.^2);
166         imagesc(u); colorbar; colormap jet; xlabel('m'); ylabel('m');
167         title(['Fuentes extendidas']);
168         axis equal tight; drawnow;
169     end
170     end
171     toc; disp('End');
172     function nonlinear_term_result = nonlinear_term(ux, uz)
173     % término no lineal basado en la magnitud del campo de onda
174     nonlinear_term_result = ux^2 * uz^2; % Término cuadrático no lineal
175     nonlinear_term_result = sum(nonlinear_term_result(:)); % Sumar
176     sobre todas las dimensiones para obtener un escalar
176     end

```

Referencias Bibliográficas

- Aboudi, J., Arnold, S. M. y Bednarczyk, B. A. *Micromechanics of Composite Materials: A Generalized Multiscale Analysis Approach*. Butterworth-Heinemann, 2012.
- Abousleiman, Y., Cheng, A. H.-D., Jiang, C. y Roegiers, J.-C. A micromechanically consistent poro-viscoelasticity theory for rock mechanics applications. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, vol. 30, no. 7, pp. 1177–1180, 1993.
- Achenbach, J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier, 2016.
- Aifantis, E. On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 106, 1984.
- Aifantis, E. C. A proposal for continuum with microstructure. *Mechanics Research Communications*, vol. 5, no. 3, pp. 139–145, 1978.
- Aifantis, E. C. The physics of plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, vol. 3, no. 3, pp. 211–247, 1987.
- Aifantis, E. C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal of Engineering Science*, vol. 30, no. 10, pp. 1279–1299, 1992.
- Aifantis, E. C. Gradient Effects at Macro, Micro, and Nano Scales. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, vol. 5, no. 3, pp. 355–375, 1994.
- Aifantis, E. C. Update on a class of gradient theories. *Mechanics of Materials*, vol. 35, no. 3, pp. 259–280, 2003.
- Aifantis, E. C. A Personal View on Current Generalized Theories of Elasticity and Plastic Flow. En G. A. Maugin y A. V. Metrikine (Eds.), *Mechanics of Generalized Continua*, Advances in Mechanics and Mathematics, pp. 191–202. Springer, New York, NY, 2010.
- Aifantis, E. C. Chapter One - Internal Length Gradient (ILG) Material Mechanics Across Scales and Disciplines. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 49, pp. 1–110. Elsevier, 2016.
- Aivaliotis, A., Daouadji, A., Barbagallo, G., Tallarico, D., Neff, P. y Madeo, A. Microstructure-related Stoneley waves and their effect on the scattering properties of a 2D Cauchy/relaxed-micromorphic interface. *Wave Motion*, vol. 90, pp. 99–120, 2019.
- Albers, B., Krejci, P. y Rocca, E. Solvability of an unsaturated porous media flow problem with thermomechanical interaction. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 39, no. 9, pp. 2220–2238, 2016. ArXiv:1601.02435 [math].
- Alhasadi, M. F. y Federico, S. Relation between Eshelby stress and Eshelby fourth-order tensor within an ellipsoidal inclusion. *Acta Mechanica*, vol. 228, no. 3, pp. 1045–1069, 2017.

- Altan, B. S. y Aifantis, E. C. On Some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, vol. 8, no. 3, pp. 231–282, 1997.
- Altan, S. B. y Aifantis, E. C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity. *Scripta Metallurgica et Materialia*, vol. 26, no. 2, pp. 319–324, 1992.
- Andreaus, U., dell’Isola, F., Giorgio, I., Placidi, L., Lekszycki, T. y Rizzi, N. L. Numerical simulations of classical problems in two-dimensional (non) linear second gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*, vol. 108, pp. 34–50, 2016.
- Andrianov, I. V., Awrejcewicz, J. y Danishevskyy, V. *Linear and Nonlinear Waves in Microstructured Solids: Homogenization and Asymptotic Approaches*. CRC Press, Boca Raton, 2021.
- Angoshtari, A. y Yavari, A. Differential Complexes in Continuum Mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 216, no. 1, pp. 193–220, 2015.
- Askas, H. y Aifantis, E. C. Gradient Elasticity Theories in Statics and Dynamics - A Unification of Approaches. *International Journal of Fracture*, vol. 139, no. 2, pp. 297–304, 2006.
- Askas, H. y Aifantis, E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, no. 13, pp. 1962–1990, 2011.
- Askas, H., Bennett, T. y Aifantis, E. A new formulation and C0-implementation of dynamically consistent gradient elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, pp. 111–126, 2007.
- Askas, H., De Domenico, D., Xu, M., Gitman, I. M., Bennett, T. y Aifantis, E. C. Operator Splits and Multiscale Methods in Computational Dynamics. En A. Berezovski y T. Soomere (Eds.), *Applied Wave Mathematics II*, Mathematics of Planet Earth, pp. 239–255. Springer International Publishing, Cham, 2019.
- Askas, H. y Gitman, I. M. Review and Critique of the Stress Gradient Elasticity Theories of Eringen and Aifantis. En G. A. Maugin y A. V. Metrikine (Eds.), *Mechanics of Generalized Continua*, Advances in Mechanics and Mathematics, pp. 203–210. Springer, New York, NY, 2010.
- Askas, H. y Metrikine, A. V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure: Part 2: Static and dynamic response. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21, no. 4, pp. 573–588, 2002.
- Askas, H. y Metrikine, A. V. Higher-order continua derived from discrete media: continualisation aspects and boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, no. 1, pp. 187–202, 2005.
- Atkinson, C. y Leppington, F. G. The effect of couple stresses on the tip of a crack. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 13, no. 11, pp. 1103–1122, 1977.
- Balluffi, R. W. *Introduction to Elasticity Theory for Crystal Defects*. Cambridge University Press, 2012.
- Banerjee, B. *An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites*. CRC Press, 2011.
- Barnett, D. M. y Cai, W. Properties of the Eshelby tensor and existence of the equivalent ellipsoidal inclusion solution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 121, pp. 71–80, 2018.

- Barthélémy, J.-F., Giraud, A., Lavergne, F. y Sanahuja, J. The Eshelby inclusion problem in ageing linear viscoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 97-98, pp. 530–542, 2016.
- Bažant, Z. P. A Correlation Study of Formulations of Incremental Deformation and Stability of Continuous Bodies. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 38, p. 919, 1971.
- Beneyto, P. A., Di Rado, H. A., Mroginski, J. L. y Awruch, A. M. A versatile mathematical approach for environmental geomechanic modelling based on stress state decomposition. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 22, pp. 6880–6896, 2015.
- Bennett, K. C., Regueiro, R. A. y Borja, R. I. Finite strain elastoplasticity considering the Eshelby stress for materials undergoing plastic volume change. *International Journal of Plasticity*, vol. 77, pp. 214–245, 2016.
- Bensoussan, A. y Lions, J. L. Problemes de temps d'arret optimal et inequations variationnelles paraboliques. *Applicable Analysis*, vol. 3, no. 3, pp. 267–294, 1973.
