Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada
Unidad Legaria

Estudio de las imágenes del concepto sobre las inecuaciones con valor absoluto entre estudiantes universitarios

Tesis que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias en Matemática Educativa
Presenta

Daniel Luis Mosqueda

Director de Tesis

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Ciudad de México, diciembre de 2020

Agradecimientos

A mi madre, sin su apoyo este camino sería imposible.

Al Dr. Mario Sánchez Aguilar, por compartir sus conocimientos.

Al Instituto Politécnico Nacional (CICATA – Unidad Legaria), por darme la oportunidad de realizar este posgrado.

RESUMEN

El objetivo general de esta investigación consistió en explorar las imágenes que evocan los estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones lineales con valor absoluto. El método consistió en proponer a 21 alumnos universitarios de ciencias económicas un cuestionario escrito con reactivos relacionados a las nociones de valor absoluto, inecuación e inecuación con valor absoluto. Posteriormente, se realizaron entrevistas semiestructuradas basadas en el cuestionario a siete estudiantes seleccionados. Las respuestas a los cuestionarios y las entrevistas fueron sometidas a un análisis de datos de tipo cualitativo, lo que permitió construir una categorización de los procedimientos y las respuestas de los estudiantes.

Se pudieron identificar las estrategias usuales más utilizadas y las dificultades más comunes en los alumnos cuando resuelven actividades en las que está involucrada una inecuación con valor absoluto. Éstas fueron comparadas con las ya identificadas en estudios relacionados con la temática en alumnos del nivel medio y bachillerato.

En conclusión, los estudiantes tienen una imagen del concepto muy acotada de las inecuaciones con valor absoluto. Esto puede deberse a las tareas matemáticas a las que comúnmente se enfrentan en las clases; se recomienda el diseño de estrategias didácticas que involucren distintas definiciones de valor absoluto, a fin de que permitan al alumnado superar las dificultades identificadas y, en este sentido, reducir la brecha entre los objetos matemáticos involucrados y las imágenes de los estudiantes respecto a ellos.

ABSTRACT

The general aim of this research study was to explore the images that university students evoke when they solve linear inequalities with absolute value. The method consisted of applying to 21 university economics students a written questionnaire with items related to the notions of absolute value, inequality and inequality with absolute value. Subsequently, semi-structured interviews based on the questionnaire were conducted with seven selected students. The responses to the questionnaires and the interviews were subjected to a qualitative data analysis, which made it possible to construct a categorization of the students' procedures and responses.

It was possible to identify the most used strategies and the most common difficulties among students when solving activities in which an inequality with absolute value is involved. These were compared with those already identified in previous studies related to lower and upper secondary school students.

In conclusion, students have a very narrow concept image of absolute value inequalities. This may be due to the mathematical tasks they are commonly faced with in the classroom. The design of didactic strategies that involve different definitions of absolute value is recommended, in order to allow the students to overcome the difficulties identified and, in this sense, reduce the gap between the mathematical objects involved and the students' images of them.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Aprendizaje significativo. Según Ausubel, el aprendizaje ocurre cuando el nuevo conocimiento se relaciona con los conocimientos previos de los estudiantes.

CamScanner. Aplicación que permite convertir varias imágenes a un solo archivo pdf.

Conjunto solución de una inecuación. Hace referencia al conjunto vacío o a aquel conjunto con al menos un valor que verifica la inecuación.

Definición del concepto. Es una secuencia de palabras utilizadas para explicar con precisión un concepto.

Estudiantes de ciencias económicas/Estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas. Estudiantes de las carreras de Contador Público, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía.

Google Meet. Servicio de videoconferencia desarrollado por Google, similar a Skype.

Imagen del concepto. Es "algo" no verbal asociado en la mente con el nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del concepto, en caso de que la tenga.

Imagen del concepto evocada. Ante cierto estímulo se activa y se desarrolla una porción de la imagen del concepto, que no necesariamente forma un todo coherente; la porción de la imagen del concepto que se activa en un contexto dado se denomina imagen del concepto evocada.

Inecuaciones compatibles o consistentes. Son inecuaciones en las que existe algún número (de su campo de variación) que la verifica.

Linealidad. Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. La función $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ es una aplicación lineal, transformación lineal u operador lineal sí y solo si:

i) $f\left(x+y\right)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{V}$

ii) $f\left(\lambda x\right)=\lambda.f(x), \forall x\in\mathbb{V}, \forall\lambda\in\mathbb{K}$

Módulo o valor absoluto. Analíticamente es el mismo número real si es no negativo y su opuesto si es negativo.

Secundaria/o. Ciclo de educación obligatoria. También llamado en Argentina como Nivel Medio. Abarca estudiantes cuya edad está comprendida entre 12 y 18 años aproximadamente.

Slack: aplicación que sirve para la comunicación, en el que se pueden enviar archivos, etc. Puede descargarse en celulares como en la computadora.

INTRODUCCIÓN

Las inecuaciones y el valor absoluto forman parte de los contenidos prioritarios de los diseños curriculares en el nivel medio y superior, por lo que su enseñanza y aprendizaje resulta fundamental. Diversos autores (e.g. Tsamir & Almog, 2001; Sackur, 2004; Tsamir, Tirosh y Tiano, 2004) se han centrado en identificar los errores y dificultades que presentan los alumnos del nivel medio cuando resuelven inecuaciones; otros autores como Rodríguez et al. (2018) y Elia et al. (2016), en las concepciones de los estudiantes del secundario[1] que actúan como obstáculos a la hora de resolver problemas en los que interviene el valor absoluto. Algunos investigadores como Almog e Ilany (2012) analizaron ambos objetos en forma conjunta, estudiaron los métodos de los estudiantes de secundaria cuando abordan inecuaciones con valor absoluto, sus errores comunes, conceptos erróneos y las posibles fuentes de estos errores. Estos autores subrayan la importancia que tiene para los profesores el conocimiento de las concepciones (correctas o no) de los estudiantes sobre estos contenidos. Ya que permite comprender los procesos de pensamiento de los estudiantes y utilizar esta comprensión para mejorar la enseñanza de la matemática.

Esta tesis plantea un estudio exploratorio sobre las imágenes de los alumnos universitarios respecto a las inecuaciones de valor absoluto. Como se verá más adelante, los estudios didácticos de las inecuaciones con valor absoluto hacen referencia a las estrategias empleadas, los errores comunes, así como a las dificultades u obstáculos presentes en alumnos de la escuela secundaria. Sin embargo, se desconoce si algunas de las dificultades que se han identificado en estudiantes más jóvenes, persisten y se siguen manifestando entre estudiantes universitarios. Además, es poco conocido el tipo de imágenes que los estudiantes universitarios poseen sobre las inecuaciones con valor absoluto.

En la universidad, el uso de inecuaciones y valor absoluto (o también llamado módulo) está presente en muchas situaciones. Generalmente está presente en los programas de las primeras asignaturas del álgebra, cuando se estudian las propiedades del valor absoluto de un número real, como en

[1] También llamado en Argentina como Secundaria o Nivel Medio. Comprende estudiantes cuya edad varía entre 12 y 18 años aproximadamente.

$$|x| < k,\ \ k \in \mathrm{R}^+ \Leftrightarrow -k < x < k,$$

asociado a nociones de conjuntos acotados de números reales. O en cálculo diferencial, al definir e interpretar el límite de una función: $L \in \mathrm{R}$ es el límite de la función f en un punto de acumulación x_0 de su dominio si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \delta\ (\varepsilon) > 0\ /\ \forall x \in \mathrm{D}f\text{: } 0 < |\,x - x_0\,| < \ \delta \Rightarrow |\ f\,(x) - L\,| < \varepsilon,$$

en el que juegan un rol fundamental las nociones de entorno de un punto. Su uso puede encontrarse también en el campo de la probabilidad, al analizar, por ejemplo, el teorema de Chebyshev: la probabilidad de que el valor absoluto del desvío entre un valor de la variable aleatoria X y el promedio esperado μ_X, sea mayor o igual a k veces (k >1) la desviación estándar σ_X, es a lo sumo $\frac{1}{k^2}$, es decir:

$$P\left(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X\right) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k \in \mathrm{R},\ k > 1$$

Estos conceptos mencionados, son fuente de errores y sus causas pueden ser diversas.

Con frecuencia, la enseñanza de las inecuaciones con valor absoluto en la universidad se enfoca en la aplicación de sus propiedades, dejando de lado su comprensión por parte de los estudiantes. En los textos de este nivel (e.g, Piskunov, 1978; Rabuffetii, 2001; Gregoret et al., 2013; Zill et al., 2015) es común definir el valor absoluto como una regla de asignación de valores positivos a cualquier número real (Wilhelmi et al., 2007), a diferencia de cómo se presenta en la clase y en los libros de texto del nivel medio: distancia de un número al cero o como un número sin signo. En general no se establece alguna relación entre todas las definiciones, lo que puede originar diferentes concepciones en los alumnos. Basarse únicamente en la definición aritmética da lugar a que el estudiante no comprenda afirmaciones en las que interviene el valor absoluto (David, 2018).

Finalmente, no se puede dejar de observar que las inecuaciones con valor absoluto son un objeto que conjunta dos nociones matemáticas: las inecuaciones y el valor absoluto; nociones que de manera independiente presentan dificultades de aprendizaje para los estudiantes (vea por ejemplo Tsamir & Almog, 2000; Sackur, 2004; Elia et al., 2016). Tratar de clarificar el interrogante qué tipo de imágenes desarrollan los estudiantes universitarios que son expuestos a este tipo de instrucción matemática universitaria, mencionado en el párrafo anterior, es una de las razones que motivan esta investigación.

Un estudio didáctico de las inecuaciones con valor absoluto en el nivel universitario permitiría ampliar el conocimiento que se tiene en el campo de la matemática educativa acerca de qué tan persistentes son las dificultades que se han identificado en estudiantes de grados escolares previos. Además, un estudio de esta naturaleza ayudaría a concientizar a los docentes de las imágenes que presentan sus alumnos con respecto a las inecuaciones con valor absoluto, lo que serviría de base para plantear actividades que ayuden a superar dichas dificultades y promover imágenes conceptuales más adecuadas y robustas.

El objetivo general de este trabajo consiste en explorar las imágenes del concepto que evocan los estudiantes universitarios sobre las inecuaciones lineales con valor absoluto. Siempre que se haga referencia a las inecuaciones con valor absoluto a lo largo de esta tesis, se deben considerar a este tipo de inecuaciones.

De manera particular, se intentarán responder a las siguientes preguntas de investigación que orientarán el logro del objetivo propuesto:

- ¿Qué definiciones del valor absoluto, inecuación e inecuación con valor absoluto tienen los estudiantes del nivel universitario?

- ¿Qué imagen del concepto de valor absoluto e inecuación manifiestan los estudiantes universitarios?

- ¿Qué tipos de dificultades presentan los estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto?

- ¿Qué estrategias procedimentales utilizan con mayor frecuencia los estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto?

Para finalizar esta introducción, se describe brevemente la organización de los cinco capítulos que componen esta tesis:

El primer capítulo presenta los antecedentes de esta investigación, los cuales están constituidos por estudios didácticos referidos a las dificultades que estudiantes del nivel medio y universitario experimentan respecto al valor absoluto, las inecuaciones y las inecuaciones con valor absoluto. El segundo capítulo incluye un marco conceptual referido a las definiciones matemáticas de valor absoluto y sus propiedades, pero además incluye aquellas relacionadas a la *imagen del concepto* de Tall y Vinner (1981).

El capítulo tres se refiere al método de investigación empleado; en particular, se detallan las características del cuestionario escrito y las entrevistas semiestructuradas que se aplicó a los alumnos que participaron en la investigación, y el contexto en el cual se desarrolló el estudio. Asimismo, se menciona cómo se implementó el análisis de los datos obtenidos a través de los instrumentos y se muestran las soluciones a cada uno de los reactivos del instrumento. En el capítulo cuatro, están expuestos los resultados obtenidos a partir del análisis del material empírico y se realiza una categorización de las imágenes del concepto que los estudiantes manifiestan acerca de las inecuaciones con valor absoluto. En el siguiente capítulo, se discuten los resultados y se responde a la pregunta de investigación; se mencionan algunos aportes a la investigación sobre estudios de inecuación con valor absoluto y reflexiones con respecto a la enseñanza.

Al finalizar todos los capítulos, se tiene acceso a las referencias bibliográficas utilizadas y a la sección de anexos. Esta última incluye las preguntas del cuestionario escrito aplicado en sus dos versiones, así como las respuestas de los alumnos, la guía de preguntas de una estudiante para la entrevista y las transcripciones de todas las entrevistas.

CAPITULO 1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.0 Introducción

En este primer capítulo se realiza una exposición de las investigaciones en educación matemática sobre inecuaciones, valor absoluto e inecuaciones con valor absoluto que sirven como antecedentes para este trabajo de tesis. Se centró en estudios enfocados en el aprendizaje, específicamente, en los errores y dificultades que presentan los estudiantes del nivel medio y universitario cuando resuelven ejercicios relacionados con estos contenidos matemáticos.

1.1 Estudios previos

En la literatura disponible sobre estudios didácticos de las inecuaciones y el valor absoluto existen investigaciones que hacen hincapié en el análisis de su enseñanza (e.g. Sierpinska et al., 2011), en el conocimiento del profesor (vea por ejemplo Borello, 2007), mientras otros estudios se enfocan en el tratamiento de estos objetos matemáticos en los libros de texto (e.g. Monje et al., 2018). Es decir, estos objetos matemáticos han sido estudiados desde diversas perspectivas. Uno de los aspectos en los que esta investigación se centra consiste en los errores y dificultades que los alumnos universitarios manifiestan cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto. En la actualidad, no existen suficientes estudios didácticos que permitan conocer los errores y dificultades que presentan los alumnos del nivel universitario cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto. Por tal motivo, en este capítulo se presentará una revisión de los antecedentes referidos a errores y dificultades de los alumnos del nivel medio y universitario con relación a las inecuaciones; se continuará con las inecuaciones en las que intervienen el valor absoluto y lo que se conoce hasta el momento sobre las dificultades que experimentan los estudiantes universitarios cuando estudian ciertas definiciones en las que están presentes tales inecuaciones.

Es importante notar que algunos autores consideran a los errores y dificultades de los alumnos como sinónimos (Almog & Ilany, 2012), mientras que otros (e.g. Aponte Bello y Rivera Martínez, 2017) consideran al primero como una manifestación del segundo, postura que se considerará en esta tesis.

1.1.1 Dificultades que experimentan los alumnos del nivel medio con las inecuaciones con valor absoluto

La mayoría de los estudios sobre inecuaciones con valor absoluto exponen las dificultades o errores en los procedimientos de los estudiantes cuando se enfrentan a este objeto matemático. Sin embargo, muy poco de esos estudios se ocupan de analizar sus razones de ser. Algunas de esas problemáticas provienen específicamente del aprendizaje de las inecuaciones, motivo por el cual se mencionan las dificultades identificadas en los alumnos del nivel secundario (alumnos que comprenden 12 y 17 años aproximadamente). Posteriormente, se exponen las dificultades reportadas en la literatura de los alumnos de este nivel cuando se enfrentan a las inecuaciones con valor absoluto, categorizadas en dificultades algorítmicas y las relacionadas con la noción de valor absoluto.

1.1.1.1 Dificultades en el tratamiento de las inecuaciones

Tsamir y Almog (2001) realizaron un estudio con 160 alumnos de secundaria de Israel, a partir del cual han identificado cinco tipos de dificultades cuando éstos resuelven inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales y de raíz cuadrada. Dichas dificultades se mencionan a continuación:

a) *Con valores excluidos*. Hace referencia a las inecuaciones racionales (denominadores no nulos) y a las inecuaciones con raíces cuadradas (radicandos no negativos). En promedio, menos del 40% del estudiantado respondió correctamente a estos tipos de inecuaciones. Por ejemplo, ante la inecuación $\frac{x-5}{x+2}<0$, los estudiantes no lograron restringir la solución con $x \neq -2$ pero este valor excluido no influyó en las soluciones correctas a las desigualdades racionales, a pesar de no mencionarlo. Ocurriendo lo contrario en las inecuaciones radicales. También observaron en algunos casos que los estudiantes confunden las restricciones en estos tipos de inecuaciones. Es decir, exigen valores no negativos para los denominadores y radicandos no nulos.

b) *Con conectivos lógicos*. En las entrevistas realizadas por los investigadores a posteriori, los estudiantes afirmaron desconocer en qué casos utilizar los conectores "y", "o". Es así el caso de la inecuación compuesta $-3 \leq \frac{x-3}{x+1} \leq 3$, en la que se debe utilizar los conectores al principio y al final. Fue el caso con mayor número de respuestas incorrectas: uso indiscriminado de la conjunción y disyunción.

c) *Con signos de los factores productos – cocientes*. Incluye los casos de inecuaciones en las que intervienen productos o cocientes que resultan positivos o negativos. Para el caso del producto P(*x*).Q(*x*) > 0 (o P(*x*).Q(*x*) < 0), una forma de determinar los valores de *x* que verifican esa condición es mediante la aplicación de la propiedad de números reales: el producto de dos números reales es positivo (negativo) si ambos factores tienen igual (distinto) signo. Propiedad similar es válida para el cociente. En el estudio, el 15% de los estudiantes analizaron solo uno de los dos casos que pueden presentarse en estos tipos de inecuaciones. Por ejemplo, al resolver $(x-1)\ (x-2) < 0$ los estudiantes manifestaron $x-1>0$ y $x-2<0$, sin discutir el caso $x-1<0$ y $x-2>0$.

d) *Relacionadas con los denominadores de desigualdades racionales*. Con el objetivo de eliminar la variable del denominador y asegurarse de que sea positivo, los alumnos elevan al cuadrado ambos miembros, logrando respuestas incorrectas. Dos alumnos escribieron

$\frac{x-5}{x+2} < 0 \Rightarrow \left(\frac{x-5}{x+2}\right)^2 < 0^2 \Rightarrow (x-5)^2 < 0 \Rightarrow$ no hay solución. En la entrevista, los estudiantes explicaron que está prohibido multiplicar ambos miembros de la inecuación si se desconoce su signo. Elevar al cuadrado, elimina ese obstáculo.

e) *Relacionadas con ecuaciones* (se divide en tres subcasos):

- Resolver una ecuación en lugar de una inecuación. Muchas veces este procedimiento es válido si se tiene en cuenta lo que sucede a la derecha e izquierda de las raíces de la ecuación. Pero el 63% de los estudiantes concluyó erróneamente que la inecuación $x^2 - x + 1 > 0$ no tiene solución, ya que no existen raíces reales de $x^2 - x + 1 = 0$.
- Multiplicar o dividir por factores que no son necesariamente positivos. Son casos en los que los estudiantes multiplicaron ambos miembros de una

inecuación racional (por ejemplo, en $-3 \leq \frac{x-3}{x+1} \leq 3$) sin considerar el caso en que el signo fuera negativo. Otro ejemplo es $-8x > 0$, donde los estudiantes dividieron por -8 sin cambiar el sentido de la desigualdad.

- Formar conexiones sin sentido con raíces cuadráticas. Los estudiantes utilizaron analogías incorrectas con procedimientos válidos para las ecuaciones. Por ejemplo, en la inecuación $x^2 - 25 > 0 \Rightarrow x^2 > 25 \Rightarrow x > \pm 5$, en lugar de $x < -5$ o $x > 5$.

Este tipo de dificultad está presente en los estudiantes de nivel medio ya que las inecuaciones están subordinadas por las ecuaciones, en el sentido de que se las enseña como si fueran idénticas a las ecuaciones y tratadas de forma algorítmica únicamente, que no resulta fácil para el alumno entender, interpretar y controlar (Boero y Bazzini, 2004).

Garrote et al. (2004) llevaron a cabo un estudio con alumnos de primer año de bachillerato en España y han detectado errores y dificultades que, si bien no son referidos con esos nombres, se los etiqueta de la siguiente manera:

1) *Comprensión deficiente entre los conceptos de ecuación e inecuación*. Muchos de los estudiantes no logran diferenciar significativamente ambos objetos. Una diferencia es el signo que se utilizan: el signo = para las ecuaciones y los signos <, > (y estos dos últimos con igualdades) para las inecuaciones.

2) *Lectura de izquierda a derecha o de derecha a izquierda de una inecuación*. Es decir, dificultades en el reconocimiento de la equivalencia de las expresiones $x > 1$ y $1 < x$.

3) *Pasaje de lenguaje verbal al simbólico*. Esta dificultad presenta mayor complejidad en expresiones que incluye una doble desigualdad, por ejemplo en la proposición: n es menor que –2 y mayor o igual que –11.

4) *Falta de interpretación en el conjunto solución*. La interpretación que hacen los alumnos de la solución de una inecuación tampoco es la apropiada. Por ejemplo, los estudiantes consideran a un intervalo como el conjunto de números naturales o enteros comprendidos entre otros dos dados.

5) *Tratar las inecuaciones como las ecuaciones*. Ante la inecuación $-7x<5$, los alumnos pasan el -7 dividiendo al otro lado de la inecuación como si se tratase una ecuación, dejando de lado la necesidad de mantener el conjunto solución de la inecuación original.

6) *Operatoria en la aritmética*. Muchos estudiantes aún no han superado ciertas dificultades propias de la aritmética, como lo son la aplicación de la propiedad distributiva o el uso de la regla de los signos.

Una posible estrategia que está presente en el aula para resolver inecuaciones es el método gráfico. Sin embargo, para Sackur (2004), utilizarlo implica nuevas dificultades para los estudiantes del nivel secundario, asociadas específicamente con las funciones. Además, resolver inecuaciones gráficamente no involucra la misma matemática que hacerlo algebraicamente, por lo que el aprendizaje de la matemática es diferente en ambos casos.

1.1.1.2 Dificultades algorítmicas relacionadas con las inecuaciones con valor absoluto

Almog e Ilany (2012) llevaron a cabo un estudio sobre las inecuaciones con valor absoluto e identificaron los errores cometidos por los estudiantes del secundario del nivel 4 y 5 (edades entre 16 y 18 años), similares a las ya mencionadas en la sección anterior, y los clasificaron en cinco categorías. Cada una de ellas se ilustra enseguida a través de un ejemplo:

a) *Errores en los conectores lógicos*. Por ejemplo, ante la inecuación $|x|<3$, el alumno la resuelve y escribe $x<3 \;\; x>-3$ sin explicitar un conector lógico. En esta categoría se incluyen las dificultades en la comprensión del uso de y/o, lo que produce soluciones incorrectas.

b) *Eliminación de las barras de valor absoluto*. Aquí los estudiantes omiten o ignoran el signo de valor absoluto. Ante la inecuación $|x|\geq 0$, algunos alumnos escriben directamente $x\geq 0$.

c) *Considerar únicamente soluciones enteras*. En este caso, al resolver $|x|>3$, el estudiante escribe como solución $x \geq 4$ o $x \leq -4$ y explicita a 4, 5, 6 o −6, −5, −4.

d) *Sobregeneralización*. Los estudiantes consideran el tratamiento de resolución de desigualdades en forma análoga que las ecuaciones. Para la desigualdad mencionada en el inciso anterior, los alumnos se ven influenciados por la ecuación $|x|=3$, proponiendo como solución $x > \pm 3$.

e) *Falta de distinción entre positivo y negativo o entre no negativo y positivo*. Algunos estudiantes consideran que la inecuación $|x| \leq 0$ tiene como solución al conjunto vacío, pues el valor absoluto no puede ser negativo.

Además, estos autores indican que la capacidad de los estudiantes para resolver desigualdades de valor absoluto involucra tres componentes:

I. Estrategias de los alumnos para resolver desigualdades.

II. Comprensión de los estudiantes del valor absoluto.

III. Capacidad de los estudiantes para sintetizar los componentes I y II y aplicarlos en la solución de desigualdades con valor absoluto.

El estudio realizado les permitió identificar dificultades asociadas a cada una de estas componentes. Las de la componente I, son similares a las mencionadas en relación con las inecuaciones. Mientras que las componentes II y III, hacen referencia a:

- *La creencia de que la expresión dentro de las barras del valor absoluto es siempre positiva*. Los estudiantes no logran asumir la diferencia entre $|x|$ que puede ser positivo y cero, de *x* que puede ser positivo, negativo o cero. En el estudio, algunos alumnos escribieron $|x-2|<1 \Rightarrow x-2<1 \Rightarrow x<3$.
- *La creencia de que el valor absoluto es siempre positivo*. Esta noción errónea en los alumnos crea la idea que el valor absoluto es positivo y por ende no puede ser 0. Esto podría explicar el porqué en la inecuación $|x|>0$, los estudiantes escribieron que la

solución es el conjunto de números reales, mientras que en $|x| \le 0$, afirmaron que la solución es el conjunto vacío.

1.1.1.3 En relación con la noción de valor absoluto

Elia et al. (2016) detectaron en un estudio comparativo entre dos grupos de estudiantes, la concepción de valor absoluto como:

a) *Número sin signo*. Esta concepción podría ser un obstáculo epistemológico para la comprensión del valor absoluto por parte de los estudiantes. Tiene justificación en un contexto aritmético, lo que origina dificultades en la manipulación de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, que requiere de un pensamiento algebraico. Conclusión similar la exponen Chiarugi et al. (1990); afirman que esta noción no presenta grandes dificultades cuando se trabajan con números, pero sí dificulta cuando se pasa al campo algebraico.

b) *Distancia al cero*. Esta noción origina respuestas incorrectas como $-5 > x > 5$, $-5 > -x > 5$ o $-5 < x < 5$ en la inecuación $|x| > 5$. Para los autores, la influencia de obstáculos didácticos es más débil en aquellos estudiantes que hacen uso del significado de valor absoluto como distancia al cero con relación a aquellos que dominan el significado de este objeto como número sin signo. Este sentido obstaculiza el pensamiento discursivo que, de acuerdo con los autores, hace referencia al sistema teórico y al acceso al razonamiento matemático, la argumentación y la validación, e imposibilita la comprobación de soluciones de una inecuación. Sugieren desarrollar en la clase la definición de valor absoluto no sólo desde el punto de vista funcional, sino también como la distancia al cero o como una distancia entre dos números reales, y determinar las conexiones entre ellas.

c) *Definición formal*. Es decir, considerar al valor absoluto como una función. Para los estudiantes, es más fácil comprender el concepto de valor absoluto visualizándolo, como la distancia desde cero en una recta numérica, en lugar de utilizar símbolos algebraicos para representarlo como una función. En la escuela secundaria surge la necesidad de desarrollar el punto de vista funcional del valor absoluto, como así también su definición como distancia desde 0 o como una distancia entre dos números reales y sus conexiones.

1.1.2 Dificultades que experimentan los alumnos del nivel universitario

La problemática de los estudiantes en el aprendizaje de las inecuaciones en el nivel escolar no desaparece en el ámbito universitario (Halmaghi, 2011). A continuación expongo algunas de las dificultades y errores en relación con las inecuaciones e inecuaciones con valor absoluto en el nivel universitario.

1.1.2.1 Dificultades en el tratamiento de las inecuaciones en general

Dependiendo del tipo de inecuaciones, es posible identificar diversas dificultades y errores. Por ejemplo, en las inecuaciones racionales, Anggoro y Prabawanto (2019) han detectado falencias en la comprensión conceptual de las inecuaciones racionales en estudiantes de pregrado en relación al pasaje del lenguaje gráfico al algebraico y recíprocamente. Los autores concluyen tres categorías referidas a las dificultades y a los conceptos erróneos asociados:

a) *Manipulación algebraica – detectar restricciones*. Multiplicar ambos miembros de la inecuación con denominador sin partición en casos.

b) *Simplificación*. Noción errónea de que el numerador y el denominador tienen factor nulo.

c) *Resolución gráfica*. Creencia en que los problemas de inecuaciones deben ser presentados de forma algebraica, ausencia del uso de una representación gráfica útil para resolver un problema de desigualdad racional dado algebraicamente.

1.1.2.2 Dificultades en el tratamiento de las inecuaciones con valor absoluto

En la universidad, el uso de valor absoluto está asociado a la resolución de inecuaciones. Las actividades propuestas de las inecuaciones con valor absoluto generalmente se dividen en dos tipos de tareas: resolver desigualdades de la forma $|ax+b|<c$ y/o $|ax+b|>c$ o en sentido amplio $|ax+b|\leq c$, $|ax+b|\geq c$ en las que son necesarias el uso de dos propiedades que, en general, no son demostradas en clases:

$$|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a \text{ (donde } a>0\text{) y } |x|\geq a \Leftrightarrow x\geq a \text{ o } x\leq a \text{ (} a>0\text{).}$$

El foco de la enseñanza universitaria está en la aplicación de técnicas en las que muchas veces su uso no es fundamental o incluso, cuando es necesario, los estudiantes no pueden discriminar qué propiedad utilizar. Chiarugi et al. (1990) manifiestan que el valor absoluto se introduce sin motivaciones válidas, situaciones que no dejan comprender su significado y utilidad. Concebir al valor absoluto como una técnica, puede ser insuficiente para que los estudiantes logren comprender afirmaciones en los cuales este objeto está presente. En este sentido, David (2018) afirma que ante la inecuación $|x-a|<\delta$, posiblemente el estudiante no pueda asociar los valores que verifican la inecuación con los valores de la recta numérica que se encuentran a una distancia de a menor que δ. Para la autora, considerar el valor absoluto como una distancia en la recta numérica puede favorecer la visualización de las soluciones de una inecuación con valor absoluto. Del mismo modo, en el estudio llevado por Chiarugi et al. (1990) se muestra que los estudiantes obtuvieron mejores resultados en tareas establecidas en un contexto geométrico que en el algebraico.

Algunos autores critican la definición usual de valor absoluto como función porque resulta difícil de entender para aquellos estudiantes con dificultades respecto a las funciones definidas por partes (Gagatsis y Thomaidis, 1994). Para Sierpinska et al. (2011) la definición de valor absoluto como raíz cuadrada, es decir $|x|=\sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$, evita estas dificultades, pero requiere la enseñanza de desigualdades cuadráticas que muchas veces provocan otros conflictos o no forman parte de los planes de estudios actuales. En algunos libros de texto utilizados en los cursos del nivel universitario, la noción de valor absoluto no es definida como distancia, sino que es considerada como su interpretación geométrica (Sadovsky y Guber, 2010) y en otros, la distancia entre dos números reales es definida a partir del valor absoluto (Gregoret et al., 2013). Las nociones de valor absoluto como un número positivo y como distancia al cero persisten en alumnos del nivel superior, pero se le añade a éstas, la distancia entre dos puntos (David, 2018).

1.2 Delimitación del problema de investigación

La mayoría de los estudios sobre inecuaciones con valor absoluto se enfocan en las dificultades algorítmicas y nociones conceptuales (correctas e incorrectas), que presentan los estudiantes del Nivel Medio cuando resuelven ejercicios y problemas referidos a estos objetos. El propósito de este estudio consiste en conocer las imágenes que tienen alumnos universitarios de primer año de ciencias económicas de una universidad de Argentina, sobre las inecuaciones con el valor absoluto. Con el fin de conocer las imágenes que evocan estos estudiantes cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto, se plantean:

1.2.1 Objetivo General

Explorar las imágenes del concepto que presentan los estudiantes universitarios sobre inecuaciones lineales con valor absoluto.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Identificar las definiciones de valor absoluto, inecuación, inecuación con valor absoluto que tienen los estudiantes universitarios.
- Determinar las imágenes del concepto de valor absoluto e inecuación que manifiestan los estudiantes universitarios.
- Detectar las dificultades que presentan los estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto.
- Identificar las estrategias procedimentales más frecuentes que utilizan los estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto.

1.2.2 Pregunta de investigación

¿Cuáles son las imágenes del concepto que evocan los estudiantes de ciencias económicas sobre las inecuaciones lineales con valor absoluto?

1.3 Conclusión

Hay un número limitado de investigaciones relacionadas con las imágenes y particularmente con las dificultades que tienen los estudiantes del nivel universitario en cuanto a las inecuaciones con valor absoluto. La mayoría de los estudios didácticos se centran en alumnos del nivel secundario. Una de las aportaciones de esta tesis a la investigación didáctica nos permitirá ampliar el conocimiento sobre un aspecto no muy conocido de la enseñanza de la matemática, ya que, pretende identificar las imágenes que evocan los estudiantes de ciencias económicas de una universidad de Argentina, al enfrentarse a tareas matemáticas específicas relacionadas con las inecuaciones con valor absoluto.

CAPITULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.0 Introducción

En este capítulo se presentan los conceptos y definiciones provenientes de la matemática y su didáctica, claves para el desarrollo y justificación de esta tesis. El capítulo contiene dos secciones: la primera relacionada con definiciones de valor absoluto y sus propiedades; la otra, con algunos conceptos e interpretaciones de la noción de *imagen del concepto* propuesta inicialmente por Tall y Vinner (1981).

2.1 Valor absoluto

2.1.1 Definiciones de valor absoluto

En esta sección se presentan las distintas definiciones de la noción de valor absoluto en diversos contextos, también incluye su interpretación gráfica y sus propiedades.

Para Spiegel (1992, p. 2) "el valor absoluto de un número es el correspondiente al número prescindiendo del signo que le afecte. El valor absoluto se representa encerrando el número entre dos barras verticales". Por ejemplo $|-2| = 2, |+0,5| = 0,5$. En Noriega (2013, p. 56), "el módulo de un número real *a* significa, hablando con poca precisión, el mismo número *a* pero sacándole el signo *menos* si lo tuviese". Además, propone la siguiente definición: "Dado un número real a, llamaremos módulo o valor absoluto de a al mismo a si a es positivo o cero, y $-a$ si a es negativo". Simbólicamente:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

De la definición se desprende que el módulo de un número real es siempre mayor o igual que cero, es decir, no negativo. Este autor menciona que el módulo tiene una sencilla interpretación en la recta real: es la distancia que hay entre a y 0 (véase figura 1).

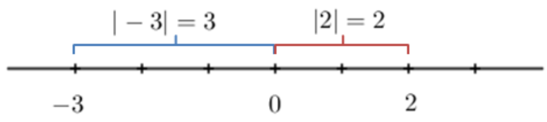


Figura 1. Interpretación del valor absoluto en la recta, adaptado de Noriega (2013)

Siguiendo al mismo autor, en términos de raíces cuadradas, el valor absoluto tiene la siguiente caracterización: para todo número real a es: $|a| = \sqrt{a^2}$. Así $|7| = \sqrt{7^2} = 7$, $|-5| = \sqrt{(-5)^2} = 5$. Esta forma de definir al valor absoluto se lo puede ver como la composición de dos funciones: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / g(x) = \sqrt{x}$, es decir, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ / \forall x \in \mathbb{R} : (g \circ f)(x) = g\left[f(x) \right] = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$. Note que el dominio e imagen de la función compuesta coinciden con el dominio e imagen de la función valor absoluto, respectivamente, que se mencionará en páginas posteriores. Por otro lado, en la figura 2, se ha considerado por separado a las funciones $y_1 = |x|$ e $y_2 = \sqrt{x^2}$ y se observa que representan la misma función.

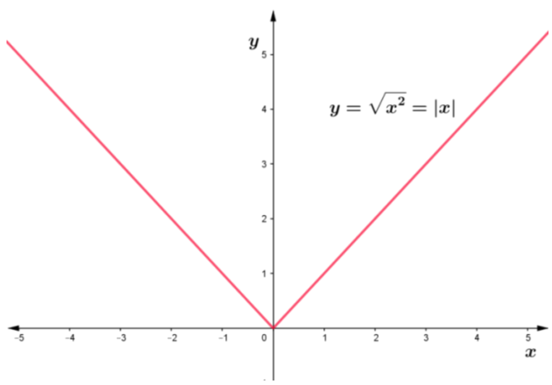


Figura 2. Gráfica de la función valor absoluto.

Demostración de $|a| = \sqrt{a^2}, \forall a \in \mathbb{R}$

- Sea $a \geq 0$; $a.a = a^2 \Rightarrow$ por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{a^2} = a$. Luego $|a| = \sqrt{a^2} = a$ (1)

- Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, por lo demostrado en (1), $\sqrt{(-a)^2} = -a$ (2). Por propiedad del cuadrado de números reales, $a^2 = (-a)^2$. Reemplazando en (2), $\sqrt{a^2} = -a$. Luego $|a| = \sqrt{a^2} = -a$

En conclusión $|a| = \sqrt{a^2}, \forall a \in \mathbb{R}$

Sadosky y Guber (2010) definen al valor absoluto o módulo de un número real como el número real considerado con signo positivo. Se le representa con dos barras verticales. Por ejemplo, $|-4| = 4$, $\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$, $|-4+5| = 1$, $|-4+3| = 1$. También mencionan que si se representan los números reales mediante puntos de una recta, el valor absoluto da la distancia del punto representado al origen 0. Si $|a| = 4$ puede ser $a = 4$ o $a = -4$. En estos casos, la distancia del punto de abscisa 4 (o –4) al origen (cero) es 4.

Como el módulo o valor absoluto de un número real x es siempre positivo, Gregoret et al. (2013) afirman que existe la posibilidad de expresarlo como:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \text{ o bien } |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \text{ o también } |x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Y a continuación, los autores exponen la definición de distancia entre dos números reales x e y como el número no negativo $d(x, y) = |x - y|$

Stewart et al. (2012) definen al valor absoluto, denotado por $|a|$, como la distancia de a a 0 en la recta de números reales (ver figura 3). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que $|a| \geq 0$; posteriormente declara la definición ya propuesta en Noriega (2013). Así la distancia del –3 al 0, $d(-3, 0)$, es 3 por lo que $|-3| = 3$. Análogamente para $d(5, 0) = |5| = 5$ (ver figura 3).

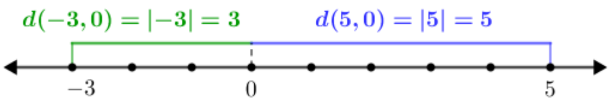


Figura 3. Definición de valor absoluto como distancia al cero.

Algo similar se encuentra en Courant y Robbins (1947): “La distancia de un punto A del origen, considerada como positiva, se llama valor absoluto de A y se indica con el símbolo $|\mathrm{A}|$. Es decir, si es $\mathrm{A} \geq 0$, se tiene $|\mathrm{A}| = \mathrm{A}$; y si es $\mathrm{A} \leq 0$, se tiene $|\mathrm{A}| = -\mathrm{A}$” (p. 65).

Otra forma de definir al valor absoluto es definiéndolo como una función por partes o a trozos como se puede ver en Gentile (1976, p. 2): “Vamos a definir, en forma natural, una aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que denotaremos por $r \to |r|$ y llamaremos valor absoluto”. El autor menciona también como definición:

$$|r| = \begin{cases} r \text{ si } r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ -r \text{ si } r < 0 \end{cases}$$

Courant y John (1979) afirman que el valor absoluto de un número real *x* puede definirse como el mayor de los números *x* y –*x* cuando *x* no es cero, y es igual a ambos cuando *x* es cero. En otras palabras, esto es similar a lo que proponen Aiprantis y Burkinshaw (1998, citado en Withelmi et al., 2007) cuando definen al valor absoluto utilizando la función máximo:

$$|x| = máx\ \{x, -x\}$$

Por último, Rey Pastor et al. (1963) denominan valor absoluto de α, indicado por $|\alpha|$, como el número positivo entre los dos $+\alpha$ y $-\alpha$ si $\alpha \neq 0$, agregando además $|0| = 0$. Proponen como ejemplo $|-4| = 4$ pues de los dos números, – 4 y – (–4) = 4, el segundo es el positivo.

2.1.2 Propiedades del valor absoluto

Es necesario mencionar y demostrar algunas propiedades del módulo de un número real, ya que se las utilizará a lo largo del desarrollo de esta investigación. Para ello se considera las definiciones de valor absoluto propuestas por Noriega (2013). Para cualquier número real *x* se verifican:

i. El valor absoluto de un número real es no negativo. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 0$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 0 \text{ (pues } x < 0) \Rightarrow |x| > 0 \Rightarrow |x| \geq 0$, por definición de la relación mayor o igual.

ii. Dos números reales opuestos tienen el mismo valor absoluto. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = |-x|$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$

Aplicando sucesivamente la definición de valor absoluto

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x;\ |-x| = -(-x) = x, (-x \leq 0) \Rightarrow |x| = |-x|$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x; |-x| = -x, \text{ (pues} -x > 0) \Rightarrow |x| = |-x|$

$$\therefore \forall x \in \mathbb{R} : |x| = |-x|$$

iii. Todo número real está comprendido entre su valor absoluto y el opuesto de éste**.**

$\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|$

Demostración

$x = 0 \Rightarrow -|x| = -x = |-x| = |x|, (-0 = 0)$

$x > 0 \Rightarrow -|x| = -x < x = |x|$

Se ha utilizado la definición de valor absoluto y la relación de orden entre números positivos y negativos y nuevamente la definición de valor absoluto.

$x < 0 \Rightarrow -|x| = -(-x) = x < -x = |-x| = |x|$

Por definición de valor absoluto, relación de orden entre números positivos y negativos. Definición de valor absoluto. Propiedad *ii*)

$$\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|$$

Las siguientes propiedades son válidas para la desigualdad en sentido estricto.

iv. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^{+} : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Demostración

Para demostrar esta propiedad se podría seguir el mismo razonamiento utilizado en las propiedades previas, pero ahora utilizaremos la definición de valor absoluto como raíz cuadrada para demostrarla.

- Implicación directa

$$|x| \le a \Rightarrow \sqrt{x^2} \le a \Rightarrow \left(\sqrt{x^2}\right) \le a^2 \Rightarrow x^2 \le a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 \le 0 \Rightarrow (x-a)(x+a) \le 0$$

Por regla de los signos del producto:

$$\left[(x-a) \le 0 \wedge (x+a) \ge 0\right] \vee \left[(x-a) \ge 0 \wedge (x+a) \le 0\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[x \le a \wedge x \ge -a\right] \vee \left[x \ge a \wedge x \le -a\right] \Rightarrow (-a \le x \le a) \vee F \Rightarrow -a \le x \le a,$$ por definición de conjunción y de la disyunción.

- Implicación recíproca

Si $-a \le x \le a \text{ con } a > 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow -a \le x \wedge x \le a \Rightarrow 0 \le x + a \wedge x - a \le 0$

Por regla de los signos del producto

$$(x+a)(x-a) \le 0 \Rightarrow x^2 - a^2 \le 0 \Rightarrow x^2 \le a^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} \le \sqrt{a^2} \Rightarrow |x| \le |a| = a,$$ por diferencia de cuadrados, la raíz cuadrada es una función creciente, definición de valor absoluto, por hipótesis *a* es positivo.

