

## ASPECTOS TEÓRICOS DE LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DEL COMPORTAMIENTO DE FALLA DE MATERIALES CUASI-FRÁGILES BASADA EN LA COMBINACIÓN DE MEF Y MED

Claudia A. Morel<sup>a</sup>, Javier Mroginski<sup>a,b</sup>, Sonia Vrech<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727, Resistencia (3500), Chaco, Argentina, [cmorel@ing.unne.edu.ar](mailto:cmorel@ing.unne.edu.ar), <http://ing.edu.ar/mecap/index.html>*

<sup>b</sup> *Consejo Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICET)*

<sup>c</sup> *Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI), Universidad Nacional de Tucumán*

**Palabras clave:** Mecánica de fractura, Método de los elementos discretos, Materiales cuasi-frágiles, Multiescala.

**Resumen.** El avance y desarrollo de la tecnología de materiales cuasi-frágiles como hormigones con propiedades físicas y químicas mejoradas ha alcanzado en el presente niveles superlativos. Muchos de estos logros se deben en parte al estudio del comportamiento mecánico de los materiales. En el presente artículo se desarrollan aspectos teóricos de la simulación computacional del comportamiento de falla de materiales cuasi-frágiles basada en la combinación de métodos de elementos finitos y discretos, para ser aplicados en el modelado numérico de hormigones y morteros. En este sentido, se plantea el análisis de los aspectos teóricos más relevantes con el objetivo de simular el comportamiento mecánico multiescala de materiales cuasifrágiles a partir de la combinación de dos métodos numérico-computacionales de probada eficiencia: el Método de los Elementos Finitos (MEF) a nivel macroscópico y el Método de los Elementos Discretos (MED) a nivel mesoscópico, logrando así una herramienta numérica superadora. El MED, descrito en este trabajo, consiste en un método numérico cuya formulación se basa en una estructura de malla o reticulado tridimensional que permite representar con relativa sencillez un continuo ortotrópico. Anteriormente ha sido utilizado para modelar estructuras de hormigón y hormigón armado sometidas a cargas impulsivas y también para el cálculo de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos y la simulación de problemas de propagación de fisuras.

## 1 INTRODUCCIÓN

El hormigón armado es un material que hoy en día es muy utilizado en las mayores obras estructurales. Su capacidad de adquirir cualquier forma y las altas resistencias a la compresión que puede lograr, lo hacen atractivo para uso tanto en edificaciones de gran altura como en infraestructuras de transportes. Su alta demanda en las obras de gran envergadura y la necesidad de lograr hormigones de mayores resistencias y durabilidad promueve la investigación del comportamiento del material a través de modelos computacionales.

Las principales causas de deterioro del hormigón provienen de procesos como la fluencia o exposición a degradación química y física (hielo-deshielo, ataques de sulfatos, etc.). Estos procesos producen fisuración que pueden llevar al colapso de las estructuras. La falla del hormigón puede estudiarse como un fenómeno multiescala.

El hormigón se prepara en base a la mezcla de distintos materiales: cemento, arena, agregados y agua. Es un material heterogéneo cuyas propiedades mecánicas dependen de las propiedades de sus componentes. Desde el punto de vista del análisis mecánico puede considerarse un material multifase y su resistencia está estrechamente vinculada a la unión entre sus fases ([Montín, 2012](#)).

El primer paso para hacer la aproximación multiescala es la definición del tamaño del Elemento de Volumen Representativo (RVE por sus siglas en inglés). Su vinculación con el comportamiento en la macroscale será determinada luego a través de las relaciones de las variables (tensiones, deformaciones o desplazamientos).