- Berdichevsky, V. L. Continuum theory of dislocations revisited. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 18, no. 3, pp. 195–222, 2006.
- Berezovski, A. y Soomere, T. (Eds.). *Applied Wave Mathematics II. Mathematics of Planet Earth Ser.* Springer International Publishing AG, Cham, 2019.
- Berryman, J. G. Extension of Poroelastic Analysis to Double-Porosity Materials: New Technique in Microgeomechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, no. 8, pp. 840–847, 2002.
- Biezeno, C. B. y Hencky, H. On the general theory of elastic stability. En *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, vol. 31, pp. 569–592, 1928.
- Biot, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, vol. 12, no. 2, pp. 155–164, 1941.
- Biot, M. A. Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid. *Journal of Applied Physics*, vol. 26, pp. 182–185, 1955.
- Biot, M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 28, no. 2, pp. 168–178, 1956a.
- Biot, M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 28, no. 2, pp. 179–191, 1956b.
- Biot, M. A. *Mechanics of Incremental Deformations: Theory of Elasticity and Viscoelasticity of Initially Stressed Solids and Fluids, Including Thermodynamic Foundations and Applications to Finite Strain.* Wiley, 1965.
- Biot, M. A. y Temple, G. Theory of Finite Deformations of Porous Solids. *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 21, no. 7, pp. 597–620, 1972.
- Blanco, P. J., Sánchez, P. J., de Souza Neto, E. A. y Feijóo, R. A. The method of multiscale virtual power for the derivation of a second order mechanical model. *Mechanics of Materials*, vol. 99, pp. 53–67, 2016.

- Bloom, F. Ill-Posed Problems for the Partial-Integrodifferential Equations of Linear and Nonlinear Viscoelasticity. En *Ill-Posed Problems for Integrodifferential Equations in Mechanics and Electromagnetic Theory*, Studies in Applied and Numerical Mathematics, pp. 29–100. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981.
- Böhm, H. J. A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics. *ILSB Report / ILSB-Arbeitsbericht 206*, vol. 3, 1998.
- Bonet, J. y Wood, R. D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 2 ed., 2008.
- Bonfoh, N. y Sabar, H. Exact solution of Eshelby's inhomogeneity problem in strain gradient theory of elasticity and its applications in composite materials. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 117, pp. 1–26, 2023.
- Borja, R. I. (Ed.). *Multiscale and Multiphysics Processes in Geomechanics: Results of the Workshop on Multiscale and Multiphysics Processes in Geomechanics, Stanford, June 23-25, 2010*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.
- Borja, R. I. *Plasticity: Modeling & Computation*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- Borja, R. I. y Alarcón, E. A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 122, no. 1, pp. 145–171, 1995.
- Borja, R. I., Tamagnini, C. y Alarcón, E. Elastoplastic consolidation at finite strain part 2: finite element implementation and numerical examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 159, no. 1, pp. 103–122, 1998.
- Brown, T. S., Du, S., Eruslu, H. y Sayas, F.-J. Analysis of models for viscoelastic wave propagation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, vol. 3, no. 1, pp. 55–96, 2018.
- Budak, B. M., Samarski, A. A. y Tjonov, A. N. *Problemas de la física matemática*, vol. 1–2. Editorial Mir Moscú, 1984.
- Buryachenko, V. A. *Micromechanics of Heterogenous Materials*. Springer, Boston, MA, 2007.
- Buryachenko, V. A. *Local and nonlocal micromechanics of heterogeneous materials*. Springer, Cham, 2022.
- Bécache, E., Fauqueux, S. y Joly, P. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, vol. 188, no. 2, pp. 399–433, 2003.
- Carcione, J. M., Kosloff, D. y Kosloff, R. Wave-Propagation Simulation In An Elastic Anisotropic (Transversely Isotropic) Solid. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 41, no. 3, pp. 319–346, 1988.
- Carillo, S. y Giorgi, C. Non-Classical Memory Kernels in Linear Viscoelasticity. En M. F. El-Amin (Ed.), *Viscoelastic and Viscoplastic Materials*, cap. 13. IntechOpen London, 2016.
- Chandrasekharaiah, D. S. y Debnath, L. *Continuum Mechanics*. Elsevier, Academic Press, 1994.
- Cheng, A. H.-D. *Poroelasticity. Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Springer Cham, 2016.

- Cheng, A. H.-D. y Detournay, E. On singular integral equations and fundamental solutions of poroelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, no. 34, pp. 4521–4555, 1998.
- Chiriță, S. Modeling triple porosity under local thermal non-equilibrium. *Journal of Thermal Stresses*, vol. 43, no. 2, pp. 210–224, 2020.
- Chiriță, S., Ciarletta, M. y Tibullo, V. On the wave propagation in the time differential dual-phase-lag thermoelastic model. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 471, no. 2183, p. 20150400, 2015.
- Ciarlet, P. G. (Ed.). *Mathematical Elasticity Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. Academic Press, Elsevier, 1988.
- Ciarletta, M., Straughan, B. y Tibullo, V. Christov–Morro theory for non-isothermal diffusion. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 13, pp. 1224–1228, 2012.
- Cleja-Tigoiu, S. y Maugin, G. A. Eshelby's stress tensors in finite elastoplasticity. *Acta Mechanica*, vol. 139, no. 1, pp. 231–249, 2000.
- Colabella, L. *Diseño multiescala de estructuras porosas inspiradas en el hueso trabecular*. phdthesis, Universidad Nacional de Mar del Plata, 2018.
- Cosserat, E. y Cosserat, F. Sur la théorie de l'élasticité. Premier mémoire. En *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, vol. 10, pp. 11–116, 1896.
- Cosserat, E. y Cosserat, F. Sur la statique de la ligne déformable. *C. R. Acad. Sci., Paris*, vol. 145, pp. 1409–1412, 1907.
- Cosserat, E. y Cosserat, F. Sur la théorie des corps minces. *Compt. Rend*, vol. 146, pp. 169–172, 1908.
- Cosserat, E. y Cosserat, F. *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et fils, 1909.
- Courant, R. y Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1-2. Interscience Publishers, 1953.
- Coussy, O. *Poromechanics*. John Wiley & Sons, 2004.
- Coussy, O. *Mechanics and Physics of Porous Solids*. Wiley, 2010.
- Coussy, O., Dormieux, L. y Detournay, E. From mixture theory to biot's approach for porous media. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, no. 34, pp. 4619–4635, 1998.
- Cowin, S. C. y Goodman, M. A. A Variational Principle for Granular Materials. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 56, no. 7, pp. 281–286, 1976.
- Cowin, S. C. y Nunziato, J. W. Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, vol. 13, no. 2, pp. 125–147, 1983.
- Şuhubi, E. S. y Eringen, A. C. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, no. 4, pp. 389–404, 1964.