Geométricamente esta inecuación significa que *x* se encuentra en el intervalo cerrado $-a \le x \le a$ con centro 0 y longitud 2*a*. La desigualdad establece que *x* ni su opuesto $-x$ puede exceder al número real *a* (Courant y John, 1979). Así, $|x - x_0| \le a, x_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$ representa al conjunto de números reales *x* que se encuentran en el intervalo cerrado $[x_0 - a \,;\, x_0 + a]$ de centro x_0 y amplitud 2*a*. De la misma manera, el entorno de un punto x_0 y radio *a*, es el intervalo $(x_0 - a \,;\, x_0 + a)$ que puede ser expresado por la inecuación $|x - x_0| < a, x_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$

v. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+ : |x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a \vee x \le -a$

$$|x| \ge a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \ge a \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2}\right) \ge a^2 \Leftrightarrow x^2 \ge a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+a) \ge 0 \wedge (x-a) \ge 0\right] \vee \left[(x+a) \le 0 \wedge (x-a) \le 0\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[x \ge -a \wedge x \ge a\right] \vee \left[x \le -a \wedge x \le a\right] \Leftrightarrow x \ge a \vee x \le -a$$

Se ha utilizado la definición del valor absoluto, diferencia de cuadrados, regla de los signos, definición de conjunción y disyunción.

Observaciones:

- Las propiedades iv) y v) son válidas para una desigualdad en sentido estricto.
- En general $|x+y|$ no es igual a $|x|+|y|$, es decir el valor absoluto de la suma de dos números reales no siempre es igual a la suma de sus valores absolutos, como puede verse en el ejemplo $|-3+2|=|-1|=1$ y $|-3|+|2|=3+2=5$. Además, $|\lambda x| \neq \lambda |x|$ para $\lambda < 0$. Esto nos lleva a decir que el valor absoluto no verifica la linealidad, es decir, no es un operador lineal.[2]

2.1.3 Desigualdades en las que intervienen el signo de módulo

Anteriormente se mencionó que el valor absoluto de un número real se puede interpretar geométricamente como la distancia del punto, que representa el número x, al origen de la recta. Por ejemplo, si $|x|=5$, se tienen solamente dos puntos $x = 5$ o $x = -5$, los que se encuentran a 5 unidades del origen.

Ahora bien, la desigualdad $|x|<5$ significa que se buscan todos los valores reales de la incógnita x cuyas distancias al origen sea menor a 5 unidades de longitud. Como puede verse en la gráfica de la figura 4, todos esos puntos se encuentran en el intervalo abierto $(-5;5)$. Todo número de ese intervalo es solución de la inecuación dada. El conjunto solución también puede expresarse con una doble desigualdad $-5<x<5$.

Figura 4. Intervalo de variación de x en la ecuación $|x|<5$.

En resumen, se explicitó las distintas definiciones e interpretaciones del valor absoluto: número sin signo, como distancia, como regla de asignación, como función (máximo o composición de la función de segundo grado y de la raíz cuadrada) y sus correspondientes propiedades. Su conocimiento permitirá identificar en los estudiantes

[2] En Rojo (1995): sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. La función $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ es una aplicación lineal, transformación lineal u operador lineal sí y solo si:

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{V}$$

$$f(\lambda x)=\lambda.f(x), \forall x\in\mathbb{V}, \forall\lambda\in\mathbb{K}$$

aquella definición del concepto y la imagen de valor absoluto e inecuaciones con módulo. Para alcanzar este objetivo, se definen conceptos básicos relacionados con la imagen del concepto propuesto por Tall y Vinner (1981).

2.2 Imagen del concepto

Muchas veces los estudiantes tienen asociadas ciertas nociones, ideas, o experiencias a un objeto matemático, que se ajustan parcialmente o no a su definición formal. Es decir, no siempre esas nociones son coherentes y se ajustan a la lógica propia de la matemática. El conjunto de todas ellas da lugar a la imagen del concepto.

Como señala Vinner (1991), cuando un sujeto observa o escucha el nombre de un concepto, esto resulta un estímulo para su memoria y evoca algo. Por lo general, no es la definición del concepto, incluso en el caso de que el concepto tenga una definición. La imagen del concepto es "algo" no verbal asociado en la mente del sujeto con el nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del concepto, en caso de que la tenga. Las representaciones visuales, las "fotos" mentales, las impresiones y las experiencias asociadas al nombre del concepto pueden ser trasladadas a formas verbales. Pero es importante recordar que estas formas verbales no fueron las primeras cosas evocadas en la memoria del sujeto, sino aparecen en una etapa posterior. Así, al escuchar la palabra mesa, probablemente el sujeto piense inicialmente en la imagen de una mesa y luego en ciertas características como: tiene cuatro patas, permite comer en ella, etc.

Los investigadores Tall y Vinner (1981) definen la **imagen del concepto** como la estructura cognitiva total asociada con el concepto matemático. Incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y procesos asociados al concepto. Se construye a través de experiencias de todo tipo y se ve modificada cuando el individuo se enfrenta a nuevas situaciones y madura, es decir dispone de la capacidad de afrontar a tales situaciones. Por ejemplo, es común que los alumnos afirmen "la multiplicación siempre es mayor que los factores", noción que deberá modificar cuando se enfrente a productos cuyos factores son números racionales menores que la unidad. Todos los atributos mentales asociados con un concepto, ya sean conscientes o inconscientes, deben incluirse en la imagen del concepto. En este sentido, sólo se puede hablar de una imagen del concepto con relación a cada persona y al contexto en particular (Vinner, 1991)

Vinner (1983) propone algunos detalles sobre la imagen del concepto. Si C representa un concepto y P representa una persona, entonces la imagen mental de P respecto a C es el conjunto de todas las imágenes que alguna vez se han asociado con C en la mente de P. Además de la imagen mental de un concepto, puede haber en la mente de P un conjunto de propiedades asociadas con ese concepto C (así alguien podría pensar que una altura de un triángulo siempre debe estar dentro del triángulo). El conjunto de propiedades junto con la imagen mental se llama imagen del concepto.

Ahora bien, ante cierto estímulo, solo se activa y se desarrolla una porción de la imagen del concepto, que no necesariamente forma un todo coherente; la porción de la imagen del concepto que se activa en un contexto dado se denomina **imagen del concepto evocada.** Solo cuando se evocan aspectos conflictivos simultáneamente, debe haber una sensación real de conflicto o confusión.

En la formación de conceptos, para un determinado individuo, adquirir un concepto significa formar una imagen del concepto . Saber de memoria la definición de un concepto no garantiza el entenderlo. Entender correctamente un concepto significa tener una imagen del concepto, cierto significado debería estar asociado con palabras. Saber, por ejemplo, la definición del conjunto de partes de un conjunto dado como el conjunto de todos los subconjuntos de éste, no significa nada hasta que el sujeto haya construido algunos conjuntos de partes. Por lo tanto, la imagen del concepto del conjunto de partes incluye algunos recuerdos de construcciones de algunos conjuntos de partes (Vinner, 1991). En este sentido, Valdivé y Garbin (2008) afirman que la imagen del concepto requiere de tareas, situaciones, problemas que lo hagan emerger, de las representaciones, contextos, métodos, conceptos asociados a la noción, y de los procedimientos que el sujeto utiliza para dar respuestas a dichos tareas o situaciones. Caracterizan a la imagen del concepto como:

- Las ideas que el sujeto asocia al objeto matemático.
- Las representaciones asociadas (dibujos, gráficas, palabras, gestos, símbolos) que hace emerger y las representaciones propias del objeto.
- El conjunto de procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones algebraicas) y métodos (matemáticos) que el sujeto emplea ante una tarea.

- El contexto (aritmético, geométrico, analítico o algebraico) que el sujeto asocia ante la situación problema. Por ejemplo, ante la inecuación $|x-3|=2$, un estudiante puede tener presente la noción de valor absoluto en un contexto aritmético, por lo cual el procedimiento que utilizaría es $x - 3 = 2$, con lo que obtiene solo uno de los dos valores que son soluciones de la inecuación.

Sin embargo, la **definición de un concepto matemático** es una secuencia de palabras utilizadas para explicar con precisión ese concepto, fruto de la evolución histórica (Tall y Vinner, 1981, Azcárate y Camacho, 2003). Como expresa Vinner (1983), la definición de un concepto es una definición verbal que explica con precisión el concepto de forma no circular. Puede ser aprendido por un individuo de manera rutinaria o significativamente[3] y relacionado en mayor o menor grado con el concepto en su conjunto. La definición del concepto abarca tanto la definición formal como también, una reconstrucción personal por parte del alumno de una definición (definición personal); es entonces la forma de palabras que el estudiante usa para su propia explicación de su imagen del concepto (evocado). Ya sea que la definición del concepto le sea dada (definición formal) o construida por él mismo, puede variarla de vez en cuando. De esta manera, una definición de concepto personal puede ser diferente a la definición del concepto formal, siendo esta última una definición de concepto que es aceptada por la comunidad matemática. Una definición de concepto da origen a la propia imagen del concepto del individuo.

Desde el punto de vista de Vinner (1991), la estructura cognitiva de un sujeto está compuesta por dos celdas (imagen del concepto y definición del concepto). La figura 5 se refiere al largo proceso que conlleva la formación de un concepto matemático, una constante interacción entre las celdas de la definición del concepto y la imagen del concepto. Sin embargo, en la figura 6 se muestra lo que pareciera que esperan los profesores de diferentes niveles: un proceso de una sola dirección en la formación del concepto, es decir, esperan que la imagen del concepto se forme a partir de la definición del concepto y que será controlada completamente por ésta.

[3] Según Ausubel D., aprender significativamente se refiere al tipo de aprendizaje en el que el individuo construye su conocimiento, relaciona sus conocimientos previos con los nuevos, adaptándolos.

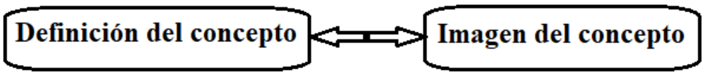


Figura 5. Interacción entre la definición del concepto y la imagen conceptual (Vinner, 1991)

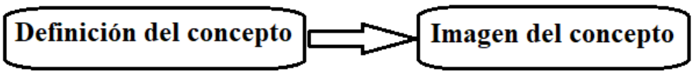


Figura 6. Crecimiento cognitivo de un concepto formal (Vinner, 1991)

Ante una tarea matemática, el docente espera (erróneamente) que la definición del concepto se active en el alumno y las imágenes del concepto se presenten en un segundo plano, sin embargo eso no suele ocurrir (véase figura 7). Usualmente el estudiante no utiliza la celda de la definición del concepto, incluso si no está vacía, responde de acuerdo a su imagen del concepto (ver figura 8). Pero puede suceder que un alumno responda correctamente con la definición formal de un objeto, pero al mismo tiempo puede tener una imagen conceptual inapropiada de él (Tall & Vinner, 1981) o más aún, no tenerla siempre que algún significado no esté asociado con el nombre del concepto (Vinner, 1991). Dependiendo del carácter, adecuado o no, de las imágenes, propiedades y procesos que componen la imagen del concepto, puede llevar a la aparición de errores e inconsistencias (Bermúdez, 2013).

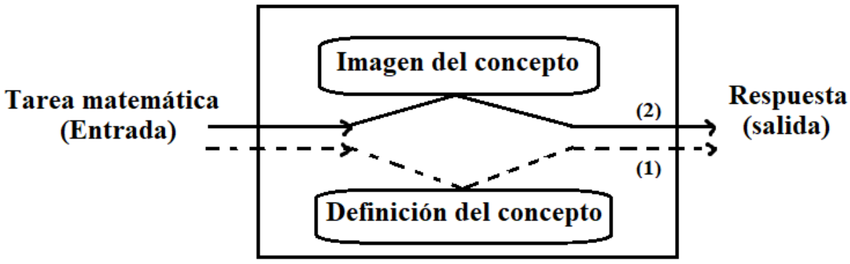


Figura 7. Modelo de actividad mental de los estudiantes esperado por los docentes, adaptado de Vinner y Hershkowitz (1980)

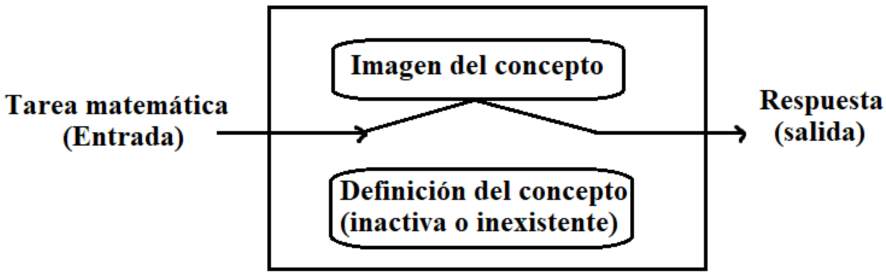


Figura 8. Modelo mental real de la mayoría de los estudiantes, adaptado de Vinner y Hershkowitz (1980)

Un método natural para conocer la definición del concepto de cada individuo es a través de una pregunta directa (¿qué es el valor absoluto de un número real?, ¿qué es una inecuación?, ¿qué es una inecuación con valor absoluto?, por ejemplo). Esto es porque las definiciones son verbales y explícitas. Por otro lado, para conocer la imagen del concepto de cada sujeto, se deben utilizar interrogantes indirectos ya que la imagen del concepto puede ser no verbal e implícita.

De acuerdo con Tall (1988), si los estudiantes se encuentran con un concepto conocido en un nuevo contexto (por ejemplo, trazar la recta tangente a una curva cualquiera, es decir modificar el contexto geométrico al contexto del cálculo diferencial), es la imagen del concepto – con todos los supuestos implícitos abstraídos de contextos anteriores – la que responde a la tarea. Si la imagen se basa en experiencias que entran en conflicto con la definición formal, esto puede conducir a respuestas que están en desacuerdo con la teoría formal. Por ejemplo, al solicitar a un alumno la tarea de trazar la recta tangente a la gráfica de una función en un punto *a*, en la que a derecha e izquierda de *a* la regla de asignación es distinta, el estudiante puede afirmar que no existe recta tangente porque en ese punto hay dos fórmulas de asignación o porque la recta tangente debe tocar solamente en un punto, lo que es aceptado en el contexto geométrico cuando se traza la recta tangente a una circunferencia. Siguiendo al mismo autor, la gran variedad de imágenes de conceptos individuales sugiere que no es simplemente un caso de transmitir el conocimiento matemático de manera formal. Una alternativa es dar a los estudiantes experiencias más ricas para que puedan formar un concepto más coherente. Pero esto tampoco es fácil aunque lo parezca, ya que implica un equilibrio entre la variedad de ejemplos y contraejemplos necesarios para obtenerlo.

2.3 Conclusiones

Se definió al valor absoluto de diversas maneras: como un número sin signo, como una distancia, como raíz cuadrada (composición de dos funciones) y como una regla de asignación o función definida por tramos. Se han enunciado y demostrado ciertas propiedades de este objeto.

La definición de imagen del concepto será el punto de partida para lograr el objetivo de esta tesis: explorar las imágenes del concepto que evocan los estudiantes de ciencias económicas sobre las inecuaciones lineales con valor absoluto. De acuerdo con los autores mencionados, la imagen del concepto incluye las imágenes mentales, los procedimientos, ideas, registro de ejemplos, representaciones asociadas a un determinado objeto. Entonces, para alcanzar el logro del objetivo se analizarán precisamente las ideas, procedimientos, entre otros, que proponen los alumnos ante ciertas actividades. Como se mencionó, la imagen del concepto evocada en una determinada tarea dependerá del sujeto que estamos hablando y del contexto. De allí que nos referiremos de aquí en adelante como las imágenes del concepto.

CAPÍTULO 3. MÉTODO

3.0 Introducción

En este capítulo se hace referencia a los dos instrumentos que se utilizaron para la recolección de datos, las características de los estudiantes participantes, las razones que fundamentan los reactivos en el cuestionario escrito y los procedimientos de ejecución y análisis.

El primer instrumento consistió en proponer un cuestionario escrito con diversos reactivos, algunos de los cuales fueron tomados y adaptados de la literatura especializada, y otros son de elaboración propia. Dichos reactivos se relacionan con las nociones de valor absoluto, inecuación e inecuación con valor absoluto. El instrumento fue reelaborado según los resultados de una prueba piloto con cuatro estudiantes de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). En la prueba definitiva de este instrumento participaron 21 estudiantes[4]. Posteriormente se realizaron entrevistas personales semiestructuradas a siete estudiantes seleccionados (cuyos seudónimos son Ailen, Claribel, Claudia, Guido, Juan Esteban, Mateo y Miguel), basadas en el cuestionario. Estas entrevistas fueron aplicadas a través de la aplicación *Google Meet*. Las respuestas a los cuestionarios y las entrevistas fueron sometidas a un análisis de datos de tipo cualitativo, lo que permitió construir una categorización de los procedimientos y las respuestas de los estudiantes.

3.1 Características de los participantes

En esta investigación participaron, de manera voluntaria, 24 estudiantes que cursaban la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica (AGA), asignatura que forma parte del primer año, primer cuatrimestre del ciclo común a las carreras de Contador Público, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía en la Facultad de Ciencias Económicas de la UNNE[5], situada en Resistencia – Chaco – Argentina. Al momento de participar en este estudio, los estudiantes tenían entre 17 y 19 años,

---

[4] Seudónimos de los estudiantes participantes: Ailen, Anabella, Bautista, Camila, Carmelo, Claribel, Claudia, Guadalupe, Guido, Hynek, Joaquín, Juan Esteban, Katia, Lorena, Ludmila, Maria, Mateo, Miguel, Salomón, Santiago y Virginia.

[5] Serán llamados también alumnos de ciencias económicas o estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas.

aproximadamente. Estos estudiantes tuvieron contacto con las inecuaciones con valor absoluto a través de videos explicativos de conceptos, propiedades del valor absoluto sin demostración –mencionadas en el capítulo 2 de esta investigación– y ejercicios, publicados en el aula virtual de la asignatura, ya que las clases presenciales han sido suspendidas debido a la contingencia de la pandemia de COVID–19.

Los estudiantes participantes cuentan con conocimientos previos sobre inecuaciones y valor absoluto (definición aritmética), ya que fueron trabajados en el Nivel Medio. Además, la definición de valor absoluto que con frecuencia se presenta en los cursos de AGA se refieren a una regla de asignación, según el número real sea positivo, negativo o cero y la distancia de ese número al cero, como su interpretación geométrica. Las actividades de inecuaciones con valor absoluto que se les proponen a los estudiantes en AGA tienen como objetivo analizar si dichas inecuaciones determinan conjuntos acotados, y en ese caso, hallar sus cotas, extremos, elementos y clasificarlo como entorno o no. Todos estos contenidos forman parte de la unidad 1: números reales del programa de la asignatura.

3.2 Instrumentos para la recolección de datos

En este estudio se utilizaron dos instrumentos para la recolección de datos: cuestionario escrito (ver anexos 1 y 3) y entrevistas semiestructuradas (ver anexo 4). Algunos reactivos del cuestionario escrito fueron extraídos de la literatura especializada; parte de ellos aplicados sin modificación, propuestos por los autores, y otros fueron adaptados. Otros reactivos son de elaboración propia. Estos reactivos transitaron por una etapa de prueba piloto con la intención de observar cómo funcionaban; es decir, saber si los reactivos eran claramente entendidos por los estudiantes y proporcionaban información útil.

La versión inicial del cuestionario escrito involucró dos tipos de actividades. La primera hace referencia a la consigna: “resolver las siguientes inecuaciones”, en la que intervienen nueve ejercicios de inecuaciones con valor absoluto. En la segunda, se plantean tres preguntas relacionadas a los conceptos de valor absoluto e inecuaciones.

El segundo instrumento hace referencia a entrevistas semiestructuras, en las que se consultó a siete estudiantes seleccionados de la muestra original en función de la información obtenida en sus respuestas. Estas entrevistas fueron audiograbadas y transcriptas.

Las respuestas de los alumnos frente al cuestionario escrito piloto y final, como así también las transcripciones de las entrevistas obran en los anexos 2, 5 y 6 respectivamente.

3.2.1 Justificación de los reactivos del cuestionario escrito

A continuación se mencionan las razones que justifican la elección de los ejercicios y las preguntas propuestas en el cuestionario escrito a realizar por los estudiantes de ciencias económicas y que permitirán conocer la imagen del concepto del que evocan los estudiantes con respecto al valor absoluto, las inecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x| > 4$

Con este ejercicio se averiguó respecto a las imágenes que evocan los alumnos en relación con la definición del valor absoluto y detectar alguna de las maneras en que puede definirse el valor absoluto: como distancia de un número real al cero, como una regla, como función, etc. Además, se lo propuso como primer ejercicio para que el alumno tome confianza con el cuestionario escrito y logre responderlo sin grandes dificultades, ya que es uno de los ejercicios comunes en la enseñanza de la matemática sobre este tema.

b) $|x| + 2 \leq 0$

En este segundo caso, se trata de una inecuación muy presente en la clase de matemática. Pues las inecuaciones sin solución no figuran, en general, en la escuela o en la universidad. Además, es poco común encontrarla en los libros de textos. Con ella se pretendió identificar la existencia de la imagen del valor absoluto como un número no negativo en los estudiantes y si pueden diferenciar los términos cantidad positiva y no negativa. De acuerdo con la experiencia de los docentes, los alumnos aplican indiscriminadamente la propiedad de valor absoluto $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$. Es decir, realizan una sobregeneralización errónea de ella. En este sentido, no dan cuenta de las condiciones del número *a* en el enunciado de la propiedad.

c) $|x| \leq 0$ y d) $|x| \geq 0$

Con frecuencia, las inecuaciones que resuelven los alumnos en la escuela o universidad tienen infinitas soluciones, dejando de lado las inecuaciones sin solución o con un número finito de soluciones. Para ellos, la diferencia entre las inecuaciones y las ecuaciones radica en que las primeras tienen un número infinito de soluciones, más allá del signo que separa los miembros en uno u otro. La desigualdad propuesta rompe con esa imagen esquema. Como en el caso b), los reactivos c) y d) pretendieron reconocer la existencia de la imagen de valor absoluto como un número no negativo e identificar qué imagen tienen los estudiantes respecto al conjunto solución de una inecuación. Para varios de los alumnos, el valor absoluto es un número positivo (Almog & Ilany, 2012) y como ya se mencionó, una inecuación no puede tener una única solución. Ambos reactivos fueron extraídos de Almog e Ilany (2012). Estos autores proponen el ítem d) por las generalizaciones y analogías realizadas por los alumnos de las ecuaciones a las inecuaciones: $|x| \geq 0 \Rightarrow x = 0$

e) $|x-2|<1$, h) $\left|4x-\frac{1}{2}\right|>2{,}5$, i) $|2-3x|<5$

A diferencia del caso a), en estas inecuaciones con valor absoluto, la variable *x* se encuentra afectada por una operación. Es común que en la clase los alumnos manifiestan grandes dificultades de dos tipos: relacionadas al concepto de valor absoluto y a lo procedimental~~es~~. Éste último debido posiblemente a la presencia de la doble desigualdad. La inecuación e) permite considerar al valor absoluto como distancia: entre *x* y 2, es decir, permitirá identificar que imagen del valor absoluto está presente en los estudiantes. El último ejercicio (caso i), es el único de los reactivos cuyo coeficiente de la variable tiene coeficiente negativo, y usualmente, los estudiantes presentan errores en estos tipos de inecuaciones. Por ejemplo, no cambian el sentido de la desigualdad cuando multiplican o dividen por un número negativo. Para ellos es correcto el siguiente procedimiento: $-7 < -3x < 3 \Rightarrow \frac{7}{3} < x < -1$. Las tres inecuaciones tienen como objetivo común identificar las dificultades en la resolución de las inecuaciones con valor absoluto.

f) $|x-4|<-2$, g) $|x+3|<-3|x-1|$

En estos casos, se esperó que los alumnos utilizaran indiscriminadamente la propiedad de valor absoluto, ya mencionado en el caso b). Al mismo tiempo, permitió conocer qué imagen del valor absoluto evoca el estudiante (como distancia o como un número no negativo). Este reactivo lo propuso Sierpinska (2011), debido a la dificultad que presentan los alumnos para comprender al valor absoluto como un número no negativo y para analizar la comprensión de la estructura de la desigualdad.

La tabla 1 expone el conjunto solución cada inecuación seleccionada. En las columnas posteriores se encuentra la clasificación de la inecuación de acuerdo con su conjunto solución y su respectiva representación gráfica.

Tabla 1. Clasificación de las inecuaciones empleadas en el estudio según su conjunto solución.

Inecuación	**Solución**	**Clasificación según su conjunto solución**	**Representación gráfica de la solución**
$\|x\|>4$	$x>4$ o $<-4, x\in\mathbb{R}$	Infinitas soluciones	Intervalo no acotado
$\|x\|+2\leq 0$	$S=\varnothing$	La solución es el conjunto vacío	--------
$\|x\|\leq 0$	$x=0$	Una única solución	Un punto
$\|x\|\geq 0$	$x\in\mathbb{R}$	Infinitas soluciones	Recta real
$\|x-2\|<1$	$x\in\mathbb{R}:1<x<3$	Infinitas soluciones	Intervalo abierto
$\left\|4x-\frac{1}{2}\right\|>2,5$	$x<-\frac{1}{2}$ o $x>\frac{3}{4}, x\in\mathbb{R}$	Infinitas soluciones	Intervalo no acotado

$\lvert 2-3x \rvert < 5$[6]	$x \in \mathbb{R} : -1 < x < \frac{7}{3}$	Infinitas soluciones	Intervalo abierto
$\lvert x-4 \rvert < -2$	S = $\varnothing$	La solución es el conjunto vacío	--------
$\lvert x+3 \rvert < -3\lvert x-1 \rvert$	S = $\varnothing$	La solución es el conjunto vacío	--------

Todos estos ejercicios propuestos hicieron referencia o apuntaron a lo procedimental, es decir, al saber hacer. Pero, permitieron explorar parcialmente la imagen del concepto sobre las inecuaciones con valor absoluto que presentan los alumnos de ciencias económicas. Para responder a la pregunta de investigación ¿Qué definiciones del valor absoluto, inecuación e inecuación con valor absoluto tienen los estudiantes del nivel universitario?, se añadió al cuestionario escrito las siguientes preguntas:

A) ¿Qué es el valor absoluto de un número real?

B) ¿Qué es una inecuación?

C) ¿Qué entiendes por inecuación con valor absoluto?

Estos interrogantes permitieron conocer la definición de valor absoluto, inecuación e inecuación con valor absoluto que posee el estudiante respectivamente. Como expresa Vinner (1991), la manera de conocer la definición del concepto de un objeto matemático de una persona consiste en preguntarle directamente por el objeto matemático, en este caso con respecto al valor absoluto, inecuación e inecuación con valor absoluto.

Para responder la pregunta de investigación: ¿cuáles son las imágenes del concepto que evocan los estudiantes de ciencias económicas sobre las inecuaciones lineales con valor absoluto?, se consideró en conjunto los procedimientos, definiciones, símbolos, representaciones gráficas, etc., que emplearon los estudiantes en la resolución de los ejercicios. Esto dio pie a comparar la definición del concepto que tienen y su

[6] Como se verá más adelante, en la versión final del cuestionario escrito, esta inecuación fue reemplazada por $\lvert 2-3x \rvert \leq 5$ cuya solución es $x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq \frac{7}{3}$ (intervalo cerrado).

imagen del concepto evocado. En la entrevista semiestructurada se profundizó sobre lo visualizado en el cuestionario escrito. Por ejemplo, exponer un gráfico en el que se señale un punto en la recta numérica y preguntar si esa representación podría corresponder a la solución de una inecuación con valor absoluto, o bien, cómo representarían algebraicamente a todos los números reales cuya distancia a 3 es menor a 2, etc. Conocer las imágenes de valor absoluto en los estudiantes, probablemente dé lugar a una reelaboración del conjunto de actividades que con frecuencia se plantean en la clase de matemática del nivel superior.

3.2.2 Estudio piloto

Antes de aplicar el instrumento escrito en forma definitiva, se puso a prueba para dar cuenta si las consignas estaban elaboradas correctamente y si los reactivos proporcionaban información útil para responder a las preguntas de investigación. Las capturas de las imágenes de las respuestas de los estudiantes se encuentran en el anexo 2.

El cuestionario piloto se aplicó en el mes de abril de 2020 a cuatro estudiantes, Lucia y Guillermo cursaron la asignatura AGA de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNNE. Julián y Lucio fueron alumnos de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral I – de primer año, primer cuatrimestre – de la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE. Todos ellos con una edad promedio de 18 años, y cuentan con conocimientos sobre inecuaciones con valor absoluto, ya que es un tema fundamental en los planes de estudios de las carreras de ciencias económicas y de ingeniería. El cuestionario fue enviado como documento en formato *Word* mediante la aplicación *Slack*, un medio que actualmente se utilizó en ambas asignaturas para la comunicación entre docente y alumnos. Se les comunicó a los estudiantes que tendrían tres o cuatros días para reenviar su archivo con sus respuestas por el mismo medio de comunicación. Además se les solicitó que no utilizaran ninguna herramienta, salvo calculadora, que les permita obtener la solución, ya que la finalidad de este conjunto de actividades es conocer lo que piensan y no analizar la respuesta que expone un *software*. En el archivo entregado estaban explícitas las siguientes pautas:

- Resuelve y escribe *todos los procedimientos que utilizas* para llegar a la solución.

- Es recomendable que *no consultes con otra persona ni internet*. Pues interesa analizar el procedimiento y no evaluar si los ejercicios están bien o mal.

- Por supuesto, tu resolución no será divulgada y tampoco influye en la asignatura que estás cursando.

Posterior a la entrega del cuestionario resuelto, se les envió otro archivo personal en el que se plantearon ciertas preguntas a fin de profundizar en los procedimientos planteados por los estudiantes.

Una vez recibidos los cuestionarios de los estudiantes, se analizó la resolución propuesta por cada estudiante. Ante la presencia de dudas o consulta sobre un determinado procedimiento empleado, conocer o comprender las propiedades o conceptos que lo justifican, se creó un archivo por cada alumno, con todas las preguntas que permitirían dar respuesta a ellas. Esos archivos fueron enviados nuevamente por *Slack*, y devueltos por los alumnos en el mismo día o en un promedio de dos días.

3.2.2.1 Análisis de las respuestas del cuestionario piloto

El 100% de los alumnos evaluados no reemplazó las inecuaciones con algún valor encontrado en su solución. Incluso cuando se les planteó sí podrían hacerlo, afirmaron que no saben cómo. Se pudo observar que no utilizan la definición de valor absoluto como una distancia (valor no negativo); no tenerla presente puede ser un obstáculo a la hora de resolver problemas. Pero cuando se les preguntó qué es el valor absoluto (consigna 2, pregunta A) lo asocian con distancia (50% de los encuestados). Para el 50% restante de los encuestados, el valor absoluto de un número es considerado un número sin signo. Posiblemente ésta sea una de las razones por las cuales los alumnos eliminan las barras de valor absoluto y resuelven las inecuaciones dadas. Es el caso de Lucia en los ítems e) y f) y el de Guillermo en los casos c), d) y g).

Los encuestados consideran al valor absoluto como un número positivo, olvidando que en realidad es no negativo; tampoco se observa que lo utilicen frente a las inecuaciones. Las resoluciones de Guillermo en los ítem e) y f) dan cuenta de estas afirmaciones. Cuando se le consultó a Lucio si un número negativo no puede ser solución de la inecuación a) (posteriormente a la entrega de su resolución), respondió “*según tengo entendido, el valor absoluto siempre es positivo (por ejemplo el valor absoluto de –2 es 2)*”.

Las definiciones de inecuaciones con valor absoluto, propuestas por Julián y Lucia, están en concordancia con las definiciones que tienen de valor absoluto. También se observa que los alumnos combinan indiscriminadamente las equivalencias de las inecuaciones $|x| \leq a, a > 0$ y $|x| \geq a, a > 0$ entre sí. Tal es el caso de Guillermo en el caso a) y h), Julián en el d) y h) y Lucia en los ítem i).

La siguiente tabla expone los procedimientos incorrectos (errores) que utilizaron los alumnos en cada ejercicio y su posible justificación. Se indican, además, aquellos en los que plantearon una solución correcta. En la última columna se realizó el conteo del número de soluciones incorrectas por cada ejercicio.

Tabla 2. Procedimientos utilizados por los estudiantes en la prueba piloto.

Alumno / Ejercicio	Julián	Lucia	Lucio	Guillermo	Número de respuestas Incorrectas
a) $\|x\| > 4$	Correcto	Correcto	Solo propone como solución valores positivos ($x > 4$)	Acepta como válido $\|x\| > k \Leftrightarrow -k > x > k$	2
b) $\|x-2\| < 1$	Correcto (aplica la propiedad correspondien-te y vuelve a escribir las barras de valor absoluto pero en un segundo paso no las escribe)	Utiliza como equivalencia a $x > k$ o $x < -k$	Correcto	Correcto	1

c) $\|x\| \leq 0$	Propone como solución $0 \leq x \leq 0$ (una única solución) Podría decirse que utilizó la propiedad $\|x\| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$	Propone como solución $(-\infty; 0]$ (infinitas soluciones) Procedimiento implícito	$-0 < x < 0$ Solución derivada de $\|x\| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ En dicho caso, no habría solución	Elimina las barras de valor absoluto (Solución $x \leq 0$)	4
d) $\|x\| \geq 0$	Propone como solución $0 \geq x \geq 0$ Es decir, acepta como válido $\|x\| \geq k \Leftrightarrow -k \geq x \geq k$	Correcto: $[0; +\infty)$ No sigue un procedimiento explícito	Solución $x < -0 \cup x > 0$ (todos los reales excepto el 0)	Elimina las barras de valor absoluto. (Solución $x \geq 0$)	3
e) $\|x\| + 2 \leq 0$	No aparece un procedimiento explícito Propone como solución $-2 \leq x \leq 2$	Elimina las barras de valor absoluto y despeja x en la inecuación	Pareciera ser que $\|x\| + 2 = \|x + 2\|$ aunque no lo haya escrito, y luego aplica la propiedad $\|x\| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$	Despeja $\|x\|$ y afirma que la solución es $2 \leq x \leq -2$. Considera como válido $\|x\| \leq k, k < 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ Es decir, generaliza para valores negativos de k	4
f) $\|x - 4\| < -2$	Uso de $\|x\| < k, k < 0 \Leftrightarrow -k < x < k$ Considera a	Ídem e)	Uso de $\|x\| < k, k < 0 \Leftrightarrow -k < x < k$ Considera a	Ídem e), uso de propiedad no válida	4

	$-k$ como número negativo y no como el opuesto de k, y a k como positivo		$-k$ como número negativo y no como el opuesto de k		
g) $\vert x+3\vert < -3\vert x-1\vert$	Realiza pasajes de términos y lo "expresa como producto", luego elimina las barras de valor absoluto	Correcto (No justifica por qué no hay valores de x que la verifican)	Elimina las barras de valor absoluto y resuelve la inecuación	Elimina las barras de valor absoluto y resuelve la inecuación	3
h) $\left\vert 4x-\frac{1}{2}\right\vert > 2,5$	Aplica $\vert x\vert > k \Leftrightarrow -k > x > k$	Correcto (Solo se confunde en la escritura de unos de los intervalos, lo representa correctamente en la recta)	Correcto (solo cometió un error al "pasar dividiendo el 4" en la inecuación: $4x > 3$)	Utiliza como propiedad $\vert x\vert > k, k > 0 \Leftrightarrow -k > x > k$	2
i) $\vert 2-3x\vert < 5$	Solo presenta errores en la desigualdad obtenida al no considerar el signo negativo del coeficiente en $-3x$	Utiliza como equivalencia a $x > k$ o $x < -k$ Además no considera el signo negativo del coeficiente en $-3x$	Uso correcto de la propiedad pero presenta errores en los signos de la solución	Correcto	3
A) Definición de Valor	"Es el valor que puede tomar un número sin	"Es el valor numérico sin tener en cuenta su signo"	"El valor absoluto es la distancia que existe entre el	"Es la distancia entre el lugar de	----

absoluto	importar su signo”		número dado y el 0”	procedencia (0) y cualquier valor de la recta numérica. Particularmente siempre es positivo, por lo tanto el valor absoluto de un número $\lvert a \rvert$ es igual al de $\lvert -a \rvert$”	
B) Definición de inecuación	“Es una desigualdad entre incógnitas y números”	“Es una expresión matemática la cual se caracteriza por tener signos de desigualdad”	“No lo sé, nunca busque para que sirve o que es”	“Es una desigualdad entre dos expresiones, conformadas por letras y números. Esta desigualdad solo se verifica para determinados valores de la incógnita, es decir basta que la inecuación la satisfaga”	----
C)	“Es una	“Expresión	“No tengo una	“Es una	----

Definición de inecuación con valor absoluto	desigualdad donde la /las incógnitas pueden tomar un valor independiente de su signo”	matemática que no se tiene en cuenta su signo y que se identifica por $\lvert x\rvert < a$”	respuesta concreta”	desigualdad y verifica el conjunto solución de una incógnita en valores reales ()”	

De la tabla 2, se desprenden los siguientes procedimientos incorrectos:

- *Eliminación de las barras de valor absoluto*: resolución de los ejercicios a), c), d), e) y g).

- *Aplicación de una propiedad no válida para el valor absoluto de tipo I*: considerar como válido a $\lvert x\rvert \geq k, k \geq 0 \Leftrightarrow -k \geq x \geq k$, como en los ejercicios a), d) y h)

- *Aplicación de una propiedad no válida para el valor absoluto de tipo II*: uso de $\lvert x\rvert \leq k, k \leq 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$, como en los ejercicios e) y f)

3.3. Versión definitiva del instrumento aplicado

La prueba piloto, mencionada en la subsección 3.2.2, permitió reformular parte del instrumento propuesto. En este sentido, por un lado, se modificó la primera actividad como una pregunta, en la que esté explícitamente el conjunto de referencia, y por otro, se realizó pequeñas modificaciones en algunas inecuaciones a fin de ordenarlos en función de su complejidad y si corresponden a ejercicios prototípicos o no:

- ¿Existe algún valor real de *x* que verifica las siguientes inecuaciones? Justifica tu respuesta.

- Se sustituyó $\lvert x+3\rvert < -3\lvert x-1\rvert$ por $\lvert x+1\rvert < -3\lvert x\rvert$

- Reemplazó la inecuación $|2-3x|<5$ por $|2-3x|\leq 5$, a fin de equilibrar el número de inecuaciones con el signo de desigualdad "menor" en sentido estricto y el de "menor" en sentido amplio.

La versión definitiva del instrumento escrito fue la siguiente:

1) ¿Existe algún valor real de *x* que verifica las siguientes inecuaciones? Justifica tu respuesta.

a) $|x|>4$

b) $|x-2|<1$

c) $\left|4x-\frac{1}{2}\right|>2,5$

d) $|2-3x|\leq 5$

e) $|x|\leq 0$

f) $|x|\geq 0$

g) $|x|+2\leq 0$

h) $|x-4|<-2$

i) $|x+3|<-3|x|$

2) Responde (sin consultar libros, apuntes, Internet)

A) ¿Qué es el valor absoluto de un número real?

B) ¿Qué es una inecuación?

C) ¿Qué entiendes por inecuación con valor absoluto?

3.4. Procedimiento de aplicación y análisis de los instrumentos

3.4.1 Ejecución del cuestionario y entrevistas

El cuestionario escrito se implementó a distancia en el mes de mayo de 2020, debido a la contingencia sanitaria por el COVID–19, que actualmente afecta a la mayoría de los países.

Siguiendo el procedimiento de la prueba piloto, se consultó a los estudiantes a través de la aplicación *Slack* y mensajería interna del aula virtual de la asignatura AGA , si estaban interesados en resolver voluntariamente una serie de ejercicios referidos a las inecuaciones con valor absoluto. A aquellos que aceptaron la propuesta, se les envió la evaluación en formato pdf por mensajería interna del *Slack*. Participaron 24 estudiantes de ciencias económicas de la UNNE, que pertenecen a dos grupos de clases con distintos profesores; 11 y 13 es el número de integrantes que corresponde a cada grupo respectivamente.

Los alumnos y alumnas debieron resolver el cuestionario escrito en un tiempo máximo de dos días. Posteriormente, tomaron capturas de sus resoluciones con su celular, lo convirtieron en un único archivo pdf por medio de alguna aplicación como el *CamScanner* y finalmente, lo enviaron por el medio en que recibieron el cuestionario.

Posteriormente a la entrega de los cuestionarios de los alumnos, se analizaron las respuestas a fin de identificar errores en cada uno de las inecuaciones planteadas y su posterior categorización. A partir de lo obtenido, en el mes de julio del año 2020 se implementaron las entrevistas semiestructuradas individuales en las que se propusieron algunas preguntas a siete de los estudiantes participantes. Estas preguntas dependían de las resoluciones y las definiciones propuestas por los estudiantes en el primer instrumento (ver anexo 4). Las reuniones fueron acordadas con los estudiantes por mensajería interna del *Slack* y videograbadas en forma online por medio de la aplicación *Google Meet*; tuvieron una duración promedio de 20 minutos. Para finalizar esta etapa, los audios fueros transcriptos en formato de diálogo entre entrevistador (E) y estudiante (A).

3.4.2. Análisis de datos

3.4.2.1 Cuestionario escrito

Para identificar la imagen del concepto evocado por los alumnos con respecto a las inecuaciones con valor absoluto, se exploraron y categorizaron los procedimientos algorítmicos y las definiciones que enunciaron en el cuestionario escrito. Al analizar los cuestionarios, tres de los 24 trabajos de los estudiantes fueron descartados ya que se detectó el uso de aplicaciones tecnológicas en las respuestas, que les permitieron resolver las inecuaciones propuestas, es decir obtuvieron respuestas del *software*.

Los procedimientos algorítmicos fueron categorizados en adecuados y no adecuados. Cuando hablamos de procedimientos algorítmicos no adecuados nos referimos a una imagen del concepto evocado que no es del todo correcta. Por otro lado, los adecuados son aquellos procedimientos correctos que se mencionaron en la tabla 1.

Para categorizar los procedimientos algorítmicos adecuados o inadecuados utilizados por los alumnos, se siguió la siguiente metodología: por cada una de las inecuaciones, consigna 1 del cuestionario escrito, se registraron los procedimientos algorítmicos con respuesta correcta e incorrecta llevados a cabo por los 21 alumnos. Una vez agrupados en esta distinción, se categorizaron los procedimientos adecuados y no adecuados con algunas palabras claves según lo realizado por el alumno. Por ejemplo, en el caso de los procedimientos algorítmicos no adecuados, una categoría fue “eliminación de las barras de valor absoluto”, es decir, aquella categoría en la que los estudiantes suprimen las barras de valor absoluto de la inecuación y la manipulan como si fuera una inecuación ordinaria. El procedimiento ya registrado por algún alumno y volvía a presentarse o era similar al ya definido, se agregaba a continuación de su denominación un asterisco entre paréntesis, que hacía referencia al número de alumnos que emplearon tal procedimiento. En algunos casos fue necesario subdividir esos procedimientos, ya que presentaban ciertos rasgos que los diferenciaban. Es el caso de la categoría de no adecuados “uso indiscriminado de la disyunción y la operación unión”, que a su vez se divide en dos subcategorías “no escriben conectores lógicos” y “uso indiscriminado de la unión entre conjuntos como disyunción”**.** Esta metodología se aplicó también a los procedimientos adecuados, a diferencia que no fue necesario utilizar subcategorías. En los procedimientos adecuados se definieron 3 categorías y 9 para los no adecuados.