Tradicionalmente la modelación constitutiva de hormigones ha sido realizada mediante modelos continuos basados en mecánica de fracturas, ver [Bažant and Oh \(1983\)](#), [Willam et al. \(1984\)](#) y [\(1985\)](#), [Willam and Etse \(1990\)](#), [Comi and Perego \(2001\)](#), [Meschke and Dumstorff \(2007\)](#). Sin embargo, cuando el camino de cargas involucra estados tensionales con medio o alto confinamiento, el comportamiento del hormigón ha sido descrito mediante teorías no locales integrales o no locales de gradientes, tal es el caso de las propuestas de [Vardoulakis and Aifantis \(1991\)](#), [Peerlings et al. \(1998\)](#), [Comi \(2001\)](#), [Pan et al. \(2002\)](#), [Simone \(2003\)](#), [Chen et al. \(2004\)](#), [Peerlings et al. \(2004\)](#). Se registraron asimismo desarrollos promisorios de teorías enriquecidas que, a su vez, requieren de información de la estructura y propiedades microscópicas y mesoscópicas. Si bien el propósito de estos enriquecimientos era describir objetivamente fenómenos no directamente relacionados con subescalas, tales como el control del ancho de banda de localización y de la ductilidad de postpico, las teorías resultantes involucran parámetros adicionales que demandan un paralelismo con propiedades micro y mesomecánicas. Ejemplos en este sentido pueden citarse las contribuciones de [Nieto \(1998\)](#), [Etse and Carosio \(2002\)](#) y [Vrech and Etse \(2009\)](#).

Hasta el presente estas dos metodologías o conceptos de modelación han sido consideradas en forma alternativa. Varios autores, han reconocido la importancia de una evaluación mesoestructural, proponiendo diferentes modelos para materiales cuasi-frágiles, ver entre otros [Carol et al. \(2001\)](#), [Caballero et al. \(2005, 2006\)](#). Igualmente, en suelos, se observa una tendencia en el mismo sentido, ver a.o. [Gao et al. \(2010\)](#), [Zhou et al. \(2010\)](#), [Wang et al. \(2009\)](#), [Jie et al. \(2007\)](#).

Todas estas teorías “no locales” involucran parámetros que no pueden ser definidos

objetivamente a nivel macroscópico. Puede concluirse, por lo tanto, que aun en la actualidad y a pesar de los importantes progresos en las formulaciones constitutivas, hay un déficit en cuanto a la interpretación objetiva del significado de los parámetros adicionales involucrados. Estos distintos puntos de vista, plasmados en una gran variedad de teorías no lineales para la formulación de leyes constitutivas para hormigones, morteros y suelos han dado lugar a modelos constitutivos que son capaces de reproducir solamente ciertos aspectos relevantes del comportamiento material, pero no el espectro completo de sus respuestas posibles ante todo tipo imaginable de acción. Es claro que el mejor entendimiento de los mecanismos de respuesta y falla de los materiales considerados requiere necesariamente de una visión multiescala. En ese sentido, se observa una clara tendencia en los últimos años a este tipo de consideraciones. Contribuciones destacadas referentes a modelaciones multiescala basadas en la formulación variacional de la Teoría de Homogeneización de [Souza Neto and Feijoo \(2006\)](#), se deben a [Sánchez et al \(2013\)](#), [Gitman et al. \(2007\)](#), [Nguyen et al. \(2012\)](#).

En trabajo se propone plantear una aproximación al comportamiento de falla de materiales cuasi-frágiles mediante una formulación numérico-computacional basada en el Método de los Elementos Finitos (FEM) a nivel macroscópico y en el Método de los Elementos Discretos (DEM) a nivel mesomecánico, definiéndose un mapeo mediante análisis mesoscópicos que brindarán la información necesaria de subescala, a ser tenida en cuenta en las formulaciones macroscópicas.

El enfoque numérico se basará en la generación de un Elemento de Volumen Representativo (RVE) objetivo para la simulación computacional del comportamiento de falla a nivel material. Cabe destacar que este método consiste en la formulación de un modelo de malla o reticulado tridimensional que permite representar un continuo ortotrópico. Ha sido formulado por [Nayfeh y Hefzy \(1978\)](#) y posteriormente utilizado para para modelar estructuras de hormigón y hormigón armado sometidas a cargas impulsivas ([Riera y Iturrioz 1995,1998](#)), fractura de fundaciones de suelo cemento apoyadas sobre un lecho de arena suelta ([Schnaid et al. 2004](#)), fractura dinámica ([Miguel et al. 2010](#)), generación y propagación de los sismos ([Dalguer et al. 2001](#)), efecto de escala en el hormigón ([Ríos y Riera 2004](#)). También para el cálculo de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos y la simulación de problemas de propagación de fisuras, ver entre otros [Barrios D'Ambra et al. \(2007\)](#), [Kosteski et al. \(2008, 2009\)](#) y [Kosteski et al. \(2012\)](#).