- Curtis, C. W., Dzhamay, A., Hereman, W. A. y Prinari, B. (Eds.). *Nonlinear wave equations*. Analytic and computational techniques; AMS Special Session, Nonlinear Waves and Integrable Systems, April 13-14, 2013, University of Colorado, Boulder, CO. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- Dascalu, C., Maugin, G. A. y Stolz, C. (Eds.). *Defect and Material Mechanics: Proceedings of the International Symposium on Defect and Material Mechanics (ISDMM), held in Aussois, France, March 25–29, 2007*. Springer Science & Business Media, 2008.
- De Domenico, D. y Askes, H. A new multi-scale dispersive gradient elasticity model with micro-inertia: Formulation and C0-finite element implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 108, no. 5, pp. 485–512, 2016a.
- De Domenico, D. y Askes, H. Computational aspects of a new multi-scale dispersive gradient elasticity model with micro-inertia. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 109, 2016b.
- De Domenico, D., Askes, H. y Aifantis, E. C. Gradient elasticity and dispersive wave propagation: Model motivation and length scale identification procedures in concrete and composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 158, pp. 176–190, 2019.
- De Leon, M., Epstein, M. y Jimenez, V. M. *Material Geometry: Groupoids In Continuum Mechanics*. World Scientific, 2021.
- de Souza Neto, E. A., Blanco, P. J., Sánchez, P. J. y Feijóo, R. A. An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. *Mechanics of Materials*, vol. 80, pp. 136–144, 2015.
- de Souza Neto, E. A. y Feijóo, R. A. Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid: Small and Large Strain Kinematical Formulation, LNCC R&D Report 16/2006, LNCC (National Laboratory for Scientific Computing), Brazil, 2006. *LNCC R&D Report*, 2006.
- dell'Isola, F. y Gavrilyuk, S. (Eds.). *Variational Models and Methods in Solid and Fluid Mechanics*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer Vienna, 2012.
- dell'Isola, F., Madeo, A. y Seppecher, P. Boundary conditions at fluid-permeable interfaces in porous media: A variational approach. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, no. 17, pp. 3150–3164, 2009.
- Dettmar, J. P. *Static and dynamic homogenization analyses of discrete granular and atomistic structures on different time and length scales*. Ph.D. thesis, Universität Stuttgart, 2006.
- Distler, J., Jafry, M., Karch, A. y Raz, A. Interacting fractons in 2+1-dimensional quantum field theory. *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 3, 2022.
- Dormieux, L., Kondo, D. y Ulm, F.-J. *Microporomechanics*. Wiley, 2006.
- Engelbrecht, J. y Berezovski, A. Reflections on mathematical models of deformation waves in elastic microstructured solids. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, vol. 3, pp. 43–82, 2015.
- Engelbrecht, J. y Pastrone, F. Waves in microstructured solids with nonlinearities in microscale. En *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences Physics Mathematics*, vol. 52, pp. 12–20. Estonian Academy Publishers, 2003.

- Epstein, M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2010.
- Epstein, M. y Elzanowski, M. *Material inhomogeneities and their evolution. A geometric approach*. Springer, 2007.
- Epstein, M. y Maugin, G. A. The energy-momentum tensor and material uniformity in finite elasticity. *Acta Mechanica*, vol. 83, no. 3, pp. 127–133, 1990.
- Epstein, M. y Maugin, G. A. On the geometrical material structure of anelasticity. *Acta Mechanica*, vol. 115, no. 1, pp. 119–131, 1996.
- Epstein, M. y Maugin, G. A. Notions of material uniformity and homogeneity. En T. Tatsumi, E. Watanabe y T. Kambe (Eds.), *Theoretical and Applied Mechanics (Proceedings ICTAM'96, Kyoto)*, pp. 201–215. Elsevier, Amsterdam, 1997.
- Eringen, A. C. Mechanics of Micromorphic Continua. En E. Kröner (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*, IUTAM Symposia, pp. 18–35. Springer, Berlin, Heidelberg, 1968.
- Eringen, A. C. *Microcontinuum Field Theories I. Foundations and solids*. Springer, New York, 1999a.
- Eringen, A. C. Theory of Micropolar Elasticity. En A. C. Eringen (Ed.), *Microcontinuum Field Theories*, pp. 101–248. Springer, New York, NY, 1999b.
- Eringen, A. C. *Microcontinuum Field Theories II. Fluent Media*. Springer, New York, 2001.
- Eringen, A. C. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer New York, 2002.
- Eringen, A. C. y Şuhubi, E. S. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, no. 2, pp. 189–203, 1964.
- Eringen, A. C. y Şuhubi, E. S. *Elastodynamics Volume I: Finite Motions*. Academic Press, 1974.
- Eringen, A. C. y Şuhubi, E. S. *Elastodynamics Volume II: Linear Theory*. Academic Press, 1975.
- Eringen, A. C. y Maugin, G. A. *Electrodynamics of Continua II*. Springer New York, 1990.
- Erofeyev, V. I. *Wave Processes in Solids with Microstructure*. Series on Stability, Vibration and Control of Systems, Series A. World Scientific, Singapore, 2003.
- Eshelby, J. D. The Force on an Elastic Singularity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, vol. 244, no. 877, pp. 87–112, 1951.
- Eshelby, J. D. The Equation of Motion of a Dislocation. *Physical Review*, vol. 90, no. 2, pp. 248–255, 1953.
- Eshelby, J. D. The Continuum Theory of Lattice Defects. En F. Seitz y D. Turnbull (Eds.), *Solid State Physics*, vol. 3, pp. 79–144. Academic Press, 1956.
- Eshelby, J. D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241, no. 1226, pp. 376–396, 1957.
- Eshelby, J. D. The twist in a crystal whisker containing a dislocation. *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, vol. 3, no. 29, pp. 440–447, 1958.

- Eshelby, J. D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 252, no. 1271, pp. 561–569, 1959.
- Eshelby, J. D. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, vol. 5, no. 3, pp. 321–335, 1975.
- Eshelby, J. D. Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics. En J. M. Ball, D. Kinderlehrer, P. Podio-Guidugli y M. Slemrod (Eds.), *Fundamental Contributions to the Continuum Theory of Evolving Phase Interfaces in Solids*, pp. 82–119. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999.
- Eshelby, J. D. Elastic inclusions and inhomogeneities. En *Collected works of JD Eshelby*, pp. 297–350. Springer, 2006.
- Fu, L. S. y Mura, T. The Determination of the Elastodynamic Fields of an Ellipsoidal Inhomogeneity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, no. 2, pp. 390–396, 1983.
- Futhazar, G., Le Marrec, L. y Rakotomanana, L. R. Covariant gradient continua: Wave propagation within heterogeneous material. *Mechanics & Industry*, vol. 16, no. 1, p. 101, 2015.
- Ganghoffer, J.-F. y Pastrone, F. (Eds.). *Mechanics of Microstructured Solids 2: Cellular Materials, Fibre Reinforced Solids and Soft Tissues*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer, 2010.