La consigna 2 del cuestionario escrito tenía la intención de conocer qué entienden los alumnos con relación al valor absoluto de un número real, inecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Para ello, los estudiantes debían responder a las preguntas ¿Qué es el valor absoluto? ¿Qué es una inecuación? ¿Qué es una inecuación con valor absoluto? Para categorizar las distintas definiciones presentes en los alumnos, se las agrupó según puntos en común para cada pregunta. Así, para la pregunta inicial ¿qué es el valor absoluto?, se concentró a las definiciones de los estudiantes según las distintas formas de definir el valor absoluto que se encuentran en los libros de textos: como una distancia, como un número sin signo, es un número no negativo, etc. Es importante notar que las 13 categorías propuestas no son mutuamente excluyentes. Por ejemplo, algunos alumnos manifestaron que el valor absoluto es el mismo número con signo positivo y añaden que es la distancia de ese número al cero. Nuevamente surgieron subcategorías, como en el análisis del punto 1.

3.4.2.2 Entrevista semiestructurada

Luego de la lectura de las entrevistas, en cada de ellas se resaltó con un determinado color aquellos episodios que podían indicar algún indicio de las imágenes del concepto sobre las inecuaciones con valor absoluto. En un segundo momento, fue necesario agrupar cada uno de los recortes seleccionados, según su relación con alguna idea, noción o procedimiento del valor absoluto, inecuaciones o inecuaciones con valor absoluto respectivamente. De esta manera quedaron definidas tres grandes categorías de las que se desprenden varias nociones.

3.5. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los instrumentos utilizados para la recolección de datos empíricos, discutiendo sus supuestos y el proceso de refinamiento por el que transitaron. También se describieron las condiciones en las que estos instrumentos fueron aplicados, y la manera en que se analizaron los datos empíricos obtenidos a través de ellos, los cuales dieron lugar a distintas categorías. En el siguiente capítulo se presentan dichas categorías como parte de los resultados obtenidos al emplear este método.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.0 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos luego del análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario escrito y a las entrevistas semiestructuradas. De manera particular, se presentan una categorización de los procedimientos adecuados y no adecuados obtenidos a partir de la consigna 1 del cuestionario escrito. Mientras que en la consigna 2, las categorías están relacionadas con las definiciones de valor absoluto, inecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

4.1 Análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario escrito

4.1.1 Consigna 1: resolución de inecuaciones

En esta sección se analizan las respuestas de los alumnos a la consigna 1 del cuestionario escrito. Para identificar las imágenes del concepto que evocan los estudiantes participantes cuando resuelven inecuaciones fue necesario definir categorías teniendo en cuenta los procedimientos y afirmaciones de los estudiantes. Estas categorías se clasificaron en dos grandes grupos: adecuadas y no adecuadas. Para el primer caso, se han identificado tres categorías y para los no adecuadas, nueve. Algunas de estas últimas, a su vez, presentan subcategorías. Es importante aclarar que las subcategorías no son mutuamente excluyentes, ya que hay procedimientos de los estudiantes que cumplen con la definición de dos o más categorías. Para cada categoría, se exponen evidencias de los trabajos de los estudiantes que ilustran cada categoría. Las denominaciones de las categorías pueden observarse en la tabla 3; en la última columna se especifica el número de respuestas que le corresponde a cada una de ellas, por ejemplo 4/21 indica que 4 de las 21 respuestas pertenecen a una determinada categoría.

Tabla 3. Resumen de las categorías definidas en la consigna 1 del cuestionario escrito.

Procedimientos Algorítmicos	Categorías	Inecuación/ respuestas
Adecuados	1. Aplicación de propiedades del valor absoluto.	a) 15 /21 b) 17/21 c) 12/21 d) 13/21
	2. Valor absoluto como cantidad no negativa.	g) y h) 2/21 i) 1/21
	3. Asignar valores a *x*.	e) 2/21
No adecuados	1. Eliminación de las barras de valor absoluto.	a), b), c), e), h) e i) 3/21 d) 2/21 f) y g) 5/21
	2. Considerar para el conjunto solución el mismo sentido de la desigualdad con valor absoluto.	a) y c) 1/21
	3. Uso indiscrimiando de la disyunción y la operación unión.	a) 2/21 c) 6/21 e) y h) 1/21 f) 2/21
	4. Escribir un número real como intervalo.	8/21
	5. Generalizar propiedades del valor absoluto para números no positivos.	15/21
	6. Considerar válida la linealidad del valor absoluto.	g) 4/21
	7. No existencia de solución	4/ 21
	8. No resuelven	e), i) 4/21
	9. Otros.	3/21

4.1.1.1 Procedimientos algorítmicos adecuados

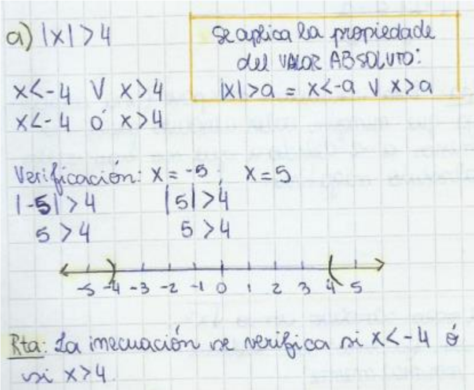
1. ***Aplicación de propiedades del valor absoluto***

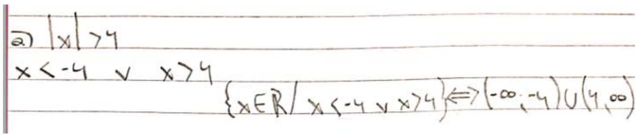
En esta categoría, los estudiantes aplicaron correctamente las propiedades del valor absoluto $|x| \le k, k > 0 \Leftrightarrow -k \le x \le k$ o $|x| \ge k, k > 0 \Leftrightarrow x \ge k \vee x \le -k$. Se propone evidencia de las resoluciones de los alumnos que se adecuan a esta categoría.

Inecuación **a)** $|\,x\,| > 4$

La respuesta adecuada a esta inecuación es $x < -4 \vee x > 4$. Este ejercicio un 71% de los estudiantes lo resolvió correctamente.

En la figura 9 se muestra la resolución de la inecuación a) de dos estudiantes que se apoyaron en la propiedad del valor absoluto y además, representaron la solución en la recta numérica o lo expresaron como intervalo. Puede observarse que la justificación del procedimiento no es primordial en ellos. Situación similar ocurre con las figuras 10 al 18, cuando estudiantes resuelven las inecuaciones b), c) y d).





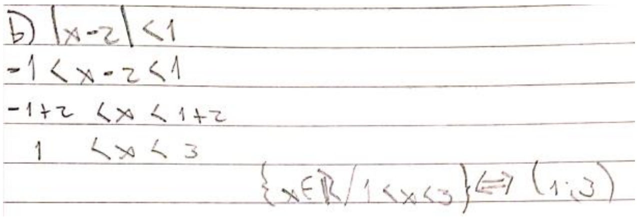
Resolución de Mateo

Resolución de Virginia

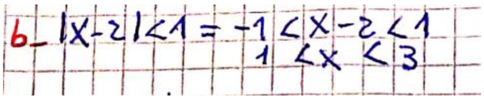
Figura 9. Resolución de la inecuación a).

Inecuación **b)** $|x-2|<1$

La solución de la inecuación dada es 1 < *x* < 3. Aproximadamente, un 81% de los estudiantes lo resolvió correctamente (figura 10)



Resolución de Mateo



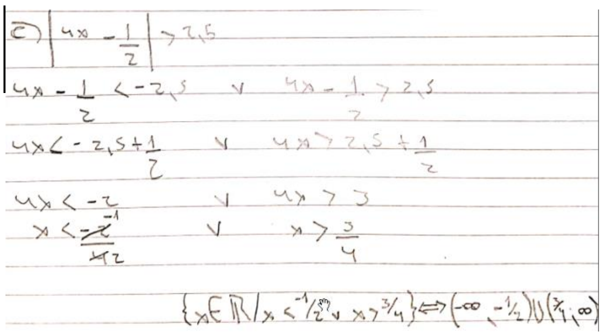
Resolución de Santiago

Resolución de Ailen

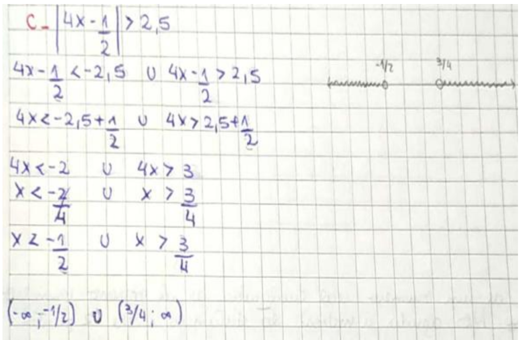
Figura 10. Resolución de la inecuación b).

Inecuación **c)** $\left|4x-\frac{1}{2}\right|>2,5$

Los valores que verifican esta inecuación son los números reales comprendidos en la unión de los intervalos $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. Un 57% de los estudiantes utilizó un procedimiento correcto. Como se observa en la figura 11.



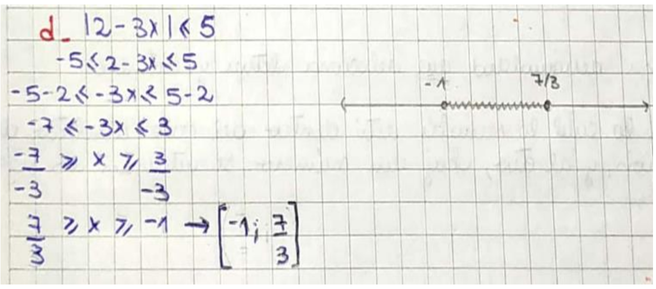
Resolución de Mateo



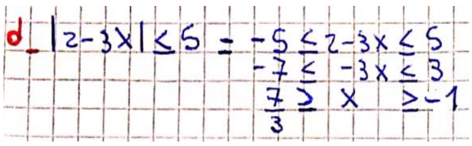
Resolución de Ailen

Figura 11. Resolución de la inecuación c).

Como lo expuesto en la figura 12, un 62% de los participantes resolvió correctamente la inecuación d), logrando obtener como solución el intervalo $\left[-1;\frac{7}{3}\right]$.



Resolución de Ailen



Resolución de Santiago

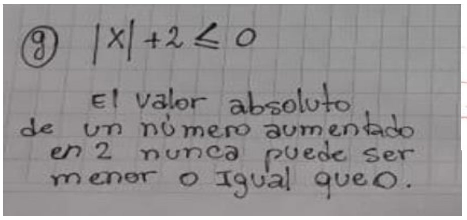
Figura 12. Resolución inecuación d).

2. *Valor absoluto*

La imagen evocada por los estudiantes se relaciona con la idea de que el valor absoluto no puede ser menor a un número negativo o el valor absoluto siempre es positivo. Esto les permitió afirmar a los estudiantes que las inecuaciones, por ejemplo la g), h) e i) no admiten solución real.

En la inecuación g), cuya solución es el conjunto vacío los estudiantes manifiestan (ver figura 13):

- El valor absoluto de un número, aumentado en 2 nunca puede ser menor o igual a cero.
- No existe un valor de *x*.



Resolución de Lorena

Resolución de Katia

Figura 13. Resolución de la inecuación g).

En las inecuaciones h) $|x-4|<-2$, i) $|x+3|<-3|x|$ cuya solución es el conjunto vacío, uno de los estudiantes mencionó: si en la inecuación, el valor absoluto es menor o igual a un número negativo, entonces no tendrá solución, como se observa en la figura 14; aunque en su justificación afirma que “el valor absoluto siempre debe ser positivo”.

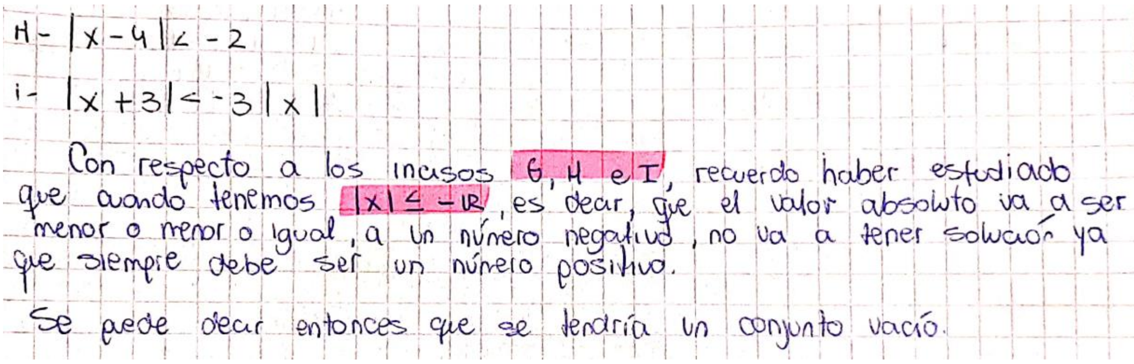
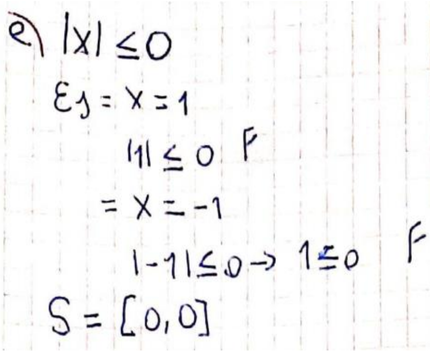


Figura 14. Resolución y argumentación en las inecuaciones h) y i) de Katia.

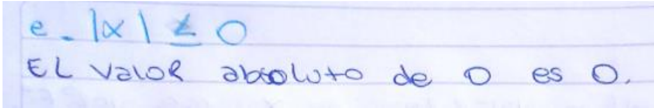
3. *Asignar valores a x*

En esta categoría, la imagen evocada está relacionada con asignar valores a la variable para llegar a una solución. Por ejemplo, en la ecuación e) $|x| \leq 0$, cuya solución es *x* = 0, los estudiantes han reemplazado *x* por diferentes valores, con el objetivo de determinar si existe o no solución (ver figura 15)



e) $|x| \leq 0$
Ej = $x = 1$
$|1| \leq 0$ F
= $x = -1$
$|-1| \leq 0 \rightarrow 1 \leq 0$ F
$S = [0,0]$

Resolución de Guido



e. $|x| \leq 0$
EL valor absoluto de 0 es 0.

Resolución de Claudia

Figura 15. Resolución inecuación e).

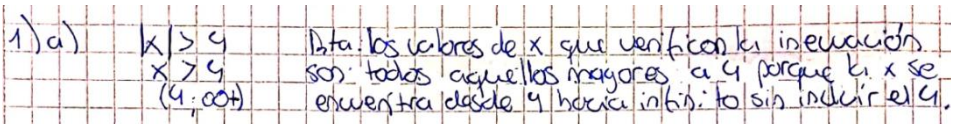
4.1.1.2 Procedimientos algorítmicos no adecuados

1. ***Eliminación de las barras de valor absoluto***

Para resolver las inecuaciones, los alumnos eliminaron las barras de valor absoluto y luego las manipularon como si fueran inecuaciones ordinarias, es decir aquellas sin módulo. Esto puede observarse en todas las inecuaciones. Podría afirmarse que la imagen evocada (errónea) por los estudiantes se refiere a que la variable que está entre las barras de valor absoluto es siempre positivo.

Inecuación **a)** $|x| > 4$

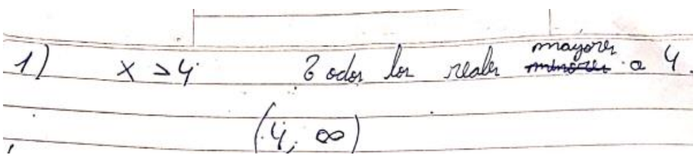
Es importante observar que eliminar las barras del valor absoluto permite obtener solo un intervalo del conjunto solución de la inecuación dada. Es decir $x > 4$ como se señala en las figura 16.



1) a) $|x| > 4$
$x > 4$
$(4; \infty+)$

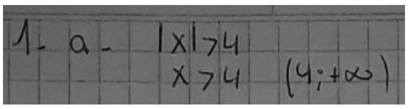
Rta: los valores de x que verifican la inecuación son: todos aquellos mayores a 4 porque la x se encuentra desde 4 hacia infinito sin incluir el 4.

Resolución de Bautista



1) $x > 4$ Todos los reales mayores ~~menores~~ a 4.
$(4, \infty)$

Resolución de Carmelo



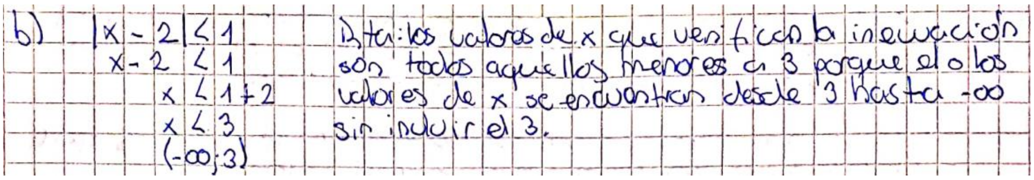
1. a. $|x| > 4$
$x > 4$ $(4; +\infty)$

Resolución de Carmelo

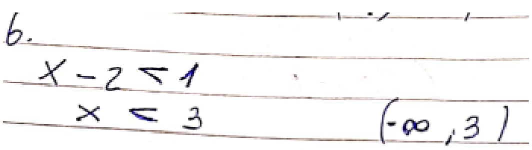
Figura 16. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación a).

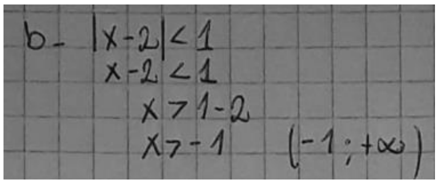
Inecuación **b)** $|x-2|<1$

Los estudiantes, al eliminar las barras, obtuvieron $x - 2 < 1$ y obtuvieron como solución $x < 3$, lo cual deja de lado una infinidad de soluciones. Otros, al resolver incorrectamente una inecuación (pensar que al pasar un número que está restando al otro miembro, el sentido de la desigualdad cambia), afirmaron que la solución es $x > -1$ (ver figura 17).



Resolución de Bautista





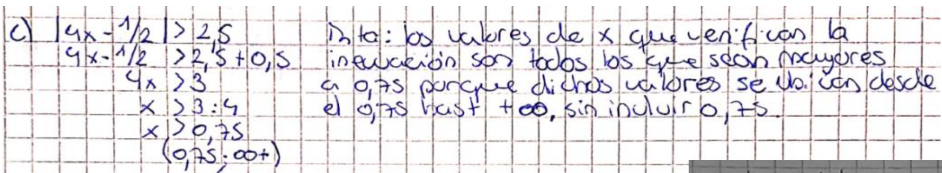
Resolución de Carmelo

Resolución de Guadalupe

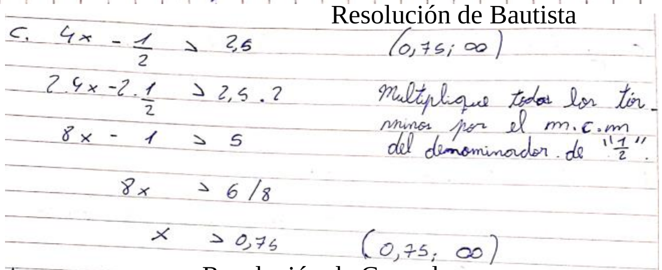
Figura 17. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación b).

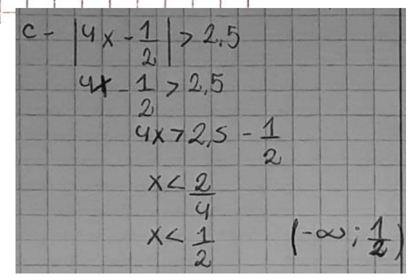
Inecuación **c)** $\left|4x-\dfrac{1}{2}\right|>2,5$

Los estudiantes Bautista y Carmelo obtuvieron como solución $x > 0,75$ (respuesta parcialmente correcta,) o a $x < ½$, cuyo valor se originó al realizar pasajes de términos incorrectos, como lo escribió Guadalupe (figura 18).



Resolución de Bautista





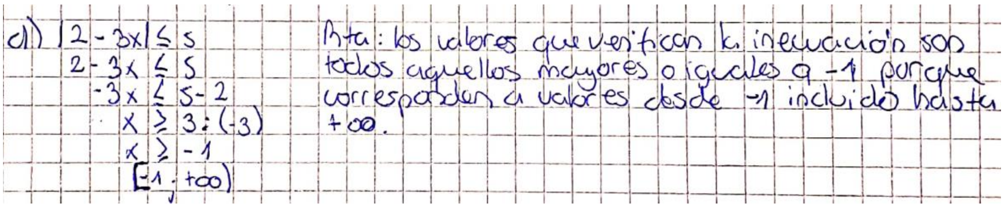
Resolución de Carmelo

Resolución de Guadalupe

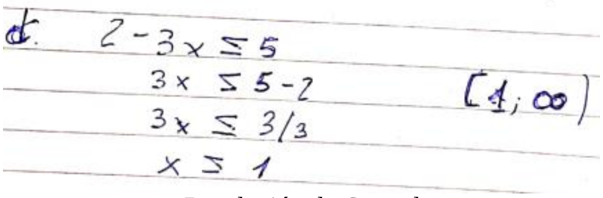
Figura 18. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación c).

Inecuación **d)** $|2-3x| \leq 5$

En esta inecuación. algunos estudiantes obtuvieron soluciones parcialmente correcta (resolución de Baustista) o incorrectas, provocado por el signo negativo (resolución de Carmelo). Veáse figura 19.



Resolución de Bautista

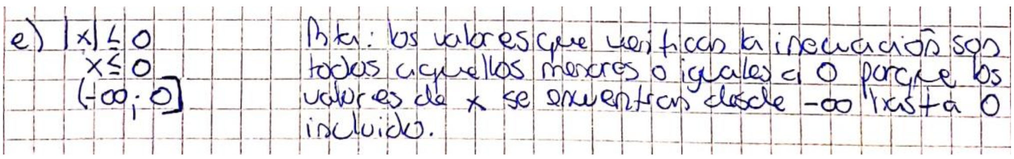


Resolución de Carmelo

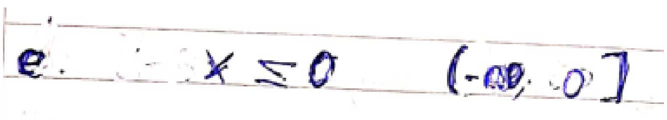
Figura 19. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación d).

Inecuación **e)** $|x| \leq 0$

Los estudiantes proponen como solución a $x \leq 0$. No tienen presente que el valor absoluto no puede ser negativo y que solo el 0 verifica la inecuación (ver figura 20).



Resolución de Bautista

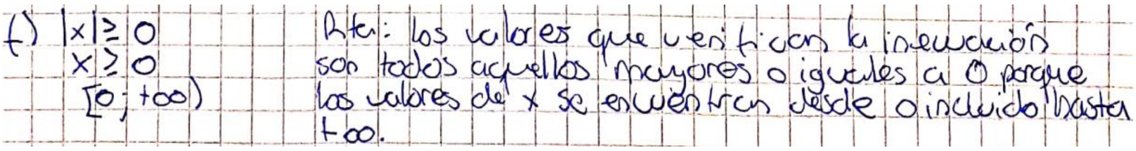


Resolución de Carmelo

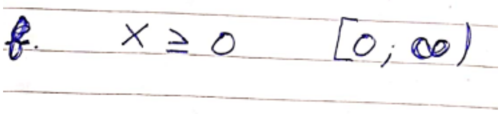
Figura 20. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación e).

Inecuación **f)** $|x| \geq 0$

Una cuarta parte de los estudiantes propuso como solución de esta inecuación el intervalo real [0; +∞), cuando cualquier número real x la verifica. Es decir, llegaron a una solución parcialemente correcta, y nuevamente, la noción del valor absoluto como cantidad no negativa no está presente (figura 21)



Resolución de Bautista

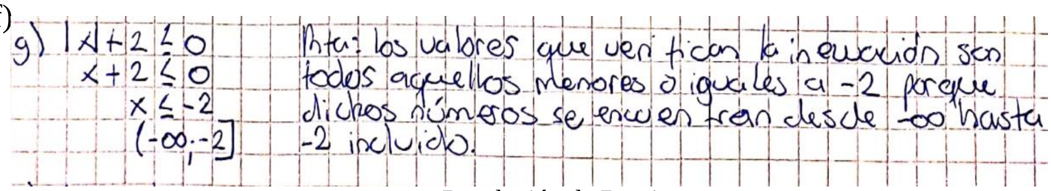


Resolución de Carmelo

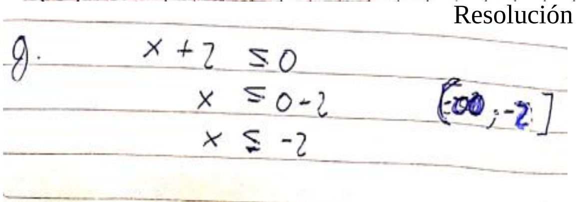
Figura 21. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación f).

Inecuación **g)** $|x| + 2 \leq 0$

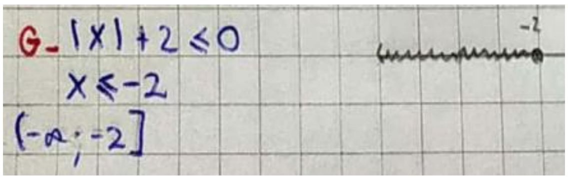
Esta inecuación tiene como solución al conjunto vacío. Pero cuatro estudiantes (ver figura 22) manifestaron que la solución está dada por los números reales que verifican $x \leq -2$. La explicación de este procedimiento coincide con la de la inecuación f).



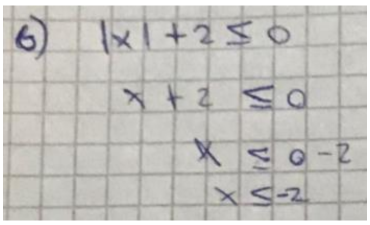
Resolución de Bautista



Resolución de Carmelo



Resolución de Ailen

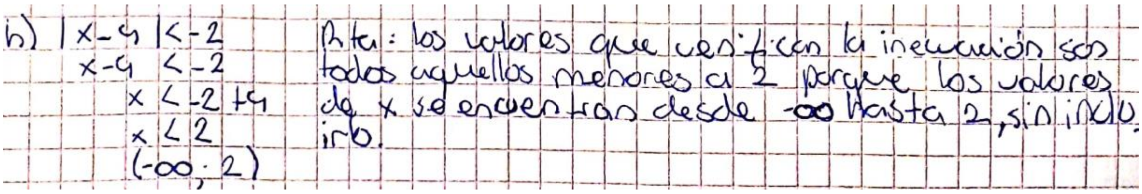


Resolución de Salomón

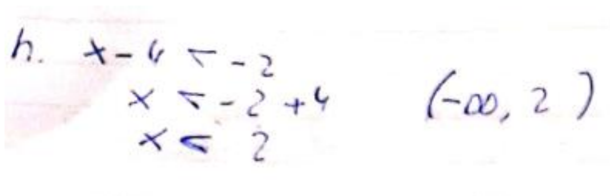
Figura 22. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación g).

Inecuación **h)** $|x-4|<-2$

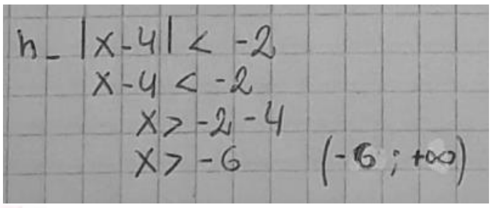
El valor absoluto es no negativo, razón por la cual esta inecuación no tiene solución. Sin embargo, el 14% de los estudiantes determinó como solución en esta inecuación el intervalo (–∞; 2) o el intervalo (–∞; –6), originados al eliminar el valor absoluto (resoluciones de Bautista y Carmelo) y realizar pasajes de términos incorrectamente (resolución de Guadalupe). Los procedimientos se observan en la figura 23.



Resolución de Bautista



Resolución de Carmelo

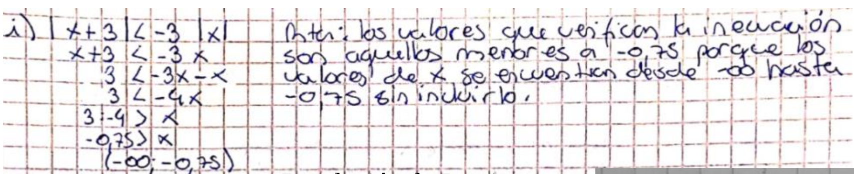


Resolución de Guadalupe

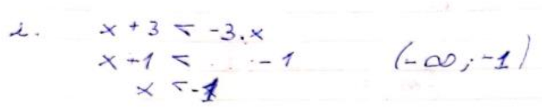
Figura 23. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación h).

Inecuación **i)** $|x+3|<-3|x|$

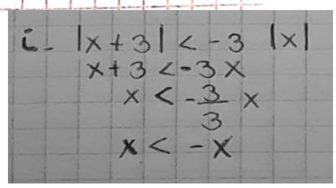
Aquí se obtuvo el mismo porcentaje de alumnos, que en la inecuación anterior propusieron soluciones distintas al conjunto vacío, luego de la eliminación de las barras y manipulación algebraica correcta o no de las inecuaciones. Como puede observarse en las siguientes capturas:



Resolución de Bautista



Resolución de Carmelo

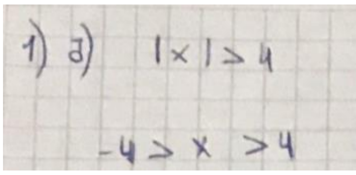


Resolución de Guadalupe

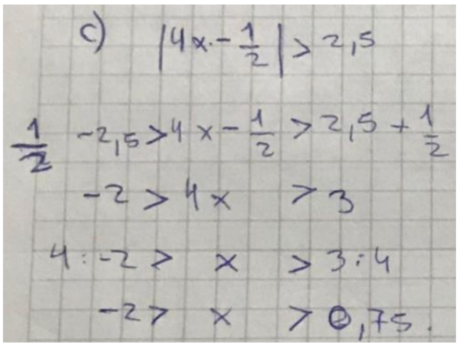
Figura 24. Eliminación de las barras del valor absoluto en la inecuación i).

2. ***Considerar para el conjunto solución el mismo sentido de la desigualdad con valor absoluto***

En este caso, la imagen del concepto que evocan los alumnos está dada al considerar válida la proposición $|x| > k, k > 0 \Leftrightarrow -k > x > k$. Esto puede observarse en las resoluciones que propuso Salomón ante las inecuaciones a) y c).



Resolución de Salomón en la inecuación a)



Resolución de Salomón en la inecuación c)

Figura 25. Considerar el mismo signo de la desigualdad para el conjunto solución.

Este error en el uso de una propiedad del valor absoluto, tal vez no aparece en las mismas proporciones que los demás, pero también se presentó en el estudio piloto.

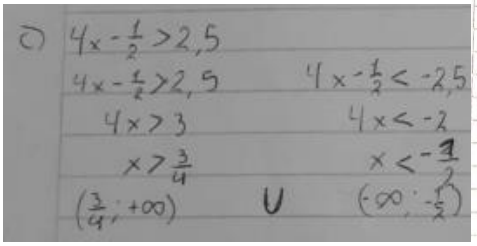
3. ***Uso indiscriminado de la disyunción y la operación unión.***

La imagen evocada con respecto a las inecuaciones con valor absoluto se caracteriza por la ausencia o desconocimiento del uso de conectores y operadores entre conjuntos. Se presentaron dos casos con el respecto al uso de la disyunción y la operación unión.

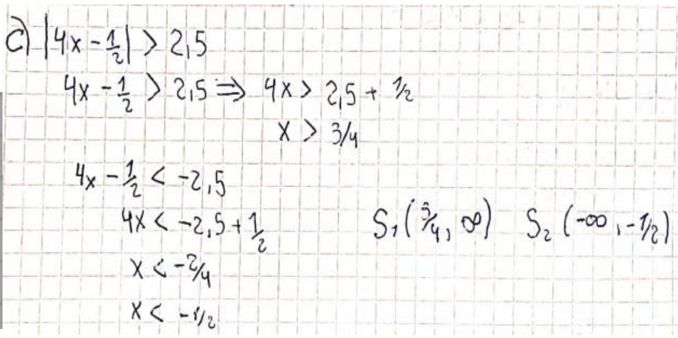
i. *No escriben conectores lógicos*

No utilizaron la disyunción entre las inecuaciones y solo aparece la unión en la solución o incluso, tampoco está presente dicha operación. (Ver figuras 26 y 27).

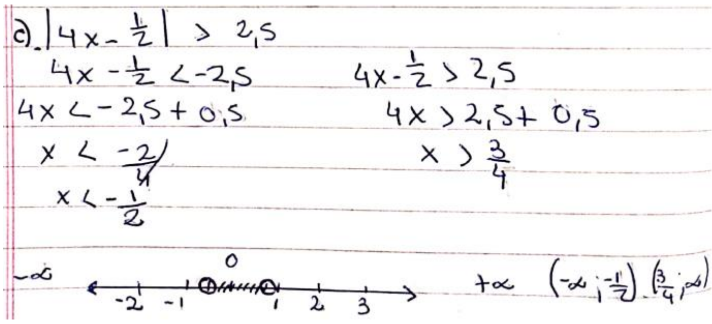
Inecuación **c**)



Resolución de Juan Esteban



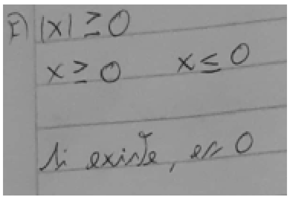
Resolución de Guido



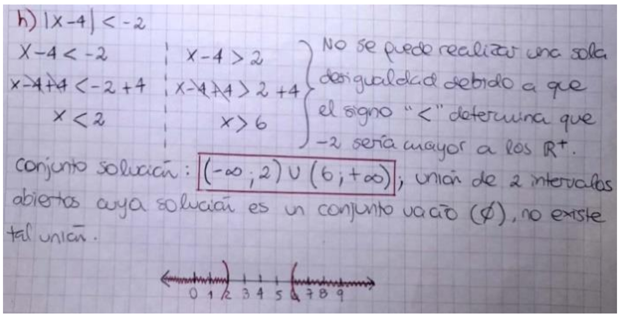
Resolución de Claribel

Figura 26. Ausencia de conectores lógicos en la inecuación c).

Inecuaciones **f**) y **h**).



Resolución de Juan Esteban



Resolución de Camila

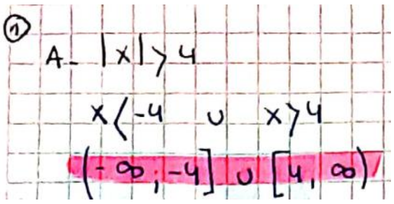
Figura 27. Ausencia de conectores lógicos en las inecuaciones f) y h).

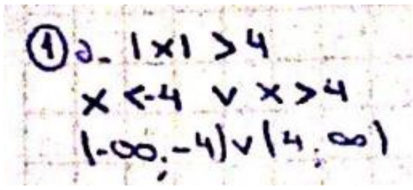
ii. *Uso indiscriminado de la unión entre conjuntos como disyunción:*

En el procedimiento, algunos alumnos emplearon:

– La unión como disyunción o la disyunción como unión (véase figuras 28 al 31).

Inecuación **a**)

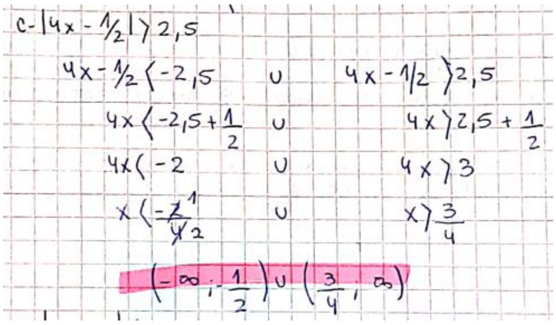


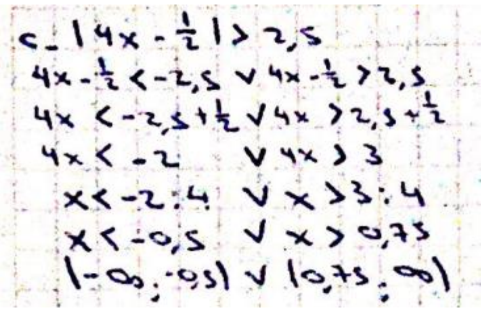


Resolución de Katia   Resolución de Katia

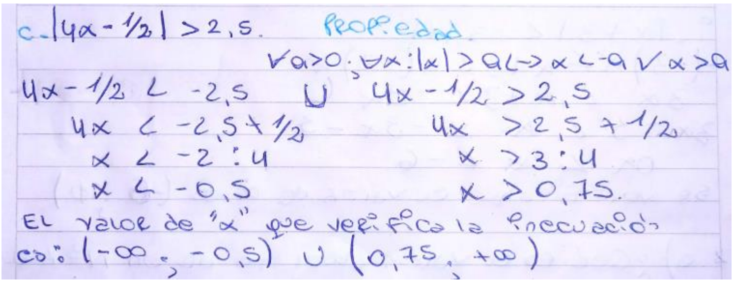
Figura 28. Uso indiscriminado de la disyunción y la unión en la inecuación a).

Inecuación **c**) Ver figura 29.





Resolución de Katia   Resolución de Joaquín



Resolución de Claudia

Figura 29. Uso indiscriminado de la disyunción y la unión en la inecuación c).

Inecuación **f**)

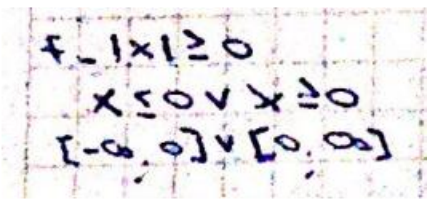


Figura 30. Uso indiscriminado de la disyunción y la unión en la resolución de Joaquín en la inecuación f).

– La unión como disyunción pero no la escriben en la solución.

Inecuación **e**)

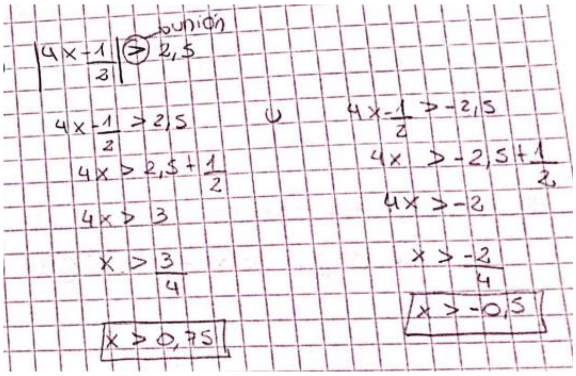


Figura 31. Uso indiscriminado de disyunción y unión en la resolución de Ludmila en la inecuación e).

4. ***Escribir un número real como intervalo.***

En esta categoría se puede observar que los estudiantes siempre asocian la solución de la inecuación con un intervalo. En otras palabras, permitió caracterizar a la imagen evocada por los estudiantes de la solución de una inecuación: siempre existe como conjunto no vacío y se debe expresar como un intervalo.

En el ejercicio **g**) de la figura 32, el estudiante expresa al número –2 como el intervalo (–2; –2).

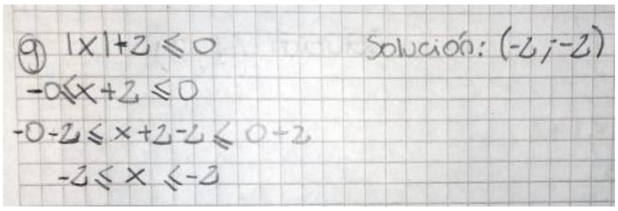
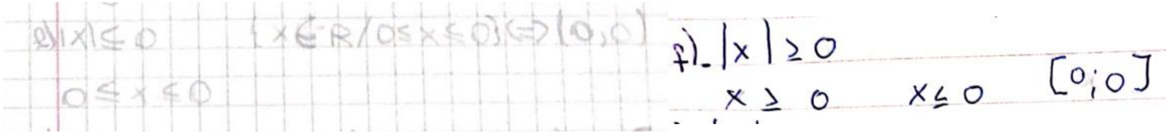


Figura 32. Resolución inecuación g) de Miguel.

i. Asociado al “intervalo” [0, 0]

En los ejercicios **e**) y **f**), como puede verse en las figuras 15 (resolución de Guido) y 33, el conjunto solución propuesta por los alumnos es [0; 0], cuando en su procedimiento se observa que el único número real que verifica la inecuación es $x = 0$. La resolución de Claribel (obsérvese la figura 33) presenta características de la categoría 3*i*.



Resolución de Hynek Resolución de Claribel

Figura 33. Un número real como intervalo cerrado en las inecuaciones e) y f).

ii. Asociado al “intervalo” (0; 0)

En la inecuación **e**) (figura 34), el procedimiento de Mateo es similar a lo que ocurre en la figura 65

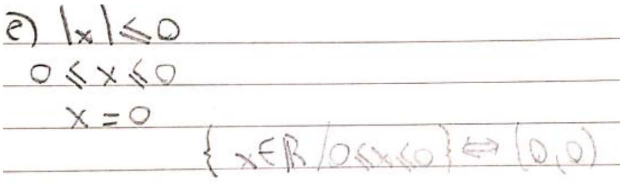


Figura 34. Un número real como intervalo abierto en la inecuación e).

iii. Asociado al número x = 0. Solo uno de estos estudiantes expresó que la solución es el intervalo [0;0].

En la inecuación **e**). Virginia aplica a propiedad que es válida para los reales positivos y sin embargo, expresa al 0 como un intervalo (figura 35).

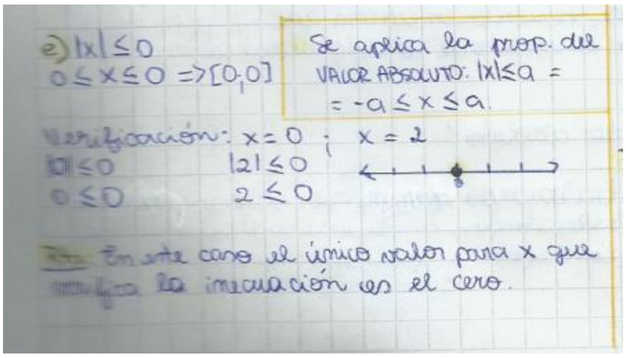


Figura 35. Resolución inecuación e) de Virginia.

En la inecuación **f**) María y Juan Esteban interpretaron la solución como x = 0. Ver figuras 27 (resolución de Juan Esteban) y 36.

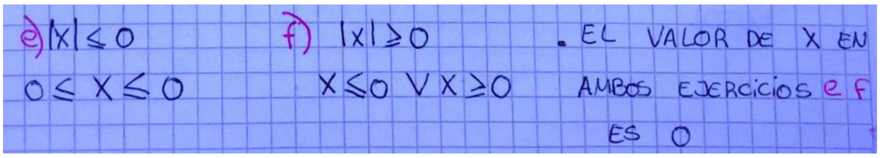


Figura 36. Resolución inecuaciones e) y f) de María.

iv. Asociado al intervalo (–∞; 0].