Cabe destacar que hasta el presente, el DEM ha sido aplicado en la predicción de comportamientos de falla en Modo I o falla por tracción, en base a valores de energías de fracturas en dicho modo ( $G_f I$ ). Se pretende extender la formulación a Modos de falla II y modos mixtos, adoptando para su calibración valores de energía de fractura correspondientes.

A nivel macromecánico, el modelo constitutivo no-lineal será implementado numérico-computacionalmente en un código de Elementos Finitos robusto a fin de que el mismo constituya una herramienta numérica capaz de predecir el comportamiento del material cuasi-frágil ante diferentes estados de sollicitación.

Los conceptos teóricos que se plantean están orientadas a la investigación del comportamiento mecánico de materiales cuasi-frágiles como el hormigón y a la simulación computacional del comportamiento de falla llevada a cabo mediante la combinación de dos métodos numérico-computacionales de probada eficiencia: el Método de los Elementos Finitos (MEF) a nivel macroscópico y el Método de los Elementos Discretos (MED) a nivel

mesoscópico, relacionados sobre la base teórica de la teoría de Homogeneización, constituyendo éste uno de los aportes originales de esta tesis. Esta combinación se sustenta claramente en aprovechar en forma óptima las virtudes de cada método y disimular sus falencias. En este sentido, el MEF es una técnica numérica ampliamente reconocida por la comunidad científica internacional y sus aplicaciones cubren una gama muy amplia de problemas ingenieriles, sin embargo, tanto la detección de falla temprana como la propagación de fisuras discretas obtenidas con este método muestran un cierto grado de falencias y el costo computacional para obtenerlos es muy elevado. Por el contrario, el MED es una técnica muy sencilla que ha ido utilizado en los últimos años obteniendo muy buenos resultados en el campo de la Mecánica de Fractura, tanto estática como dinámica, y tiene la capacidad de suplir esta falencia que muestra el MEF.

## 2 FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

El método de los elementos discretos tiene una notoria habilidad para simular el nucleamiento de las fisuras y aglutinamiento de vacíos. El método es utilizado para relacionar el comportamiento de la tensión y la deformación del RVE con la evolución de la deformación y la energía de daño y el la fracción del volumen de vacíos.

Dado que se propone abordar estudio del fenómeno de falla de materiales cuasi-frágiles mediante un análisis multiescala, se empleará una herramienta computacional basada en el Método de los Elementos Discretos (DEM) a nivel mesomecánico y en el Método de los Elementos Finitos a nivel macromecánico, similar al tradicional FEM<sup>2</sup> pero usando en MED a nivel micro, como se indicó anteriormente. El enfoque numérico se basará en la generación del modelo constitutivo de un Elemento de Volumen Representativo (RVE) apto para la simulación computacional del comportamiento de falla material.

La aplicación del DEM a nivel mesomecánico permitirá captar el efecto falla frágil o dúctil para lo que se formularán leyes de endurecimiento/ablandamiento. El trabajo de investigación se centrará en el desarrollo e implementación numérico-computacional del modelo constitutivo del RVE a fin de que el mismo constituya una herramienta numérica capaz de predecir el comportamiento del material ante diferentes estados tensionales a niveles mesomecánico. A nivel macromecánico se considerarán mallas de elementos finitos tridimensionales cuya respuesta constitutiva resultará de la homogeneización de las tensiones del RVE. Una vez calibrado el modelo numérico con base en los resultados experimentales disponibles en la literatura, los mismos se emplearán para el estudio de problemas específicos a nivel meso y macromecánico con énfasis en el análisis de falla de estructuras de hormigón armado ante casos de carga típicos.