- Gegelia, T. G. y Jentsch, L. Uniqueness Theorems in Linear Theory of Microporous Solids. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (Journal for Analysis and its Applications)*, vol. 13, no. 1, pp. 73–82, 1994.
- Germain, P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 25, no. 3, pp. 556–575, 1973.
- Germain, P. y Nayroles, B. (Eds.). *Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics: Joint Symposium IUTAM/IMU Held in Marseille, Sept. 1-6, 1975*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1976.
- Ghavanloo, E., Fazelzadeh, S. y Marotti de Sciarra, F. *Size-Dependent Continuum Mechanics Approaches: Theory and Applications*. Springer Tracts in Mechanical Engineering. Springer International Publishing, 2021.
- Ghavanloo, E., Rafii-Tabar, H. y Fazelzadeh, S. A. *Computational Continuum Mechanics of Nanoscopic Structures: Nonlocal Elasticity Approaches*. Springer Tracts in Mechanical Engineering. Springer International Publishing, 2019.
- Ghiba, I.-D. y Neff, P. Linear constrained Cosserat-shell models including terms up to $O(h^5)$: conditional and unconditional existence and uniqueness. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, vol. 74, no. 2, 2023.
- Goodman, M. A. y Cowin, S. C. A continuum theory for granular materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 44, no. 4, pp. 249–266, 1972.
- Gross, D., Kolling, S., Mueller, R. y Schmidt, I. Configurational forces and their application in solid mechanics. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 22, no. 5, pp. 669–692, 2003.

- Grubic, N., LeFloch, P. G. y Mardare, C. Mathematical elasticity theory in a Riemannian manifold, 2013.
- Gurtin, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- Gurtin, M. E. *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1993.
- Gurtin, M. E. The nature of configurational forces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 131, no. 1, pp. 67–100, 1995.
- Gurtin, M. E. *Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.
- Gurtin, M. E., Fried, E. y Anand, L. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.
- Gurtin, M. E. y Voorhees, P. W. The continuum mechanics of coherent two-phase elastic solids with mass transport. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 440, no. 1909, pp. 323–343, 1993.
- Gurtin, M. E. y Voorhees, P. W. The thermodynamics of evolving interfaces far from equilibrium. *Acta Materialia*, vol. 44, no. 1, pp. 235–247, 1996.
- Hadjesfandiari, A. R. y Dargush, G. F. Couple stress theory for solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, no. 18, pp. 2496–2510, 2011.
- Hahn, B. y Valentine, D. *Essential MATLAB For Engineers and Scientists*. Elsevier, 3ra ed., 2016.
- Han, Z. D. y Atluri, S. N. Eshelby Stress Tensor T: a Variety of Conservation Laws for T in Finite Deformation Anisotropic Hyperelastic Solid & Defect Mechanics, and the MLPG-Eshelby Method in Computational Finite Deformation Solid Mechanics-Part I. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 97, no. 1, pp. 1–34, 2014.
- Hao, L., Wei-fang, Z. y Gong-fu, L. On the method of equivalent inclusions in elastodynamics and the scattering fields of two ellipsoidal inhomogeneities. *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 6, no. 6, pp. 511–521, 1985.
- Hashin, Z. y Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, no. 2, pp. 127–140, 1963.
- Hetnarski, R. B. y Ignaczak, J. *The Mathematical Theory of Elasticity*. CRC Press, Boca Raton, 2da ed., 2013.
- Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, no. 4, pp. 213–222, 1965.
- Hörmander, L. Fourier integral operators. I. *Acta Mathematica*, vol. 127, no. 1, pp. 79–183, 1971.
- İeşan, D. Thermoelasticity of nonsimple materials. *Journal of Thermal Stresses*, vol. 6, no. 2-4, pp. 167–188, 1983.
- İeşan, D. Shock waves in micropolar elastic materials with voids. *Analele Stiintifice ale Universitatii Al. I. Cuza din Iasi Seria Noua Sectiunea la matematica*, vol. 3, pp. 177–186, 1985.

- Ieşan, D. On the torsion of inhomogeneous and anisotropic bars. *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 17, no. 8, pp. 848–859, 2012.
- Ito, K. y Kappel, F. *Evolution Equations And Approximations*. World Scientific, 2002.
- Jeffrey, A. y Engelbrecht, J. (Eds.). *Nonlinear Waves in Solids*. CISM International Centre for Mechanical Sciences Ser. Springer Wien, Vienna, 1994.
- Jiang, D. *Continuum Micromechanics. Theory and Application to Multiscale Tectonics*. Springer Cham, 2023.
- Jikov, V. V., Kozlov, S. M. y Oleinik, O. A. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1994.
- Joly, P. The mathematical model for elastic wave propagation. En N. A. Kampanis, V. Dougalis y J. A. Ekaterinaris (Eds.), *Effective computational methods for wave propagation*, Numerical Insights, pp. 385–424. Chapman & Hall/CRC, 2008.
- Kachanov, L. M. *Introduction to continuum damage mechanics*. Mechanics of Elastic Stability. Springer Dordrecht, 1986.
- Kachanov, M. y Sevostianov, I. *Micromechanics of Materials, with Applications*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing, Cham, 2018.
- Kanninen, M. F., Adler, W. F., Rosenfield, A. R. y Jaffee, R. I. (Eds.). *Inelastic behavior of solids*. Proceedings of the Battelle Memorial Institute materials science colloquia. McGraw-Hill, 1970.
- Kanwal, R. P. *Generalized Functions Theory and Technique: Theory and Technique*. Birkhäuser Boston, 2da ed., 1997.
- Kennett, B. L. N. On Variational Principles and Matrix Methods in Elastodynamics. *Geophysical Journal International*, vol. 37, no. 3, pp. 391–405, 1974.
- Kienzler, R. y Herrmann, G. *Mechanics in Material Space with Applications to Defect and Fracture Mechanics*. Springer Berlin, Heidelberg, 2000.
- Kienzler, R. y Herrmann, G. On conservation laws in elastodynamics. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, no. 13, pp. 3595–3606, 2004.
- Knops, R. J. y Payne, L. E. *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*. Springer Tracts in Natural Philosophy. Springer Berlin, Heidelberg, 1971.
- Kondo, K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. *Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering science by means of geometry*, vol. 1, pp. 6–17, 1955.
- Krajcinovic, D. *Damage Mechanics*. North Holland, 1996.
- Kröner, E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 3, no. 5, pp. 731–742, 1967.
- Kröner, E. Continuum Theory of Defects. En R. Balian, M. Kléman y J.-P. Poirier (Eds.), *Physics of Defects*, pp. 215–315. Les Houches, Session 35, North-Holland, Amsterdam, 1980.

- Krumhansl, J. A. y Matthew, J. A. D. Asymptotic Description of Localized Lattice Modes and Low-Frequency Resonances. *Phys. Rev.*, vol. 166, pp. 856–863, 1968.