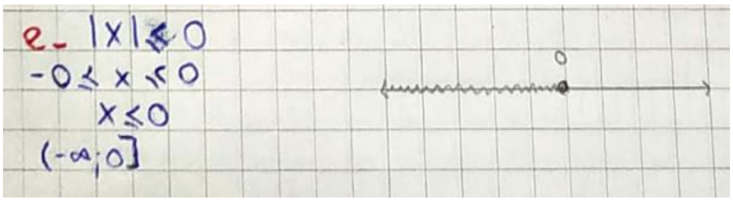


Figura 37. Resolución inecuación e) de Ailen.

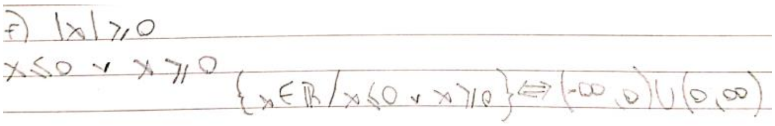
5. *Generalizar propiedades del valor absoluto para números no positivos*.

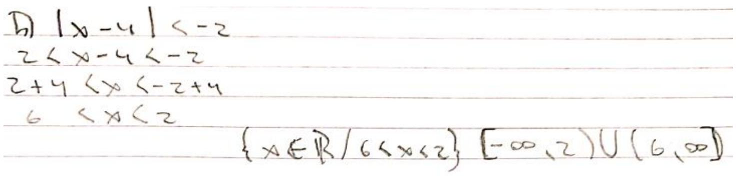
En la categoría 5, la imagen evocada está relacionada con suponer como válida una propiedad para cualquier valor real. Para algunos estudiantes les permite obtener respuestas correctas y a otros les provee de conclusiones erróneas.

i. En este caso, los alumnos consideraron como válida la proposición $|x| \leq k, k \leq 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$. Como se exponen en la resolución de Ailen (figura 37), Claribel (figura 19) y en la figura 38.

– Algunos interpretan a *–k* como el opuesto del número *k*.

Resolución de Mateo en





Resolución de Mateo en h)

Resolución de Ailen

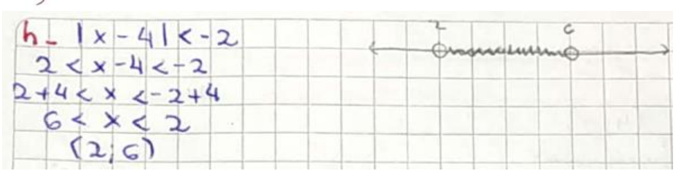
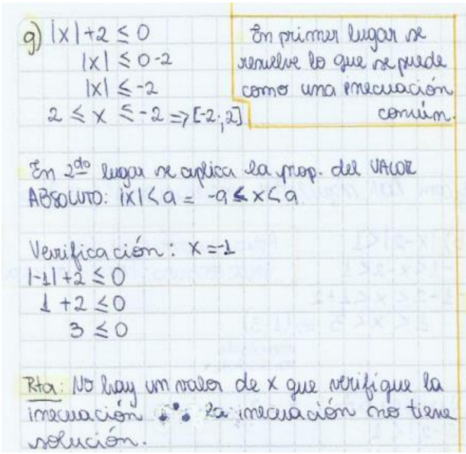


Figura 38. Aceptación de la validez de la proposición $|x| \leq k, k \leq 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$.

En las resoluciones de Virginia (figura 39) se muestra que, si bien logra llegar a una respuesta verdadera, la estudiante, no conforme con lo aplicado, asigna valores a la incógnita para determinar la solución. Con un ejemplo, logra llegar a una conclusión.

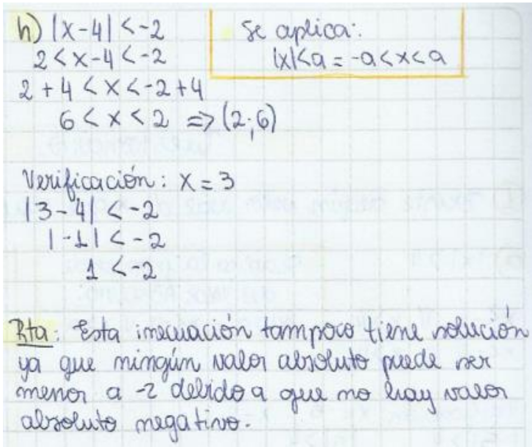

g) $|x|+2 \leq 0$
$|x| \leq 0-2$
$|x| \leq -2$
$2 \leq x \leq -2 \Rightarrow [-2;2]$

En primer lugar se resuelve lo que se puede como una inecuación común.

En 2do lugar se aplica la prop. del VALOR ABSOLUTO: $|x|<a = -a \leq x < a$

Verificación: $x=-1$
$|-1|+2 \leq 0$
$1+2 \leq 0$
$3 \leq 0$

Rta: No hay un valor de x que verifique la inecuación ∴ la inecuación no tiene solución.


h) $|x-4| < -2$
$2 < x-4 < -2$
$2+4 < x < -2+4$
$6 < x < 2 \Rightarrow (2;6)$

Se aplica: $|x|<a = -a<x<a$

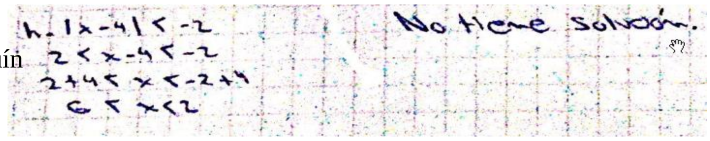
Verificación: $x=3$
$|3-4| < -2$
$|-1| < -2$
$1 < -2$

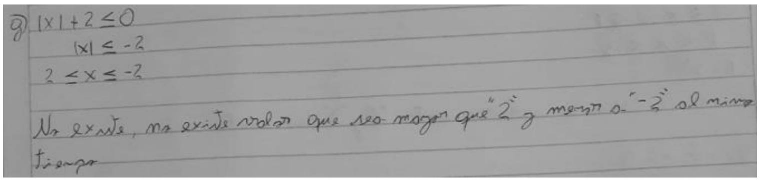
Rta: Esta inecuación tampoco tiene solución ya que ningún valor absoluto puede ser menor a -2 debido a que no hay valor absoluto negativo.

Figura 39. Asignación de valores a la incógnita para determinar el conjunto solución.

A diferencia de las capturas anteriores (figura 39), algunos estudiantes lograron obtener 6 < *x* < 2, y esta desigualdad es suficiente para afirmar que la inecuación **h**) no tiene solución (Ver figura 40). Algo similar ocurrió con los procedimientos presentes en la figura 81.

Resolución de Joaquín


h. $|x-4| < -2$
$2 < x-4 < -2$
$2+4 < x < -2+4$
$6 < x < 2$
No tiene solución.


g) $|x|+2 \leq 0$
$|x| \leq -2$
$2 \leq x \leq -2$
No existe, no existe valor que sea mayor que "2" y menor a "-2" al mismo tiempo

Resolución de Juan Esteban

Resolución de Santiago

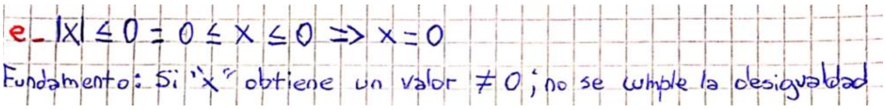
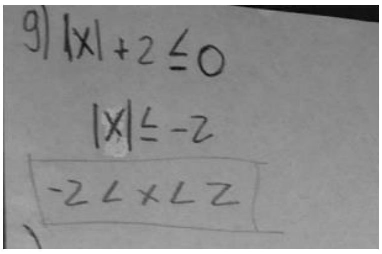
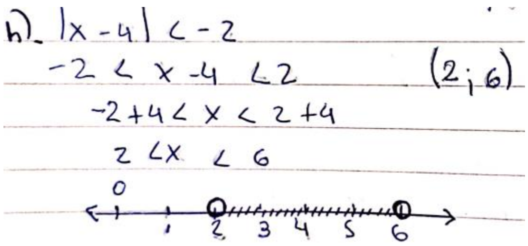

e. $|x| \leq 0 = 0 \leq x \leq 0 \Rightarrow x = 0$
Fundamento: Si "x" obtiene un valor $\neq 0$; no se cumple la desigualdad

Figura 40. Encontrar una afirmación absurda y determinar el conjunto solución: inecuaciones h), g) y e).

- Otros estudiantes, consideran a –*k* como un número negativo (**h**). Lo que les permitió obtener un intervalo real, auque no fuera solución de la inecuación.



Resolución de Anabella



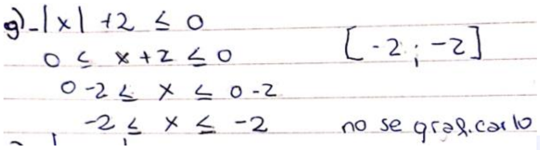
Resolución de Claribel

Figura 41. Aplicación de la propiedad $|x| \leq k, k \leq 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ y considerar a $-k$ como negativo.

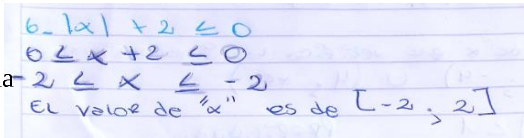
ii. En esta subcategoría, los estudiantes consideraron la equivalencia $|x| \leq k, k \leq 0 \Leftrightarrow x \leq k \vee x \geq -k$. Como en la inecuación **h**). Ver figura 27, procedimiento de Camila.

6. ***Considerar válida la linealidad del valor absoluto***

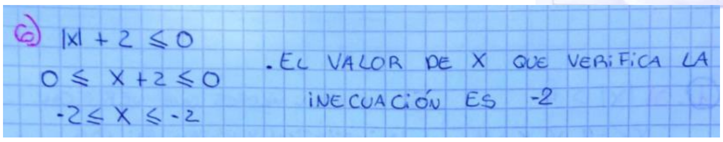
Es decir, suponer válida la propiedad $|x+y| = |x| + |y|, x, y \in \mathbb{R}$. En la inecuación **g**), $|x| + 2 \leq 0$, para cinco estudiantes es "equivalente" a la inecuación $|x+2| \leq 0$. Al aplicar incorrectamente la propiedad $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ (sin despejar $|x|$ en la inecuación), obtuvieron como solución: $-2 \leq x \leq -2$, el intervalo $[-2, -2]$, $-2 \leq x \leq -2$ (Como puede apreciarse en las figuras 42 y 43). La imagen evocada en estos casos se relaciona con la linealidad que no se cumple para el valor absoluto, a diferencia de otros operadores.



Resolución de Claribel



Resolución de Claudia



Resolución de Maria

Figura 42. Consideración de la linealidad del valor absoluto en la inecuación g).

Para la inecuación **i**), se puede suponer que los estudiantes siguieron el razonamiento:

$$|x+3|<-3|x|,\ |x|+|3|<-3|x| \Leftrightarrow |x|+3|x|<-3 \Leftrightarrow 4|x|<-3 \Leftrightarrow |x|<-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right).$$

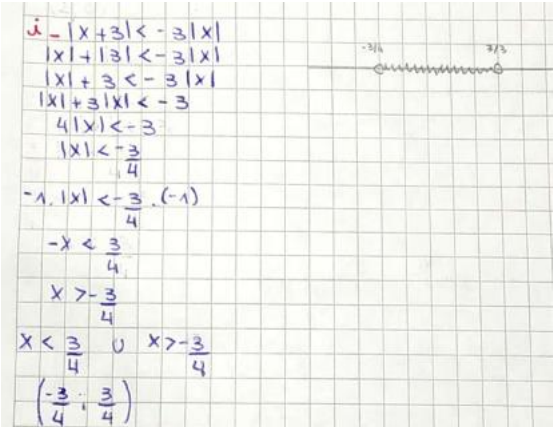


Figura 43. Resolución inecuación i) de Ailen.

7. ***No existencia de solución.***

i. Los estudiantes propusieron como justificación que el valor absoluto debe ser mayor a 0. Sin embargo, también manifestaron que no se puede resolver porque no es posible aplicar la propiedad de valor absoluto.

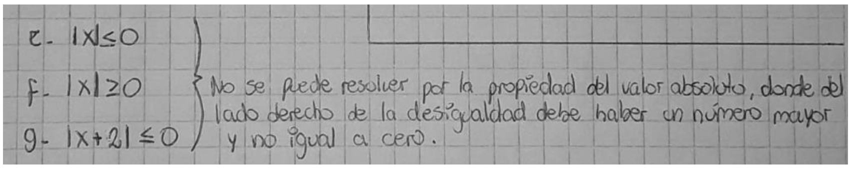
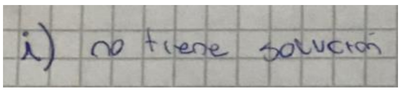
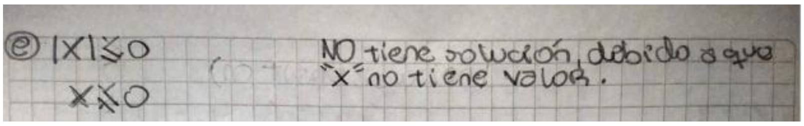


Figura 44. Resolución inecuaciones e), f) y g) de Guadalupe.

ii. Sin justificación o si presentan es poco clara.



Resolución de Salomón



Resolución de Miguel

Figura 45. Procedimientos de estudiantes sin justificación o no se comprende.

8. ***No resuelven***. Ver figura 46.

En esta categoría incluimos todos aquellos casos en los que los estudiantes manifestaron no poder resolver la inecuación.

Inecuación **e**) , **i**)

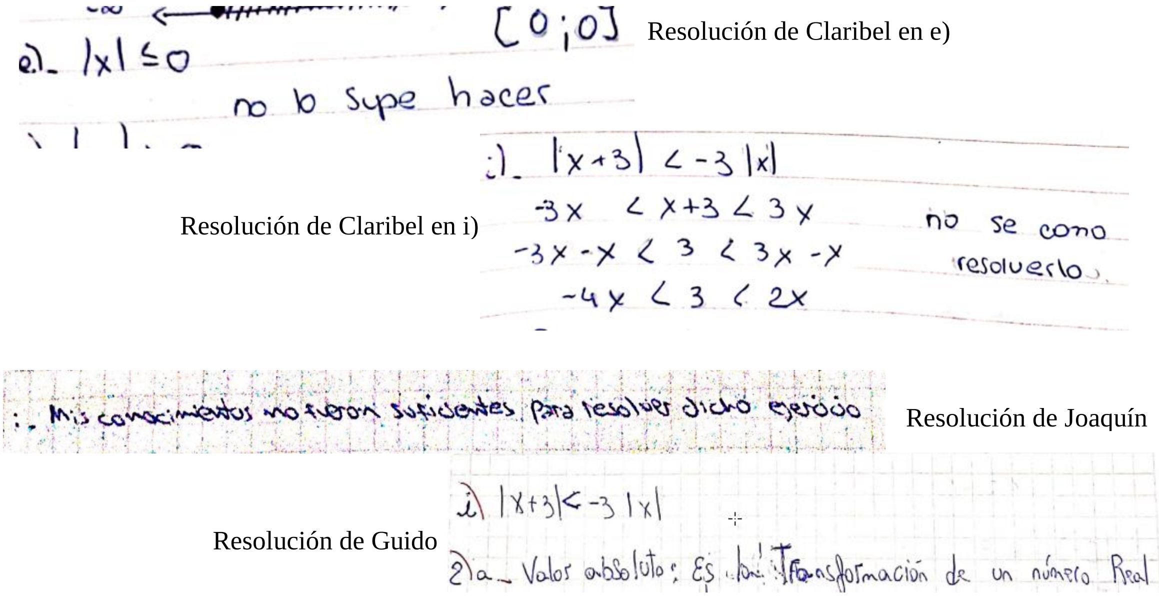


Figura 46. Ausencia de una estrategia para obtener el conjunto solución en las inecuaciones e), i).

9. ***Otros.***

Los estudiantes proponen respuestas incorrectas o parcialmente correctas. En la figura 47, Anabella considera que los números reales negativos verifican la inecuación e).

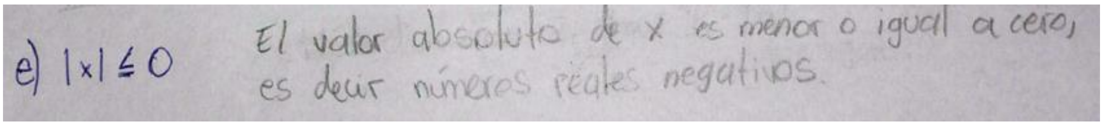


Figura 47. Respuesta de Anabella en la inecuación e).

El procedimiento que propone Juan Esteban (figura 48) es correcto únicamente en el primer paso. Luego utiliza la propiedad del valor absoluto para los números negativos.

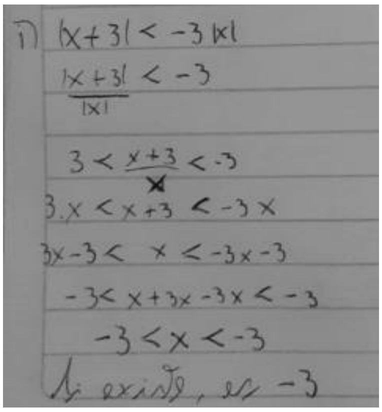


Figura 48. Resolución inecuación i) de Juan Esteban.

Virginia (figura 49) utiliza la definición de valor absoluto como raíz cuadrada, pero tampoco le permite obtener una solución correcta.

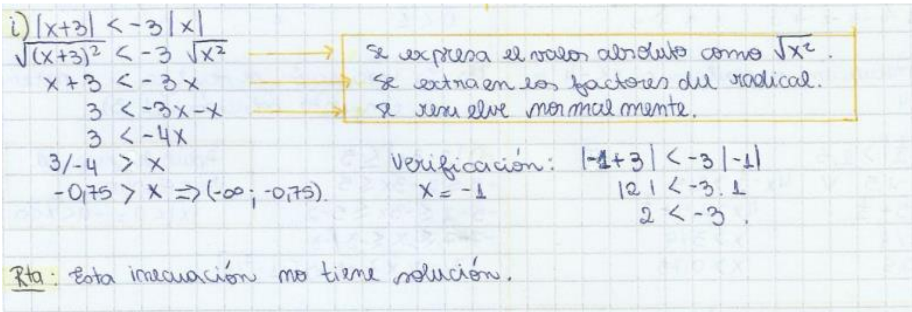


Figura 49. Resolución inecuación i) de Virginia.

4.1.2 Consigna 2: respuestas a los interrogantes

En esta sección se examinan las respuestas de los alumnos a la consigna 2 del cuestionario escrito que permitieron responder a la pregunta de investigación ¿qué definiciones de valor absoluto, inecuación, inecuación con valor absoluto tienen los estudiantes universitarios. Con respecto a la pregunta del ítem A) ¿Qué es el valor absoluto de un número real?, se distinguieron cinco categorías principales. En las preguntas B) ¿Qué es una inecuación? y C) ¿Qué entiendes por inecuación con valor absoluto?, se han elaborado cuatro categorías para cada una. Como se mencionó en la sección anterior, las categorías no necesariamente son mutuamente excluyentes. Para cada una de estas tres interrogantes, se definieron las categorías como lo expone la tabla 4 y se añade a ellas algunas respuestas y su correspondiente recorte del trabajo de los estudiantes que pertenecen a cada una de ellas.

Tabla 4. Resumen de las categorías definidas para la consigna 2 del cuestionario escrito.

Definiciones	**Categorías**	**Subcategorías**
Valor absoluto	1. Un número sin signo.	
	2. Un número positivo.	
	3. Un número positivo o cero.	
	4. Distancia.	Incluyen el 0.
		No incluyen el 0.
	5. Regla de asignación de un número según sea positivo, negativo o cero.	
Inecuaciones	1. Desigualdad.	
	2. Desigualdad entre expresiones algebraicas.	Contiene al menos una incógnita.
		Figura la letra x.
	3. Desigualdad entre conjuntos numéricos.	Siempre tiene solución.
		Puntos en la recta numérica – como un intervalo real.
	4. Restricción sobre cierto dominio.	
Inecuaciones con valor absoluto	1. Desigualdad en la que la variable está afectada por el valor absoluto.	*a*. Asociada a métodos o propiedades para resolverla. *b*. Distancia entre x y 0. *c*. La variable es positiva o no tiene signo.
	2. La incógnita es el valor absoluto de x.	
	3. Como un subconjunto no vacío de números reales.	*a*. Es un intervalo. *b*. Números que corresponden a la recta numérica.
	4. Como una inecuación en general.	

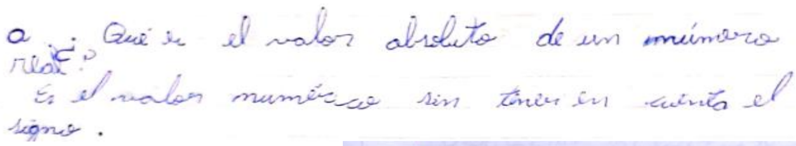
4.1.2.1 Definición de valor absoluto

Las distintas definiciones de valor absoluto que propusieron los estudiantes como respuesta a la pregunta A) ¿Qué es el valor absoluto de un número real? originaron 5 categorías.

1. *Como un número sin signo*

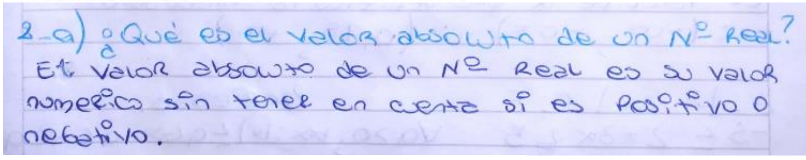
En este caso los alumnos definieron al valor absoluto de un número real como el mismo número sin considerar su signo. Es decir dado un número real, su valor absoluto es el mismo número al que se ha eliminado su signo, como se evidencia en las capturas siguientes capturas (figura 50). A continuación se mencionan las respuestas a fin de facilitar su lectura:

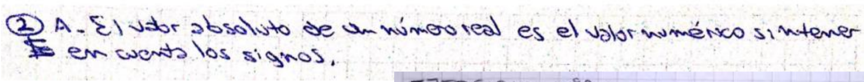
a) Es el valor numérico sin tener en cuenta el signo.
b) Es su valor numérico sin tener en cuenta si es positivo o negativo.
c) Es el valor numérico sin tener en cuenta los signos.
d) El valor absoluto de un número real es igual a ese mismo número sin ningún signo que lo determina, es decir, si el número real tiene signo positivo, es el mismo número; si tiene signo negativo corresponde a su opuesto. Por ejemplo $|-20| = 20$; $|40| = 40$.


a ¿Qué es el valor absoluto de un número real?
Es el valor numérico sin tener en cuenta el signo.

Respuesta de Carmelo

Respuesta de Claudia


2_a) ¿Qué es el valor absoluto de un Nº real?
Es el valor absoluto de un Nº Real es su valor numérico sin tener en centa si es positivo o negativo.


② A. El valor absoluto de un número real es el valor numérico sin tener en cuenta los signos.

Respuesta de Camila

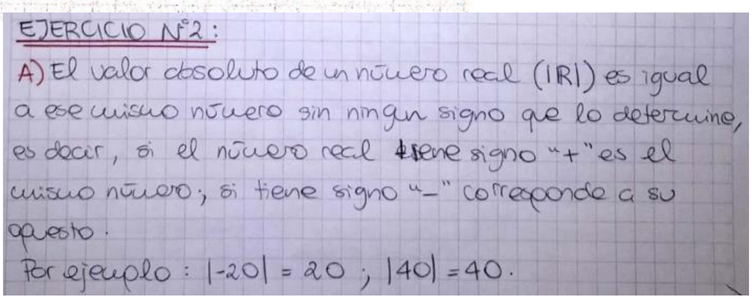

EJERCICIO Nº2:
A) El valor absoluto de un número real (IR) es igual a ese mismo número sin ningun signo que lo determine, es decir, si el número real tiene signo "+" es el mismo número; si tiene signo "–" corresponde a su opuesto.
Por ejemplo: |-20| = 20 ; |40| = 40.

Figura 50. Respuesta a la pregunta A): valor absoluto como un número sin signo.

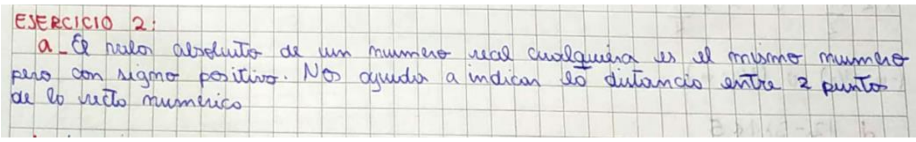
La definición de valor absoluto como un número sin signo se enmarca en un contexto aritmético y frecuentemente es la manera en que se lo presenta en los libros de textos del Nivel Medio. En la respuesta de Camila (figura 50), pareciera ser que la estudiante ejemplifica por la necesidad de explicitar la definición que propone, y que sus condiciones no son suficientes para determinar el valor absoluto de un número.

2. *Como un número positivo*

En esta categoría, los estudiantes consideran al valor de un número real como un número positivo. Aunque esta respuesta no es del todo correcta, a continuación se ilustran algunas respuestas de los estudiantes (ver figura 51):

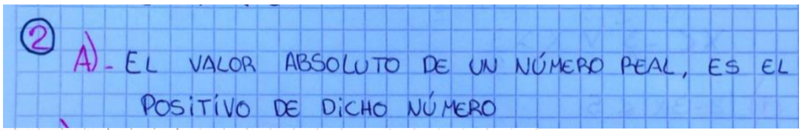
a) Es el mismo número pero con signo positivo. Nos ayuda a indicar la distancia entre dos puntos en la recta numérica.
b) Es el número positivo del número dado.
c) Es el mismo número positivo y siempre será mayor o igual a cero.
d) Representación positiva de un número *x*.

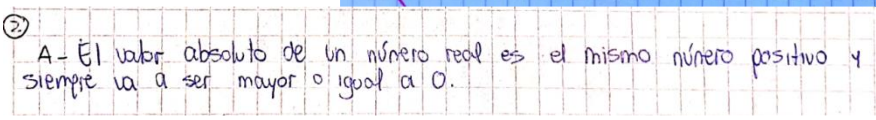
Estas definiciones se encuentran relacionadas con la noción de distancia, como está explícito en lo que propone Ailen (figura 51), aunque no tiene en cuenta que la distancia puede ser nula.



Respuesta de Ailen

Respuesta de María





Respuesta de Katia

Respuesta de Juan Esteban

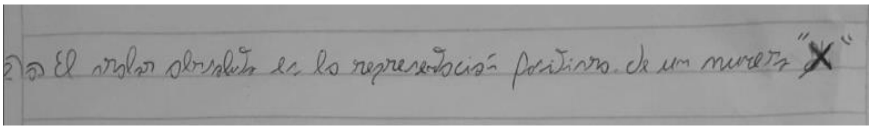


Figura 51. Respuesta a la pregunta A): valor absoluto como un número positivo.

3. *Como un número positivo o cero*

En la figura 52, a diferencia de la categoría anterior, el estudiante incluye al 0 como el valor absoluto de algún número real. Si bien este caso se presentó solamente una vez, se decidió incorporarlo por ser una imagen evocada relevante del valor absoluto.

– El valor absoluto de un número real es el positivo o cero del numero dado.

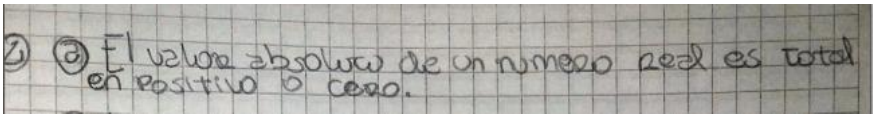

2) ⓐ El valor absoluto de un número real es total en positivo o cero.

Figura 52. Respuesta de Miguel a la pregunta A): valor absoluto como un número positivo o cero.

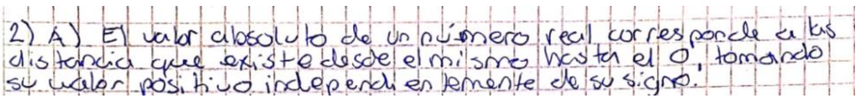
4. *Como una distancia*

Es común definir al valor absoluto como una distancia, y asi lo proponen los estudiantes cuyas respuesta están presente en las figuras 53 y 54. Al considerarlo de esta manera, los alumnos manifestaron que debe ser positiva y otros como positiva o cero, es decir no negativa. De allí la distinción entre incluir al cero o no. En la respuesta de Santiago (figura 53) se observa la confusión entre ser no negativo y positivo.

- *No incluyen el cero.*

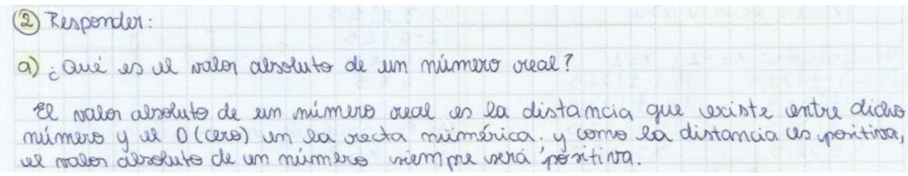
a) Distancia que existe entre un número real hasta el cero, tomando su valor positivo independientemente de su signo.
b) El valor absoluto es la distancia que existe entre dicho número y el cero en la recta numérica y como la distancia es positiva, el valor absoluto de un número siempre será positiva.
c) Indica una distancia respecto al cero. Como las distancias no pueden negativas, su resultado siempre será positivo.

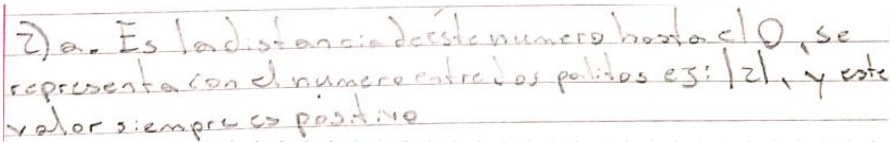
En los ejemplos mencionados, se puede observar que el valor absoluto es considerado como una operación unitaria.


2) A) El valor absoluto de un número real corresponde a la distancia que existe desde el mismo hasta el 0, tomando su valor positivo independientemente de su signo.

Respuesta de Bautista

Respuesta de Virginia


② Responder:
a) ¿Qué es el valor absoluto de un número real?
El valor absoluto de un número real es la distancia que existe entre dicho número y el 0 (cero) en la recta numérica. y como la distancia es positiva, el valor absoluto de un número siempre será positiva.


2) a. Es la distancia desde número hasta el 0, se representa con el numero entre dos palitos es: |z|, y este valor siempre es positivo

Respuesta de Mateo

Respuesta de Santiago

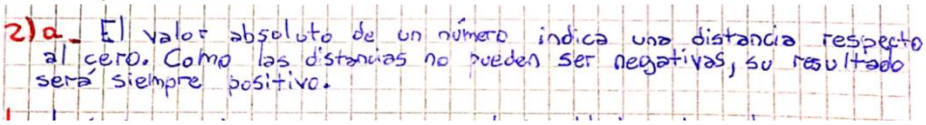
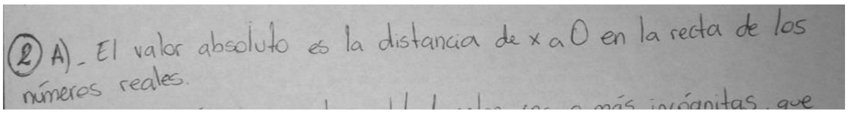

2) a. El valor absoluto de un número indica una distancia respecto al cero. Como las distancias no pueden ser negativas, su resultado será siempre positivo.

Figura 53. Respuesta a la pregunta A): valor absoluto como distancia positiva.

- *Incluyen el cero*

Son ejemplos de esta subcategoría:

a) Es la distancia de un número *x* al cero en la recta de números reales.
b) Es la distancia de dicho número hasta el cero.



Respuesta de Anabella

Respuesta de Hynek

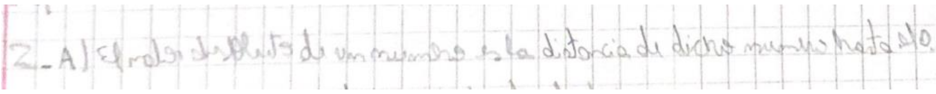
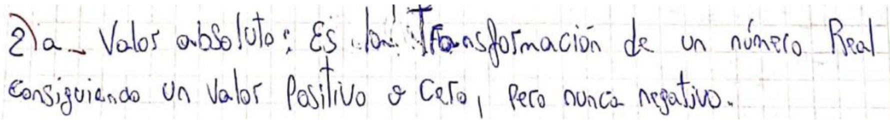


Figura 54. Respuesta a la pregunta A): valor absoluto como distancia positiva o cero.

5. *Regla de asignación de un número según sea positivo, negativo o cero*

En la categoría 5, los alumnos definieron al valor absoluto de un número real como una regla de asignación según ese número sea positivo, cero o negativo. Esto se observa en los siguientes ítems y en el ítem d) de la categoría 1. Es importante destacar que estos estudiantes no utilizaron la frase “no negativo” (figura 55).

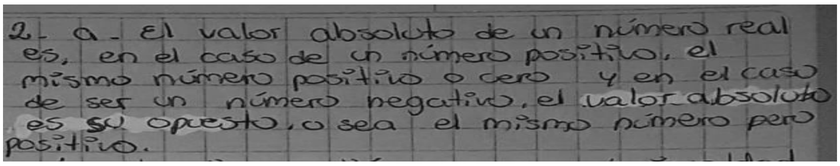
a) Es la transformación de un número real consiguiendo un valor positivo o cero, pero nunca negativo. [Observamos que este alumno considera al valor absoluto como una transformación del número real a un número no negativo pero deja implícito cómo se consigue esa transformación. Es decir, solo estable el rango de la función].
b) Es el mismo número si es positivo o cero, y su opuesto si es negativo.
c) En el caso de un número positivo, su valor absoluto es el mismo número positivo o cero y en el caso de ser un número negativo, el valor absoluto es su opuesto, es decir el mismo número pero positivo.
d) Se llama valor absoluto de un número real al mismo número si es positivo o cero y su opuesto si es negativo.


2) a_ Valor absoluto: Es la Transformación de un número Real consiguiendo un Valor Positivo o Cero, pero nunca negativo.

Respuesta de Guido

Respuesta de Ludmila


2) A ¿Qué es el valor absoluto de un nº real?
Es el mismo núm si es positivo o cero, y su opuesto si es ⊖ ⊕


2. a. El valor absoluto de un número real es, en el caso de un número positivo, el mismo número positivo o cero y en el caso de ser un número negativo, el valor absoluto es su opuesto, o sea el mismo número pero positivo.

Respuesta de Guadalupe

Respuesta de Salomón

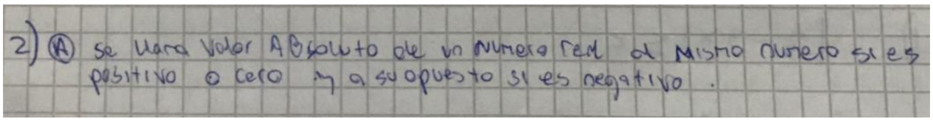

2) Ⓐ Se llama Valor Absoluto de un Número real al Mismo número si es positivo o cero y a su opuesto si es negativo.

Figura 55. Respuesta a la pregunta A): valor absoluto como una regla de asignación.

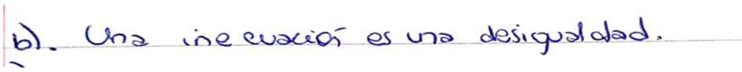
4.1.2.2 Definición de inecuaciones

Con respecto a la pregunta B) ¿Qué entiendes por inecuación? surgieron 4 categorías que dan cuenta de la definición personal de inecuación.

1. *Como una desigualdad*

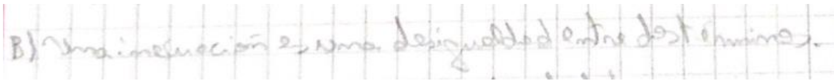
En esta primer categoría, los alumnos hicieron referencia a las inecuaciones como una desigualdad. En este sentido, para los estudiantes la desigualdad 2 > 1 es una inecuación, lo cual no es correcto. Las capturas de las respuestas de algunos estudiantes se mencionan a cotinuación y los mismos pueden observarse en la figura 56.

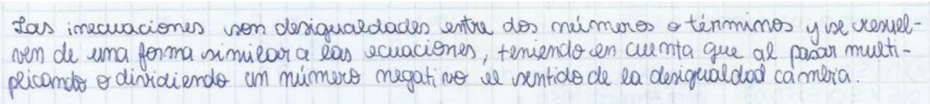
a) Una inecuación es una desigualdad.
b) Una inecuación es una desigualdad entre dos términos.
c) Las inecuaciones son desigualdades entre dos números o términos y se resuelven de una forma similar a las ecuaciones, teniendo en cuenta que al pasar multiplicando o dividiendo un número negativo el sentido de la desigualdad cambia.



Respuesta de Claribel

Respuesta de Hynek





Respuesta de Virginia

Respuesta de Mateo

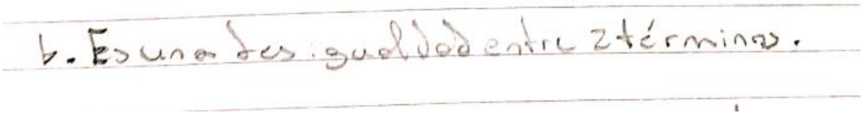


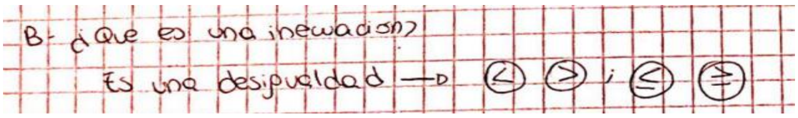
Figura 56. Respuesta a la pregunta B): inecuación como desigualdad.

Esta categoría presenta un subcaso:

- *Descripción de las inecuaciones por los símbolos que intervienen.*

Los estudiantes declaranon como esencial la presencia de los símbolos $<$, $>$ o en sentido amplio: $\leq$, $\geq$ al definir las inecuaciones. Algunas respuestas de los estudiantes (figura 57) referida a esta categoría fueron:

a) Una inecuación es una desigualdad: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.
b) Una inecuación difiere de las ecuaciones porque intervienen los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ en lugar de estar presente el de igualdad (=).



Respuesta de Ludmila

Respuesta de Miguel

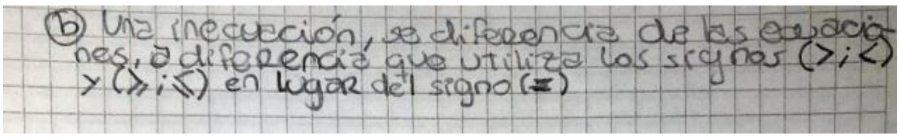


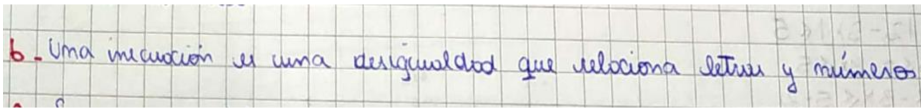
Figura 57. Respuesta a la pregunta B): inecuación como desigualdad en la que intervienen símbolos.

2. ***Desigualdad entre expresiones algebraicas***

A diferencia de la categoría 1, las inecuaciones también involucran letras. Se pueden citar algunas respuestas de los estudiantes (figuras 58 al 60):

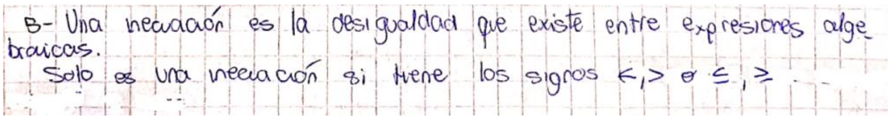
a) Es una desigualdad que relaciona letras y números.

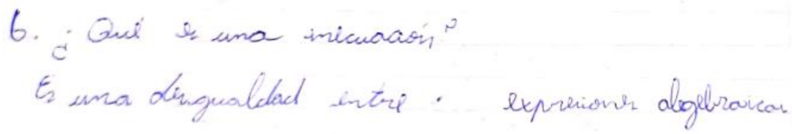
b) Desigualdad entre expresiones algebraicas. Solo es una inecuación si tiene los signos <, > , ≤ , ≥. [Puede observarse rasgos de la categoría 1].
c) Desigualdad entre expresiones algebraicas.
d) Es una desigualdad en dos expresiones algebraicas (de lo contrario es una ecuación).
e) Es una desigualdad algebraica.


b- Una inecuación es una desigualdad que relaciona letras y números

Respuesta de Ailen

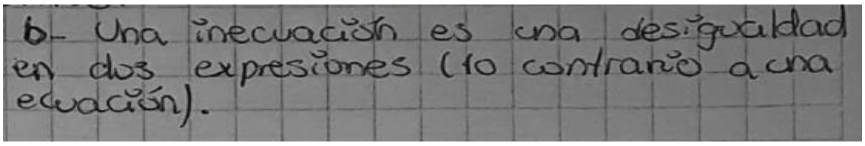
Respuesta de Katia

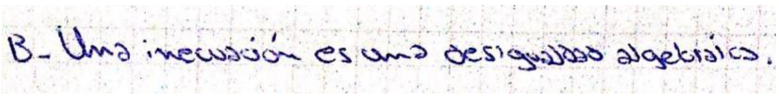

B- Una inecuación es la desigualdad que existe entre expresiones algebraicas.
Solo es una inecuación si tiene los signos <, > o ≤, ≥


6. ¿Qué es una inecuación?
Es una desigualdad entre expresiones algebraicas.

Respuesta de Carmelo

Respuesta de Guadalupe


b- Una inecuación es una desigualdad en dos expresiones (lo contrario a una ecuación).


B- Una inecuación es una desigualdad algebraica.

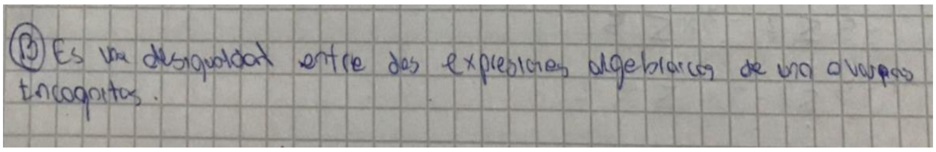
Respuesta de Joaquín

Figura 58. Respuesta a la pregunta B): inecuación como desigualdad entre expresiones algebraicas.

A su vez, algunos estudiantes incorporaron la palabra incógnita en sus respuestas y otros han caracterizado a las inecuaciones como aquellas en las que la incógnita está dada por la letra *x*. De este modo tenemos dos subcategorías:

- *Contiene al menos una incógnita.* (véase figura 59)

a) Es una desigualdad entre expresiones algebraicas de una o varias incógnitas.
b) Una inecuación o desigualdad es un conjunto de números y/o incógnitas que se relacionan con otro semejante mediante signos mayor (>), menor (<) (…)


(B) Es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas de una o varias incognitas.