Los resultados numéricos obtenidos anteriormente demuestran la efectividad del MED para simular el comportamiento postpico de materiales cuasifrágiles así como también modelar el complejo fenómeno de propagación de fisuras estáticas y dinámicas, esto permitirá proveer mayor entendimiento de la micromecánica de la falla en materiales como el hormigón. En este sentido, el modelo de discretización propuesto por [Hayashi \(1982\)](#) y luego por [Nayfeh y Hefzi \(1978\)](#), proponen representar el medio continuo a través de un sistema de reticulado de barras representado en la [Figura 1 \(Rocha, 1989\)](#).

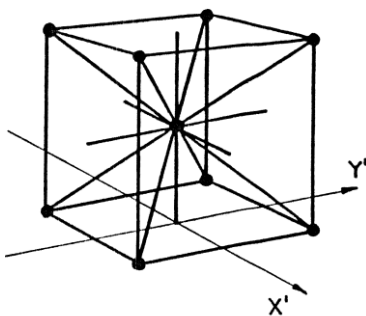


Figura 1: Modelo cúbico del reticulado de barras.

El modelo cúbico, posee unas barras cuyas propiedades elásticas equivalentes al del continuo vienen dados por la definición de su rigidez a través de las siguientes expresiones:

Para barras normales:

$$E_n = \alpha \cdot E \cdot L^2 \quad (1)$$

Para barras diagonales:

$$E_d = \frac{2 \cdot \delta \cdot \alpha \cdot E \cdot L^2}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Donde

$$\alpha = \frac{(9+8\delta)}{(18+24\delta)} \quad (3)$$

$$\delta = \frac{9\nu}{4-8\nu} \quad (4)$$

Para los materiales frágiles, en la fase de post-ruptura es más importante evaluar correctamente el consumo de energía que la relación tensión vs. deformación.

La geometría del módulo cúbico tiene la desventaja de presentar dificultades para representar cuerpos que no sean prismáticos. Por otra parte, es muy difícil refinar la malla sólo en puntos de interés.

Para representar la ruptura frágil, cuando el factor de intensidad de tensiones crítico  $K_{Ic}$  es alcanzado en algún punto, se considera que ocurre la propagación inestable de una fractura. Durante este proceso es consumida una cierta cantidad de energía que es función del área de la fisura formada. La energía de ruptura debe representarse en la relación constitutiva de tal manera que describa el comportamiento del material en esta etapa.

Caracterizando una microfisura por una dimensión  $a$ , puede establecerse una relación entre el factor crítico de intensidad de tensiones con una cierta deformación crítica y escribir  $K_{Ic}$ :

$$K_{Ic} = \chi \cdot f_t \cdot a^{1/2} \quad (5)$$

donde  $f_t$  es una tensión de control crítica y  $\chi$  es un parámetro que depende de la geometría del problema. La expresión para la deformación crítica para un estado plano de deformaciones:

$$\varepsilon_p = R_f \cdot \left[ \frac{G_f}{E \cdot (1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (6)$$

Donde  $R_f$  es un factor de falla definido como

$$R_f = \frac{1}{\left(\chi \cdot a^2\right)} \quad (7)$$

Se adopta entonces un diagrama bilineal por la relación constitutiva elemental que se muestra en la [Figura 2](#).