- Kucher, V. A., Markenscoff, X. y Paukshto, M. V. Some Properties of the Boundary Value Problem of Linear Elasticity in Terms of Stresses. *Journal of Elasticity*, vol. 74, no. 2, pp. 135–145, 2004.
- Kumar, R. y Singh, B. Wave propagation in a micropolar generalized thermoelastic body with stretch. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A*, vol. 106, no. 2, pp. 183–199, 1996.
- Kunin, I. A. The Theory of Elastic Media with Microstructure and the Theory of Dislocations. En E. Kröner (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*, IUTAM Symposia, pp. 321–329. Springer, Berlin, Heidelberg, 1968.
- Kunin, I. A. *Elastic Media with Microstructure I. One-Dimensional Models*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer Berlin, Heidelberg, 1982a.
- Kunin, I. A. *Elastic Media with Microstructure II. Three-Dimensional Models*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer Berlin, Heidelberg, 1982b.
- Kupferman, R., Olami, E. y Segev, R. Continuum Dynamics on Manifolds: Application to Elasticity of Residually-Stressed Bodies. *Journal of Elasticity*, vol. 128, no. 1, pp. 61–84, 2017.
- Kupradze, V. D., Gegelia, T. G., Basheleishvili, M. O., Burchuladze, T. V. y Sternberg, E. Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, no. 1, p. 222, 1980.
- Laws, N. Viscoelastic Inclusion Problem. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 106, no. 5, pp. 915–928, 1980.
- Lazar, M. y Agiasofitou, E. Fundamentals in Generalized Elasticity and Dislocation Theory of Quasicrystals: Green Tensor, Dislocation Key-Formulas and Dislocation Loops. *Philosophical Magazine*, vol. 94, no. 35, pp. 4080–4101, 2014.
- Lazar, M. y Agiasofitou, E. Nonlocal elasticity of Klein–Gordon type: Fundamentals and wave propagation. *Wave Motion*, vol. 114, p. 103038, 2022.
- Lazar, M., Maugin, G. A. y Aifantis, E. C. On dislocations in a special class of generalized elasticity. *physica status solidi (b)*, vol. 242, no. 12, pp. 2365–2390, 2005.
- Ledesma, A. XI Curso de Máster en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Problemas Geotécnicos, 2000.
- Li, S. y Wang, G. *Introduction to Micromechanics and Nanomechanics*. World Scientific, 2008.
- Lions, J.-L. Problèmes aux limites non classiques pour équations d'évolution. *Revista Matemática de universidad computense de Madrid*, vol. 1, no. 1,2,3, 1988.
- Lions, P. L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, vol. 1, no. 2, pp. 109–145, 1984.
- Lubarda, V. A. The energy momentum tensor in the presence of body forces and the Peach-Koehler force on a dislocation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, no. 6, pp. 1536–1545, 2008.

- Lubarda, V. A. Dislocation Burgers vector and the Peach-Koehler force: a review. *Journal of Materials Research and Technology*, vol. 8, no. 1, pp. 1550–1565, 2019.
- Lucarini, S., Upadhyay, M. V. y Segurado, J. FFT based approaches in micromechanics: fundamentals, methods and applications. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 30, no. 2, p. 023002, 2021.
- Ma, H., Hu, G., Wei, Y. y Liang, L. Inclusion problem in second gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*, vol. 132, pp. 60–78, 2018.
- Madeo, A., dell'Isola, F., Ianiro, N. y Sciarra, G. A Variational Deduction of Second Gradient Poroe-
lasticity II: An Application to the Consolidation Problem. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 3, 2010.
- Madeo, A., Neff, P., Ghiba, I.-D., Placidi, L. y Rosi, G. Band gaps in the relaxed linear micromorphic continuum. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 95, 2014.
- Madeo, A., Neff, P., Ghiba, I. D., Placidi, L. y Rosi, G. Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 27, no. 4, pp. 551–570, 2015.
- Mariano, P. M. *A Multi-Scale Continuum View on Granular Flows*, pp. 251–280. Springer International Publishing, Cham, 2020.
- Markenscoff, X. Evolution of growth of interacting near-by micro-cavities and macroscopic damage amplification. *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 19, no. 1, pp. 71–81, 2014.
- Markenscoff, X. On the dynamic generalization of the anisotropic Eshelby ellipsoidal inclusion and the dynamically expanding inhomogeneities with transformation strain. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*, vol. 1, no. 3, p. 1640001, 2016.
- Markenscoff, X. Self-similarly expanding regions of phase change yield cavitation instabilities and model deep earthquakes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 127, pp. 167–181, 2019.
- Markenscoff, X. y Ni, L. The driving force on the boundary of a self-similarly expanding Eshelby spherical inclusion. *International Journal of Fracture*, vol. 202, pp. 129–134, 2016.
- Marsden, J. E. y Hughes, T. J. R. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover, 1983.
- Martinec, Z. *Principles of continuum mechanics*. Nečas Center Series. Birkhäuser, Cham, 2019.
- Mason, J. *Methods of Functional Analysis for Application in Solid Mechanics*. Studies in applied mechanics. Elsevier, 1990.
- Maugin, G. A. Exact relativistic theory of wave propagation in prestressed nonlinear elastic solids. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, vol. 28, no. 2, pp. 155–185, 1978.
- Maugin, G. A. Nonlocal theories or gradient-type theories - A matter of convenience. *Archiv of Mechanics, Archiwum Mechaniki Stosowanej*, vol. 31, no. 1, pp. 15–26, 1979.

- Maugin, G. A. The method of virtual power in continuum mechanics: Application to coupled fields. *Acta Mechanica*, vol. 35, no. 1, pp. 1–70, 1980.
- Maugin, G. A. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- Maugin, G. A. Internal Variables and Dissipative Structures. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 15, no. 2, pp. 173–192, 1990.
- Maugin, G. A. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1992.
- Maugin, G. A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. Applied Mathematics. Chapman and Hall/CRC, New York, 1993.
- Maugin, G. A. Material Forces: Concepts and Applications. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 48, no. 5, pp. 213–245, 1995.
- Maugin, G. A. *Nonlinear Waves in Elastic Crystals*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 1999a.
- Maugin, G. A. *The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors*. World Scientific, 1999b.
- Maugin, G. A. Geometry and thermomechanics of structural rearrangements: Ekkehart Kröner's legacy Plenary lecture presented at the 80th Annual GAMM Conference, Augsburg, 25-28 March 2002. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 83, no. 2, pp. 75–84, 2003a.
- Maugin, G. A. Pseudo-plasticity and Pseudo-inhomogeneity Effects in Materials Mechanics. *Journal of Elasticity*, vol. 71, no. 1, pp. 81–103, 2003b.
- Maugin, G. A. *Configurational Forces: Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics*. Modern Mechanics and Mathematics. Chapman and Hall/CRC, New York, 2011.