Respuesta de Salomón

Respuesta de Camila

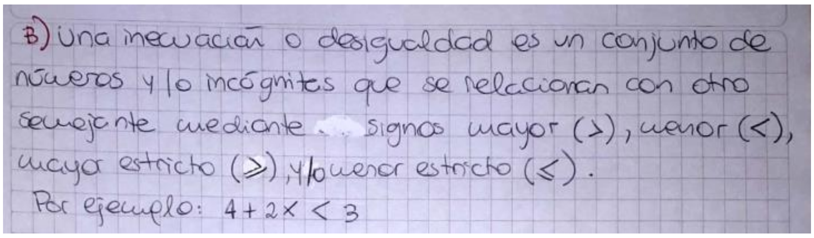

B) Una inecuación o desigualdad es un conjunto de números y/o incógnitas que se relacionan con otro semejante mediante signos mayor (>), menor (<), mayor estricto (≥), y/o menor estricto (≤).
Por ejemplo: $4+2x<3$

Figura 59. Respuesta a la pregunta B): inecuación como desigualdad en la que interviene una incógnita.

- *Figura la letra x.* (figura 60)

Es una desigualdad en la que se enmarcar el/los valores de *x*.

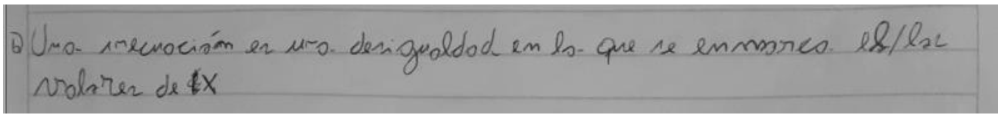

B) Una inecuación es una desigualdad en la que se enmarca el/los valores de x

Figura 60. Respuesta a la pregunta B) de Juan Esteban: inecuación como desigualdad con *x*.

3. ***Desigualdad entre conjuntos numéricos***

Esta categoría está relacionada con la 1 pero en contraste a ella, los estudiantes añadieron la idea de que las inecuaciones siempre tienen solución (figura 61 y 62) y además, que puede ser representada como un intervalo real (figuras 62 y 63). Algunos participantes respondieron:

– Las inecuaciones expresan una desigualdad entre dos conjutnos numéricos, señalando que los elementos de uno son mayores o menores que los del otro.

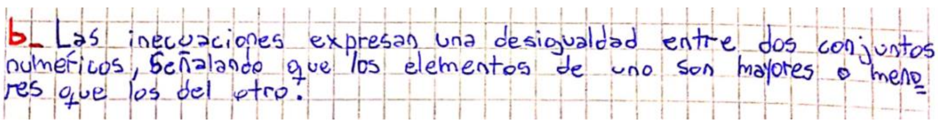

b. Las inecuaciones expresan una desigualdad entre dos conjuntos numéricos, señalando que los elementos de uno son mayores o menores que los del otro.

Figura 61. Respuesta a la pregunta B) de Santiago: inecuación como desigualdad entre conjuntos numéricos.

- *Siempre tiene solución*

– Inecuación: son desigualdades que dan como solución un punto en la recta.

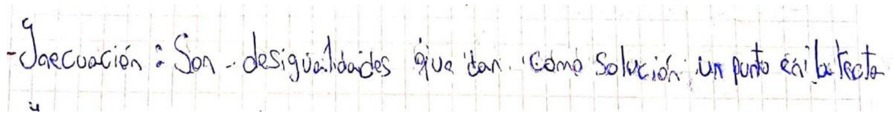

-Inecuación: Son desigualdades que dan como solución un punto en la recta

Figura 62. Respuesta a la pregunta B) de Guido: inecuación como conjunto no vacío.

- *Puntos en la recta - Como un intervalo real.*

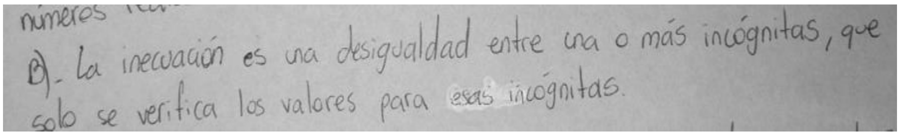
Una inecuación hace referencia a una desigualdad entre números, que puede ser expresada en la recta como un intervalo.


B) Una inecuación hace referencia una desigualdad entre números que puede ser expresada en una recta como un intervalo.

Figura 63. Respuesta a la pregunta B) de Bautista: inecuación cuya solución es un intervalo.

4. *Inecuación como restricción sobre un dominio*

En la figura 64, los estudiantes afirmaron que una inecuación expresa un subconjunto de números reales, y no necesariamente como algo a resolver. Si bien en las declaraciones de los estudiantes no está explicito, hay un dominio de definición para la incógnita o variable


B)- La inecuación es una desigualdad entre una o más incógnitas, que solo se verifica los valores para esas incógnitas.

Respuesta de Anabella

Respuesta de Claudia

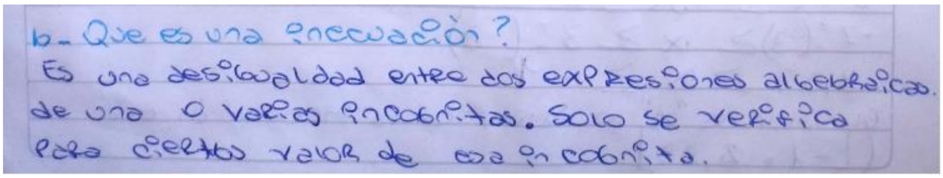

b- Que es una inecuación?
Es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas de una o varias incognitas. Solo se verifica para ciertos valor de esa incognita.

Figura 64. Respuesta a la pregunta B): inecuación como restricción.

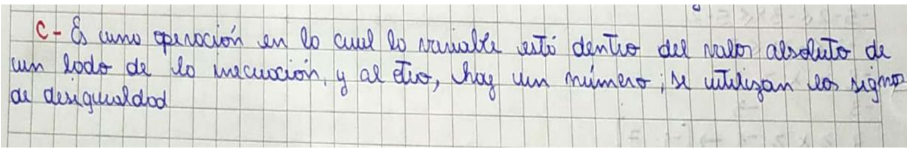
4.1.2.3 Definición de inecuaciones con valor absoluto

Como respuesta a la pregunta C ¿Qué entiendes por inecuación con valor absoluto?, los estudiantes propusieron distintas definiciones personales para los cuales emergieron 4 categorías.

1. *Desigualdad en la que la variable está afectada por el valor absoluto.*

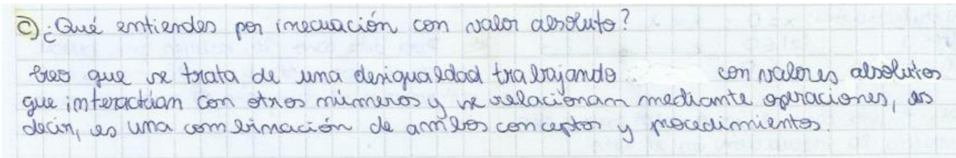
En esta categoría, cuyas evidencias se encuentran en las figuras 65 al 68, los estudiantes caracterizan a una inecuación con valor absoluto si está presente las barras de módulo. Algunas respuestas de los alumnos fueron:

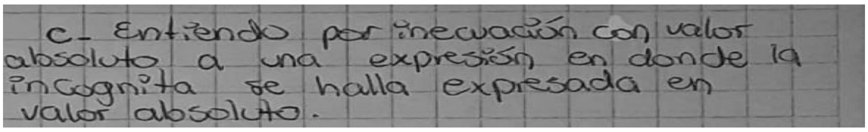
a) La variable está dentro del valor absoluto y aparecen los símbolos de desigualdad.
b) Desigualdad con valores absolutos que interactuan con otros números y se relacionan mediante operaciones. Es decir, es una combinación de conceptos y procedimientos.
c) La incógnita se halla expresada en términos del valor absoluto.


C- Es una operación en lo cual la variable está dentro del valor absoluto de un lado de la inecuación, y al otro, hay un número; se utilizan los signos de desigualdad

Respuesta de Ailen

Respuesta de Virginia


c) ¿Qué entiendes por inecuación con valor absoluto?
Creo que se trata de una desigualdad trabajando con valores absolutos que interactuan con otros números y se relacionan mediante operaciones, es decir, es una combinación de ambos conceptos y procedimientos.


c- Entiendo por inecuación con valor absoluto a una expresión en donde la incógnita se halla expresada en valor absoluto.

Respuesta de Guadalupe

Respuesta de Claribel

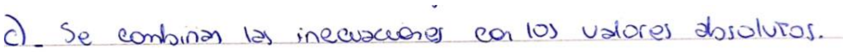

c)_ Se combinan las inecuaciones con los valores absolutos.

Figura 65. Respuesta a la pregunta C): inecuación cuya incógnita está afectada con el valor absoluto.

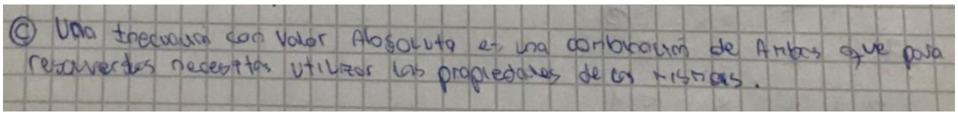
Se distinguen tres subcategorías:

a. Asociada a métodos o propiedades para resolverla.

La definición de las inecuaciones con valor absoluto utilizadas por los estudiantes está determinada por los métodos o propiedades necesarias para resolverla. Es decir, sus definiciones se expresan en términos de procedimientos o propiedades. Los estudiantes han propuesto las siguientes definiciones (figura 66).

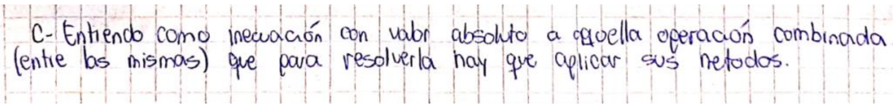
a) Para resolverlas es necesario utilizar propiedades de las inecuaciones y del valor absoluto.
b) Para resolverla hay que aplicar métodos de las inecuaciones y del valor absoluto.

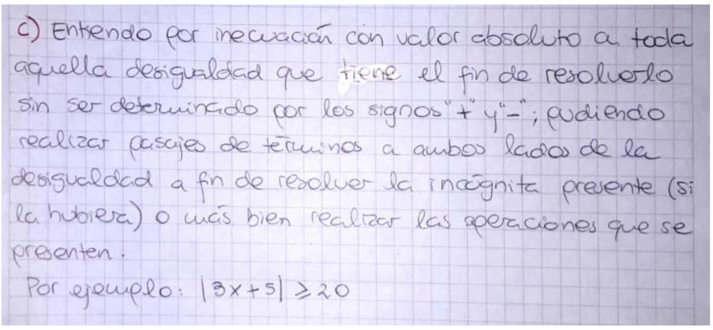
c) Desigualdad en la que no interesan los signos y en la que se aplican las operaciones.


© Una Inecuación con Valor Absoluto es una combinación de Ambas que para resolverlas necesitas utilizar las propiedades de las mismas.

Respuesta de Salomón

Respuesta de Katia


C- Entiendo como inecuación con valor absoluto a aquella operación combinada (entre las mismas) que para resolverla hay que aplicar sus metodos.


c) Entiendo por inecuación con valor absoluto a toda aquella desigualdad que tiene el fin de resolverlo sin ser determinado por los signos "+" y "−"; pudiendo realizar pasajes de términos a ambos lados de la desigualdad a fin de resolver la incógnita presente (si la hubiera) o más bien realizar las operaciones que se presenten.
Por ejemplo: $|3x+5| \geq 20$

Respuesta de Camila

Respuesta de Ludmila

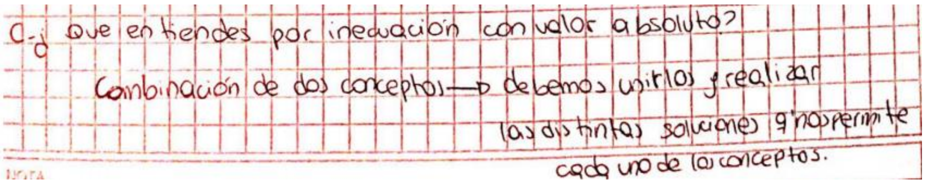

C-¿Que entiendes por inecuación con valor absoluto?
Combinación de dos conceptos → debemos unirlos y realizar las distintas soluciones q' nos permite cada uno de los conceptos.

Figura 66. Respuesta a la pregunta C): inecuación con valor absoluto asociada a propiedades para resolverla.

b. Distancia entre x y el 0.

En esta categoría, no muy presente en los estudiantes, una inecuación con valor absoluto expone la distancia entre ciertos números al origen. Veáse figura 67.

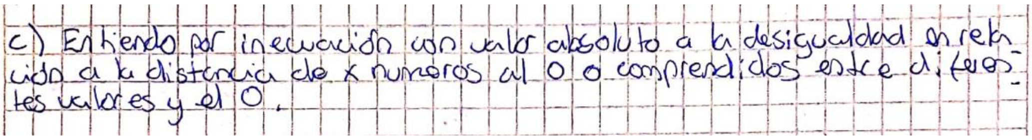
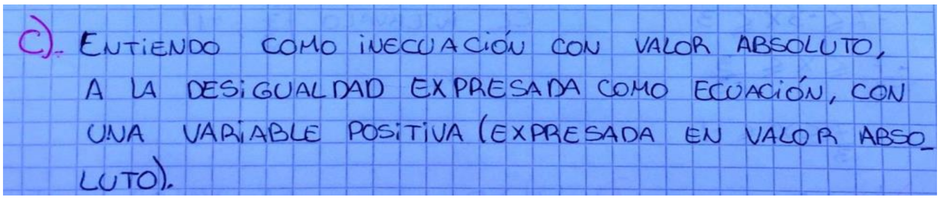

c) Entiendo por inecuación con valor absoluto a la desigualdad en relación a la distancia de x números al 0 o comprendidos entre diferentes valores y el 0.

Figura 67. Respuesta a la pregunta C) de Bautista: inecuación con valor absoluto como distancia.

c. La variable es positiva o no tiene signo.

La incógnita se considera positiva o sin signo. Un ejemplo de este caso es la respuesta de María (véase figura 68).



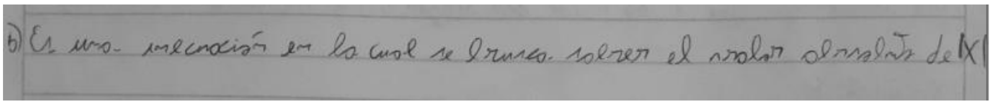
C).- ENTIENDO COMO INECUACIÓN CON VALOR ABSOLUTO, A LA DESIGUALDAD EXPRESADA COMO ECUACIÓN, CON UNA VARIABLE POSITIVA (EXPRESADA EN VALOR ABSOLUTO).

Figura 68. Respuesta a la pregunta C) de María: inecuación con valor absoluto cuya variable es positiva o no tiene signo.

2. ***La incógnita es el valor absoluto de x.***

Con esta categoría se agrupó aquellas definiciones de los estudiantes en los que consideran al valor absoluto de *x* como incógnita. Los alumnos expresaron por ejemplo:

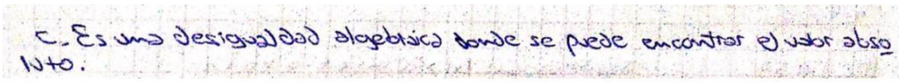
a) Es una inecuación en la que se busca saber el valor absoluto de *x* (figura 69, resolución de Juan Esteban).
b) Desigualdad algebraica en la que se puede encontrar el valor absoluto (figura 69, resolución de Joaquín).



b) Es una inecuación en la cual se busca saber el valor absoluto de |x|

Respuesta de Juan Esteban

Respuesta de Joaquín



c.- Es una desigualdad algebraica donde se puede encontrar el valor absoluto.

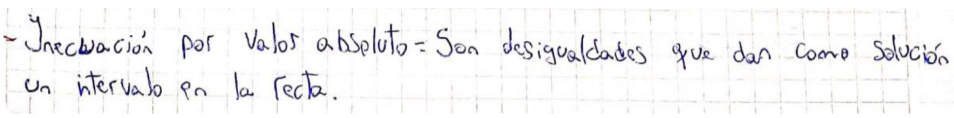
Figura 69. Respuesta a la pregunta C): inecuación en la que la incógnita es el valor absoluto.

3. ***Como un subconjunto no vacío de números reales***

En la tercer categoría, los estudiantes considerarona las inecuaciones como consistentes y siempre es posible expresar las soluciones como un intervalo real (figura 70) o como puntos de la recta real (figura 71).

a. Es un intervalo.

Por ejemplo: Son desigualdades que dan como solución un intervalo en la recta.



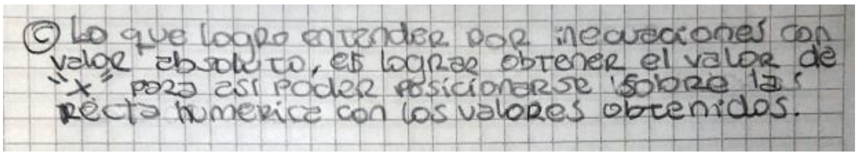
- Inecuación por valor absoluto = Son desigualdades que dan como solución un intervalo en la recta.

Figura 70. Respuesta 2c) Guido: inecuación con v. a. cuya solución es un intervalo.

b. Números que corresponden a la recta numérica.

i. Lo que logro entender por inecuaciones con valor absoluto, es obtener el valor de "*x*" para así poder posicionarse sobre la recta numérica con los valores obtenidos.

ii. Son operaciones para averiguar y ubicar en tramos de la recta numérica los valores que se le podrían asignar a la incógnita.


c) Lo que logro entender por inecuaciones con valor absoluto, es lograr obtener el valor de "x" para asi poder posicionarse sobre la recta numerice con los valores obtenidos.

Respuesta de Miguel

Respuesta de Mateo

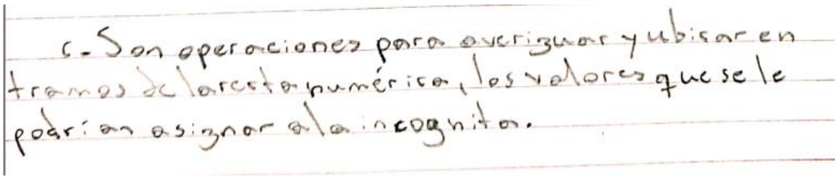
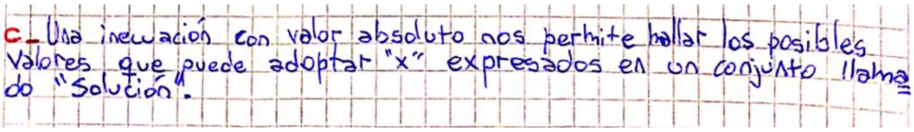

c.- Son operaciones para averiguar y ubisar en tramos de la recta numérica, los valores que se le podrían asignar a la incognita.

Figura 71. Respuesta a la pregunta C): inecuación con valor absoluto como puntos de la recta.

4. *Como una inecuación en general*

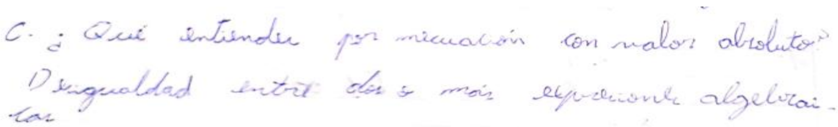
En la figura 72, no se identifica alguna evidencia que caracterice específicamente a las inecuaciones con valor absoluto. Es decir, la definición que propusieron los estudiantes para las inecuaciones con valor absoluto se adapta a las inecuaciones en general. Algunas respuestas de los estudiantes fueron:

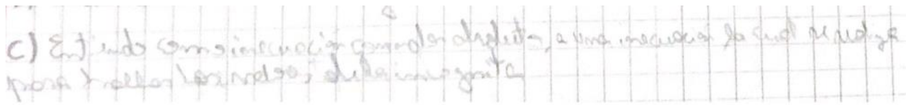
a) Una inecuación con valor absoluto permite hallar los posibles valores que puede adoptar *x*, expresados en un conjunto llamado solución (resolución de Santiago)
b) Desigualdad entre dos o más expresiones algebraicas (resolución de Carmelo)
c) Inecuación en la que se debe hallar los valores de las incógnitas (resolución de Hynek)



Respuesta de Santiago

Respuesta de Carmelo





Respuesta de Hynek

Figura 72. Respuesta a la pregunta C: inecuación con valor absoluto como una inecuación en general.

4.2 Análisis de las entrevistas

En esta última sección, se analizan las respuestas de los estudiantes, las cuales fueron categorizadas en función de tres aspectos, según su relación con la definición del valor absoluto, las inecuaciones con valor absoluto y soluciones de las inecuaciones. Estas categorías permitieron completar las imágenes del concepto evocadas que se identificaron en la sección anterior.

4.2.1 Definiciones del valor absoluto

- En las entrevistas los participantes respondieron a la pregunta: ¿cuál es el valor absoluto de un número real *x* (o *a*)? Esta pregunta difiere de la pregunta A de la consigna 2, planteada en el cuestionario escrito: ¿qué es el valor absoluto de un número real?, en la que se especifica cuál es el número real. Se ha identificado que para algunos de los entrevistados, el valor absoluto de *x* (*a*) es *x* (*a*), no se cuestionan si *x* (*a*) es un real positivo, negativo o cero. Es decir, predomina como imagen una definición aritmética del valor absoluto. Por ejemplo, Ailen propuso como definición de valor absoluto en el cuestionario escrito: “el valor absoluto de un número real cualquiera es el mismo número con signo positivo, nos ayuda a indicar la distancia entre dos puntos de la recta numérica”. En la entrevista manifiesta:

  E: Si yo tengo un número real cualquiera cuál será el valor absoluto de x o módulo como quieras llamarlo. A qué será igual entonces el valor absoluto de x o de a o lo que fuera. Si x es un número real, su módulo es igual a… ¿Qué escribo acá? $|x| =$
  A: x.
  E: x, ¿así $|x| = x$ *?*
  A: O en realidad serían los números reales.

E: Si x ya es un número real, a ese número real le corresponde como valor absoluto vos decís el mismo número, ¿no? ¿O no era así?
A: Sí.

Es decir, el valor absoluto de un número real es el mismo número. Esta imagen del valor absoluto evidenció lo que afirma Vinner (1991): discrepancias entre la imagen del concepto de valor absoluto y su definición. Esta situación se evidencia en el siguiente fragmento:

E: Entonces para -3 por ejemplo ¿va a cumplir? Mirá, me a quedar, si x vale -3, me queda $|-3|+2$ *tiene que ser menor o igual a 0.*
E: Eso es verdadero ¿o no?
A: Sí supongo.
E: ¿Cuál es el valor absoluto de -3?
A: -3.
E: El valor absoluto de -3 es.
A: -3.
E: $|-3|=-3$*, ¿así?*
A: Ajam.

Una respuesta similar la podemos encontrar en diálogos con Claribel, Guido y Juan Esteban, como se muestra enseguida.

Claribel
E: Entonces, según esto el valor absoluto de un número real es el mismo número positivo, el valor de su distancia al 0, entonces yo te pregunto si yo tengo un número real x, ¿sí? (*El entrevistador escribe* $x \in \mathbb{R} : |x| =$)
E: ¿Cuál sería entonces si yo tuviera que calcular el valor absoluto de x?, según tu definición, que dice que el valor absoluto un número real es el mismo número positivo, el valor de su distancia al 0, entonces que pondría acá después del igual del símbolo, ¿no?
A: x.
E: Vos pondrías x, ajam.
A: Sí.
E: Así según tú… lo que entendés, ¿sí?
A: Sí.

Guido
E: Claro, bien entonces ahora pasamos a al punto 2, ¿sí? donde ahí tenemos que hablar sobre las definiciones que te pedían, fíjate que en el punto 2a) decía qué entiendes por valor absoluto de un número real.
A: Sí.
E: Y vos escribiste: valor absoluto es la transformación de un número real, consiguiendo un valor positivo o cero, pero nunca negativo, ¿sí? Entonces si yo te preguntará, x es un número real, ¿cuál sería el valor absoluto de x?

A: x, si x.
E: x pondrías vos.
A: Sí.

Juan Esteban
E: Entonces yo te pregunto por ejemplo valor absoluto de -3, ¿cuánto es? ¿Y valor absoluto de 5 cuánto es? ¿Y valor absoluto de x cuánto es?
A: El valor absoluto de -3 sería 3.
E: Sí.
A: De 5 es 5, porque es un número positivo y de x también sería x.
E: Ajam, eso serían según tu definición.
A: Sí.

Mateo
E: Si yo tengo valor absoluto de a, a es un número real, ¿no?
A: Sí.
E: ¿Cuál sería su valor absoluto?
A: a.
E: a, ¿así? (|a|=a)
A: Sí.

4.2.2 Sobre la resolución de las inecuaciones con valor absoluto

- Para los estudiantes entrevistados, resolver una inecuación con valor absoluto consiste en llevar a cabo tres pasos bien definidos:

a) Identificar el sentido de la desigualdad, es decir si el número real dado es mayor (o mayor igual) menor (o menor igual) que el valor absoluto de una expresión algebraica.

b) Como segundo paso, es fundamental aplicar una de las propiedades del valor absoluto equivalentes a las desigualdades, cualquiera sea el valor del número real *k*.

c) Una vez que determinan la solución, deben expresar la solución como un intervalo, que muchas veces no encuentran la justificación de su razón de ser.

A continuación, se ilustran cada uno de los pasos mencionados. El paso a) se puede observar en los siguientes fragmentos de las entrevistas a Ailen y Miguel.

Ailen

E: Ajam, bien y ahora si vos tendrías que explicar a alguien, por ejemplo para resolver una inecuación con valor absoluto, ¿qué le dirías?, para que por ejemplo vos le querés explicar a tu compañera, teniendo una inecuación, entonces, ¿qué dirías para resolver esa inecuación?, ¿cuáles son los consejos que le darías?
A: Eh, primero que nada, solo le diría que se base en buscar los casos, de esto que yo tengo, a mí desde mi punto de vista me facilitó un montón porque yo miraba el signo y ya me sabía cómo resolverlo.

Miguel
E: Bien entonces, si tuvieras que explicar a un compañero cómo resolver una inecuación con valor absoluto, ¿qué le dirías Miguel? y con esto terminamos.
A: Que tendría que despejar, que tendría que seguir los pasos ver el signo positivo o negativo, quiero decir el signo mayor o menor, entre a y b, que sería valor absoluto y el número.

Algunos fragmentos de las entrevistas a Claribel, Claudia Juan Esteban y Mateo justifican el paso b), aplicar una de las propiedades del valor absoluto equivalentes a las desigualdades, cualquiera sea el valor del número real *k*.

Claribel
E: Ajam, bien ahora bien entonces cómo caracterizarías a estas inecuaciones si yo te digo tenés estas inecuaciones ¿sí?, estas inecuaciones con valor absoluto, yo te digo que las resuelvas, ¿qué harías vos para poder resolver una inecuación con valor absoluto?
A: Y fijarme en las propiedades del valor absoluto.

Claudia
E: Si ahora, entonces lo que te voy a preguntar ahora es y con esto vamos cerrando. Si vos tuvieras una inecuación o si te presentan o alguien te presenta una inecuación con valor absoluto, ¿sí? Una inecuación valor absoluto, vos qué te… ¿qué le dirías a alguien para poder resolver?, ¿cómo tendría que proceder esa persona?
A: Eh tiene que fijarse si se puede aplicar las propiedades y ahí luego, una vez que ve qué propiedad aplica tiene que encontrar el valor absoluto digamos, el valor de x,
E: Ajam, entonces tiene la inecuación ve si puedo aplicar o no la propiedad.

Juan Esteban
E: Bien entonces ahora para ir cerrando te pregunto, si vos tuvieras que explicar a un compañero cómo resolver una inecuación con valor absoluto, ¿qué le dirías a esa persona?
A: Le… le explicaría los dos procedimientos de las inecuaciones o sea explicarle cuando x es mayor a la parte b, y cuando la parte b es mayor a x, explicarle esos dos procedimientos para que tengan las dos opciones y luego de eso explicarle cuando hay igualdad también dentro de esa desigualdad, cuando es mayor o igual, cuando es menor o igual, y qué significa.

- Sin embargo, si bien este estudiante utiliza la propiedad del valor absoluto para un valor de k negativo, como se observa en el ejercicio 1h), pudo llegar a establecer como conclusión que no existe solución real.

Juan Esteban

E: Y acá decís qué cosas entonces como conclusión, ¿tiene solución esta inecuación o no?
A: No, no tiene solución.
E: ¿Y ahí como te diste cuenta?
A: Porque no hay un valor de x que sea menor que 2 y mayor que –2 al mismo tiempo
E: Ajam, bien.

Mateo

E: Ajam, ahora esto… la última pregunta y terminamos sí, ahora si tuvieras que explicar a un compañero cómo resolver una inecuación con valor absoluto, ¿qué le dirías? ¿Qué debería tener en cuenta ese alumno?
A: Bien y le daría la regla que le expliqué al principio, dependiendo para dónde apunte el… el símbolo tiene que hacer la… en una sola operación como le hice en mis ejercicios o separarla en dos con el símbolo y en el medio. Si hace la primera forma, pasar el mismo valor que está fuera del valor absoluto repartirlo en ambos lados de la, de la operación con el signo cambiado, un lado del símbolo que tiene el otro lado el símbolo opuesto y resolver y cada vez que tenga que despejar algo de valor absoluto de la x, eh… pasarlo a ambos lados con el símbolo opuesto como en una inecuación normal.

Para el paso c), expresar la solución como un intervalo, que muchas veces no encuentran la justificación de su razón de ser, se ilustra un diálogo con Juan Esteban que da cuenta de ello.

Juan Esteban

A: (…) Luego de eso explicarle cómo denotar los intervalos o el intervalo que tenga la x y explicar lo de los intervalos unión, intervalo intersección para que pueda representarlo. Ah y luego explicarle cómo graficarlo en la recta para que sea más didáctico.
E: Ajam, bien ¿eso es todo entonces?
A: Si.

- Durante la entrevista, se pudo detectar contradicciones frente al uso de intervalos. Por un lado, se afirmó que el uso de intervalos depende de lo que se solicita y por otro, resolver una inecuación consiste es determinar los intervalos en los que varía la incógnita.

E: Ajam, ¿y por qué Juan Esteban?, ¿por qué lo expresas como intervalo?, por ejemplo acá veo que esto como intervalo (1a) [(4,+∞)∪ (-∞;-4)], acá también (1b) [(1,3)] *en el c* $\left[\left(\frac{3}{4};+\infty\right)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\right]$ *también por ejemplo.*
A: En el b está sí, es que son intervalos donde puede variar la x o así los veo yo.
E: Pero por ejemplo si yo hago y resuelvo hasta acá (sin hacer los intervalos), estaría bien mi inecuación, ¿o tengo que sí o sí expresarlo como intervalo?
A: Depende de qué es lo que pide, si la consigna te pide que resuelvas la inecuación de valor absoluto es porque necesita saber esos intervalos por dónde te van a variar las x sino no tendría saber, no tendría sentido porque viendo la primera, en la primera inecuación que tenemos si no importase el sentido tendríamos ahí los resultados que sabemos que menor que qué, mayor que qué pero necesitamos más parámetros para guiarnos, para encontrar esos valores.

Claribel
E: Ajam, o sea estás interpretando de esa manera, bien y ahora mmmm y acá también, ¿no?, lo escribís como intervalo y ¿por qué lo escribís como intervalo?
A: Es la parte de… también influye la teoría que nos enseñaron en la cátedra, por eso la escribí como intervalo.
E: Ajam, decís porque en la cátedra te pedían que hagas eso, ¿no? dada una inecuación, entonces, bien, ¿y lo de la recta numérica?
A: Y también, pero es para entenderlo mejor gráficamente digamos, para guiarme más también, me ayuda.

Claudia
E: Ahora la pregunta es por qué escribís con intervalos, o sea ¿por qué lo haces?
A: Eh porque esa es la representación, ay no, no me acuerdo el nombre. Ese no me acuerdo.
E: Si es una representación, ¿no? Por intervalos, pero lo haces por qué, por qué razón, ¿porque se te ocurrió nomás o por algo en especial?
A: No porque, al dibujar la recta marco que va desde el -4 hasta el infinito y el otro lado va desde el 4 hasta el más infinito.

- Se observó la ausencia de análisis o razonamientos por parte de los estudiantes con respecto a los números que intervienen en las inecuaciones con valor absoluto y/o a propiedades del valor absoluto, consideradas como una cantidad no negativa.
  - En la inecuación i) $|x+3|<-3|x|$, Claribel no consigue identificar que una cantidad positiva $|x+3|$ debe ser mayor a otra cantidad negativa $-3|x|$ y afirma que no pudo resolver esta inecuación por la presencia de dos valores absolutos.

Claribel
E: Y lo mismo acá ¿qué pasó?, en el 1i)

A: Y se me complicó porque del otro lado tenía también un valor absoluto
E: Ajam, bien.
A: Y no supe cómo avanzar digamos.

- En la inecuación mencionada (i), cuando a Guido se le pregunta por qué no la pudo resolver, él responde:

Guido
E: Sí exactamente, bien y en el 1i) no planteaste nada, ¿no?
A: No, ese sí que no.
E: ¿Por qué crees que no pudiste resolverlo?
A: Y me re confundía la verdad, tipo yo quería pasar el valor absoluto y unirles pero no sabía si se podía.
E: Ajam.
A: Y ahí resolverle. Pero me salía cualquier cosa, tipo dejé nomás.

- Nuevamente en la inecuación i), Juan Esteban no logra reconocer la ausencia de números reales que verifican la solución, cuando aplica un procedimiento en el que llega a que *x* debe variar entre $3 < \frac{x+3}{x} < -3$. Para él, la solución es –3.

- Ante la inecuación $|x| + 2 \leq 0$, Claribel no da cuenta que esa inecuación no tendrá solución ya que el valor absoluto es una cantidad no negativa, al sumarle 2, se obtendrá un número positivo.

Claribel
(…)
A: Es la distancia de un número al 0, así lo entiendo más fácil
E: La distancia al cero, bueno entonces acá tendríamos la distancia, si esto está en valor absoluto, ¿quiere decir la distancia de que número? como está, ¿qué letra está acá?
A: x.
E: ¿Entonces sería la distancia de quién?
A: De x al 0.
E: Ajam, la distancia de x al cero y si le sumo 2 y si le sumó 2, ¿qué tipo de número será qué me va a dar si yo a una distancia le sumo dos?, ¿qué tipo de números puedo asegurar que me dará?, ¿puedo o no asegurar no?
A: El 2.
E: ¿Cómo será ese número, si yo a una distancia le sumo 2 unidades? Fíjate acá tenemos menor o igual que 0. ¿Eso es posible? (por la inecuación propuesta)
A: Si.
E: ¿Es posible que yo a una distancia le sume 2 y me de menor o igual que 0?, ¿eso es posible entonces?

E: Yo no te puedo decir está bien.
A:….
E: ¿Cómo?, ¿cómo me dijiste?
A: Si fuera un número negativo, eh podría ser.
E: Si tendría que ser negativo, ¿quién?
A: x.

- En el ejercicio e), Mateo no consigue visualizar a la inecuación con valor absoluto como aquella restricción de los números reales cuyo módulo es negativo o cero. Hace uso de una propiedad (no válida) para lograr encontrar como solución $x = 0$.

Mateo
E: Ajam, bien bien, también lo expresaste como intervalo. Bien en el 1c), no tengo que preguntarte nada sino directamente pasamos al 1e), ¿sí? y ahí fíjate tiene que en el e), ¿cuál es la solución para vos?
A: La solución es que x vale 0 para mí porque en ambos o sea despejando para ambos lados del cero, nos dice el ejercicio que x se encuentra entre 0 y 0, o sea es 0, porque no hay ningún número entre esos dos.
E: Ajam, ¿y cómo llegaste a eso?
A: Eh… Haciendo el mismo procedimiento que en las otras, poniendo el mismo número de ambos lados de la inecuación y por un poco de sentido común y entendimiento nomás.
E: Ajá y acá porque viste cuando vos aplicas, es parecida a ésta (inecuación 1b)), ¿no?, ¿acá no iría un -0 acá?
A: No, porque el 0 no es positivo ni negativo.

4.2.3. Con respecto a la solución de las inecuaciones y su representación

- Los estudiantes tienden a representar el intervalo asociado a la solución de una inecuación en la recta numérica. Algunos ejemplos de ello son las afirmaciones que manifiestan los entrevistados Ailen, Clariben, Claudia y Mateo.

Ailen
E: Si, algo más.
A: A mí también me ayuda mucho el tema de los gráficos, no sé por qué pero me ayuda a graficarlo.
E: Bien, ¿algo más?
A: No creo que con eso nomás yo me basé.
A: Con estas dos cosas no más.
E: O sea que veas qué propiedad aplica sería así, ¿no?
A: Dependiendo del signo.
E: Y lo represente gráficamente.
A: Claro.

E: Y lo represente gráficamente, bien Ailén estamos entonces con eso, bueno. Voy a detener la grabación.

En otro fragmento de la entrevista con Ailen.

Ailen
E: Bien, también puedo ver entonces que en todos los casos siempre expresas como intervalo y representas en la recta numérica.
A: Ajam.
E: ¿Hay algún motivo por lo cual lo haces?
A: ¿Lo de la representación?
E: Si, lo que lo expresas como intervalo y lo representas gráficamente la recta.
A: Para guiarme no más.
E: Ajam ahora…
A: Para que quede más completo.

Claribel
E: Ajam, y una vez que aplicas, ¿qué más harías por ejemplo?, es lo que a vos te parece eh, yo no te estoy evaluando como te dije.
A: Y lo que me enseñaron nomás, eh verificar qué propiedad tengo que utilizar, despejar la x como en toda inecuación, y encontrar los valores y graficarlos y hacer el intervalo también.

Claudia
E: Ajam, bien. ¿Algo más que tenés que hacer?
A: Sí, luego se puede, bueno si quiere puede, no no es si quiere, debe representarlo en una recta, establecer qué intervalo tiene, si es abierto.
E: Bien, bien Claudia.

Mateo

E: Ajá, ¿y por qué esto?, ¿por qué nombrás lo de la recta numérica?
A: Porque siempre, no por otra cosa, que siempre en clase a la misma… al mismo tiempo de resolver una inecuación, nuestra profe siempre nos hacía una recta abajo y nos ubicaba ahí los valores de resultados nomás.

En este fragmento queda evidenciado cómo influyen las actividades o recursos que utiliza el docente en sus clases en las respuestas/procedimientos de los estudiantes:

- Para algunos estudiantes, la solución de una inecuación está dada por dos puntos, en lugar de un intervalo que los tiene por extremos. Por ejemplo, en la inecuación 1b) $|x-2|<1$, cuya solución es 1< x <3, para Guido las soluciones son los números 1 y 3.

Guido
E: Bien. Y después en el siguiente paso, hiciste pasaje de términos y bueno llegaste a esto ¿no?, entonces ¿cuáles son los números reales que verifican esa inecuación?
A: Números reales, y el 1 y el 3 sería, el conjunto de números reales
E: El conjunto de números reales, ¿cómo sería?, ¿me decís?
A: Ah, ¿o sea que cómo le clasificaría?
E: No, decirme cuáles son números que verifican.
A: Y el 1 y el 3.
E: El 1,
A: El 3.
E: Ajam, son esos únicamente los números que verifican, el 1 y el 3.
A: Si.

En la inecuación h), Miguel plantea algo similar cuando afirma que las soluciones son los números 6 y 2.

Miguel
E: Bien, entonces ¿cuál es la solución?
A: Sería 6 y 2, me quedaría al despejar x
E: Cuándo vos decís 6 y 2, marco acá el 6 y el 2 (Se marcan esos puntos, manteniendo ese orden incorrecto), ¿estos puntos serían tu solución?
A: Si.
E: Mmm, bien bien, entonces tu intervalo sería (6,2) y esta… esta escritura a vos no te… ¿no te llama la atención?
A: Mmm no, por lo menos no.

- Otra imagen del concepto identificada fue la relacionada con el procedimiento que siguieron los estudiantes: intercambiar los extremos de variación de *x*, lo cual provino de aplicar una propiedad del valor absoluto para un valor *k* negativo: $|x| \leq k$, $|x| < k$, $|x| \geq k$ o $|x| > k$. En otras palabras, han llegado a $a < x < b$, con $a > b$. Los estudiantes logran reconocer que esto no puede suceder, pero de igual manera afirmaron que la solución es (b; a). Ejemplificando esta situación, Ailen plantea:

Ailen
A: El ejercicio h apliqué los casos también dependiendo del signo y ahí fui corriendo depende la propiedad del caso
E: Ajam, entonces en ese ejercicio te voy a preguntar que aplicaste el procedimiento de los casos que me habías dicho y entonces ¿qué números reales verifican la inecuación?
A: 2 y 6.
E: 2 y 6.
A: Claro o sea no 2 y 6 no, lo que está entre el intervalo… entre 2 y 6, 2 y 6 no porque no están incluidos.

E: Ajá bien y fíjate acá tenés, cuando vos resolviste esto, entre 6 y 2 y después llegas a esto [Se refiere a (2,6)], ¿qué te parece?
A: Y ahí lo que hice fue darlo vuelta nomás por el tema de que no sabía o sea me iba a quedar primero el 6 y después el 2 y no quedaba bien, entonces lo invertí para que quede bien ordenados por decirlo así.
E: Ajam. ¿Y eso es válido?
A: Puede ser [Risas].
E: O sea, ahí lo que veo es que vos estás haciendo, como no me da lo que yo quiero le cambio y bueno me da. ¿Entendés?
A: Como no quedó ordenado le cambio para que quede [Risas].

Por su lado, ***Claudia***

[…]
E: Es correcto, después los otros cálculos está correcto, 2 más 4 es correcto todo. Pero el tema es acá ($6<x<2$), te dice son los x, ¿cómo leería esto?, ¿cómo se lee?, son los x reales que cumplen qué cosa.
A: Que sean menores a 6.
E: ¿Menores?
A: Ah no, es al revés, mayores a 6.
E: Ahh, ¿y luego?
A: Y lo otro, los x menores a 2.
E: Exactamente, entonces vos tenés que encontrar los reales, que sean mayores a 6 y menores a 2 y ahí vos decís acá que es el intervalo (2,6).
A: (2, 6), y era al revés, era (6, 2) ¿no?
E: Ajam, pero que ¿cuál es el problema ahí?
A: Y es, no es un intervalo abierto, ¿no?
E: Y el (6,2) pareciera ser un intervalo, ¿pero cuál es el problema?, que el extremo inferior es más grande que el extremo superior,
A: Ahhh, ajam.

Guido

[…]
E: Pero la solución te queda 6 menor que x menor que 2.
A: Pera ahí busco el borrador. Si acá en el borrador y ahí sí.
E: Ajam, Bien, entonces, viste que acá te quedó así mirá: 6 menor que x menor que 2, ¿sí? Y vos escribís como solución S = (2,6), ¿no te llama nada la atención ahí?
A: Si, que está al revés.
E: Ajá, y ¿eso lo puedo hacer?
A: No.

Este entrevistado también realizó lo mencionado, aunque pudo dar cuenta de la validez de su razonamiento.