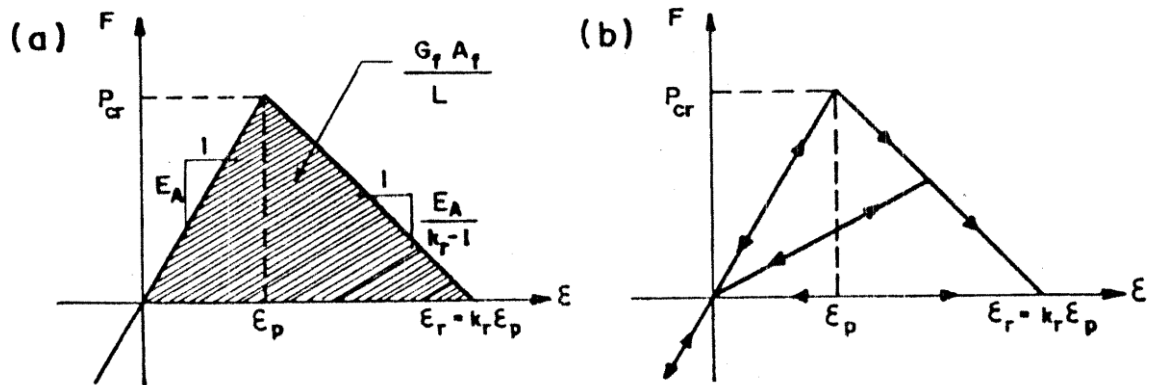


Figura 2: Diagrama de la relación constitutiva del comportamiento de las barras

La representación del strain-softening presente en el diagrama tiene como objetivo condicionar la cantidad de energía que va ser consumida en la ruptura de la barra. Se observa que  $\epsilon_p$ ,  $E$ ,  $P_{cr}$ ,  $R_{fc}$  y  $G_f$  son propiedades del material,  $A_f$  y  $L$  son propiedades del modelo y los parámetros  $K_r$  y  $EA$  dependen de ambos.

La relación constitutiva presentada debe ser ajustada en base a las dimensiones de los elementos, dado que el efecto de strain-softening depende del tamaño del mallado. El consumo de energía en el proceso de ruptura debe permanecer invariante en relación al nivel de discretización.

La convergencia del MED para elasticidad lineal así como en los problemas de inestabilidad elástica fue verificada por [Riera e Iturrioz \(1995\)](#).

### 3 HOMOGENEIZACIÓN DE PRIMER ORDEN

En los materiales que presentan homogeneidad estadística o periodicidad espacial se puede identificar un subvolumen  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d=2,3$ ) de longitud característica  $l$ , que es representativa del material heterogéneo ([Hernández et al., 2014](#)). En micro estructuras que muestren homogeneidad estadística este dominio recibe el nombre de Elemento de volumen representativo (RVE), mientras que si la micro estructuras resulta ser periódica se conoce comúnmente como célula unitaria repetitiva (RUC) o simplemente célula unitaria (ver [Figura 3](#)).

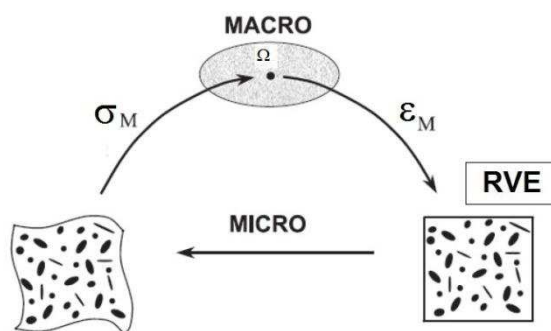


Figura 3: Esquema de homogeneización de primer orden.

Bajo la hipótesis de deformaciones infinitesimales, la descomposición del desplazamiento  $u$  en cualquier punto  $x \in \Omega$ , resulta en dos componentes, una macroscópica y otra microscópica:

$$u_\mu(x) = \epsilon_M x + u(x) \quad (8)$$

Donde  $\epsilon_M$  representa el tensor de deformaciones macroscópico y  $u(x)$  el campo de desplazamiento fluctuante. El término  $\epsilon_M$  representa los desplazamientos que tendría el material si fuese homogéneo, mientras que la contribución fluctuante de  $u$  explica las desviaciones del estado homogéneo debido a la presencia de heterogeneidades.