- Maugin, G. A. y Christov, C. I. *Nonlinear Duality Between Elastic Waves and Quasi-particles*, pp. 117–160. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- Maugin, G. A. y Epstein, M. Geometrical material structure of elastoplasticity. *International Journal of Plasticity*, vol. 14, no. 1, pp. 109–115, 1998.
- Maugin, G. A. y Metrikine, A. V. (Eds.). *Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats*. Advances in Mechanics and Mathematics. Springer, 2010.
- Maugin, G. A. y Rousseau, M. *Wave Momentum and Quasi-Particles in Physical Acoustics*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. World Scientific, 2015.
- Maugin, G. A. y Trimarco, C. Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity: variational formulations and application to brittle fracture. *Acta Mechanica*, vol. 94, no. 1, pp. 1–28, 1992.
- Maurel, A., Mercier, J.-F. y Lund, F. Elastic wave propagation through a random array of dislocations. *Physical Review B*, vol. 70, p. 024303, 2004.

- Menshykov, O. V., Guz, I. A. y Menshykov, V. A. Boundary integral equations in elastodynamics of interface cracks. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 366, no. 1871, pp. 1835–1839, 2008.
- Metrikine, A. V. y Askes, H. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure: Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21, no. 4, pp. 555–572, 2002.
- Metrikine, A. V. y Askes, H. An isotropic dynamically consistent gradient elasticity model derived from a 2D lattice. *Philosophical Magazine*, vol. 86, no. 21–22, pp. 3259–3286, 2006.
- Meyer, C. S. Crack-Inclusion Interaction: A Review. Tech. rep., Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Md Weapons And Materials Research Directorate, United States, 2014.
- Michelitsch, T. M., Gao, H. y Levin, V. M. Dynamic Eshelby tensor and potentials for ellipsoidal inclusions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 459, no. 2032, pp. 863–890, 2003.
- Mickens, R. E. *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*. World Scientific, 1993.
- Mickens, R. E. *Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*. World Scientific, 2000.
- Mickens, R. E. *Difference Equations: Theory, Applications and Advanced Topics*. Monographs and Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall/CRC Press, 3ra ed., 2015.
- Mielke, A. y Roubíček, T. Numerical approaches to rate-independent processes and applications in inelasticity. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 43, no. 3, pp. 399–428, 2009.
- Mindlin, R. D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, no. 1, pp. 51–78, 1964.
- Mindlin, R. D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 1, no. 4, pp. 417–438, 1965.
- Mindlin, R. D. y Eshel, N. N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 4, no. 1, pp. 109–124, 1968.
- Mindlin, R. D. y Tiersten, H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, no. 1, pp. 415–448, 1962.
- Mori, T. y Tanaka, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, vol. 21, no. 5, pp. 571–574, 1973.
- Mroginiski, J. L. *Gradient-based proplastic theory*. phdthesis, Universidad Nacional de Tucumán, 2013.
- Mroginiski, J. L. y Etse, G. Discontinuous bifurcation analysis of thermodynamically consistent gradient poroplastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 9, pp. 1834–1846, 2014.

- Mroginiski, J. L., Etse, G. y Ripani, M. A non-isothermal consolidation model for gradient-based poroplasticity. En S. Idelsohn, V. Sonzogni, A. Coutinho, M. Cruchaga, A. Lew y M. Cerrolaza (Eds.), *1st Pan-American Congress on Computational Mechanics. XI Argentine Congress on Computational Mechanics*, pp. 75–88. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Buenos Aires, 2015.
- Mroginiski, J. L., Etse, G. y Vrech, S. M. A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media. *International Journal of Plasticity*, vol. 27, no. 4, pp. 620–634, 2011.
- Müller, I. y Ruggeri, T. *Extended Thermodynamics*. Springer Tracts in Natural Philosophy. Springer, 1993.
- Mura, T. Continuous distribution of moving dislocations. *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, vol. 8, no. 89, pp. 843–857, 1963.
- Mura, T. Continuum Theory of Dislocations and Plasticity. En E. Kröner (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*, pp. 269–278. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1968.
- Mura, T. *Micromechanics of defects in solids*. Mechanics of Elastic and Inelastic Solids. Kluwer Acad. Publ., 1987.
- Nabarro, F. R. N. (Ed.). *Dislocations in solids: Applications and recent advances*. Elsevier Science, Amsterdam, 1983.
- Neff, P., Ghiba, I.-D., Madeo, A., Placidi, L. y Rosi, G. A unifying perspective: the relaxed linear micromorphic continuum. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 26, no. 5, pp. 639–681, 2014.
- Nemat-Nasser, S. y Hori, M. (Eds.). *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Elsevier, 1993.
- Nemat-Nasser, S. y Wu, Y. Comparative experimental study of ionic polymer–metal composites with different backbone ionomers and in various cation forms. *Journal of Applied Physics*, vol. 93, no. 9, pp. 5255–5267, 2003.
- Nie, Y. H., Fu, W.-t., Hui, W., Dong, H. B. y Weng, Y. Q. Very high cycle fatigue behaviour of 2000-MPa ultra-high-strength spring steel with bainite-martensite duplex microstructure. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 32, pp. 189–196, 2009.
- Noll, W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 27, no. 1, pp. 1–32, 1967.
- Nomura, S. *Micromechanics with Mathematica*. Wiley, Chichester, West Sussex, United Kingdom, 2016.
- Nowacki, W. *Theory of asymmetric elasticity*. Pergamon Press, 1986.
- Nunziato, J. W. y Cowin, S. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 72, pp. 175–201, 1979.
- Ogden, R. W. *Non-linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 1997.

- Okatev, R. S. y Zubko, I. Y. Estimation of length scale parameter in second-gradient continua. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2216, no. 1, p. 070002, 2020.
- Oleinik, O. A., Shamaev, A. S. y Yosifian, G. A. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. Elsevier, 1992.
- Ostoja-Starzewski, J. y Starzewski, M. Fractal solids, product measures and fractional wave equations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 465, no. 2108, pp. 2521–2536, 2009.
- Ostoja-Starzewski, M. Lattice Models in Micromechanics. *Applied Mechanics Reviews - APPL MECH REV*, vol. 55, no. 1, pp. 35–60, 2002.
- Ostoja-Starzewski, M. Dissipation Function in Hyperbolic Thermoelasticity. *Journal of Thermal Stresses*, vol. 34, no. 1, pp. 68–74, 2011.
- Ostoja-Starzewski, M. Admitting Spontaneous Violations of the Second Law in Continuum Thermo-mechanics. *Entropy*, vol. 19, no. 2, p. 78, 2017.
- Pamplona, P. X., Muñoz Rivera, J. E. y Quintanilla, R. Analyticity in porous-thermoelasticity with microtemperatures. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 394, no. 2, pp. 645–655, 2012.
- Pavliotis, G. A. y Stuart, A. M. *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*, vol. 53. Springer, 2007.
- Peach, M. y Koehler, J. S. The Forces Exerted on Dislocations and the Stress Fields Produced by Them. *Physical Review*, vol. 80, pp. 436–439, 1950.