- Se pudo constatar que los estudiantes generalmente no reemplazan la inecuación con el/los valor/es determinados. Aunque posiblemente lo hagan cuando el docente lo solicite o esté explícito en la consigna.

Mateo

A: Y la solución sería, x puede ir desde menos infinito hasta -2 y desde 2 hasta el infinito positivo.
E: ¿Y eso es lo que dice acá? [En $-2 \geq x \geq 2$]
A: Eh sí.
E: Ajam, ¿vos verificase la solución Mateo?
A: Eh no.
E: No… no ¿no le diste un valor a x por ejemplo para ver si era correcto lo que escribiste?
A: No.

Juan Esteban

E: Ajá Juan Esteban, creo que justo pregunte lo que tenía que preguntarte, bien, te voy a decir no más es que si ¿vos solés verificar las inecuaciones o no?
A: No, solamente verifico las inecuaciones por ahí cuando tengo un resultado raro o algo que no me da mucho sentido, hay una inecuación que veo extraña y trato de verificarla para corroborar eso, si es un resultado posible y una inecuación normal, no suelo corroborar.

Guido

A: O sea como la x, el intervalo entre esos dos números.
E: Ajam, y la solución viste decís que es -2.
E: Ajam, ¿vos verificaste esta inecuación o no?
A: Emmm no. No lo verifiqué.

Claribel

E: Y entonces tenés que esta distancia es menor que -2 y según vos, ¿decís que los números que están acá verifican esta inecuación sí? [En (2,6)]. ¿Alguna vez te preguntaste si era correcta esa solución o no?, ¿o no estás acostumbrada a verificar si los números que hallaste verifican la inecuación?
A: No, no lo verifico normalmente.

Ailen

E: Bien y ahora ¿vos verificaste esta inecuación por ejemplo?
A. ¿Cómo?
E: ¿Solés verificar las inecuaciones?
A: Mmm no.
E: O sea la solución no, encontrás una solución y decís voy a ver si esto cumple o no la inecuación como las ecuaciones. Viste que en las ecuaciones hacemos algo para verificar
A: Ajam. Si no me piden no lo hago, es que quede a la deriva ahí.

- Soluciones compatibles: para algunos estudiantes, siempre es posible encontrar una solución no vacía. Esto está relacionado con la idea de representar la solución en la recta numérica, mencionada anteriormente. Es decir, representar en la recta numérica presupone considerar la compatibilidad de la inecuación. Esta idea se evidencia en la entrevista con Guido.

Guido

E: Bien, ahora te pregunto ¿qué pensás? toda inecuación, ¿dada una inecuación cualquiera tiene siempre solución?

A: Y si creería que sí.

E: Ajam, que siempre tienen solución.

A: Bueno puede ser que no si es un número imaginario, puede ser

Luego del análisis de las respuestas de los estudiantes en el cuestionario escrito y en las entrevistas, se puede dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Qué tipos de dificultades presentan los estudiantes de ciencias económicas cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto? En los estudiantes participantes se evidenció diversas dificultades relacionadas a inecuaciones de valor absoluto no prototípicas – aquellas que no son de la forma $|\mathrm{P}(x)| \leq a$ o $|\mathrm{P}(x)| \geq a$, siendo $a > 0$ y $\mathrm{P}(x)$ un polinomio de primer grado – como las inecuaciones g) $|x| + 2 \leq 0$, h) $|x-4| < -2$ e $|x+3| < -3|x|$ (conclusión obtenida a partir de la observación de las figuras 39, 44 y 87 por ejemplo y la tabla 3), en las que el uso de una propiedad de equivalencia del valor absoluto del tipo $|x| < a$ o $|x| > a, a \in \mathbb{R}^+$ (o en sentido amplio de la desigualdad) no era un procedimiento adecuado. También se detectó dificultades relacionadas con el conjunto solución, que se evidenció en aquellas inecuaciones sin solución o con solución única como en g) $|x| + 2 \leq 0$, h) $|x-4| < -2$ y e) $|x| \leq 0$. En estos ejercicios se evidenció la ausencia de la imagen del valor absoluto como una cantidad no negativa o como distancia (David, 2018).

Por último, ¿Qué estrategias procedimentales con mayor frecuencia utilizan los estudiantes de ciencias económicas cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto? Se observó que el procedimiento más utilizado por los participantes del estudio es la aplicación de "propiedades" que ellos consideran equivalentes a las desigualdades $|x| < a$ o $|x| > a$ (o en sentido amplio de la desigualdad) para cualquier valor real de a. Aunque no se les solicitó, expresaron el conjunto solución como un intervalo y lo representaron en la recta numérica en la mayoría de las inecuaciones (véase por ejemplo las figuras 9 y 43 y la respuesta de Ailen en la entrevista – Fragmento escrito en la sección 4.2.3). El segundo procedimiento más utilizado fue el reemplazo de la incógnita por algún número real. No se evidenció algún procedimiento en que los estudiantes analizaran la existencia o no de valores que verifiquen la inecuación, en función de la definición formal del valor absoluto.

4.3 Conclusiones

En este capítulo se identificó la imagen del concepto y las distintas definiciones del concepto de tres objetos: valor absoluto, inecuaciones e inecuaciones con valor absoluto de un grupo de estudiantes de ciencias económicas a partir de la aplicación de los instrumentos. Para caracterizar a la imagen del concepto, se tuvo en cuenta los procedimientos utilizados, las representaciones de la solución y las respuestas a las interrogantes en la entrevista. En otras palabras, se respondió a las preguntas propuestas inicialmente: ¿Qué definiciones del valor absoluto, inecuación e inecuación con valor absoluto tienen los estudiantes del nivel universitario? ¿Qué imagen del concepto de valor absoluto e inecuación manifiestan los estudiantes universitarios? ¿Qué tipos de dificultades presentan los estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto? ¿Qué estrategias procedimentales utilizan con mayor frecuencia los estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto?, que permitieron el logro del objetivo general de investigación y que se lo presenta en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.0 Introducción

Esta investigación tuvo como objetivo general explorar las imágenes del concepto que evocan los estudiantes de ciencias económicas acerca de las inecuaciones lineales con valor absoluto. En este capítulo se da respuesta a la pregunta de investigación y se discuten los resultados obtenidos en la aplicación de los instrumentos en torno a tres temáticas: limitaciones y fortalezas del estudio, implicaciones del estudio para la investigación de inecuaciones con valor absoluto y recomendaciones para la enseñanza. Por último se plantea las conclusiones finales.

5.1 Respuesta a la pregunta de investigación

En esta investigación se planteó como pregunta de investigación ¿cuáles son las imágenes del concepto que evocan los estudiantes de ciencias económicas sobre las inecuaciones lineales con valor absoluto?

Los estudiantes de ciencias económicas que participaron en esta investigación manifiestan diversas definiciones del valor absoluto. Algunos lo definen como un número sin signo, como número positivo, como un positivo o cero, como una distancia, o como una regla de asignación a cada número real según este sea positivo, negativo o cero. De acuerdo con las entrevistas, la imagen del valor absoluto presente en ellos es la de un número sin signo, concepción que según Elia et al. (2016) puede resultar un obstáculo epistemológico para la comprensión del valor absoluto y en consecuencia, dificultar la manipulación de inecuaciones. Se evidenció que, ante una pregunta implícita, los estudiantes responden en función de su imagen del concepto y no de acuerdo con la definición formal del objeto (Vinner (1991).

Para los participantes, la definición personal de inecuación es considerada básicamente como una desigualdad. Algunos de ellos añaden a esta idea la presencia de expresiones algebraicas o conjuntos numéricos. Para otros, aunque en una minoría, una inecuación es una restricción sobre cierto dominio. La definición de inecuación con valor absoluto para los participantes es una desigualdad en la que la variable está afectada por el valor absoluto, la incógnita es el valor absoluto de *x*, como una inecuación en general o como un subconjunto no vacío de números reales.

La imagen del concepto que evocan los estudiantes sobre las inecuaciones del valor absoluto puede caracterizarse a través de cuatro aspectos: los ejemplos típicos sobre inecucaciones, lo procedimental, las ideas respecto al conjunto solución de la inecuación.

Los estudiantes tienen muy presente inecuaciones de la forma $\left|\mathrm{P}(x)\right| \leq a$ o $\left|\mathrm{P}(x)\right| \geq a$, siendo $a > 0$ y P(x) un polinomio de primer grado.

En el análisis de los procedimientos utilizados por los participantes, se detectaron aquellos que resultan adecuados y aquellos que no lo son. Entre los primeros se puede mencionar la utilización de propiedades del valor absoluto, considerar la no negatividad del módulo o asignar valores a la incógnita. En cuanto a los no adecuados, los estudiantes utilizan la eliminación de las barras del valor absoluto, proponen el mismo sentido de la desigualdad de la solución con el signo de la inecuación; utilizan indiscriminadamente la disyunción y la operación unión o generalizan propiedades del valor absoluto para números no positivos. Se observa además el uso de la linealidad en el valor absoluto como estrategia de solución.

En lo que respecta a la solución, toda inecuación es resoluble y compatible. Es un intervalo o puntos de la recta numérica. Los estudiantes piensan que siempre se debe expresar como intervalo y representarlo en la recta real, actividades que no han sido solicitadas en el cuestionario escrito. Muy pocos educandos han podido reconocer la ausencia de números reales que verifican una determinada inecuación.

De acuerdo con los resultados y a lo mencionado anteriormente, resolver una inecuación para los alumnos participantes con valor absoluto consiste en identificar el sentido de la desigualdad, aplicar una de las propiedades del valor absoluto equivalente a la desigualdad dada (cualquiera sea el valor del número real *k*), y expresar la solución como un intervalo y graficarlo en la recta.

5.2 Limitaciones y fortalezas del estudio

Una de las fortalezas de este estudio es que los resultados obtenidos se pueden considerar confiables. Esto debido a que el cuestionario escrito que se aplicó a los estudiantes se complementó con entrevistas semiestructuradas, en función de las respuestas de cada estudiante, las cuales permitieron profundizar y triangular las observaciones empíricas. Otra fortaleza de este trabajo es que, la investigación reportada contribuye a los pocos estudios referidos a las imágenes del concepto en estudiantes universitarios cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto.

Una de las limitaciones de este estudio está referida al grupo de estudiantes de AGA de la Facultad de Ciencias Económicas UNNE que participaron en este estudio; las conclusiones solo podrán ser referidas a este grupo, aunque los participantes pertenezcan a distintas comisiones y hayan participado voluntariamente. Por supuesto, tal vez con otro grupo de estudiantes no se obtengan los mismos resultados, sea por el número de participantes o por el contexto en el que se la realizó este estudio: algunos autores sugieren que las imágenes del concepto que poseen los estudiantes pueden depender del tipo de carrera que estudian y el tipo de formación que reciben (Bingolbali y Monaghan, 2008).

5.3 Implicaciones de este estudio para la investigación de inecuaciones con valor absoluto

Como se ilustró en el capítulo 1, estudios previos muestran las dificultades, errores y concepciones que presentan alumnos del nivel medio cuando se enfrentan a inecuaciones con valor absoluto. Los resultados obtenidos en este trabajo permiten afirmar que los estudiantes participantes tienen cierto tipo de acercamiento a las inecuaciones con módulo, cuya imagen del concepto evocada es limitada.

Se ha determinado que los estudiantes de este estudio definen al valor absoluto como: un número sin signo, una distancia de un número al cero, un número positivo o cero, una regla de asignación según el número real sea positivo o cero o negativo y, erróneamente, como un número positivo. Las dos primeras nociones ya fueron identificadas por Elia et al. (2016) en un estudio con estudiantes de 9° grado de Turquía y 11° de Chipre y correspondiente al nivel secundario[7]. Al igual que en la investigación de Almog e Ilany (2012), con alumnos del mismo nivel, respecto a la creencia del valor absoluto como una cantidad siempre positiva. Sin embargo, los estudiantes de esta investigación, evocan como imagen del concepto del valor absoluto de un número real al mismo número, sin considerar si es positivo o negativo. Es decir, tienden a manifestar una definición aritmética de este objeto, en la que queda de lado la definición algebraica que involucra operaciones lógicas (Chiaruggi et al., 1990)

En cuanto a las inecuaciones, los resultados muestran que los estudiantes las caracterizan simplemente como una desigualdad, en la que debe figurar un signo >, <, ≤, ≥; mientras que para otros es necesario la presencia de expresiones algebraicas: es decir, contiene al menos una incógnita o letra *x*. También está presente la imagen de inecuación como restricción sobre cierto dominio, pero no la evocan cuando resuelven inecuaciones con valor absoluto.

Las inecuaciones lineales con valor absoluto son consideradas básicamente como un subconjunto no vacío de números reales y asociadas a métodos o propiedades para resolverla. Estas nociones se asimilan a lo encontrado por Elia et al. (2016). En este caso, los estudiantes participantes, tienen la creencia de que toda inecuación con valor absoluto es resoluble y admite como solución, a la que añadimos la idea de un conjunto no vacío de números reales, generalmente un intervalo. Además, se considera fundamental aplicar propiedades para eliminar las barras del valor absoluto.

Teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior, no se ha observado en los participantes el uso de diferentes procedimientos para resolver inecuaciones con valor absoluto. Pero se conoce el tipo de tareas que se presentan en la clase de AGA y las estrategias de enseñanza empleadas: comúnmente las actividades que involucran inecuaciones con módulo se centran en inecuaciones con solución no vacía, aplicar propiedades, expresar la solución como intervalos (acotados o no) y representarlos en la recta numérica. Se puede afirmar entonces que las formas de resolución de los estudiantes están reflejadas por las decisiones tomadas por los docentes de la cátedra, tal como lo afirman en su investigación Almog e Ilany (2001) con estudiantes del nivel medio. Este quehacer matemático, presente frecuentemente en la clase de matemática de

[7] En Chipre, el 8° y 9° grado corresponden a estudiantes con una edad de 13 – 15, mientras que el grado 11° a estudiantes con 16 – 17 años.

la universidad, podría promover una imagen del concepto limitada de las inecuaciones con valor absoluto para los estudiantes.

Teniendo en cuenta el tipo de solución de una inecuación lineal con valor absoluto, los estudiantes universitarios manifestaron ciertas dificultades cuando la solución era un solo número real, todos los números reales o ningún real la verifica. Esto coincide con lo afirmado por Almog e Ilany (2012).

5.4 Recomendaciones para la enseñanza

Los resultados muestran que los estudiantes participantes en esta investigación tienen cierto tipo de acercamiento a las inecuaciones con módulo, dando lugar a una imagen del concepto evocada incompleta respecto a las inecuaciones con valor absoluto. Ahora bien, de este estudio se podrían desprender algunas recomendaciones específicas para la enseñanza.

Se puede observar que los estudiantes aplican directamente una propiedad que relaciona la comparación entre el valor absoluto y un número real negativo, cuando el uso de este recurso no es esencial, es decir, la manipulación algebraica es innecesaria. En otras palabras, tienen estructurada la resolución de las inecuaciones con valor absoluto. Creen que deben seguir exhaustivamente ciertos pasos para poder establecer el conjunto solución. En cambio, mediante la observación y análisis de los números que intervienen en la ecuación, es posible reconocer su conjunto solución, como por ejemplo en la inecuación $|x-4|<-2$. Como sugerencia para la clase de álgebra para los estudiantes de ciencias económicas, se podrían diseñar secuencias didácticas que promuevan entre los estudiantes el realizar un análisis a priori de la escritura y naturaleza de la inecuación, antes de proceder a su solución.

Además, para los alumnos que formaron parte de este estudio, la solución compatible expresada como un intervalo caracteriza a las inecuaciones con valor absoluto. Para ampliar esta imagen del concepto respecto a la solución de las inecuaciones con valor absoluto, se debe evitar proponer actividades que involucren exclusivamente inecuaciones con soluciones compatibles o consistentes en la clase de matemática, y anexar otras inecuaciones incompatibles o aquellas que son compatibles y presentan una única solución.

Como consecuencia de lo mencionado en el párrafo anterior, este estudio muestra que los alumnos y alumnas utilizan una representación en la recta numérica de la solución y no hacen uso de ella como estrategia de resolución de una inecuación. Sería interesante el planteamiento de actividades que involucren al gráfico (recta numérica) como herramienta de visualización, que permita al estudiante analizar si existen o no puntos de la recta numérica que verifiquen la inecuación propuesta.

En las entrevistas se pudo constatar que los estudiantes no se cuestionan si lo hallado como solución es correcto o no, es decir dejan de lado la verificación de un número real como solución de una inecuación. Posiblemente lo hagan por solicitud del docente o de la consigna, actitud que debe ir modificándose en la clase a través del planteo de preguntas indirectas por parte del profesor y en este sentido, sean sus estudiantes quienes lo realicen. De esta manera, posiblemente, la verificación forme parte del conjunto de herramientas de los estudiantes.

5.5 Conclusiones finales

Este estudio permitió conocer las definiciones e imágenes que evocan un grupo de estudiantes de ciencias económicas cuando resuelven inecuaciones lineales con valor absoluto. La investigación permitió reconocer, por un lado, las falencias que presentan los estudiantes en relación con el uso de las definiciones formales y por otro, aquellas imágenes que forman en su mente a partir de los ejemplos y actividades que propone el docente en la clase. En futuras investigaciones se podrían analizar, comparar libros de textos y observar en ellos la emergencia o no de distintas imágenes de las inecuaciones con valor absoluto.

REFERENCIAS

Aldana Bermúdez, E. (2013). Una didáctica de la matemática para la investigación en pensamiento matemático avanzado. *Atenas, 3* (23), 56-69.

Almog, N., & Ilany, B. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 347-364. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9404-z

Anggoro, A., & Prabawanto, S. (2019). Undergraduate students' conceptual understanding on rational inequalities. *Journal of Physics: Conference Series, 1211*, Artículo 012064. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012064

Aponte Bello, P. y Rivera Martínez, M. (2017). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje* [Monografía de licenciatura, Universidad Distrital Francisco José De Caldas]. Repositorio institucional Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/12897/2/AponteBelloPaulaAndrea2018.pdf

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-35.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 139-143). Bergen University College.

Borello, M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte* [Tesis de maestría]. Instituto Politécnico Nacional.

Chiarugi, I., Fracassina, G., & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 231-238). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Courant, R. y Jonh, F. (1979). *Introducción al cálculo diferencial e integral* (3.ª ed., vol. 1, S. Hann Golberg, R. Jiménez Domínguez y J. Florio, trad.). Editorial Limusa. (Original publicado en 1971).

Courant, R. y Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos* (5.ª ed., L. Bravo Gala, trad.). Aguilar. (Original publicado en 1955).

David, E. (2018). *Peter's evoked concept images for absolute value inequalities in calculus contexts*. A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, & S. Brown (Eds.), *21st Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 949-956). SIGMAA.

Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., & Yetkiner Özel, Z.E. (2016). Students mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 895-907. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0780-1

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1994). Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. In M. Artigue, G. Régis, L. Colette, T. Patricia, & Balacheff N. (Eds.), *Vingt Ans de Didactique de Mathématiques en France* (pp. 343-348). La Pensée Sauvage.

Garrote, M., Hidalgo, M. J., y Blanco, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma, 46*, 37-44.

Gentile, E. (1976). *Notas de álgebra I.* (2.ª ed.). Eudeba. (Original publicado en 1973).

Gregoret, A., Albione, M., y Núñez, A. (2013). *Cálculo diferencial e integral en una variable* (1.ª ed., T.1). Cengage Learning.

Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities* [Tesis doctoral]. Universidad de Bucarest.

Monje, Y., Seckel, M. J., y Breda, A. (2018). Tratamiento de la inecuación en el curriculum y textos escolares chilenos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(61), 480-502. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a09

Noriega, R. (2013). *Cálculo diferencial e integral* (3.ª ed.). Editorial Docencia. (Original publicado en 1979).

Piskunov, N. (1978). *Cálculo diferencial e integral*. (Equipo de Montaner y Simón, trad.). Montaner y Simon. (Original publicado en 1966).

Rabuffetti, H. (2001). *Introducción al análisis matemático (cálculo 1)*. (16.ª ed.). El Ateneo. (Original publicado en 1970).

Rey Pastor, J. Pi Calleja, P. y Trejo C. (1963). *Análisis matemático*. (7.ª ed., vol. 1). Kapelusz. (Original publicado en 1952)

Rodríguez, S. D., Almouloud, S. A., y Guerra, F. U. (2018). Mapeo de las concepciones de alumnos: análisis cohesitivo en una situación didáctica sobre el valor absoluto. *Horizontes - Revista de Educação*, *6*(12), 62-92.

Rojo, A. (1995). *Algebra II*. (13.ª ed.). Editorial Docencia. (Original publicado en 1973).

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 148-152). Bergen University College.

Sadosky, M. y Guber, R. (2010). *Elementos de cálculo diferencial e integral*. (23.ª ed.). Alsina. (Original publicado en 1956).

Sierpinska, A., Bobos, G., & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 275-305. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9325-2

Spiegel, M. (1992). *Álgebra superior*. (2.ª ed., L. Gutiérrez Diez, A. Gutiérrez Vázquez, trad.). McGraw-Hill. (Original publicado en 1991).

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (6.ª ed., Brooks y Cole, trad.). Cengage Learning.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tall, D. (1988). Concept image and definition concept. In J. de Lange, & M. Doorman (Eds.), *Senior Secondary Mathematics Education* (pp. 37-41). OW&OC.

Tsamir, P. & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 513-524. https://doi.org/10.1080/00207390110038277

Tsamir, P., Tirosh, D., & Tiano, S. (2004). "*New errors" and "old errors": the case of quadratic inequalities*. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 155-158). Bergen University College.

Valdivé, C., y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 413-450.

Vinner, S. (1983): Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305. http://dx.doi.org/10.1080/0020739830140305

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). University of California, Lawrence Hall of Science.

Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (2007). La noción de valor absoluto en la enseñanza secundaria obligatoria y el bachillerato. *Indivisa: Boletín de Estudios e Investigación, 9,* 69-84.

Zill, D., Wright, W. e Ibarra, J. (2015). *Matemáticas 1. Cálculo diferencial* (2.ª ed., Jones y Bartlett Learning, trad.). (Original publicado en 2010)

ANEXOS

Anexo 1. Cuestionario escrito de la prueba piloto.

¡Hola!

- Soy el Lic. Mosqueda Daniel y en esta oportunidad te solicito que resuelvas y contestes los puntos que se plantean en este archivo.
- Necesito que lo resuelvas y escribas ***todos los procedimientos que utilizas*** para llegar a la solución.
- Este trabajo forma parte de mi tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa.
- ***Es recomendable que no consultes con otra persona.*** Pues me interesa analizar el procedimiento y no si los ejercicios están bien o mal.
- Por supuesto, tu resolución no será divulgada y tampoco influye en la asignatura que estás cursando.

Muchas gracias.**1)** Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $|x| > 4$

b. $|x-2| < 1$

c. $|x| \leq 0$

d. $|x| \geq 0$

e. $|x| + 2 \leq 0$

f. $|x-4| < -2$

g. $|x+3| < -3|x-1|$

h. $\left|4x - \frac{1}{2}\right| > 2,5$

i. $|2-3x| < 5$

2) Responde (sin consultar libros, apuntes, internet)

A) ¿Qué es el valor absoluto de un número real?

B) ¿Qué es una inecuación?

C) ¿Qué entiendes por inecuación con valor absoluto?

Anexo 2. Respuestas de los estudiantes en el cuestionario escrito (prueba piloto)

En el siguiente enlace puede acceder a las respuestas de los cuatro estudiantes participantes en la prueba piloto.

https://drive.google.com/drive/folders/1PamgQmVnyiT71myKzcT0ehuavgEsGDPI?usp=sharing

Anexo 3. Cuestionario escrito (versión definitiva).

¡Hola!

Soy el Lic. Mosqueda Daniel y en esta oportunidad te solicito que resuelvas y contestes los puntos que se plantean en este archivo. Este trabajo forma parte de mi tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del IPN (México). Para ello:

- Necesito que lo resuelvas y escribas ***todos los procedimientos que utilizas*** para llegar a la solución y ***los justifiques.***
- ***Es recomendable que no consultes con otra persona ni tampoco hagas uso de internet.*** Pues me interesa analizar el procedimiento y tus ideas sobre ciertos objetos matemáticos y no si los ejercicios están bien o mal o si la definición que propones es correcta o no.
- Por supuesto, tu resolución no será divulgada y tampoco influye en la asignatura que estás cursando.
- Lo puedes resolver en tu cuaderno y luego haces capturas de tu resolución. Una vez logrado, lo conviertes, si puedes, en un único archivo en formato pdf. Y lo envías por mensajería interna del *Slack.*

Muchas gracias.

1) ¿Existe algún valor real de *x* que verifican las siguientes inecuaciones? Justifica tu respuesta.

a) $|x| > 4$

b) $|x-2| < 1$

c) $\left|4x - \dfrac{1}{2}\right| > 2,5$

d) $|2-3x| \leq 5$

e) $|x| \leq 0$

f) $|x| \geq 0$

g) $|x| + 2 \leq 0$

h) $|x-4| < -2$

i) $|x+3| < -3|x|$

2) Responde (sin consultar libros, apuntes, internet, etc.)

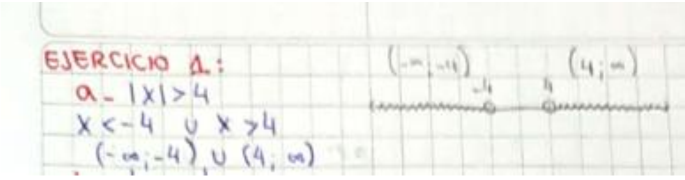
A) ¿Qué es el valor absoluto de un número real?

B) ¿Qué es una inecuación?

C) ¿Qué entiendes por inecuación con valor absoluto?

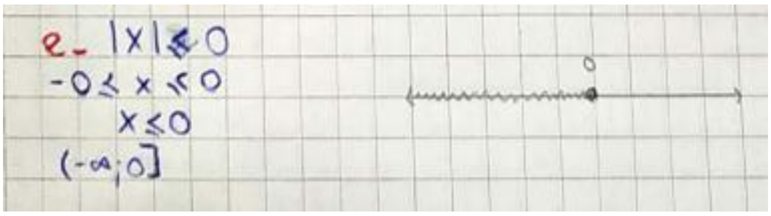
Anexo 4. Guia de preguntas para la entrevista a Ailen

Ejercicio 1a)



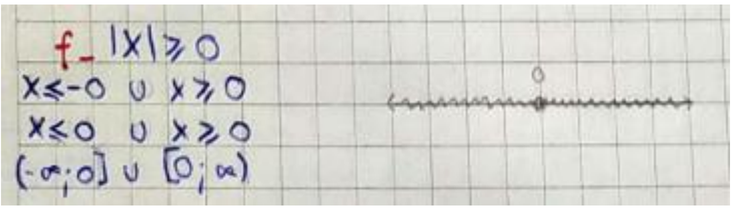
a) ¿Qué significado le asignas el símbolo ∪? ¿Qué significa $x < -4 \cup x > 4$?
b) ¿En qué te basas para resolver la inecuación?
c) ¿Cuál es la solución?
d) ¿Por qué utilizas una recta numérica en el ejercicio?

Ejercicio 1a)



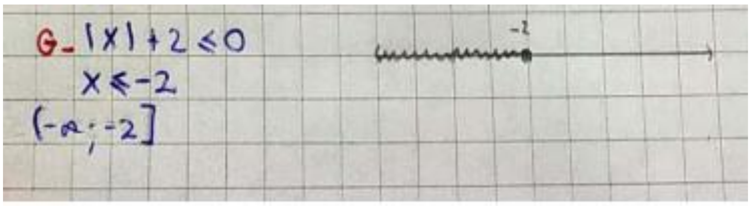
a) ¿Qué números reales verifican la inecuación?
b) ¿En qué te basas para resolver la inecuación? ¿Cómo logras obtener $-0 \leq x \leq 0$?
c) ¿Qué justifica pasar de $-0 \leq x \leq 0$ a $x \leq 0$?
d) ¿Cómo leerías la inecuación dada?

Ejercicio 1f)



a) ¿En qué te basas para resolver la inecuación?
b) ¿Qué números reales verifican la inecuación?
c) ¿Cómo leerías la inecuación dada?

Ejercicio 1.g)

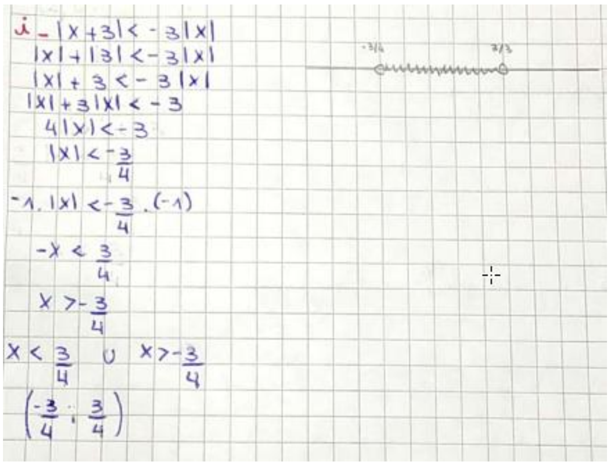


a) ¿En qué te basas para resolver la inecuación?
b) ¿Qué números reales verifican la inecuación?
c) ¿Cómo podrías verificar esta inecuación?

Ejercicio 1.i)

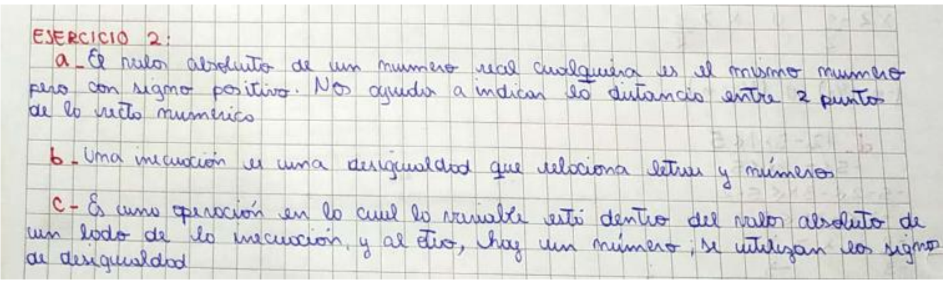
a) ¿Puedes explicar cómo resolviste la inecuación?
b) ¿Qué números reales verifican la inecuación?
c) ¿Qué diferencia hay entre el anteúltimo y último "paso" que está presente en tu procedimiento?

Ejercicio 1.i)



a) ¿Puedes explicar cómo resolviste la inecuación?
b) ¿Qué números reales verifican la inecuación? ¿se podría verificar que esa es la solución? ¿Cómo?

Ejercicio 2


EJERCICIO 2:
a- El valor absoluto de un numero real cualquiera es el mismo numero pero con signo positivo. Nos ayuda a indicar la distancia entre 2 puntos de la recta numerica

b- Una inecuación es una desigualdad que relaciona letras y números

c- Es una operación en la cual la variable está dentro del valor absoluto de un lado de la inecuación, y al otro, hay un número; se utilizan los signos de desigualdad

a) De acuerdo a tu definición de valor absoluto: ¿Cuál será el valor absoluto de $x, |x|$?

b) De acuerdo a tu definición de inecuación con valor absoluto: ¿Todos los ejercicios propuestos son inecuaciones con valor absoluto? ¿Por qué?

c) Si tuvieras que explicar a un compañero cómo resolver una inecuación con valor absoluto, ¿qué le dirías? ¿Qué debería hacer ese estudiante?

Anexo 5: Respuestas de los estudiantes en el cuestionario escrito (versión definitiva).

En el siguiente enlace se puede acceder a las respuestas de los 21 estudiantes participantes.

https://drive.google.com/drive/folders/1WtjXZvwpe68maMbYmxGWSxJgZcPfZ4qZ?usp=sharing

Anexo 6. Transcripciones de las entrevistas.

Entrevista a Ailen

0:00:00

Fuera de la grabación.

E: Hola Ailen, antes que nada quiero agradecer tu participación en esta entrevista.

A: Hola profe, no de nada. Me iba a quedar con cargo de conciencia si no lo hacía. A ver grabando dice.

A: Ahí sí.

E: No me marca el ruidito.

A: A mí me aparece grabando.

E: Bueno, espero que grabe. Si porque a mí me aparece grabando bueno espero que grabe.

A: [Risas].

E: Si me sale así como girando, que está grabando pero nos aparece grabando.

A: A mí me aparece el botón rojo.

E: es decir recién está bien. Entonces te decía que íbamos a empezar con el ejercicio 1a) donde tenías que resolver una inecuación que en este caso era.

E: valor absoluto de x mayor a 4, bien. Para vos ¿cuál es la solución de la inecuación?

A: ¿Cómo es la solución?

E: cuál es la solución de la inecuación o sea cuáles son los números reales que verifican la inecuación, según lo que planteaste no. cuáles serían la solución de tu ecuación

A: Iría desde el menos infinito hacia el -4 y desde el 4 a infinito.

E: Ajam, y ese símbolo que parece una U. qué significa [Se refiere a $(-\infty,-4) \cup (4,\infty)$]

A: Sería como unión.

E: Bien, si y ¿acá arriba? (En $x<-4 \cup x>4$), esto también significaría unión ¿no?

A: Ajam.

E: “x ma… menor a -4” unión “x mayor a 4” sì?

A: Ajam.

E: Bien.

E: Ahora por qué utilizas una recta numérica o ¿para qué?

A: Para poder representar los distintos puntos que me dio el resultado del ejercicio

E: Ajam y eso lo hiciste en todos los ejercicios creo ¿no?

A: Si.

E: Bien, bien en el ejercicio… y acá entonces en este punto que aplicaste para que te dé x menores a -4, x mayores a 4.

A: Yo me basé porque… yo tengo en mi carpeta como un apunte lo había sacado de internet las desigualdades o sea, son distintos casos dependiendo del signo y si es mayor o igual.

E: Ajam, si perfecto. Está bien.

A: Entonces dependiendo el signo fui viendo cómo, qué caso aplicar sería.

E: claro porque viste acá dice mayor a 4 (1a) y por ejemplo en el ejercicio 1b), valor absoluto de x – 2 es menor a 1 y es otra cosa ¿no?

A: Claro son distintos casos.

E: Entonces acá te dio en el b…creo que no tengo que decir, nada que preguntarte, no. En el b no, bien. En el c tampoco tengo que preguntarte nada, en el d de tampoco y en el e, en el e. Entonces cuáles son los números reales que verifican esa inecuación en el ejercicio 1e), que es valor absoluto de x menor o igual a 0.

A: Ajam.

E: Ahí qué aplicaste Ailen.
A: ¿El caso le digo?
E: Eh sí cómo lo hiciste, como lo resolviste.
A: Guiándome por los casos justamente. No sé si quiere que le muestre como tengo yo los cuadritos.
E: bueno. Ahí miró. Aja, bien entonces tienes una tabla donde en cada columna tenés el tipo de desigualdad y la solución.
A: Claro y acá irían los casos, acá dependiendo del signo y acá la resolución.
E: Bien perfecto, muy bien. Entonces como en ese caso tenía un 0 te quedó -0 mayor o igual que x menor o igual que 0.
A: Claro.
E: Ajá eso en el primer paso, pero después en el segundo paso, ¿por qué te quedó x menor o igual a cero?
A: Por… 0 no puede ser negativo.
A: Ajá entonces este como que eliminas esa parte se quedó esto.
A: Claro
E: Entonces cómo interpretas porque viste que acá te quedó como un intervalo pareciera ser y después no quedó un intervalo acotado.
A: Yo lo interpretó como que abarcaría de los números que son desde el cero hacia
0:05:00
A: Al menos infinito o sea desde el cero a todos los números negativos.
E: Bueno bien, bien bien entonces. Como leerías vos está inecuación (1e), para ver si interpretadas, cómo se lee la inecuación, sí vos le tendrías que dictar a alguien qué dirías
A: Mmm.
E: ¿Cómo se lee esto?
A: no sé si decirlo como un módulo.
E: Sí sí el...
A: El módulo de x menor o igual a cero.
E: Ajam, bien sí sí. Bien vamos al f entonces. En el f ves que hay una diferencia ¿no?
A: Si.
E: Es el sentido de la desigualdad.
A: Claro, ahí es cómo que abarcaría todos los números.
E: Ajá, todos los números, qué tipo de números.
A: Y en este caso como es, supongo lo que sería reales, racionales, todo
E: Ajam, si bueno, bien y entonces por qué no pusiste todos los reales por ejemplo
A: No me di cuenta [Risas].
E: Ajam, bien pero interpretas que la solución son todos los reales ¿no?
A: Claro, un buen detalle no haberle puesto los…
E: Claro porque es lo representas gráficamente y ves que ahí te da todos los reales y lo dejas como intervalo nada más.
E: Bien, en el ejercicio 1g) tenemos valor absoluto de x, más 2, menor o igual a cero ¿sí? y entonces ¿y ahí?, cómo eliminaste de las barras de valor absoluto o cómo lo hiciste?
A: Porque una vez que, cuando lo empiezo a resolver es como que directamente lo aplico el caso, ya eliminó las barras de valor absoluto.
E: Es como que aplicaste pareciera ser el, pudiera ser el otro, como lo hiciste en el e puede ser ¿o no?
A: Sí.

E: Porque ahí pasaste, aplicaste el, pareciera ser lo que yo entiendo no, para voy a escribir (Uso del paint compartiendo pantalla).
A: Apliqué lo mismo nomás, justamente por el mismo signo,
E: Yo creo que hiciste esto mira, pareciera ser no sé si es esto, valor absoluto de x más 2 menor o igual a cero ¿sí?, vos pasaste el 2 ¿o no?
A: Si.
E: Bueno pasaste,…
A: Te queda el -2, claro.
E: Pero acá tengo las barras de valor absoluto y en tu ejercicio no queda el valor absoluto, ¿entendés?
A: Capaz me olvidé ponerlo no más, porque si lo hice de esa forma.
E: Pasaste.
A: No hay otra forma de que quede –2.
E: Claro, pero el que me… no sabía dónde era, viste que acá queda como una barra
A: Claro.
E: Y vos decís entonces que la solución es menos infinito hasta -2.
A: Claro.
E: Bien, también puedo ver entonces que en todos los casos siempre expresas como intervalo y representas en la recta numérica.
A: Ajam.
E: ¿Hay algún motivo por lo cual lo haces?
A: ¿Lo de la representación?
E: Si lo que lo expresas como intervalo y lo representas gráficamente la recta
A: para guiarme no más.
E: ajam ahora….
A: Para que quede más completo.
E: bien y ahora vos verificaste esta inecuación por ejemplo.
A: ¿Cómo?
E: ¿Soles verificar la inecuaciones?
A: Mmm no.
E: O sea la solución no, encontrás una solución y decís voy a ver si esto cumple o no la inecuación como las ecuaciones. Viste que en las ecuaciones hacemos algo para verificar.
0:10:01
A. Ajam. Si no me piden no lo hago es que quede a la deriva ahí.
E: Porque acá por ejemplo si yo le doy -3 porque vos me decís que la solución está en menos infinito, -2.
E: ¿Si yo le doy -3 por ejemplo cumple?
La alumna no responde.
E: ¿Qué tendría que hacer para verificar eso?
A: Mmm…No entendí la pregunta.
E: Por ejemplo, vos decís que la solución es de menos infinito a –2, ¿entonces cualquier número de ese intervalo verifica la inecuación?
A: Ajam.
E: Eso quiere decir que si yo tomo un punto cualquiera de ese intervalo, lo reemplazo en x y tiene que cumplirse la inecuación.
A: Claro.
E: Entonces para -3 por ejemplo, ¿va a cumplir? Mirá, me a quedar, si x vale
-3, me queda $|-3|+2$ tiene que ser menor o igual a 0.

E: ¿Eso es verdadero o no?
A: Sí supongo.
E: Cuál es el valor absoluto de -3,
A: -3
E: El valor absoluto de -3 es.
A: - 3.
E: - 3¿así?
A: Ajam.
E: Y esto te da -1 o sea voy a escribir de vuelta porque en realidad te da igual a -1 y estoy menor o igual que 0 sí.
A: Claro.
E: Bien, entonces el valor absoluto de -3 es -3 y valor absoluto por ejemplo de 4, ¿cuánto es?
A: 4
E: Ajam, bien, después retomaremos esto no. Bien gracias, y ahora en el ejercicio 1h Ailén.
A: Uno de los ejercicios, a ese no sé si era, el ejercicio 1i) y creo que me complicó un montón.
E: Si, ya llegaremos ahí.
A: El ejercicio h apliqué los casos también dependiendo del signo y ahí fui corriendo depende la propiedad del caso.
E: Ajam, entonces en ese ejercicio te voy a preguntar que aplicaste el procedimiento de los casos que me habías dicho y entonces ¿qué números reales verifica la inecuación?
A: 2 y 6.
E: 2 y 6.
A: Claro o sea no 2 y 6 no, lo que está entre el intervalo… entre 2 y 6, 2 y 6 no porque no están incluidos.
E: Ajá bien y fíjate acá tenés, cuando vos resolviste esto, entre 6 y 2 y después llegas a esto [Se refiere a (2,6)], ¿qué te parece?
A: Y ahí lo que hice fue darlo vuelta nomás por el tema de que no sabía o sea me iba a quedar primero el 6 y después el 2 y no quedaba bien, entonces lo invertí para que quede bien ordenados por decirlo así.
E: Ajam. ¿Y eso es válido?
A: puede ser (Risas).
E: O sea, ahí lo que veo es que vos estás haciendo, como no me da lo que yo quiero le cambió y bueno me da. ¿Entendés?
A: Como no quedó ordenado le cambio para que quede (Risas).
E: Ajam, exactamente, bien entonces y ahí está nuevamente el tema de la verificación que te había dicho también ¿sí? y en el 1i). Ahí lo que yo veo es… que me dijiste que no lo pudiste… se te complicó bastante.
A: Si estuve, no sé como una hora tratando de hacerlo, dije bueno yo le mando si está bien, está bien.
E: No más vale, era lo que podías, vos tenías que pensarlo como vos podías. Y acá ¿cómo pudiste separar esto? porque acá fíjate que tiene valor absoluto de x + 3 y luego pones $|x|+|3|$ o sea lo que yo veo es que vos hiciste es tengo esto $|x+3|$ y es igual entonces a $|x|+|3|$
A: Claro yo lo interpreté en el sentido de.
0:15:00

A: Si hablamos de valor absoluto es el o sea el valor absoluto de un mismo… de un número es el mismo número no más entonces como como que lo separe o sea así viéndolo me quedaba x + 3 separándolo me iba a quedar el valor absoluto de x más el valor absoluto de 3.
E: Perfecto.
A: Esa fue mi deducción.
E: Sí sí sí, sí yo acá no te puedo decir nada que está bien ni mal sabes, yo voy a escucharte nomás. Bueno ahora en el punto 2 habíamos que dar definiciones ¿no? de lo que vos entendes. En la primer pregunta el 2a) que decía qué es el valor absoluto un número real escribiste: el valor absoluto de un número real cualquiera es el mismo número con signo positivo, nos ayuda a indicar la distancia entre dos puntos de la recta numérica y ¿ahí Ailen?
A: Lo de la distancia, la parte esa que dice nos ayuda a indicar la distancia entre dos puntos de la recta numérica es porque lo relacioné con el concepto de módulo.
E: Aja, módulo y valor absoluto son lo mismo.
A: Por eso.
E: Ahora fíjate que acá vos decís que el valor absoluto de un números real cualquiera es el mismo número pero con signo positivo y hoy vos me dijiste que el valor absoluto de -3es -3.
A: Ah eso del signo positivo está de más.
E: Mmm, entonces porque vos lo que interpretas del valor absoluto es que es el mismo número.
A: Claro.
E: Bien, bueno una inecuación que preguntaba en la 2b) era en la pregunta b decía qué es una indicación para vos y una inecuación entonces escribiste que es una desigualdad que relaciona letras y números y antes de seguir quiero preguntarte.
A: Ajam.
E: Si yo tengo un número real cualquiera cuál será el valor absoluto de x o módulo como quieras llamarlo. A que será igual entonces el valor absoluto de x o de a o lo que fuera. Si x es un número real, su módulo es igual a… ¿Qué escribo acá? $|x| =$
A: x.
E: ¿x, así $|x| = x$?
A: O en realidad serían los números reales.
E: Si x ya es un número real, a ese número real le corresponde como valor absoluto vos decís el mismo número ¿no? ¿O no era así?
A: Si.
E: Bueno, bien y en la tercera y última pregunta hacía referencia a ¿qué es una inecuación con valor absoluto para vos?
E: Es una operación decís en la cual la variable está dentro del valor absoluto de un lado de la inecuación y en el otro hay un número, se utilizan los signos de desigualdad y ahora te pregunto todo lo que están acá son inecuaciones con valor absoluto o alguna no cumple esa.
(El entrevistador señala en la pantalla los ejercicios planteados) condición que vos dijiste.
A: Creo que todas, no, creo que todas cumplían porque todos tienen el valor absoluto
E: Ajam, bien y ahora si vos tendrías que explicar a alguien, por ejemplo para resolver una inecuación con valor absoluto qué le dirías, para que por ejemplo vos le querés explicar a tu compañera, teniendo una inecuación entonces qué dirías para resolver esa inecuación, ¿cuáles son los consejos que le darías?