Diferenciando la ecuación anterior:

$$\epsilon(x) = \epsilon_M + \nabla^s u(x) \quad (9)$$

Siendo  $V$ , el volumen del RVE:

$$V = \int_{\Omega} d\Omega \quad (10)$$

Las deformaciones solo tienen influencia en el comportamiento a escala agregada a través del volumen medio del RVE, lo que implica, teniendo en cuenta la Ec. (9) que esta condición es equivalente a aceptar que:

$$V = \int_{\Omega} \nabla^s u(x) d\Omega = 0 \quad (11)$$

El interés principal es obtener una relación entre la deformación microscópica y el comportamiento mecánico macroscópico. Este método para lograr esta relación es conocido como homogeneización o teoría de las propiedades efectivas, mediante el cual un material heterogéneo se reemplaza por un continuo homogéneo equivalente. El método se realiza en una muestra de material estadísticamente representativa denominada elemento de volumen representativo (RVE).

En las aproximaciones clásicas la respuesta efectiva de los materiales heterogéneos el tamaño del RVE es usualmente considerado infinitamente grande en comparación con las escalas de longitud de la microestructura.

#### 4 EL PRINCIPIO DE HILL-MANDEL

Para un cuerpo sobre el cual no se ejercen fuerzas externas y con componentes perfectamente adheridos, la condición de Hill establece que:

$$\sigma_M : \epsilon_M = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) : \epsilon(\mathbf{x}) d\Omega \quad (12)$$

La Ec. (12) indica que para que una muestra sea estadísticamente representativa, debería ser lo suficientemente grande comparada con las escalas de la microestructura, pero aún pequeño, comparado con el cuerpo entero (ver Figura 3).

Para el caso especial de deformación homogénea y condiciones de borde con tensión la muestra debe ser lo suficientemente grande como para que el campo de fluctuaciones sea relativamente pequeño. La condición de Hill implica que la densidad de energía de deformación promedio volumen de un material heterogéneo puede ser obtenida del promedio de las tensiones y deformaciones, siempre que las micro escalas sean diferentes.

El principio de Hill-Mandel es equivalente a requerir que la tensión externa superficial y el campo de fuerzas  $b$  del RVE sea reactivo. Esto quiere decir que son reacciones debidas o producidas por el efecto de las restricciones cinemáticas impuestas sobre el RVE.

En cuanto a la condición que deben respetar las condiciones de borde dadas para una celda, haciendo uso del teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} \nabla^s u(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) \otimes^s \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (13)$$

Donde  $\partial\Omega$  representa el borde de  $\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  es el versor normal a  $\partial\Omega$  y el símbolo  $\otimes^s$  indica el producto tensorial.

Una elección práctica es (utilizando elementos finitos impulsado por deformaciones) utilizar condiciones de mínima restricción para las fluctuaciones de desplazamiento ( $u(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$ ), y determinar en consecuencia al RVE como el volumen secundario más pequeño de la microestructura estadísticamente homogénea cuya respuesta mecánica es, bajo este tipo de condiciones de contorno, indistinguible de la del material en general.

El conjunto de los campos fluctuantes de desplazamientos cinemáticamente admisibles forman, tanto para condiciones de borde periódicas o de mínima restricción, un espacio vectorial,  $\mathcal{V}_u$ :

$$\mathcal{V}_u = \{u \in H^1(\Omega)^d \mid A_0 u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega\} \quad (14)$$

Donde  $H^1(\Omega)^d$  indica el espacio de Sobolev de las funciones que poseen derivadas cuadradas integrables en  $\Omega$ .

#### 5 CONCLUSIONES

Se presentan algunos conceptos teóricos para plantear una aproximación al comportamiento de falla de materiales cuasi-frágiles mediante una formulación numérico-computacional



basada en el Método de los Elementos Finitos (FEM) y en el Método de los Elementos Discretos (DEM).

Mediante la simulación numérica del comportamiento del hormigón como material heterogéneo se busca magnificar y entender los mecanismos locales de deformación, aumentar el conocimiento de los procesos de fisuración y evolución del daño, lo que permitirá diseñar la composición del hormigón según la aplicación deseada.