- Podio-Guidugli, P. Configurational forces: are they needed? *Mechanics Research Communications*, vol. 29, no. 6, pp. 513–519, 2002.
- Polizzotto, C. A gradient elasticity theory for second-grade materials and higher order inertia. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, no. 15, pp. 2121–2137, 2012.
- Polizzotto, C. A second strain gradient elasticity theory with second velocity gradient inertia - Part II: Dynamic behavior. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, no. 24, pp. 3766–3777, 2013.
- Polizzotto, C. A unifying variational framework for stress gradient and strain gradient elasticity theories. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 49, 2014.
- Polyanin, A. D. y Nazaikinskii, V. E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2da ed., 2016.
- Pretko, M., Chen, X. y You, Y. Fracton phases of matter. *International Journal of Modern Physics A*, vol. 35, no. 06, p. 2030003, 2020.
- Pride, S. R. y Berryman, J. G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. II. Fluid transport equations. *Physical Review E*, vol. 68, p. 036604, 2003.
- Qu, J. y Cherkaoui, M. *Fundamentals of micromechanics of solids*. Wiley, Hoboken, N.J., 2006.

- Quiligotti, S., Maugin, G. A. y dell'Isola, F. Wave motions in unbounded poroelastic solids infused with compressible fluids. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 53, no. 6, pp. 1110–1138, 2002.
- Rabotnov, Y. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Mir Publishers, 1980.
- Reuss, A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 9, no. 1, pp. 49–58, 1929.
- Rossi, R. y Thomas, M. From adhesive to brittle delamination in visco-elastodynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 27, no. 08, pp. 1489–1546, 2017.
- Roychowdhury, A. y Gupta, A. Geometry of Defects in Solids. *arXiv: Materials Science*, 2013.
- Roychowdhury, A. y Gupta, A. Non-metric Connection and Metric Anomalies in Materially Uniform Elastic Solids. *Journal of Elasticity*, vol. 126, no. 1, pp. 1–26, 2017.
- Ru, C. Q. y Aifantis, E. C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica*, vol. 101, no. 1, pp. 59–68, 1993.
- Rudnicki, J. W. Geomechanics. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, no. 1, pp. 349–358, 2000.
- Rudnicki, J. W. Eshelby transformations, pore pressure and fluid mass changes, and subsidence. En J. L. Auriault, C. Geindreau, P. Royer y J. F. Bloch (Eds.), *Poromechanics II*. CRC Press, 2002.
- Rudnicki, J. W. *Eshelby's Technique for Analyzing Inhomogeneities in Geomechanics*, pp. 43–72. Springer Vienna, Vienna, 2011.
- Sadd, M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier, Academic Press, Saint Louis, 3ra ed., 2014.
- Sadd, M. H. Constitutive relations and formulation of theories incorporating material microstructure. En M. H. Sadd (Ed.), *Continuum Mechanics Modeling of Material Behavior*, pp. 331–379. Academic Press, 2019.
- Sanchez-Palencia, E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1980.
- Scheibner, C., Souslov, A., Banerjee, D., Surówka, P., Irvine, W. T. M. y Vitelli, V. Odd elasticity. *Nature Physics*, vol. 16, no. 4, pp. 475–480, 2020.
- Schwan, L., Favrie, N., Cottureau, R. y Lombard, B. Extended stress gradient elastodynamics: Wave dispersion and micro-macro identification of parameters. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 219–220, pp. 34–50, 2021.
- Sciarra, G., dell'Isola, F. y Coussy, O. Second gradient poromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 20, pp. 6607–6629, 2007.
- Sciarra, G., dell'Isola, F., Ianiro, N. y Madeo, A. A Variational Deduction of Second Gradient Poroelasticity Part I: General Theory. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 3, 2010.

- Segev, R. y Epstein, M. *Some Geometrical Aspects of Continuum Mechanics, Report N0. 158*. University of Calgary, Department of Mechanical Engineering, 1980.
- Segev, R. y Epstein, M. (Eds.). *Geometric Continuum Mechanics*. Advances in Mechanics and Mathematics. Birkhäuser, 2020.
- Segev, R. y Rodnay, G. Cauchy's Theorem on Manifolds. *Journal of Elasticity*, vol. 56, no. 2, pp. 129–144, 1999.
- Selvadurai, A. P. S. y Sepehr, K. Discrete element modelling of fragmentable geomaterials with size dependent strength. *Engineering Geology*, vol. 53, no. 3, pp. 235–241, 1999.
- Selvadurai, A. P. S. y Suvorov, A. P. Thermo-poromechanics of a fluid-filled cavity in a fluid-saturated geomaterial. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 470, no. 2163, p. 20130634, 2014.
- Selvadurai, A. P. S. y Suvorov, A. P. *Thermo-Poroelasticity and Geomechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- Shahidi, M., Pichler, B. y Hellmich, C. Viscous interfaces as source for material creep: A continuum micromechanics approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 45, pp. 41–58, 2014.
- Sharma, D. K., Mittal, H., Sharma, S. R. y Parkash, I. Effect of Deformation on Semi-infinite Viscothermoelastic Cylinder Based on Five Theories of Generalized Thermoelasticity. *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences*, vol. 6, no. 1, pp. 17–35, 2017.
- Showalter, R. E. Microstructure Models of Porous Media. En U. Hornung (Ed.), *Homogenization and Porous Media*, Interdisciplinary Applied Mathematics, pp. 183–202. Springer New York, New York, NY, 1997.
- Showalter, R. E. Poro-Plastic Filtration Coupled to Stokes Flow. En Y. Aboalsleiman, A. H.-D. Cheng y F.-J. Ulm (Eds.), *Poromechanics III-Biot Centennial (1905-2005), Proceedings of the 3rd Biot Conference on Poromechanics, 24-27 May 2005, Norman, Oklahoma, USA*, pp. 523–528. Routledge & CRC Press, 2005.
- Showalter, R. E. The Stokes System. *Oregon State University, Department of Mathematics*, 2015.
- Silling, S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, no. 1, pp. 175–209, 2000.
- Singh, I., Madan, D. K. y Gupta, M. Propagation of Elastic Waves in Prestressed Media. *Journal of Applied Mathematics*, 2010.
- Sitiro, M. Dynamics of dislocations and disclinations in anisotropic elastic micropolar media. *International Journal of Engineering Science*, vol. 23, no. 2, pp. 251–255, 1985.
- Sky, A., Muench, I. y Neff, P. On H^1 , $H(\text{curl})$ and $H(\text{sym Curl})$ finite elements for matrix-valued Curl problems, 2022.
- Smyrlis, V. D., Pegios, I. P. y Papargyri-Beskou, S. On wave propagation in gradient poroelasticity. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 88, pp. 72–75, 2016.
- Sobolev, S. L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1991.

- Srivastava, A. Elastic metamaterials and dynamic homogenization: a review. *International Journal of Smart and Nano Materials*, vol. 6, no. 1, pp. 41–60, 2015.