A: Eh, primero que nada solo le diría que se base en buscar los casos, de esto que yo tengo, a mí desde mi punto de vista me facilitó un montón porque yo miraba el signo y ya me sabía cómo resolverlo.
E: Si, algo más.
A: A mí también me ayuda mucho el tema de los gráficos, no sé por qué pero me ayuda a graficarlo.
E: Bien ¿algo más?
A: No creo que con eso nomás yo me basé.
0:20:00
A: Con estas dos cosas no más.
E: O sea que veas qué propiedad aplica sería ¿así no?
A: Dependiendo del signo.
20:11.
E: Y lo represente gráficamente.
A: Claro.
E: Y lo represente gráficamente, bien Ailén estamos entonces con eso, bueno. Voy a detener la grabación.

Tiempo Finalización: 0:20:23 minutos

Entrevista a Claribel

0:00:00

E: Bien, entonces vamos a empezar, estás viendo mi pantalla ahí ¿no?, tu trabajo

A: Mmm todavía no… ahí aparece.

E: Lo ves, bien entonces la primera pregunta, viste, si vos lo tenés a mano igual lo mismo nomás, viste el ejercicio el primer ejercicio decía existe algún valor real de que verifica las siguientes inecuaciones. Justifica tu respuesta no y entonces vos planteaste para la inecuación $|x|>4$, planteaste esto como primer paso ¿sí? (se refiere a $x< -4$ $x>4$), ¿podrías decir ahí qué aplicaste?

A: ¡Qué apliqué! (Risas), es una propiedad del valor absoluto.

E: Ajam, bueno. Una propiedad sí.

A: Si.

E: Bien y ahora qué significan estas cosas (se refiere a $x<-4$ $x>4$), por ejemplo, cómo interpretas vos esta expresión.

A: ¿Cómo?

E: Qué serían, cuál sería la solución entonces.

A: Y que para mí la solución sería que a partir de -4 hasta menos infinito, todos los números verifican la inecuación y de 4 al infinito positivo.

E: Ajam, o sea estás interpretando de esa manera, bien y ahora mmmm y acá también ¿no?, lo escribís como intervalo y ¿por qué lo escribís como intervalo?

A: Es la parte de… también influye la teoría que nos enseñaron en la cátedra, por eso la escribí como intervalo.

E: Ajam, decís porque en la cátedra te pedían que hagas eso ¿no? dada una inecuación, entonces, bien y ¿lo de la recta numérica?

A: Y también pero es para entenderlo mejor gráficamente digamos, para guiarme más también, me ayuda.

E: bien bien bien entonces en el punto 1b es similar, así que eso lo vamos a pasar nada más si, y acá, en este ejercicio en el vamos a pasar al 1e por ejemplo, lo estás viendo ¿no? al e.

A: Si.

E: Bien, viste en esa inecuación vos tenías ≤ 0 ¿si? por un lado acá escribes es un intervalo [0, 0] y después me decís que no sabes resolverlo ¿sí?

A: [Risas de la estudiante] No sabía cómo graficar.

E: Ah bueno y en este caso porque no pudiste resolver o qué es lo que se te complicó

A: El 0 se me complicó.

E: Cuál 0 Claribel? ¿Cuál decís? cuando te referís al 0, a cuál te estás refiriendo, a qué 0?

A: Al del punto e ¿no?

E: Sí sí pero viste que ahí en tu ejercicio aparece este 0 que está acá (del ejercicio) y acá aparecen 0 ([0, 0]) a cuál te estás refiriendo a eso voy, a esto que está acá, que estoy marcando ([0, 0]) o a esto (≤ 0)

A: No, al del ejercicio.

E: Al 0 del ejercicio.

A: Si si.

E: Ajam porque tenía un 0 entonces vos dijiste ahí, se dificulta, algún problema debe haber ¿no? Que no podías resolverlo.

A: Si no entendía cómo hacer ahí.

E: Ajam, y vos decís que tiene solución ese ejercicio ¿o no? ¿Qué te parece?

A: Y para mí ahí el único valor que verifica la inecuación seria el 0, de otra manera no lo entiendo digamos.
E: El 0 el único que verifica decís entonces.
A: No entiendo otra cosa.
E: Ajam, y ¿por qué lo escribiste como ([0, 0]) así?
A: Porque hice menor que, el 0 es mayor o igual entonces tenía que ser cerrado por ser igual y como el 0 es el único punto que tenía entonces dije ([0, 0])
E: Bien, bien, bien y acá en el 1f) entonces en el siguiente ¿ahí la desigualdad es al revés nada más no? ¿Te diste cuenta eso?
A: Sí, está mal expresado también me di cuenta pero sí.
E: ¿Cuál está mal expresado para vos?
A: Pasa que, es de 0 al menos infinito sería uno, unido al 0 más infinito, infinito positivo digamos.
E: Eso sería tu solución según vos.
0:05:00
A: Si, sí.
E: Bien bien bien bien y ahí ¿qué aplicaste para poder resolver eso?
A: Las propiedades de valor absoluto nomás.
E: Ajam, bien la propiedad valor absoluto y vos decís entonces que la solución está dada por menos infinito al ¿0 dijiste?
A: Si
E: Y 0 más infinito.
A: Si.
E: Ahora, esos intervalos son abiertos o ¿cómo?
A: Cerrados, en realidad es semicerrado el 1f) y el 1e) es cerrado
E: O sea a ver yo voy a escribir algo acá en el Paint, ¿si lo puedes ver o no?
A: Si.
E: Entonces vos según la solución sería menos infinito ¿así?
A: Si.
E: Y ahí escribo el 0?
A: Si.
E: ¿Y acá qué escribo corchete, paréntesis?
A: El corchete.
E: Ajam. ¿Qué más?
A. Unido.
E: ¿Y qué agregó acá?
A: La U.
E: Ajam. Bueno
A: Y ahí corchete, el 0 a infinito y el paréntesis.
E: Ajam, eso sería entonces la solución del ejercicio f, que te diste cuenta ahora ¿no? que lo habías expresado incorrectamente parece en el f…
A: Si si.
E: Y en el 1g), me podes contar lo que hiciste, cómo llegaste a esta expresión, a todas estas inecuaciones.
A: Es lo mismo que… el ([0, 0]) también, se me complicó un poco pero bueno consideré que era -2 nomás el punto que verificaba la inecuación
E: Ajam, viste que acá como que desapareció el valor absoluto ¿por qué?
A: Si si.

E: Por qué acá desapareció… como lo pudiste eliminar a esas barras a eso voy, para entenderlo.
A: Me mataste, es parte de la teoría y apliqué lo que me habían enseñado no más en el cursillo y en la cátedra.
E: Pero viste que, bien pero ¿vos te diste cuenta que el 2 no estaba dentro de las barras del valor absoluto?
A: Si.
E: Ajam, porque viste que ahí es como que es distinto, a diferencia de los anteriores, éste tenía un más 2, por fuera de las barras sí y vos llegas a que la solución es los x entre -2 y -2 y después decís no sé cómo graficar lo y planteaste este intervalo ([-2,-2]) sí?
A: Si.
E: Bien entonces ¿hay solución en esa inecuación? según vos.
A: Y el -2 es el único que puedo…
E: Vos decís que el -2 es el que cumple la inecuación.
A: Si.
E: Y entonces por qué no pudiste graficarlo?
A: Se me complica mucho cuando, cuando es un solo número, es como marcar un punto nomás.
E: Claro y si represento un punto solamente, un número es un punto en la recta y si exactamente, bien ahora, bueno ahora vamos a ver más adelante pero qué es para vos el valor absoluto.
A: Es la distancia de un número al 0, así lo entiendo más fácil.
E: La distancia al cero, bueno entonces acá tendríamos la distancia, si esto está en valor absoluto quiere decir la distancia de ¿qué número? ¿Cómo ésta?, ¿qué letra está acá?
A: x.
E: Entonces sería la distancia ¿de quién?
A: De x al 0.
E: Ajam, la distancia de x al cero y si le sumo 2 y si le sumó 2 qué tipo de número será qué me va a dar si yo a una distancia le sumo dos, qué tipo de números puedo asegurar que me dará? puedo o no asegurar no?
A: El 2
E: Cómo será ese número, si yo a una distancia le sumo 2 unidades. Fíjate acá tenemos menor o igual que 0. ¿Eso es posible? (por la inecuación propuesta).
A: Si.
E: Es posible que yo a una distancia le sume 2 y me de menor o igual que 0, ¿eso es posible entonces?
0:10:00
E: Yo no te puedo decir está bien.
A:….
E: ¿Cómo, cómo me dijiste?
A: Si fuera un número negativo, eh podría ser.
E: si tendría que ser negativo, ¿quién?
A: x.
E: Si x es negativo, vos decís que esto sería, la inecuación tendría solución. Mmm bueno bien pasamos a los otros y acá (1h), nuevamente cómo llegaste al -2, entre 2 (-2<x-4<2) ahí nuevamente aplicaste qué cosa.
A: la propiedad de valor absoluto.
E: Aja, luego en este paso en el que sigue (-2+4<x<2+4)

A: Quité las barras del valor absoluto y apliqué la propiedad pero ahí se me complicó un poco por el -2.
E: Ajam. ¿Por este -2? (de la inecuación).
A: Si.
E: Entonces de acá, suponiendo que vos aplicaste en este primer paso la propiedad, en el siguiente qué hiciste, qué diferencia hay entre.
A: ¿En el siguiente paso?
E: Si.
A: La diferencia que yo veo es que de un lado es un número negativo y del otro lado es un número positivo.
E: Ajam, y entonces qué hiciste para pasar el primero al segundo paso.
A: Tuve que sumar el 4 de los lados.
E: Bien bien, has pasado entonces el 4 que estaba restando, sumando ¿sí? y ¿luego operaste pareciera no? Hiciste la operación.
A: Si.
E: Y te dio que los x están ¿en qué intervalo entonces?
A: Mayor a 2 y menor que 6.
E: Ajam, bueno. Y nuevamente lo expresaste como un intervalo y lo representaste gráficamente, ¿sí?
A: Si.
E: Bien, ahora cómo vos leerías está inecuación, coloquialmente cómo lo dirías si yo tengo que decir lee lo que dice ahí, ¿cómo se lee eso?
A: El valor absoluto de x menos 4 y menor a -2
E: Ajam.
A: ¿Eso?
E: Sí, eso es coloquialmente ¿no? bien ahora que era entonces el valor absoluto era una distancia me habías dicho ¿no?
A: Si.
E: Y entonces tenés que esta distancia es menor que -2 y según vos decís que los números que están acá ¿verifican esta inecuación sí? (En (2,6)). Alguna vez te preguntaste si era correcta esa solución ¿o no? o ¿no estás acostumbrada a verificar si los números que hallaste verifican la inecuación?
A: No, no lo verifico normalmente.
E: Mmm bien entonces esto sería bueno que lo hagas después vas a ver algo que ahí ¿sí? para ver si algunos valores cumplen; igual es imposible que no… después te digo.
A: Ok.
E: Y lo mismo acá ¿qué pasó?, en el 1i).
A: Y se me complicó porque del otro lado tenía también un valor absoluto.
E: Ajam, bien.
A: Y no supe cómo avanzar digamos.
E: Ajam, porque veo acá que viste que parece como que en este eliminaste las barras ($-3x<x+3<3x$)
A: Si.
E: Y ahí fuiste aplicando tratando de resolver eso pero no pudiste, ¿sí?
A: No no llegué.
E: Ajam, bien, porque tenía esta barra y bueno eliminaste y quisiste ahí hacer un pasaje pero después no pudiste llegar a nada ¿sí?
A: No.

E: Acá despejaste…Bien, acá decís vos cuando se te pregunta qué es el valor absoluto (2a) dices el valor absoluto de un número real es el mismo número positivo, el valor desde su distancia al 0 ¿sí?
A: Si.
E: Entonces, según esto el valor absoluto de un número real es el mismo número positivo, el valor de su distancia al 0, entonces yo te pregunto si yo tengo un número real x, ¿sí? (El entrevistador escribe =)
0:15:00
E: Cuál sería entonces si yo tuviera que calcular el valor absoluto de x, según tu definición, que dice que el valor absoluto un número real es el mismo número positivo, el valor de su distancia al 0, entonces que pondría acá después del igual del símbolo ¿no?
A: x
E: Vos pondrías x, ajam.
A: Si.
E: Así según tú… lo que entendés ¿sí?
A: Si.
E: Bien, ahora, después cuando se te preguntó qué es una inecuación, tú planteas que una inecuación es una desigualdad.
A: Una desigualdad.
E: Bien, entonces ahora te pregunto ¿cualquier desigualdad es una inecuación?
A: Creería que no pero no sé, hasta ahí llegué con las inecuaciones.
E: Ajam, porque qué es una desigualdad por ejemplo si yo tengo 3 >1 es mayor que 1 ¿no? eso es una desigualdad ¿sí? porque 3 no es igual a 1, entonces si eso es una desigualdad vos tendrías que decir que esto sería una inecuación.
A: Si.
E: Y esto es una inecuación 3 mayor a 1?
A: Y no tengo incógnita así que…
E: Ahh, le falta la incógnita, y eso por qué no agregaste a tu definición, cuando acá…
A: No se me ocurrió.
E: Bien, bien, si bueno, ahí en la última pregunta dice qué es una inecuación con valor absoluto, respondiste que se combinan las inecuaciones con los valores absolutos ¿sí?
A: Sí.
E: Bien, entonces ahora la pregunta es ¿toda inecuación para vos, con valor absoluto tiene solución?
A: Y puede que no, para mí lo del [0,0] no sabía si tenía solución o no pero…
E: Pero vos decís que es posible que hayan inecuaciones que no tengan solución
A: Y si puede ser.
E: Ajam, bien ahora bien entonces cómo caracterizarías a estas inecuaciones si yo te digo tenés estas inecuaciones ¿sí?, estas inecuaciones con valor absoluto, yo te digo que las resuelvas, qué harías vos para poder resolver una inecuación con valor absoluto.
A: Y fijarme en las propiedades del valor absoluto.
E: Ajam, y una vez que aplicas, qué más harías por ejemplo, es lo que a vos te parece eh, yo no te estoy evaluando como te dije.
A: Y lo que me enseñaron nomás, eh verificar qué propiedad tengo que utilizar, despejar la x como en toda inecuación, y encontrar los valores y graficarlos y hacer el intervalo también.
E: bien bien bien, Claribel, voy a detener la grabación.
Finalización: **0:19:08**

Entrevista a Claudia

0:00:00

E: Voy a compartir mi pantalla.

E: Bien, entonces estás viendo tu trabajo ¿no?

A: Eh… todavía no.

E: A ver esperemos.

A: Ahí sí.

E: Ahí está, bien entonces te iré haciendo preguntas sobre tus procedimientos o lo que hiciste ¿sabes?

A: Sí.

E: ¿Está? Bueno, me escuchas bien ¿no?

A: Sii.

E: Ah dale, entonces el primer punto que tenías que resolver necesidad decía existe algún valor real de x que verifican las siguientes inecuaciones. Justifica tu respuesta. Bien, yo me escucho por eso es que lo que digo, viste por eso te pregunto si se escucha bien.

A: Ah no, si se escucha bien, capaz es su auricular nomás.

E: Bueno entonces en el primero teníamos valor absoluto de x mayor a 4 ¿sí? Y ahí, contame ¿qué existe Claudia?

A: Bueno ahí apliqué la propiedad de valor absoluto mayor a a ($|x|>a$)

E: Si.

A: Se hacía,…le explico con mis palabras.

E: Si si está bien.

A: De un lado, un lado la x menor a -a y del otro lado x mayor a, por eso es que por un lado x <-4 y del otro lado x mayor a 4 y en eso se producía una unión.

E: Ajá, ese símbolo que parece una “v” ¿qué sentido tiene para vos? Este que estoy señalando acá (se refiere a la disyunción).

A: No me… veo cuando está señalando pero supongo ¿qué es la “v” que está en el medio?

E: Claro acá viste, no se ve la crucita que estoy moviendo

A: Ahora sí, si si.

E: Aja.

A: Yo sabía.

E: Lo que se te ocurre, lo que pienses.

A: ese símbolo…representa la unión.

E: Aja, bueno ahora, después decís el valor de x que verifica las inecuaciones y escribís esos intervalos sí $[(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)]$

A: ¿Cómo profe?

E: El valor de x que verifica las inecuaciones es... ¿y escribís estos intervalos no?

A: Claro si si.

E: Ahora la pregunta es por qué escribís con intervalos, o sea por qué lo haces

A: Eh porque esa es la representación ay no no me acuerdo el nombre. Ese no me acuerdo.

E: Si es una representación ¿no? Por intervalos pero lo haces por qué, por qué razón, porque se te ocurrió nomás o por algo en especial.

A: No porque, al dibujar la recta marco que va desde el -4 hasta el infinito y el otro lado va desde el 4 hasta el más infinito.

E: Ajam, bien, en el ejercicio 1b) es similar ¿no?

A: Claro.

E: ¿Cuál es la diferencia ahí que ves?
A: Es un intervalo abierto y es menor (sentido de la desigualdad)
E: Bien, perfecto, ahora fíjate en el 1c) que escribís en tu procedimiento esta unión, eso tendría que estar acá también repitiéndose en los siguientes pasos o ¿no?
A: Ah no, tendría que haber o sea según como venía haciendo el examen tendría que haber puesto únicamente abajo.
E: Bueno perfecto, bueno en el otro es similar así que no lo vamos a hablar pero en el 1e) tenemos la inecuación valor absoluto de x menor o igual que 0.
¿No?
0:05:00
A: Ajam.
E: Y según tu respuesta dice que es el valor absoluto de 0 es 0.
A: Ajam, esa es una de las propiedades del valor absoluto.
E: Ajá ahora te pregunto entonces ¿esa inecuación tiene solución?
A: Y es 0.
E: Ajam, entonces ¿no hay otro?
A: Claro no. El valor absoluto de 0 es 0, siempre es 0.
E: O sea x no puede tomar otro valor distinto de 0?
A: Y no.
E: ¿Por qué decís que no se puede?
A: Y porque siempre va a ser 0 o sea cual sea el valor que tome.
E: Si yo por ejemplo le doy a x igual a 2 por ejemplo.
A: Ajam.
E: ¿Qué pasa con su valor absoluto?
A: Y ahí va a ser 2.
E: Aja y entonces.
A: Entonces si puede tomar.
E: Puede tomar valores pero el tema es que estamos resolviendo inecuaciones A: Claro
E: Y entonces así como las ecuaciones también la inecuaciones ¿tienen que verificarse o no?
A: Claro.
E: ¿Entonces el 2 verifica la inecuación?
A: Y no.
E: ¿Por qué?
A: Ay profe me pone nerviosa. (Risas).
E: No te pongas nerviosa es para saber nomás, para tratar de entender lo que están pensando.
A: Claro Eh…
E: Yo diría porque se aplica la propiedad de que el valor absoluto de cero es cero pero
E: Ajá eso sí, o sea que en ese ejercicio b, vos te basaste únicamente en esa propiedad que dice que el valor absoluto de cero de cero, ¿sí?
A: Ajam.
E: Bueno entonces vamos a pasar al ejercicio 1f) que es similar, dice que el valor absoluto de x es mayor o igual a 0 y ahí decís vos "no existe un valor de x; para 0, porque su valor absoluto es 0. O bueno parece que ahí iba un punto ¿no? No existe un valor de x porque para cero su valor absoluto es 0. Ahí no me queda claro, la solución. Hay solución o no hay como me decís no existe un valor de x.
A: Claro bueno o sea.
E: ¿Qué pensas ahí?

A: Claro la solución sería 0 nomás.
E: 0 también únicamente.
A: Claro porque es el mismo que el otro.
E: Bien, ajá bueno entonces el único valor que cumple en el f, es el 0 también, así como el e.
A: Claro porque ahí, ¿es una trampita no profe? Lo único que hizo fue invertirme los símbolos.
E: Ajam, después te comento. ¿Y en el otro, en el ejercicio 1g)?
A: Este era, un inter…
E: Valor absoluto de x, más 2, menor o igual a 0. ¿Y ahí aplicaste directamente pareciera no la propiedad puede ser?
A: Y apliqué la propiedad y en lugar de quitar nomás el 0, yo porque me gusta poner paso por paso digamos porque después me confundo, puse nomás el 0 y después recién pase el -2.
E: Y a vos te parece Claudia que, viste que la x nomás tiene acá valor absoluto.
A: Ajam.
E: Es lo mismo que si yo hago para ver si puedo escribir acá. Si a vos te parece ¿esto es cierto o no? te voy a preguntar esta cosa porque vos tenés la inecuación, vos estás viendo mi Paint ahí ¿no?
A: Si si
E: Bueno, el ejercicio decía valor absoluto de x, más 2 es (Escribe en la pantalla).
0:10:00
E: menor o igual que 0 ¿no? Lo que te pregunto es que si es lo mismo que tener ¿así? (Escribe en la pantalla).
A: Profe, se ve muy de costado, no llego a ver bien lo que escribió. O sea se ve el signo, menor o igual nomás. A partir de ahí veo no sé.
E: A ver…
A: No se ¡qué escribió antes!
E: Ah entonces voy a escribir más al centro.
A: Si si.
E: Ahí escribí uno y el otro acá.
A: Claro.
E: Si esas dos inecuaciones ¿son las mismas?
A: Ahora que me escribe así, creo que no.
E: Pareciera que no ¿no? a ¿cuál no se le aplica la propiedad ya directamente?
A: Al que yo hice.
E: Ah claro. Bien bien, volvamos entonces, si, es el tema que tenemos ahí entonces y ahora vos decís que… fíjate puedo decir que la solución es el intervalo menos [-2,2] ¿no?
A: Claro.
E: ¿Y no verificaste la inecuación?
A: No profe, pero ahora ya me di cuenta que está mal.
E: Bueno ahora y acá en ejercicio 1h), ahí dice valor absoluto de x menos 4 menor a -2 ( ). Ahí ¿qué aplicaste en el primer paso?
A: Y aplique la propiedad, pasé el -2 del otro lado digamos y ahí puse -(-2) porque menos del signo, a ver y menos de, creo que ahí me confundí ¿tenía que haber pasado cambiado el signo? No, sí.
E: Este pusiste, tenés -2 acá, entonces va el opuesto, esto está así planteado como si fuera válida la propiedad viste.

A: Ajam.
E: Es correcto, después los otros cálculos está correcto, 2 más 4 es correcto todo. Pero el tema es acá (6<x<2), te dice son los x, ¿cómo leería esto? ¿Cómo se lee? son los x reales que cumplen qué cosa.
A: Que sean menores a 6.
E: ¿Menores?
A: Ah no, es al revés, mayores a 6.
E: Ahh ¿y luego?
A: Y lo otro, los x menores a 2.
E: Exactamente entonces vos tenés que encontrar los reales, que sean mayores a 6 y menores a 2 y ahí vos decís acá que es el intervalo (2,6).
A: (2, 6), y era al revés, era (6, 2) ¿no?
E: Ajam, pero que ¿cuál es el problema ahí?
A: Y es, no es un intervalo abierto ¿no?
E: y el (6,2) pareciera ser un intervalo pero cuál es el problema que el extremo inferior es más grande que el extremo superior.
A: Ahhh, ajam.
E: Entonces vos no podes armar un intervalo y entonces eso quiere decir que no hay ningún número real que cumpla con esa condición, ¿entendés? Porque no puedes encontrar un número que sea más grande a 6 y menor a 2.
A: Claro.
E: ¿Se entiende?
A: Ajam.
E: Entonces, bien y en el ejercicio 1i), ¿qué te parece?
A: El i.
E: Si. Valor absoluto de x + 3, menor que -3 por valor absoluto de x.
A: Viendo ya lo que me corrigió, veo que esto está mal y que no se aplicaba ninguna propiedad.
E: Claro claro, pareciera ser exactamente, si bien es similar a lo que hiciste anteriormente, diste vuelta como te conviene el intervalo, claro también entonces, vamos al punto 2 ahora no.
0:15:01
Según lo que pusiste como absoluto, dice el valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta si es positivo o negativo ¿sí? entonces yo te pregunto valor absoluto de x, valor absoluto de x a qué sería igual según tu definición porque escribiste, ¿tenés a mano tu trabajo no? tu archivo.
A: Si si, está acá.
E: El valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta si es positivo o negativo, entonces qué, ¿qué escribiría acá? (para x que es real, ¿cuál sería su valor absoluto? ¿Qué escribo acá lado?
A: Eso le estaba por decir. Eh, o sea usted quiere que le diga cómo poder poner que yo puse que no tiene, sin tener en cuenta si es positivo o negativo.
E: Aja, esa cosa, que esa definición para un número x entonces, tratar de escribir simbólicamente lo que dijiste: el valor absoluto número real es su valor numérico sin tener en cuenta si es positivo o negativo.
A: No sé bien cómo ponerle pero mi idea sería poner menor o mayor a 0 digamos, pero no.
E: A ver, ¿qué valor absoluto le corresponde a ese x? Esa es la pregunta, si yo tengo un número real entonces cómo escribo el valor absoluto de x, ¿qué escribiría acá?

A: ¿Todos los reales no?
E: ¿Cómo?
A: ¿Todos los reales no o sí?
E: No, la idea es entonces escribir para ese valor de x, cuál es su valor absoluto calcularlo a eso me refiero, ¿cómo se calcula el valor absoluto de x?
A: ¿Aplicando propiedades no? O sea si pero no.
E: Parecido podría ser, a ver, vamos de nuevo. Entonces el valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta si es positivo o negativo ¿sí? ¿Esa definición es lo que vos entendés o la viste en algún lado?
A: Creo que es eso, el concepto que había estudiado en su materia.
E: Ajam. Yo no la vi pero no importa, no estoy criticando ¿no? Está bien si la pusiste está bien. Bueno si, entonces lo de inecuación sí me pareció que estaba, que no te puedo preguntar nada y lo de inecuación (con valor absoluto) que está al revés, espera porque lo tengo que dar vuelta.
A: Ah sí.
E: Por inecuación con valor absoluto entiendo que es la desigualdad entre dos expresiones algebraicas en la que se determina cuál está más próxima al cero, y por qué escribiste esto Claudia, en qué estuviste pensando cuando…
A: Como decía inecuación con valor absoluto… ese es digamos, me basé en el concepto que yo había escrito y lo que más o menos sabía de inecuación.
E: Si ahora, entonces lo que te voy a preguntar ahora es y con esto vamos cerrando. Si vos tuvieras una inecuación o si te presentan o alguien te presenta una inecuación con valor absoluto ¿sí? Una inecuación valor absoluto, vos que te… ¿qué le dirías a alguien para poder resolver?, ¿cómo tendría que proceder esa persona?
A: Eh tiene que fijarse si se puede aplicar las propiedades y ahí luego, una vez que ve qué propiedad aplica tiene que encontrar el valor absoluto digamos, el valor de x,
E: Ajam, entonces tiene la inecuación ve si puedo aplicar o no la propiedad.
0:20:01
E: ¿Y qué más? ¿Algo más?
A: Y ahí encontrar el valor de x.
E: Ajam, ¿siempre va a poder encontrar el valor de x?
A: Eh, no.
E: Ajam, bien. ¿Algo más que tenés que hacer?
A: Sí, luego se puede, bueno si quiere puede, no no es si quiere, debe representarlo en una recta, establecer qué intervalo tiene, si es abierto.
E: Bien, bien Claudia.

Finalización: 0:21:03

Entrevista a Guido

0:00:00

Hola Guido, voy a grabar para luego transcribir en un papel ¿sabes? Y eso tiene que quedar en la tesis ¿sí?
A: Si.
E: Bien entonces, te voy a mostrar acá tu trabajo que también lo tenés a mano y bueno la primer pregunta con respecto al ejercicio 1a) dice que me expliques cómo resolviste esa inecuación, que dice valor absoluto de x mayor a 4.
A: Lo explico con mis palabras nomás?
E: Si. Si todo con tus palabras, como vos creas que es.
A: Bueno le explico cómo hice, lo primero separé y le puse tipo, como x > 4 y x <-4, en una recta le puse y ahí me fui guiando, y ahí saqué el valor de la solución menos infinito, -4 y después 4 más infinito.
E: Ajam, ese símbolo… si si contame.
A: Y después puse de ejemplos para verificar, tipo 5, el valor absoluto de 5 y es 5 y es mayor que cuadro, entonces es verdadero pero 3, el valor absoluto de 3 es menor que cua, es mayor que 4 entonces no va, era falso.
E: Claro exactamente, bien lo que te quiero preguntar es por el símbolo este que aparece acá (disyunción) cómo lo interpretas vos.
A: Ese a “y”.
E: Ajam, lo anotó sí, ahora cuál es la solución según vos.
A: La solución.
E: Cuál es la solución de la inecuación si tendrías que decir la solución es ésta cómo lo dirías.
A: Los números que entran dentro de dos puntos establecidos.
E: Que entran tanto en los intervalos de decís ¿vos?
A: Si.
E: Que entra en los intervalos porque viste que aparece una coma ahí en tu escritura, en la S [S=] ¿esta S es solución no?
A: Si
E: Entonces esta coma ¿qué significaría?
A: Y yo le puse esa coma tipo para dividir las dos soluciones que puse el -4 y el 4, era los dos intervalos, que estaba trabajando.
E: Ahh, ajam. Bien, entonces habías puestos ejemplos y ¿por qué se te ocurrió proponer esos ejemplos Guido?
A: Y para guiarme más que nada, para demostrar tipo que estaba.
E: De lo que hallaste, bien. Y con tres basta o tengo que darle más valores o con esos son suficientes.
A: Y vos con los valores que pones ahí podes tipo saber cuál es, cuál entra dentro del intervalo.
E: Ajam.
E: Por ejemplo ahí yo puse el -5 también, y el valor absoluto de -5 es 5.
E: Ajam, claro. Bien, bueno, aguantame un ratito que hay un ruido… bien seguimos. En la pregunta 1b), vamos a mirar, ahí qué aplicaste ¿no?
A: Ese tipo, eso sabía… cuando el valor absoluto en menor de un número se hace esa fórmula, tipo que se va pasando de un lado al otro.
E: Ajam, bien, eso en el primer siguiente paso ¿no?
A: Si.

E: Bien. Y después en el siguiente paso, hiciste pasaje de términos y bueno llegaste a esto ¿no? entonces ¿cuáles son los números reales que verifican esa inecuación?
A: Números reales, y el 1 y el 3 sería, el conjunto de números reales.
E: El conjunto de números reales, ¿cómo sería? ¿Me decís?
A: Ah o sea que como le clasificaría.
E: No decirme cuáles son números que verifican.
A: Y el 1 y el 3.
E: El 1.
A: El 3.
E: Ajam, son esos únicamente los números que verifican, el 1 y el 3.
A: Si.
E: Bueno, ajam, entonces.
05:00
E: La S estaba indicando la solución ¿no?
A: Si la solución.
E: Ajam, bien bien bien. Ahora vamos a pasar al ejercicio 1c), y acá ¿cómo lo resolviste?
A: Ah si ese tipo, al ser el tipo mayor el valor absoluto, mayor que un número, dividí en dos, tipo uno positivo y el otro negativo.
E: Ajam.
A: Y ahí le fui resolviendo, fui pasando E: Ajá y por un lado encontraste x mayor que 3/4 y x menor que -1/2 si bien aplicaste una propiedad también ahí ¿no?
A: Si.
E: Y ¿cuál es la solución según vos?
A: Y ahí son dos soluciones.
E: Anoto.
A: Solución 1 y la solución 2. Por lo menos yo le puse así porque.
E: Ajam. Entonces S1 y S2 son dos soluciones.
A: Si.
E: Bien, y entonces o sea algunos cumplen esto y otros cumplen otro (señalando los conjunto S1 y S2), cómo sería la solución, si tengo que poner la solución, digo tiene dos soluciones o ¿cómo sería?
E: Como yo le puse, le puse tipo la solución 1 que era el positivo, ese fue el primero que hice. ¾ a infinito y la solución 2 de menos infinito a -1/2
E: Y ahí vos qué pensás, ahí sería que como que un número tiene que cumplir ambas condiciones o sólo una como sería, si yo digo este número tiene que ser solución, tiene que cumplir S1 y S2 o uno solo de ellas.
A: Ah si la solución 1 y la solución 2 tienen que cumplir algo.
E: O sea si yo tengo un número, digo tomo un número dos por ejemplo, ese 2 para que sea solución tiene que estar en S1 y en S2 o solamente en un en S1 y... o en S2
A: Tiene que estar en una porque, pertenece a una nomás.
E: A una.
A: A un intervalo.
E: A un intervalo, bien vamos a entonces ahora al ejercicio 1e).
A: ¿e?
E: Si el e. Y ahí trata de explicarme cómo lo resolviste.
A: Ah sí, bueno eso me habían dicho ya que cuando es tipo un valor absoluto menor que 0, no hay forma tipo es 0 si o si, porque vos pasándole de un lado al otro, te va a seguir dando 0. Porque está de los dos lados el 0.

E: Mmmm, o sea que vos aplicarías la propiedad y te va a quedar 0 de los dos lados
A: Si.
E: Ajam, y entonces directamente ahí te queda que el x es 0.
A: Si x =0.
E: Y ahí también veo que escribiste con ejemplos ¿no?
A: Si x=1.
E: Le diste x=1, -1 y ninguna cumple, bien, entonces según vos, la solución es solamente x=0.
A: Si.
E: Ahora por qué lo escribes de esta manera (señalando S= [0,0]), ¿así con esta anotación?
A: Como tipo x igual a 0 nomás, 0 mayor o igual que 0, menor o igual que 0, es 0 a 0 nomás, no tiene otro intervalo, sería ese intervalo.
E: Entonces no hay otro número que cumpla con esa condición según vos.
A: Si.
E: Bien bien bien, entonces con estos bastaron y si bueno obviamente y porque yo puedo asegurar que otro no va a cumplir esto, cómo me habías dicho Guido.
A: Y cambiarle la x podría ser.
E. Como estamos analizando…
A: No hay ningún un número que sea tipo menor o igual que 0.
A: En valor absoluto.
E: Si en valor absoluto.
E: Mmm ajam, bien sí y el último que te quería preguntar, del ejercicio era el 1i).
0:10:03
A: A el i, el último.
E: A ver vamos a mirar acá, bueno el 1f) que me saltee ahí qué aplicaste también
A: Ahí apliqué 0 también pero como ese era mayor.
E: ¿Cuál?
A: O sea ese también da cero pero como ese era mayor ahí sí ya le hice distinto E: Porque acá aparece x mayor igual que 0 o -x mayor o igual que 0 ¿no?
A: Si.
E: Y esto de dónde sacaste (por lo mencionado anteriormente)
A: Ah sí, ese sería por el conjunto de números reales ya que tipo menos infinito, yo le hice más infinito tipo cualquier número que vos uses si puede ser mayor o igual que cero
E: Ajam. Porque después decís menos infinito, sería todo el conjunto números reales me decís
A: Si. O sea yo por ejemplo puse el ejemplo si usaría x sería igual a -2, el valor absoluto de -2 sería 2 y ya cumpliría la función que sería que 2 es mayor o igual que cero
E: Ajam, y con cualquier otro número va a cumplir.
A: Y sí porque si lo pongo positivo también sería lo mismo.
E: Ajam.
A: O 3 negativo también sería lo mismo.
E: Ajá. En el 1g), qué hiciste ahí en el g, qué ocupaste de acá a esta expresión, te das cuenta ¿qué hiciste?
A: Si ese le hice el pasaje… tipo el pasaje del… de términos.
E: Si. Acá. Decime.

A: Como era 0 más, le pase el 2, le pase el 2 negativo y ahí ya le hice tipo x, le pase el -2 a los dos lados y ahí le resolví o sea me queda -2 nomás porque no se podía hacer más nada.
E: Y por qué te queda – 2, -2 (En $-2 \leq x \leq -2$) acá en ambos lados.
A: Y yo le pasé nomás, tipo para ser la solución, aunque creo que sería lo mismo si me quedara el -2 de un lado nomás ¿o no?
E: Mmmm.
A: O sea como la x, el intervalo entre esos dos números.
E: Ajam, y la solución viste decís que es -2.
E: Ajam, vos verificaste esta inecuación ¿o no?
A: Emmm no. No lo verifiqué.
E: Y ¿por qué lo pones entre corchetes?
A: Y porque es cerrado, porque es igual E: Y por qué no escribiste -2, -2, como acá en el 0, 0 ([0,0]).
A: Como era el mismo número pensé que no iba hacer falta.
E: Porque acá viste escribiste 0, 0 ([0,0]), en el anterior.
A: Ese si escribí.
E: Acá veremos en el 1h), en el h tenemos y pusiste acá viste que acá existe como que acá si (refiriéndose al ejercicio g) le pusiste positivo y acá en negativo a diferencia del g.
A: ¿En el h?
E: Ajá, viste acá pusiste positivo ($+2<x<-2$) porque es parecido a éste en realidad
A: Si si, ese si porque por lo menos yo tenía entendido que cambiaba el signo de un lado al otro tipo de un lado es positivo y del otro negativo.
E: Claro por eso es como que me llama la atención que acá no cambiaste y acá sí.
A: Ahora sí me estoy dando cuenta esto E: Ajam.
A: Ese hice mal.
E: Y acá quisiste escribir otro número me parece (escribió 2+4 = 2).
A: En el…, ah sí. Ahí iba 6. Pero después en la solución le puse bien.
E: Claro.
A: O sea.
E: Pero la solución te queda 6 menor que x menor que 2.
A: Espere ahí busco el borrador. Si acá en el borrador y ahí sí.
E: Ajam, bien, entonces, viste que acá te quedó así mirá: 6 menor que x menor que 2 ¿sí? Y vos escribís como solución S = (2,6), no te llama nada la atención ¿ahí?
A: Sí que ésta al revés.
0:15:03
E: Ajá ¿y eso lo puedo hacer?
A: No.
E: Sí exactamente, bien y en el 1i) ¿no planteaste nada no?
A: No, ese sí que no.
E: ¿Por qué crees que no pudiste resolverlo?
A: Y me re confundía la verdad, tipo yo quería pasar el valor absoluto y unirles pero no sabía si se podía.
E: Ajam.
A: Y ahí resolverle. Pero me salía cualquier cosa, tipo dejé nomás.
E: Claro, bien entonces ahora pasamos a al punto 2 ¿sí? donde ahí tenemos que hablar sobre las definiciones que te pedían, fíjate que en el punto 2a) decía qué entiendes por valor absoluto de un número real.

A: Si.
E: Y vos escribiste: valor absoluto es la transformación de un número real, consiguiendo un valor positivo o cero pero nunca negativo ¿sí? Entonces si yo te preguntará, x es un número real, ¿cuál sería el valor absoluto de x?
A: x, si x.
E: x pondrías vos.
A: Si.
E: Ajam. Bueno, sigo mirando y luego cuando hablas, cuando se te preguntó por la inecuación, dijiste que son desigualdades que dan como solución un punto en la recta y por qué propones esa definición Guido.
A: Y porque tenía entendido de inecuación era la solución ¿no era así?
E: Sí sí sí o sea una inecuación.
A: Ahora no me acuerdo bien por qué le había puesto eso. Pero si había entendido así. Eran los dos puntos que me daban, tipo la recta.
E: Mmm, ajam. Entiendo si por los puntos que te dan en la recta o sea los intervalos
A: Si
E: Bien, ahora te pregunto qué pensás toda inecuación, dada una inecuación cualquiera ¿tiene siempre solución?
A: Y si creería que sí.
E: Ajam, que siempre tienen solución.
A: Bueno puede ser que no si es un número imaginario, puede ser.
E: Ajam, así sería un caso si no da real podría ser sí, bien y la inecuación con valor absoluto, decís son desigualdades que dan como solución un intervalo en la recta, viste que ahí hablas como que así ahora yo tengo el valor el valor absoluto, ahora ya me da un intervalo y hoy me, hoy cuando era inecuación nada más me decías punto en la recta ¿por qué haces esa diferencia en uno decís que es punto en la recta…?
A: Ah ahora ya me acordé. Inecuación es solo un punto y cuando era con el valor absoluto era que tipo los dos puntos en la recta o sea…
E: Una inecuación te da un punto decís A: únicamente y cuando era con valor absoluto, ahí sí podría dar dos puntos.
E: Cuando es con valor absoluto, ¿cómo te da? Anoto
A: Puede dar con dos puntos.
E: Bien, creo que con eso estaríamos a ver si no me quedó ninguna pregunta.
sí creo que sí, yo te pregunto nomás Guido, entonces para confirmar lo que estoy pensando, por ejemplo, acá cuáles son las soluciones en el ejercicio 1d), cuáles son las solucione de la inecuación?
A: ¿En el ejercicio d?
E: Ajam.
A: Y el -7/3 y el 1
E: ¿Esos dos valores?
0:20:00
A: Si.
E: Bien, con eso terminamos Guido yo voy a detener acá, de grabar.