La novedad de este enfoque radica en la combinación de dos métodos de discretización, de probada eficiencia, buscando utilizar las virtudes de ambos de manera óptima, minimizando sus falencias. El MEF es una técnica numérica ampliamente reconocida en la simulación del comportamiento de los materiales y el MED es otro método de discretización que ha obtenido muy buenos resultados en el campo de la Mecánica de Fractura. El puente entre ambos métodos, viene dado por la teoría de Homogeneización, utilizando el MEF a nivel macroscópico y el MED a nivel mesoscópico.

Por otro lado, al tratarse de un modelo computacional genérico para medios cuasi-frágiles es aplicable no solamente a mortero u hormigón, sino también a suelos.

## REFERENCIAS

- BarriosD'Ambra R.L., Iturrioz I., Coceres H., Kostas L., Tech T.W., Cisilino A. Cálculo del factor de intensidad de tensiones utilizando el método de los elementos discretos. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*. 4:7–20, 2007.
- Bazant, Z. P., and Oh, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. *Rilem-Mat. et Const.* 16(93), 155-177, 1983.
- Chen, J, Zhang, X, Belytschko, T. An implicit gradient model by a reproducing kernel strain regularization in strain localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193-27, 2827-2844, 2004.
- Carol, I., Lopez, C.M., Roa, O. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 52:193–215, 2001.
- Caballero, A. *3D meso-mechanical numerical analysis of concrete using interface elements*. Ph.D. thesis, ETSECCPB-UPC, E-08034 Barcelona, Spain. 2005
- Caballero, A., Lopez, C.M., Carol, I. 3D meso-structural analysis of concrete specimens under uniaxial tension. *Comput Methods Appl. Mech. Eng.*, 195(52):7182–7195, 2006.
- Comi, C. and Perego, U. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 38, Issues 36–37, 6427-6454, 2001.
- Comi, C. A non-local model with tension and compression damage mechanisms. *Eur. J. Mech - A/Solids*, 20 (6-7), 1-22, 2001.
- Dalguer, L.A., Irikura, K., Riera, J.D., Chiu, H.C. The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: brief interpretation of the damage distribution on buildings. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 91/5:1112–1127, 2001.
- Etse, G., Carosio, A. Diffuse and localized failure predictions of Perzyna viscoplastic models for cohesive-frictional materials. *Latin American Applied Research*. Vol.32-1, 21-31, 2002.
- Gao, H., Qiu, C.Q., Fan, D., Jin, Y., Wang, L.-P. Three-dimensional microscale flow simulation and colloid transport modeling in saturated soil porous media. *Computers and Mathematics with Applications*, 59 (7), 2271-2289, 2010.
- Gitman, I.M., Askes, H. and Sluys, L.J. Representative volume: Existence and size