- Steinmann, P. On boundary potential energies in deformational and configurational mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 56, no. 3, pp. 772–800, 2008.
- Steinmann, P. *Geometrical Foundations of Continuum Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2015.
- Steinmann, P. *Spatial and Material Forces in Nonlinear Continuum Mechanics*. No. 272 en Solid Mechanics and Its Applications. Springer, Cham, 2022.
- Steinmann, P. y Maugin, G. A. (Eds.). *Mechanics of Material Forces*. Advances in Mechanics and Mathematics. Springer New York, 2005.
- Stilz, M., dell'Isola, F., Giorgio, I., Eremeyev, V. A., Gantenmüller, G. y Hiermaier, S. Continuum models for pantographic blocks with second gradient energies which are incomplete. *Mechanics Research Communications*, vol. 125, p. 103988, 2022.
- Straughan, B. *Mathematical Aspects of Multi-Porosity Continua*. Advances in Mechanics and Mathematics. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- Suquet, P. *Continuum Micromechanics*. No. 377 en International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures. Springer, Vienna, 1997.
- Suvorov, A. P. y Selvadurai, A. P. S. Macroscopic constitutive equations of thermoporoelastoplasticity derived using eigenstrains. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 58, no. 10, pp. 1461–1473, 2010.
- Svanadze, M. *Potential Method in Mathematical Theories of Multi-Porosity Media*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer International Publishing, Cham, 2019.
- Tartar, L. Sur l'étude directe d'équations non linéaires intervenant en théorie du contrôle optimal. *Journal of Functional Analysis*, vol. 17, no. 1, pp. 1–47, 1974.
- Tartar, L. *The General Theory of Homogenization: A Personalized Introduction*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer Berlin, Heidelberg, 2009.
- Tong, L. H., Ding, H. B., Yan, J. W., Xu, C. y Lei, Z. Strain gradient nonlocal Biot poromechanics. *International Journal of Engineering Science*, vol. 156, p. 103372, 2020.
- Torquato, S. *Random heterogeneous materials*. No. 16 en Interdisciplinary applied mathematics. Springer, New York, 2002.
- Toupin, R. A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, no. 1, pp. 385–414, 1962.
- Toupin, R. A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 17, no. 2, pp. 85–112, 1964.
- Trefftz, E. Zur theorie der stabilität des elastischen gleichgewichts. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 13, no. 2, pp. 160–165, 1933.

- Truesdell, C. *Rational thermodynamics*. Springer-Verlag, New York, 2da ed., 1984.
- Tsinopoulos, S. V., Polyzos, D. y Beskos, D. E. Static and Dynamic BEM Analysis of Strain Gradient Elastic Solids and Structures. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 86, no. 2, pp. 113–144, 2012.
- Tsuchida, E. y Mura, T. On the Stress Concentration Around a Spherical Inclusion. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 2, no. 1, pp. 29–33, 1983.
- Uzuoka, R. y Borja, R. I. Dynamics of unsaturated poroelastic solids at finite strain. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 36, no. 13, pp. 1535–1573, 2012.
- Vasco-Olmo, J. M., Camacho-Reyes, A., Díaz, F. A., Antunes, F. A. y James, M. N. Experimental evaluation of plastic wake on growing fatigue cracks from the analysis of residual displacement fields. *Revista Española de Mecánica de Fractura*, vol. 3, pp. 3–8, 2022.
- Voigt, W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der Physik*, vol. 274, no. 12, pp. 573–587, 1889.
- Wang, C.-C. On the Geometric Structure of Simple Bodies, a Mathematical Foundation for the Theory of Continuous Distributions of Dislocations. En E. Kröner (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*, pp. 247–250. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1968.
- Wang, J., Michelitsch, T. M., Gao, H. y Levin, V. M. On the solution of the dynamic Eshelby problem for inclusions of various shapes. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, no. 2, pp. 353–363, 2005. *Micromechanics of Materials*.
- Wang, J. J., Bhattacharyya, S., Li, Q., Heo, T. W., Ma, X. Q. y Chen, L.-Q. Elastic solutions with arbitrary elastic inhomogeneity and anisotropy. *Philosophical Magazine Letters*, vol. 92, pp. 327–335, 2012.
- Wang, L. *Mechanics of asphalt: microstructure and micromechanics*. McGraw-Hill's AccessEngineering. McGraw-Hill, New York, 2010.
- Wang, L. y Wang, J. On the Invariance of Governing Equations of Current Nonlocal Theories of Elasticity Under Coordinate Transformation and Displacement Gauge Change. *Journal of Elasticity*, vol. 137, no. 2, pp. 237–246, 2019.
- Yang, F. y Li, J. C. M. (Eds.). *Micro and Nano Mechanical Testing of Materials and Devices*. Springer, Boston, MA, 2008.
- Yasutomi, Y. Modified Elastic Wave Equations on Riemannian and Kähler Manifolds. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 43, no. 2, pp. 471–504, 2007.
- Yavari, A. *Applications of Algebraic Topology in Elasticity*, pp. 143–183. Springer International Publishing, Cham, 2020.
- Zaera, R., Serrano, O. y Fernández-Sáez, J. On the consistency of the nonlocal strain gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*, vol. 138, pp. 65–81, 2019.
- Zimmer, R. J. *Essential Results of Functional Analysis*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1990.



En el presente trabajo de tesis se analizan diversos modelos elastodinámicos en la aproximación micromecánica propuesta por J. Eshelby o de fuerzas configuracionales, y, de segundo gradiente de acuerdo con la teoría de Mindlin-Aifantis, siendo esta una primera dimensión de análisis.

Todas estas construcciones están referidas a medios porosos, los cuales se definen en términos de la formulación de Biot denominada u-p (campo de desplazamiento, campos de porosidad), este tipo de acoplamiento llamado poromecánico, conduce, en general, a sistemas hiperbólico-parabólicos de ecuaciones en derivadas parciales, en este sentido, surge la otra dimensión de análisis de esta tesis, esta es la de formular rigurosamente el problema de condiciones iniciales y de borde o problema de Cauchy y de condiciones de contorno asociadas a los mencionados modelos, con el objetivo de obtener soluciones semi-analíticas clásicas o fuertes cumpliendo las condiciones de Hadamard.

Se emplea sistemáticamente la técnica de obtención de funciones de Green, a efectos de lograr que, utilizando el segundo y tercer teorema de representación de Green Lagrange y la identidad de Somigliana, se puedan construir representaciones integrales de las soluciones a las que identificamos como soluciones semi-analíticas, como ya se dijera. El sistema de representaciones integrales de las soluciones está acoplado, aunque puede resolverse a partir del uso de diversos dispositivos numéricos, por ejemplo: a) aproximantes de Picard, b) discretizando el sistema poromecánico usando diferencias finitas adaptativas, algunas de estas situaciones se analizan en los problemas de aplicación propuestos.