Finalización: 0:20:09

Entreviste a Juan Esteban

0:00:00
E: ¿Estás viendo tu trabajo?
A: Si lo estoy viendo.
E: Yo igual lo tengo abierto.
A: Si mejor todavía, igual me recuerdo un poco del (trabajo), igual sigo teniendo las mismas ideas.
E: Si si.
A: No es que entré en un concepto más profundo tampoco.
E: Jaja, me imagino, bueno fíjate ahora ¿si lo ves tu trabajo?
A: A ver, si si lo veo.
E: Estás viendo, bien el primer punto que hacía referencia a inecuaciones en donde pedía que determines o si existe algún valor de x que las verifique ¿no? que las verifica,
A: Si, o sea.
E: Si hay un número real.
A: La idea del primer punto es ir resolviendo las distintas inecuaciones como recordaba y justificar el… si hay una x dentro.
E: Bien bien bien, entonces en el punto 1 teníamos, 1a) perdón, teníamos valor absoluto de x mayor a 4, me podrías decir ¿cuál es el procedimiento que utilizaste ahí?
A: Sí como hay dos opciones que x sea mayor que 4 o que x sea menor que 4 (se refiere al valor absoluto) y hay dos procedimientos que ya teníamos asimilados de la cursada sé que si x es mayor que 4, hay que hacer las dos inecuaciones, dos inecuaciones y distintas, la inecuación que es la misma y resolverla, que acá no hay que hacer mucho porque ya está resuelta ya de por sí y la contraria que es x menor al negativo de 4.
E: Ajá bien.
A: Es decir la… invertir nomás te digo sería acá la igualdad, la desigualdad.
E: ¿Y cómo leerías esta parte? (Haciendo referencia a $x>4$ $x<-4$) ¿Cómo se lee esta parte, cómo se interpreta esta parte?
A: Yo le interpreto como que como dos, como dos formas separadas la interpreto, como que x es mayor que 4 es decir que el x puede formar parte de los números mayores a 4 y la otra como que x forma parte de los números menores a -4, que están dentro de esos dos de esos dos espacios serían.
E: Bien sí y este símbolo que parece una U qué significa.
A: Unión, intervalos o sea trate de verlo como no se cruzaban, no era, no eran del mismo intervalo por así decirlo, no podíamos hacerlo en uno porque van para distintos lados y lo marcamos dentro de la recta entonces se formaban dos intervalos distintos y un intervalo unión porque vienen de la misma inecuación del valor absoluto.
E: Entonces cuál es la solución.
A: La solución sería todo lo de x sería, voy a tratar de leerlo porque no me acuerdo.
E: Si si.
A: Todos los x mayores a 4 y todos los x menores a -4, todos los x, cuando digo todos los x serían todos desde menos infinito hasta al -4, y del más infinito hasta 4
E: Ajam, ahora por qué dices sin incluirlo.
A: Ajam, porque es una, la desigualdad esta, tenemos que en la principal la primera, tenemos que es x, valor absoluto de x es mayor que 4, no es mayor o igual, esa es la diferencia.
E: Ajam.

A; Porque si consideraba que sea igual al 4 también lo… formaría parte del conjunto de las soluciones.
E: Ajam y si voy decís valores mayores a 4 ¿hace falta que yo diga sin incluirlo?
A: La verdad que no es tan o sea no haría falta pero valga la redundancia para aclarar lo más específico porque se puede decir bueno valores mayores a 4 incluyéndolo.
E: Bien.
A: Que sería el motivo del porqué la aclaración.
E: Si está bien y en el 1b),, ahí ¿qué aplicaste?
A: Eh apliqué el mismo concepto, solamente que ahora en vez de tocarme la opción de que x, la parte a nomás te digo, la parte de x sea mayor que la parte b (se refiere a), ahora me tocó al revés, la parte b mayor que la parte x y ahí hay que aplicar el otro procedimiento, el otro procedimiento es copiar la misma ecuación es decir respetar la misma ecuación y luego poner el inverso de la parte b, dentro de… como menor a la ecuación x, a la parte x.
0:05:01
E: Bien.
A: Y entonces la parte x queda encerrado entre esas dos, entre esas dos números, ya tenemos más acortado el tema de la ecuación, es mucho más fácil de resolver lo que la otra forma.
E: Entonces acá la solución quiénes son.
A: A ver espere un segundo…si existe todo los números y ahí las solución es el conjunto solución me tocó como (1,3).
E: Si.
A: Es ese, sin incluirlos por eso está marcado con paréntesis.
E: Si está bien, entiendo.
A: La idea es que desde el… todos los números desde el 1 sin incluirlo, hasta el 3 sin incluir, pueden formar parte del conjunto solución o sea si lo marcas en una recta sería dos parámetros que tenemos y dentro de eso sería todos los números que forman parte de ese espacio, pueden ser x porque es una variable ¿no?
E: Ajam, y por qué Juan Esteban, por qué lo expresas como intervalo, por ejemplo acá veo que esto como intervalo (1a), acá también (1b) en el c también por ejemplo
A: En el b está sí, es que son intervalos donde puede variar la x o así los veo yo.
E: Pero por ejemplo si yo hago y resuelvo hasta acá (Sin hacer los intervalos), estaría bien mi inecuación o ¿tengo que sí o sí expresarlo como intervalo?
A: Depende de qué es lo que pide, si la consigna te pide que resuelvas la inecuación de valor absoluto es porque necesita saber esos intervalos por dónde te van a variar las x sino no tendría saber, no tendría sentido porque viendo la primera, en la primera inecuación que tenemos si no importase el sentido tendríamos ahí los resultados que sabemos que menor que qué, mayor que qué pero necesitamos más parámetros para guiarnos, para encontrar esos valores.
E: Acá por ejemplo que no era necesario ¿o sí? (En el 1b)
A: Si ahí sí o sea ahí no eran tan necesario específicamente pero porque ya está demarcado o sea es ahora la diferencia de trataba de mostrar con el otro procedimiento
E: Claro, entiendo.
A: Ahí ya está demarcado ya, es más fácil de verlo pero sigue siendo necesario marcar el intervalo porque marcando el intervalo entre paréntesis o corchetes sabemos también la diferenciación de si los valores que están dentro, ahí al lado de las x en esa ecuación sí sí forman parte de los valores que puede tomar x.

E: Exactamente, bien, acá te faltó las barras de valor absoluto nomás en el ejercicio 1c) pero no importa, entonces te pregunto para sacarme una duda.
A: Si.
E: Acá cuando vos separas es porque los x tienen que cumplir esta condición y esta condición, ¿es así?
A: Creería que sí porque es una sola x, la misma para ambas.
E: O sea ¿tiene que cumplir ambas condiciones?
A: Si x puede ser, o de una parte o de otra.
E: Ah una u otra.
A: La parte que queda sí, la parte que queda excluida del de la… de los resultados, de los resultados que tenemos, vio que los resultados marcamos los intervalos, la parte que queda excluida de ese intervalo es la parte que no puede tomar x, x no puede tomar esos valores.
E: Ajam, bien creo que está esa parte y bueno acá en este ejercicio bueno, ¿también aplicaste lo mismo no?
A: Si si.
E: En el ejercicio 1d).
A: En todos los ejercicios apliqué el mismo procedimiento.
A: Acá voy a tener que dar vuelta porque…. Ahí está, bien y ahora en el 1e) me llama la atención eso cómo resolviste ese ejercicio e, ≤
A: A ver, y por el mismo procedimiento ¿sí? Se implantaba el mis…. O sea realicé el mismo procedimiento, de las dos opciones que se tienen.
E: ¿Y acá no iría -0 a esto Juan Esteban?
$(0 \leq x \leq 0)$
A: No, no tiene sentido ponerle un -0.
E: Ajam.
A: Viéndolo así, no tenía sentido ponerle -0, no se puede poner un 0 negativo ni tampoco un cero positivo, es un 0, por eso llegué…
0:10:01
A: A la conclusión de que si existe es 0 E: Ajam, el número real ¿y cumple no ese valor?, ¿verificaste la inecuación?
A: No, no lo verifiqué pero creo que sí, cumple la…
E: ¿Y no hay otra?
A: Creería que no.
E: Ajam, y acá en el 1f), que es parecida, nada más cambió el sentido, ¿también aplicaste parece la propiedad no?
A: Si la misma propiedades del principio.
E: … Acá y ahí vos decís que el único que cumple ¿es el cero no?
A: Si. En las dos, en la anterior y en esta (e y f) pienso lo mismo.
E: Y por qué, ¿cómo sacaste? Porque viste que acá, el único número que cumple es el 0 (en el e) pero acá cómo pudiste concluir que el único que cumple es el 0.
A: Ahora me estoy dando cuenta de por qué, por qué concluí eso, concluí mal.
E: Ahhh, ¿qué hubieras respondido?
A: Ahí tenemos dos ecuaciones una dice, inecuaciones digo, una dice que x es mayor o igual que 0 y la otra dice que x es menor o igual que 0, entonces puede ser cualquier valor real en cualquier número, puede ser, cualquier número, ya que incluye también el cero además.
E: O sea que ¿cuántas soluciones tiene esta inecuación?

A: Tiene soluciones infinitas porque tiene todos los números negativos y todos los números positivos y tiene también incluido el cero, en las dos opciones.
E: Exactamente, así es.
A: Ahí está el error.
E: Si si en la conclusión, exactamente y acá en el ejercicio 1g) ≤, acá me podrías decir que hiciste en este paso, ¿en el primer paso?
A: Si, lo que dice ahí primero es como hay una parte que tiene valor absoluto y la otra parte no, supuse que ese más 2, no formaba parte de la ecuación final, ahí en ese lugar. La inecuación traté de despejarlo para que quede solamente el valor absoluto enfrentado con el valor b.
E: Ajam.
A: Si no no sería posible, no sería una inecuación de valor absoluto si no está ordenada,
E: Bien.
A: Es como que está hecho un paso antes de llegar al procedimiento que ya estuve haciendo.
E: Ajam, entonces una vez que despejaste, ¿ahí aplicaste la propiedad?
A: Si. Una vez que despejé, ahí apliqué el valor absoluto.
E: Y por qué te queda 2 acá (En $2 \leq x \leq -2$).
A: Porque cuando tenemos x, aplicando esta fórmula me quedaría menos, tenemos -2 de ese lado ¿no? Aplicando la formula tenemos x es menor o igual que
-2, entonces aplicando esa fórmula el -2 es nuestro número b, entonces ponerlo primero como menos menos dos, me queda 2 positivo.
E: Ajam.
A: Es menor o igual que x, es menos menos 2.
E: Claro.
A: Por eso queda sin signo.
E: Claro quedó menos menos dos, quedó 2 directamente.
A: Si. Y el otro lado queda el -2, como ya estaba en el principio.
E: Y acá decís qué cosas entonces como conclusión, tiene solución esta inecuación ¿o no?
A: No, no tiene solución.
E: Y ahí ¿cómo te diste cuenta?
A: Porque no hay un valor de x que sea menor que 2 y mayor que -2 al mismo tiempo
E: Ajam, bien.
A: No hay una forma de expresarlo así.
E: En el 1h), ahí parece que… bueno acá aparece no sé ¿qué pasó acá en el primer paso?
A: No solamente estaba qui… se salió el símbolo de valor absoluto.
E: Ajam.
A: Acá veo que aplicaste lo mismo parece ¿no? que el anterior.
A: Si si el mismo procedimiento.
E: Te quedó más, positivo 2 y -2.
A: Si.
E: Y llegaste a esto y ahí decís lo mismo que no existe solución porque no podes encontrar un número mayor a 6 y menor a 2.
A: … y menor, al mismo tiempo sí.
E: Bien y en el 1i).
A: A ver el i, x + 3 valor absoluto, es menor que -3x , ah y ahí lo que, lo que hice como tenemos dos partes con valor absoluto me parece parecido al que teníamos de x valor absoluto más 2, me parece que traté de hacer lo mismo, de tener las dos partes de la

inecuación, la parte con valor absoluto y la parte sin valor absoluto separada porque si no, no se podría realizar esa inecuación, entonces la parte con valor absoluto de x+3, trate de pasar la parte de x con valor absoluto, que está del otro lado con el -3 hacia ahí y como está -3 por ese valor absoluto o así yo lo entendí porque no hay una suma ni una resta, no hay una división, entendí como que estaba por, pasé dividiendo hacia el otro lado de la inecuación.
E: Perfecto sí, pero mira una cosa acá Esteban, esta parte ¿no te llama la atención acá ya? (Señalando por 3 < -3).
A: ¿Por qué? Estoy tratando de ver…
E: Ajam, fíjate si podes deducir algo.
A: La verdad que no, estoy realizando el mismo procedimiento que ya hice y lo único distinto es lo del medio.
E: Y vos decís que la solución es -3.
A: Como me queda al final, la inecuación del final queda -3, que es menor que x….
E: Y el -3 es mayor que -3 y menor que -3?
A: Ah entonces no hay solución. (Risas).
E: Parece, claro llegas a lo mismo ya pero acá (en 3 < -3) ya podías haber te dado cuenta de que no existía porque mira, tenes un o sea los números x que vos estás buscando tienen que ser mayor a 3 y menor a -3.
A: Ajam, No hay forma.
E: Claro.
A: Lo mismo que las otras soluciones.
E: Claro si, exactamente, bien entonces y luego en el punto 2 tenías que escribir algunas definiciones ¿sí? Donde el 2a) te decía qué entiendes por el valor absoluto de x.
A: Si.
E: Y entonces acá dice, vos definís al valor absoluto como la representación positiva de un número x ¿sí?
A: Si.
E: Entonces yo te pregunto por ejemplo valor absoluto de -3, cuánto es y valor absoluto de 5 cuánto es y valor absoluto de x ¿cuánto es?
A: El valor absoluto de -3 sería 3.
E: Sí.
A: De 5 es 5, porque es un número positivo y de x también sería x.
E: Ajam, eso serían según tu definición.
A: Si.
E: Bien, ahora cuando se te pide lo que es una inecuación, es una desigualdad en la que se enmarca el o los valores de x ¿sí?
A: Si.
E: ¿Y ahí?
A: Se trata de determinar los valores de x
E: Ajam. Eso es una inecuación si encontrar los valores de x, ahora si yo te digo, si te propongo eso (2a+3<5), eso es una inecuación ¿o no?
A: A ver.
E: 2a +3…
A: Si es una inecuación, no es una inecuación con valor absoluto digamos.
E: Ajam, Y qué encontrás… qué más. Mira que dice una inecuación con valor absoluto es una desigualdad en la que se enmarca el/los valores de x pero acá no tengo ninguna una x.
A: Si pero está el a.

E: Ajam.
A: x era como incógnita.
E: Ah y acá ¿el a no? (en 2a +3<5)
A: Si el a es una incógnita también.
E: Ahh acá también.
A: Por eso la x, la y, la z o la forma en la que se represente la incógnita, la idea es enmarcar en qué rango se va a encontrar ese número, donde encontrar los valores que puede tomar esa incógnita.
E: Ajá.
A: O eso lo traté de explicar.
E: Si te entiendo y la última, el ítem 2c) ehh qué era una inecuación con valor absoluto ¿sí? y una inecuación con valor absoluto dijiste que es una inecuación en la que se busca valores, no, se busca saber el valor absoluto de x, eso escribiste, ¿querés agregar algo?
A: No recuerdo la verdad, no se me viene nada a la mente nuevo sobre eso, no creo que sea súper acertado tampoco lo que te dije.
E: Pero acá.
0:20:02
E: Cuando vos querés, cuando vos trataste de resolver inecuaciones por ejemplo la primera (1a) acá queríamos saber ¿qué cosa?
A: Los valores que podía tomar x.
A: Ahh que puede tomar, qué valores puede tomar x y acá lo que vos planteas es que se busca sobre el valor absoluto de x, yo no quiero saber cuál es el valor absoluto de x, yo no quiero saber cuánto vale x en realidad. ¿Sí? ese es el…
A: Si.
E: Ajam. Déjame mirar una cosita porque me confundí de alumno e imprimí mal las preguntas, para que si lo tengo una pregunta más que me esté quedando.
A: No creo, creo que eso era todo lo mío porque después.
E: No no, si pero el tema eran las preguntas que yo planteé a tu trabajo, bueno esto ya te pregunté…
E: Ajá Juan Esteban, creo que justo pregunte lo que tenía que preguntarte, bien, te voy a decir no más es que si vos soles verificar las inecuaciones ¿o no?
A: No, solamente verifico las inecuaciones por ahí cuando tengo un resultado raro o algo que no me da mucho sentido, hay una inecuación que veo extraña y trato de verificarla para corroborar eso, si es un resultado posible y una inecuación normal no suelo corroborar.
E: Bien entonces ahora para ir cerrando te pregunto, si vos tuvieras que explicar a un compañero cómo resolver una inecuación con valor absoluto, ¿qué le dirías a esa persona?
A: Le… le explicaría los dos procedimientos de las inecuaciones o sea explicarle cuando x es mayor a la parte b, y cuando la parte b es mayor a x, explicarle esos dos procedimientos para que tengan las dos opciones y luego de eso explicarle cuando hay igualdad también dentro de esa desigualdad, cuando es mayor o igual cuando es menor o igual y qué significa. Luego de eso explicarle cómo denotar los intervalos o el intervalo que tenga la x y explicar lo de los intervalos unión, intervalo intersección para que pueda representarlo. Ah y luego explicarle cómo graficarlo en la recta para que sea más didáctico.
E: Ajam, bien ¿eso es todo entonces?
A: Si.

E: Perfecto. Bien Juan Esteban, espera que antes voy a tratar de dejar… detener la grabación.

Finalización: 0:23:09

Entrevista a Mateo

0:00:00

E: Aguantame un momentito, bien entonces voy a presentar tu archivo, bueno vamos a empezar entonces. En el punto 1 de las actividades que te había, ah perdón Mateo, antes que nada quiero agradecerte polvo por esto, yo soy el Licenciado Daniel Mosqueda, profesor de matemática de álgebra en otro grupo y esto yo necesito para poder finalizar mi tesis de maestría.
A: Perfecto.
E: ¿Si? Así que mil gracias súper agradecido por tu colaboración.
A: No por favor.
E: Bien entonces en el punto 1 de la… del trabajo que te había enviado decía que determine o existe, la pregunta era como pregunta ¿no? si existe algún valor de x que verifica las inecuaciones que se proponen a continuación.
A: Ajam.
E: Entonces en el primer caso (1a) en él dice valor absoluto de x mayor a 4, me podes comentar ¿qué hiciste en ese ejercicio?
A: Bueno según la teoría que no dimos nosotros en clases esta unidad así que bueno, un poco la busqué y en la teoría puesta en el aula y todo eso, comenta que cuando un ejercicio de valor absoluto posee el símbolo hacia… apuntando hacia la derecha. En este caso sería valor absoluto mayor al número, fuera del símbolo, se tiene que dividir en dos intervalos porque quiere decir que el intervalo de variación de x toma todos los números por afuera de los dos resultados entonces por eso se separa en dos o por eso yo lo hice separado en dos y bueno poniendo el símbolo opuesto en uno de los dos ejercicios con una de las dos operaciones y el símbolo que nos dice arriba en la otra.
E: Ajam, entonces cuál es la solución la A: La solución sería que el intervalo de variación de x abarca todos los reales excepto el intervalo (-4,4).
E: Bien, este símbolo que lo señalo con un lápiz acá, lo estás viendo ¿no? (Por la disyunción).
A: Si.
E: ¿Qué significa?
A: Ese significa “y” si no me equivoco.
E: ¿Y este? (Por la unión)
A: Ese no recuerdo profe.
E: Bueno perfecto, en el 1b), algo similar hiciste ¿no?
A: Claro ahí lo único que cambió fue tener que despejar la x y pasar al -2 a ambos lados de la inecuación.
E: Ajam, bien bien, también lo expresaste como intervalo. Bien en el 1c), no tengo que preguntarte nada sino directamente pasamos al 1e) ¿sí? y ahí fíjate tiene que en el e), ¿cuál es la solución para vos?
A: Las solución es que x vale 0 para mí porque en ambos o sea despejando para ambos lados del cero, nos dice el ejercicio que x se encuentra entre 0 y 0 o sea es 0, porque no hay ningún número en tres esos dos.
E: Ajam, y ¿cómo llegaste a eso?
A: Eh… Haciendo el mismo procedimiento que en las otras, poniendo el mismo número de ambos lados de la inecuación y por un poco de sentido común y entendimiento nomás.
E: Ajá y acá porque viste cuando vos aplicas, es parecida a ésta (inecuación 1b)) ¿no? ¿Acá no iría un -0 acá?

A: No porque el 0 no es positivo ni negativo.
E: Ajá y si le pones no estaría mal tampoco ¿o sí?
A: Creo que sí porque no hay, va nunca vi que le hayan puesto un signo negativo, creo que está mal.
E: Perfecto, bien y lo otra cosa que te quería preguntar es en esta parte mira acá [Se refiere "al intervalo" (0,0)]
A: Y eso está demás, me di cuenta mirando ahora. Tendría que ser x=0 nada más la función.
E: Ah, entonces cómo sería, ¿la solución sería x=0 no más?
A: Si.
E: Bien, si vamos al 1f) y ahí también que… me comentás qué hiciste.
A: Si ahí como el expliqué al principio, el símbolo está…
0:05:00
A: Apuntando para el 0, entonces hay que, hay que separarlo en dos ejercicios, eh pero me di cuenta también que tuve un error ahí que como x puede ser mayor o igual a 0 o menor o igual a 0 quiere decir que x puede abarcar todos los reales.
05:20
E: Exactamente o sea que la solución son todos los reales, que ahí en tu práctico pusiste sin el 0 prácticamente en esta parte.
A: Claro si, ahí hubiera no sé si hubiera estado bien pero hubiera estado más entendible si fuera corchete en la parte del 0.
05:41
E: Bien perfecto y ahora vamos al ejercicio 1g) dice ≤ 0 y ahí me comentas nuevamente ¿qué hiciste?
A: Al +2 estar afuera del valor… lo que abarca el valor absoluto, lo interpreté como despejar ese más 2, entonces lo pasé del otro lado del signo may…, menor o igual y bueno resolví menos 2 más 0 es -2 y después hice lo de separar a ambos lados de la inecuación y al ser valor negativo de ese lado, la profe nos había dicho que cuando es negativo hay que cambiar el…
E: ¿Quién es negativo?
A: La orientación de los signos el, el -2
E: Mmm, porque viste que acá mirá, vos tenés valor absoluto de x, menor o igual que -2 y acá ¿por qué acá tengo 2? porque ¿ya era negativa?
A: Porque siempre… claro entonces por eso y porque se reparte a ambos lados de la operación con los signos... con los símbolos cambiados y al ser negativo ese se cambia la orientación (-2≥x≥2)
E: O sea acá viste esta parte, viste que ahí cambió la orientación.
A: Si. Eso es que es lo que nos enseñó la profe, sino recuerdo mal.
E: Por quién es, ¿por qué quién era negativo? Por este menos (En 2≤x≤2).
A: Si.
E: Ah, o sea como este el -2, es negativo ahí le cambiaste el sentido de la desigualdad
A: Ajam.
E: Viste y entonces ¿cuáles son soluciones? Acá viendo acá
A: Y la solución sería, x puede ir desde menos infinito hasta -2 y desde 2 hasta el infinito positivo.
E: ¿Y eso es lo que dice acá? (En -2≥x≥2).
A: Eh sí.
E: Ajam, ¿vos verificase la solución Mateo?
A: Eh no

E: No… no no le diste un valor a x por ejemplo ¿para ver si era correcto lo que escribiste?
A: No.
E: Ajam, bien. ¿Al 1h)?
A: Bien, ahí bueno es más de lo mismo, despejé, puse a ambos lados el -2, -2 y 2 y después despejé la x pasando el 4 como suma y me quedo la solución que va desde… que x va desde 6 hasta 2, no sé por qué habré puesto diferente.
E: Acá te quedó… esto al… o sea el procedimiento que seguiste acá tiene lógica ¿no? Y llegas a esto, que x varía entre 6 y 2.
A: Ajá y a vos ¿qué te parece eso? ¿Puede ser?
E: Ah no perdón, claro no, va desde… desde menos infinito hasta 2 y desde 6 hasta infinito, claro.
E: Esto es lo que vos escribiste pero viste que acá mirá, estás diciendo que esto que está acá ($6<x<2$) es lo mismo que eso ($[-\infty,2)\cup(6,\infty)]$) ¿es correcto eso?
Silencio.
E: Decir que x está entre 6 y 2 ¿es lo mismo que esta expresión ($[-\infty,2)\cup(6,\infty)]$)? Esta…
A: No, no es lo mismo, ahí tendría que haber separado como le expliqué hoy dos en dos operaciones.
E: Ajam, porque acá ($[-\infty,2)\cup(6,\infty)]$) estás diciendo los x mayores a 6 ¿no?
A: Si.
E: Pero acá tenés que los x son menores.
0:10:00
E: Mayores a 6, claro entiendo lo que está queriendo hacer sí y en el 1i), ¿qué pasó?
A: Bueno ese fue el último que miré y no me acuerdo cómo lo interpreté pero lo habré interpretado o lo habré buscado eh… y habré sacado, a ver suprimido los, los símbolos de valor absoluto y habré resuelto como una inecuación normal, despejando.
E: ¿Y eso se puede hacer? ¿Yo puedo suprimir los las barras?
A: Y en los ejercicios anteriores es suprimir las barras cuando pasaba de ambos lados, el otro el valor que no estaba adentro del valor absoluto cuando, lo reparto en ambos lados se suprimía pero en este caso no estaba muy seguro de lo que hacía.
E: Ajam, bien. Eh qué te iba a preguntar otra cosa, entonces vos dijiste que la solución ¿son todos los reales?
A: Eh no, desde menos infinito hasta 0 hasta -0,75.
E: Bien bien bien entonces con el punto uno estamos, faltaría decir el punto 2, donde ahí te pedía ciertas definiciones ¿no?
A: Sí
E: Por ejemplo en la pregunta 2a) era cuál o qué entiendes por valor absoluto de un número real y vos decís que es la distancia de este número hasta el 0, se representa con el número entre dos palitos por ejemplo, y este valor siempre es positivo.
A: Positivo. Sí.
E: Ajá y entonces por ejemplo para 0 ¿qué pasaría?
A: Ah me falta aclarar eso. Que el 0, en el caso de ser 0, la notación siempre va a ser 0; el valor absoluto de 0 es 0 pero no va con ningún signo ya que no es positivo ni negativo.
E: Ajam, bien y ahora te pregunto, voy a escribir una cosita acá.
A: Si.
E: Si yo tengo valor absoluto de a, a es un número real ¿no?
A: Si.
E: ¿Cuál sería su valor absoluto?

A: a.
E: a, ¿así? ()
A: Si.
E: Bien bien, vamos al… perdón a la pregunta b, que ahí te preguntaba ¿qué era una inecuación? qué es mejor dicho una inecuación y vos dijiste es una desigualdad entre dos términos y ahora mi pregunta es a ¿qué te refieres con dos términos?
A: A que… a ambos lados del símbolo que no es el igual en este caso, puede ser mayor menor o igual, eh no van a coincidir esos dos valores nunca, al menos de que
E: Entonces con términos te estarías refiriendo a los miembros o a los lados de la desigualdad.
A: Si.
E: Ajam bien. Ahora si yo te pregunto ¿esto es una inecuación? (2>1)
A: No eso es una afirmación.
E: Ajam, porque según lo que vos decís es una desigualdad, la desigualdad tengo, tengo dos miembros también tengo y entonces.
A: Si.
E: Qué te parece tu definición que propusiste, porque esto cumple viste que esto cumple con lo que vos dijiste, es una desigualdad entre dos términos.
A: Si.
E: Que serían los miembros entonces.
A: Pude haber puesto que es un tipo de desigualdad entre dos términos o una forma de representar una desigualdad.
E: Ajam o sea como que le estaría faltando más ¿no?
A: Claro si, porque no puede ser que una inecuación no puede ser la única, una única o sea una desigualdad no puede ser una inecuación si o si, puede ser también.
E: Ajam, hay una equivalencia no toda desigualdad es una inecuación.
A: Claro.
E: Bien, claro exactamente y en la última pregunta, en la última pregunta que había que poner que entiendes por inecuación con valor absoluto, dijiste son operaciones para averiguar y ubicar en tramos, en la recta, de la recta numérica, los valores que se le podrían asignar a la incógnita, ¿sí?
A: Si
E: A qué te refieres con eso, a qué te refieres por….
0:15:00
E: Por ejemplo con asignar valores a la incógnita.
A: A que como vimos los resultados anteriores de los ejercicios, una… el valor de la incógnita puede variar entre varios números o, si claro entre varios números de la recta y bueno mediante eso se puede ubicar en la recta cuáles son los intervalos que ocuparía la variación de la incógnita.
E: Ajá, y por qué esto, por qué nombrás lo de la recta numérica.
A: Porque siempre, no por otra cosa, que siempre en clase a la misma… al mismo tiempo de resolver una inecuación, nuestra profe siempre nos hacía una recta abajo y nos ubicaba ahí los valores de resultados nomás.
E: Ajam, bien bien. Ahora te pregunto una inecuación puede no tener solución
A: Mmm….no estoy seguro pero supongo que sí.
E: O sea ¿hay inecuaciones que no tienen solución o siempre una inecuación tiene solución?
A: Eh…puede no cumplirse, eso no sé si entra como no tienen solución pero yo creo que podría no cumplirse cuando el símbolo del medio indicaría algo que no es posible

E: Ajam, ahora esto… la última pregunta y terminamos sí, ahora si tuvieras que explicar a un compañero cómo resolver una inecuación con valor absoluto ¿qué le dirías? ¿Qué debería tener en cuenta ese alumno?
A: Bien y le daría la regla que le expliqué al principio, dependiendo para dónde apunte el… el símbolo tiene que hacer la… en una sola operación como le hice en mis ejercicios o separarla en dos con el símbolo y en el medio. Si hace la primera forma, pasar el mismo valor que está fuera del valor absoluto repartirlo en ambos lados de la, de la operación con el signo cambiado, un lado del símbolo que tiene el otro lado el símbolo opuesto y resolver y cada vez que tenga que despejar algo de valor absoluto de la x, eh… pasarlo a ambos lados con el símbolo opuesto como en una inecuación normal.
E: Ajam, ¿algo más?
A: Y bueno la otra forma va a tener dos operaciones y va a tener que resolver como una inecuación normal pero dos vece, le podría decir.
E: Ajam y algo más también ¿o no? no tiene que expresarlo como intervalo, representarlo.
A: A la hora de la solución se puede representar como intervalo dependiendo el símbolo si es mayor menor o mayor o igual, menor o igual si incluiría o no el número, bueno ese sería el intervalo de variación que podría obtener con el ejercicio del valor absoluto
E: Ajam, muy bien, bien Mateo voy a detener la grabación.
Finalización: 0:18:21

Entrevista a Miguel

0:00:00

E: Con el punto 1 viste, en el punto 1 vamos a empezar la vuelta digo porque recién empieza a grabar; en el punto 1 vos tenías que encontrar todos los números reales que verifican las inecuaciones ¿no?

A: Exacto.

E: Entonces en este punto uno (1a) que dice valor absoluto de x mayor a 4, me podrías decir ¿cuál es la solución?

A: La solución no seria, el número real de x, que al ser x mayor a 4, se resuelve de dos formas distintas porque es un porque no está acotado y al no estar acotado no tiene entorno y al no tener entorno obviamente ya no tiene amplitud ni centro ni radio y todo lo demás. Por eso se resuelve de esa forma, tengo entendido que es así.

E: Si ahora, cuál es, entonces ¿cuáles son los números que verifican? yo digo este es solución este no, cuáles serían según vos.

A: Según yo sería (4,-4) porque sería el número real y es su contraparte, cuando no es cuando no está acostado.

E: Ajam y porque planteas de esta forma así, x >4 y este símbolo (disyunción) no sé cómo se llama.

A: O, creo que era.

E: Ajam, y por qué hiciste esto, ¿por qué planteaste de esa manera?

A: Eh a mí me habían enseñado así, ese es el tema con la profesora Carrera, me había enseñado así, que cuando cuando es un número… cuando un número es mayor a x cuando cuando x es mayor al número se divide en dos partes

E: Ajam

A: Yal ser ya no ser mayor o igual, se resuelve así.

E: Ajam, o sea ¿que el valor absoluto es mayor que el número querés decir?

A: Si exacto.

E: Ajam, bien, viste que voy dijiste que la solución es (4,-4), este intervalo

A: Si.

E: Bien, ahora se puede verificar, ¿vos decís que se puede verificar la inecuación? ¿O no?

A: Eh si se puede verificar pero no me acuerdo cómo se verificaba profe.

E: Y por ejemplo el 3 es solución ¿será?

A: No.

E: El 3 no, bueno bien. El 1b) ¿ahora es diferente no?

A: Si.

E: ¿Qué aplicaste en el b? Que dice valor absoluto de x menos 2, menor a 1, en este primer paso.

A: Eh…cómo se dice, cuando el valor absoluto es mayor al número, se resuelve toda una sola ecuación, debido a que está acotado y no recuerdo… ah ahí no apliqué entorno ni nada de eso porque no… no era necesario graficar pero si se podría hacer todo eso y lo que traté de hacer es llegar hasta el valor mínimo, el valor absoluto de x, que sería 1 y 3.

E: Entonces ¿cuál sería la solución de esta inecuación?

A: 1 y 3 en la recta numérica.

E: O sea si tuvieras que representar en la recta numérica marcarías ¿qué cosa?

A: El 1 de x y 3 de y, al revés profe No los dos son de x, disculpe.

E: Ahh, bueno entonces pero ¿qué marcarías en la recta numérica?

A: 1 y 3.
E: El punto 1 y el punto 3.
A: Exacto.
E: Bueno, bien y el otro, el 1c) es similar así que lo vamos a dejar y acá en el 1d), ahí nuevamente parece que aplicaste lo mismo y decís que la solución… fíjate que acá llegaste a -7/3, menor que menos x menor o igual que 1.
A: Si.
E: Aja.
A: Es porque, quiere que… ¿le explico?
E: Si si, decime.
A: Ay no veo la pantalla.
E: Ah cierto perdón, acá.
A: Que al ser un… al estar acotado y ser un mayor igual, se procede así y para tratar de llegar.
0:05:00
A: Al valor… para tratar de despejar a x se lo eleva al mismo número y se lo reparte en ambas partes así… así me enseñaron.
E: Ajam
A: Y quedaría como el valor absoluto de x, quedaría -7/3 y 1.
E: Ajá, viste que vos tenés que despejar el valor de x, acá despejaste el valor de x (En ≤≤).
E: Eh si si
A: Porque no es… no deberías haber encontrado ¿cuánto es x directamente? a lo que voy es lo que nos interesa al resolver una inecuación es encontrar el valor de x, no el valor de –x?
Silencio
E: ¿Se entiende lo que digo? que vos acá llegaste hasta menos x y lo que queremos es el valor de x, vos llegaste hasta -x ¿sí?
A: Si.
E: Entonces despejaste x ¿o no?
A: Si profe, eh no, no pude llegar entonces al valor.
E: Ahh, tendrías que hacer un pasito más…
A: Clar, si la profe nos había explicado pero me había olvidado esa vez disculpe.
E: No, no hay no hay porqué, bien en el último… en el ejercicio 1e), perdón, valor absoluto de x menor o igual que 0, acá planteas que x es menor o igual que 0 ¿no? y después afirmas que no tiene solución debido a que aquí no tiene valor, esa parte no entiendo, a qué te referías Miguel?
A: Es que al ser un número 0 sería como nulo, al menos que quedaría solamente un punto en la recta, no le encuentro sentido por lo menos no llega a entender esa parte cuando explicaron. Yo tenía entendido que cuando es 0 no tiene valor.
E: ¿Qué es que no tiene valor o sea como que no vale nada? ¿El 0 decís vos?
A: Que no… creo que no llega a ser nulo pero quedaría solamente un punto en la recta numérica
E: Ajam y ¿eso no puede ser?
A: Y no tengo mucha idea profe de eso, hasta ahí nomás llegué.
E: Entonces vos decís como que esto pero viste acá le sacaste las barras y escribiste x menor o igual que 0.
A: Si porque bajé nada más la cuenta porque no podía resolver ninguna cuenta o al menos no supe resolverlo entonces se acabó es como que no te.

E: Entonces acá como que no te daría como un intervalo, ¿a eso es lo que te referís?
A: Eh si a eso es lo que voy.
E: Porque le daría un punto únicamente ¿me decís?
A: Como un intervalo.
E: ¿Y el 0 no puede ser la solución?
A: Y tal vez pero no llegué a entender en ese momento profe.
E: Bueno.
A: Y hasta ahora no llego a entender porque para mí sería como el valor nulo pero no
E: O sea si fuera nulo para vos, decir que es nulo es cero ¿no?
A: Si para mí es eso pero no sabría bien E: Y ahora, en el 1f), ahí parece que aplicaste un procedimiento viste, valor absoluto de x mayor o igual a 0, y acá aplicaste un procedimiento.
A: Sí porque tiene porque el valor absoluto es menor al número, el símbolo es menor, solamente por eso, porque en realidad el valor absoluto es mayor por el signo me guié,
E: Mmm sí. Y eso ¿por qué no aplicaste acá por ejemplo en este, en el e? La propiedad…
A; Por el signo
E: Esta propiedad y ¿la otra no podrías aplicar?
A: Eh no, va creo no profe porque yo tenía entendido que, así cuando el valor absoluto es mayor o sea con el signo mayor se resuelve en una sola cuenta.
E: Ahhh
A: Y cuando es menor se podría resolver en dos cuentas.
E: Bueno, perfecto y entonces acá decís ¿que no tiene solución? y es la misma la misma, el mismo argumento que la anterior pero sin embargo encontraste cosa acá o ¿no te parece?
A: No encontré casi nada, solamente hice como el procedimiento habitual por los signos
E: Siii.
A: Porque no, porque no.
0:10:00
A: Porque no, no puedo agregar un valor a x cuando es 0 ese el tema, sería lo mismo, x positivo y x negativo… 0 positivo 0 y 0 negativo sería lo mismo pero eso.
E: Sí, ajam, bien. Pasamos al 1g), ¿qué pasó en el g) Miguel?
A: Traté de despejar x, eso es lo que seguí como procedimiento.
E: ¿Acá aplicaste?
A: y lo mismo…
E: Acá parece que aplicaste una propiedad ¿no?
A: Emmm sí. Bajé el valor absoluto junto al más dos y trate de despejar x.
E: Pero vos te diste cuenta que el 2 estaba fuera del valor absoluto ¿no?
A: Sí por eso.
E: O sea que para vos será lo mismo x más, valor absoluto de x y más 2, es lo mismo que el valor absoluto de x más 2 ¿así? (Se escribe).
A: Eh sí, se podría hacer los pasos.
E: Bien.
A: Por lo menos eso tengo entendido yo.
E: Ajam y la solución decís que es entonces…
A: - 2…
E: ¿Este intervalo (-2,-2)?
A: Si.
E: Bien.

A: Si si. Sería un número.
E: ¿Y entonces? ¿Cuál es… es un solo número o no?
A: Eh si por lo visto porque al distribuir me quedaría ese número es el tema
E: Ajam.
A: Ahh!!! Ah no, si me quedaría el -2 en ambos…
E: Porque ves que es el mismo ¿sí? Bien, en el 1h).
A: Y en el h) hice el otro procedimiento nada más profe.
E: Porque te queda el 2 positivo (En 2<x-4<-2).
A: Eh sí.
E: Y acá negativo, por la propiedad ¿sí?
A: Si.
E: Bien, entonces ¿cuál es la solución?
A: Sería 6 y 2, me quedaría al despejar x.
E: Cuándo vos decís 6 y 2, marco acá el 6 y el 2 (Se marcan esos puntos, manteniendo ese orden incorrecto), estos puntos serian no ¿tu solución?
A: Si.
E: Mmm, bien bien entonces tu intervalo sería (6,2) y esta… esta escritura a vos no te… ¿no te llama la atención?
A: Mmm no, por lo menos no.
E: Bien y ¿qué pasa con el 1i)?
A: Ese no pude encontrar una forma profe de solucionarlo, lo intenté de diversas formas, todo lo que tenía en la teoría pero no… ahí le deje así porque no llegué a entender directamente.
E. Ajam. A vos qué te parece, por qué la dificultad ¿ahí?, más allá que no te dan en la teoría.
A: Porque tiene un valor absoluto extra, no sabía cómo acomodarlo.
E: Bien bien bien y en el punto 2 que…te pedía que escribas algunas definiciones viste
A: Si profe.
E: Bueno en el prime… la primera decía qué entiendes por el valor absoluto de un número real ¿sí? y ahí vos escribís: el valor absoluto de un número real es total ¿puede ser? en positivo.
14:07
A: Si eso, era profe.
E: ¿A qué te referís con total ahí? que no lo entiendo, quiero que me expliques un poquito a ver si podes.
A: Que por ejemplo cuando, digamos que un número a y al ser valor absoluto se rebaja en positivo a eso es lo que va, por ejemplo si dentro del valor absoluto está –a, siempre debo bajarlo como positivo, a eso era lo que me refería.
E: Ah ah, ajam ¿y si fuera cero?
A: Y si fuera 0, bajaría de lo mismo, sería necesario pero para el 0,
E: ¿Cuál sería el absoluto de cero?
A: Eh 0, uno….
E: Si decime.
A: No, me estaba con confundiendo
0:15:00
A: Porque pensé que era 1, por eso. Pero es 0.
E: ¿2,5?
A: Sería 2 sobre 5.
E: 2,5. ¿Valor absoluto de x entonces?

A: Sería uno.
E: Acá cuánto sería el valor absoluto de x?
A: 1 creo.
E: 1 ¿por qué?
A: Eh creo, recuerdo, no recuerdo bien pero creo que era 1 profe. Valía 1
E: Ah si ya sé a qué te estás refiriendo.
A: Bien entonces, el b no tengo que decir nada pero después cuando se le pidió que era una inecuación con valor absoluto decís, lo que logró entender por inecuaciones con valor absoluto es lograr obtener el valor de x para así posicionarse sobre la recta numérica con los valores obtenidos ¿sí? entonces me podrías explicar qué es eso
A: Se, lo que yo entendí es que debo despejar el valor absoluto y poder despejar valor de x, para lograr encontrar, si es posible, un lugar en la recta numérica si ahí ya depende si es acotado o no.
E: Ajam. Y a veces… siempre podes encontrar ¿o no?
A: Hay veces que no.
E: Hay veces que no, ajam. Y puede ser un punto ¿o no?
A: El único punto que me dio eso así fue en el ejercicio que me dio usted profe, así que creería que no por eso no tengo mucha idea.
E: Bien entonces, si tuvieras que explicar a un compañero cómo resolver una inecuación con valor absoluto ¿qué le dirías Miguel? y con esto terminamos.
A: Que tendría que despejar, que tendría que seguir los pasos ver el signo positivo o negativo, quiero decir el signo mayor o menor, entre a y b, que sería valor absoluto y el número.
E: Mmm
A: Ver qué pasó a seguir y ver si es acotado no y lograr si es posible despejar x
E: Ajam, aja, ¿algo más?
A: Y eso nomás porque después entorno todo eso ya depende de cómo sea la inecuación.
E: Bien, bien. Bueno Miguel voy a dejar.
Grabar, gracias.
Finalización: 0:17:48