- determination. *EngineeringFractureMechanics*, 74, 2518–2534, 2007.
- Hayashi, Y. *Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear*. Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1982.
- Hernández, J. A., Oliver, J., Huespe, A. E., Caicedo, M. A., & Cante, J. C. *Computational Homogenization of Inelastic Materials using Model Order Reduction. Monograph*. CIMNE M141. International Center For Numerical Methods In Engineering. Barcelona, Spain. 2014.
- Jie, Y.-X. , Wang, N.-D. , Li, G.-X. Modified equivalent additional stress method for numerical analysis of reinforced soil. *YantuLixue/Rock and SoilMechanics* 28, SUPPL., 129-132, 2007.
- Kosteski, L., Barrios, R., Iturrioz, I. Determinación de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos utilizando el método de los elementos discretos compuestos por barras. *Revista Internacional Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, CIMNE*, 24:323–343, 2008.
- Kosteski, L., Barrios, R., Iturrioz, I. Fractomechanics parameter calculus using the discrete element method with bars. *Lat. Am. J. Solids Struct.*, 6:301–321, 2009.
- Kosteski, L., Barrios D’Ambra, R. and Iturrioz, I. Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. *Int. J. Fract.*, 174:139–161, 2012.
- Meschke, G. and Dumstorff P. Energy-based modeling of cohesive and cohesionless cracks via X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 196, Issues 21–24, 2338-2357, 2007.
- Miguel L.F.F., Iturrioz I., Riera J.D. Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials. *ComputMethodsModelEng. Sci.*, 56:1–16, 2010.
- Montín J. M. *Caracterización de modelo mesoescala en hormigón de altas prestaciones*. Proyecto final de Carrera. Escuela Técnica Superior de Sevilla. Universidad de Sevilla. 2012.
- Nayfeh, A. H. and Hefzy, M. S. Continuum Modeling of Three Dimensional Truss-Like Space Structures. *AIAA Journal*, 16(8): 779-787, 1978.
- Nguyen, V.P, Stroeven, M. and Sluys, L. J. An enhanced continuous–discontinuous multiscale method for modeling mode-I cohesive failure in random heterogeneous quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 79, 78–102, 2012.
- Nieto, M. *Continuo Micropolar de Cosserat; Análisis Lineal Elástico y No lineal Elastoplástico*. Tesis de Magister en Ing. Estructural. Director: Etse, G. Universidad Nacional de Tucumán. 1998.
- Pan, Y, Wang, Y, Li, L..Analysis of the strain softening size effect for rock specimens based on shear strain gradient plasticity theory. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39-6, 801-805, 2002.
- Peerlings, R, Massart, P, Geers, M. A thermodynamically motivated implicit gradient damage framework and its application to brick masonry cracking. *Comput. Methods Appl. Mech.Eng*, 193, 3403-3417, 2004.
- Peerlings, H., de Borst, R, Brekelmans, W, Geers, M. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mech. Cohes.-Fric. Mater.*, 3, 323-342, 1998.
- Riera, J.D. and Iturrioz, I.: Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. *Communications in Num. Meth. in Eng.*, Vol.11, 417-426, 1995.
- Riera, J. D. and Iturrioz, I. Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. *Int. J.Nucl. Eng. Des.*, 179:135–144, 1998.

- Ríos R.D. and Riera J.D. Size effects in the analysis of reinforced concrete structures. *Eng. Struct.*,26:1115–1125, 2004.
- Rocha, M. M. *Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil*. Porto Alegre, 123p. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.
- Sánchez, P.J., Blanco P.J., Huespe A.E. and Feijóo, R.A. Failure-Oriented Multi-scale Variational Formulation: Micro-structures with nucleation and evolution of softening bands. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 257, 221–247, 2013.
- Schnaid F., Spinelli L., Iturrioz I., Rocha M. *Fracture mechanics in ground improvement design*. Ground. Improv. UK 8:7–15, 2004.
- Simone, A, Wells, G, Sluys, L.. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192-41, 4581-4607, 2003.
- Souza Neto, E. A. and Feijóo, R. A. *Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid: Small and Large Strain Kinematical Formulation*, LNCC R&D Report 16/2006, LNCC (National Laboratory for Scientific Computing), Brazil, 2006.
- Vardoulakis, I., Aifantis, E. A gradient flow theory of plasticity for granular materials. *ActaMechanica*, 87, 197-217, 1991.
- Vrech, S., Etse, G. Gradient & Fracture Energy-Based Plasticity Theory for Quasi-Brittle Materials like Concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 199, 136-147,2009.
- Wang, Y., Moatamedi, M. , Grove, S.M. Continuum dual-scale modeling of liquid composite molding processes. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 28, 12, 1469-1484, 2009.
- Willam, K., Bicanic, N, Sture, S. *Constitutive and computational aspects of strain-softening and localization in solids*. En Int. Conf. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, 33-70. Eds. Damianic et al, Pineridge Press, Swansea. 1984.
- Willam, K, Hurbult, B, Sture, S. *Experimental and constitutive aspects of concrete failure*.En US-Japan Seminar on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, 226-254. ASCE-Special Publication. 1985.
- Willam, K., Etse, G.*Failure assessment of the extended Leon model for plain concrete*. En SCI-C Conf., Zell and See, Austria, 851-870. Pineridge Press, Swansea,UK. 1990.
- Zhou, J., Wang, J.-Q., Kong, X.-L., Jia, M.-C. Mesoscopic study of the interface between sandy soil and geosynthetics. *YantuGongchengXuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 32 (1), 61-67, 2010.