

*Universidad Nacional del Nordeste*

*Facultad de Ingeniería*

Carrera:

**Doctorado de la Universidad Nacional del Nordeste en el Área de la Ingeniería**



**Simulación numérica de problemas con no  
linealidad física y geométrica. Análisis de  
consolidación de suelos no saturados**

**T E S I S**

Para obtener el título de:

**Doctor de la Universidad Nacional del Nordeste en el Área de la Ingeniería**

Presenta:

**Ing. Héctor Ariel Di Rado**

Director de tesis:

**Prof. Dr. Ingeniero Armando M. Awruch**

Resistencia, Chaco Argentina

2006

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE**

**Departamento de Mecánica Aplicada.**

**Facultad de Ingeniería.**

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE  
PROBLEMAS CON NO LINEALIDAD  
FÍSICA Y GEOMÉTRICA.  
ANÁLISIS DE CONSOLIDACIÓN DE  
SUELOS NO SATURADOS.**

**Por**

**Héctor Ariel Di Rado.**

Tesis presentada al cuerpo docente de la Carrera de  
DOCTORADO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
EN EL ÁREA DE LA INGENIERÍA  
como requerimiento parcial para acceder al grado académico de

---

**DOCTOR DE LA UNIVERSIDAD  
NACIONAL DEL NORDESTE**

en el  
Área de la Ingeniería.

---

**Director:**

**Prof. Dr. Ingeniero Armando M. Awruch.**

Tribunal:

Prof. Dr. Ingeniero Fernando Schnaid.

Prof. Dr. Ingeniero Oscar Möller.

Prof. Dr. Ingeniero Victorio Sonzogni.

Resistencia, Noviembre de 2006.

# CONTENIDO

	Página
CONTENIDO .....	1
RESUMEN .....	5
ABSTRACT .....	5
AGRADECIMIENTOS .....	7
LISTA DE SÍMBOLOS .....	9
PRÓLOGO .....	13
<b><u>CAPÍTULO 1</u></b> .....	<b>17</b>
1.1 OBJETIVOS .....	17
1.2 EL FENÓMENO DE LA CONSOLIDACIÓN DE SUELOS .....	17
1.3 EL PROBLEMA DE LOS SUELOS NO SATURADOS .....	18
1.4 PROPIEDADES ENTRE LAS FASES Y RELACIONES ENTRE ELLAS .....	19
1.4.1 Fases componentes .....	21
1.4.2 Propiedades de las fases individuales .....	23
1.4.3 Teoría de la succión del suelo .....	26
1.4.4 Relaciones volumen - masa (Propiedades índices) .....	30
1.4.5 Relaciones básicas volumen-masa .....	33
1.4.6 Cambios en las relaciones volumen-masa .....	34
1.5 VARIABLES DE ESTADO .....	35
1.5.1 Variables de estado para suelos no saturados .....	35
1.5.2 Otras combinaciones de variables de estado .....	39
1.6 LEYES DE FLUJO .....	40
1.6.1 Flujo de agua .....	40
1.6.2 -Flujo de aire .....	50
1.7 CURVA CARACTERÍSTICA SUELO AGUA .....	59
<b><u>CAPÍTULO 2</u></b> .....	<b>63</b>

2.1	OBJETIVOS.....	63
2.2	DESARROLLO DEL MODELO.....	63
2.3	ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA .....	65
2.3.1	Equilibrio mecánico.....	65
2.3.2	Modelo de flujo I: Fase Agua .....	67
2.3.3	Modelo de flujo II: Fase Aire .....	67
2.4	DEFORMACIÓN DEL PORO DE AGUA Y DEL PORO DE AIRE. ....	69
2.5	EL MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO .....	72
2.6	APLICABILIDAD GENERAL.....	75

### **CAPÍTULO 3..... 77**

3.1	OBJETIVOS.....	77
3.2	EL ANÁLISIS NO LINEAL.....	77
3.3	LA DEFORMACIÓN.....	79
3.4	MEDIDAS DE DEFORMACIONES.....	80
3.5	MEDIDAS DE TENSIONES.....	84
3.6	MOVIMIENTOS SUPERPUESTOS DE CUERPO RÍGIDO. OBJETIVIDAD.....	85
3.7	INFLUENCIA DE LA OBJETIVIDAD EN LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS.....	87
3.8	FORMA DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EXPRESADA EN TASAS.....	89
3.9	ECUACIONES CONSTITUTIVAS HIPER E HIPOELÁSTICAS.....	90
3.10	MODELO NO LINEAL HIPOELÁSTICO.....	92
3.11	PROPUESTA PARA MODELO NO LINEAL HIPOELÁSTICO.....	95
3.12	ELASTOPLASTICIDAD.....	97
3.13	TEORÍA DE PLASTICIDAD EN TÉRMINOS DE TENSIONES CO-ROTADAS.....	98
3.14	PLASTICIDAD EN TENSIONES CO-ROTADAS Y LA ISOTROPÍA.....	100

### **CAPÍTULO 4..... 103**

4.1	OBJETIVOS.....	103
4.2	LAS TENSIONES NO LINEALES EN LA MASA DE SUELO.....	104
4.3	FORMA DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN LA MASA DE SUELO NO SATURADO.....	105
4.4	CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN PARA SUELOS SATURADOS.....	106
4.5	ALGORITMO DE RETORNO. MÉTODO DE PLANO CORTANTE.....	112
4.6	INTRODUCCIÓN A UN CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN PARA SUELOS NO SATURADOS.....	113
4.7	EVOLUCIÓN DEL MODELO. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.....	116
4.8	CONSIDERACIONES PARA ESPACIOS CO-ROTADOS.....	117

### **CAPÍTULO 5..... 119**

5.1	OBJETIVOS.....	119
-----	----------------	-----

5.2	SOBRE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	119
5.3	FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (2.5-13).....	121
5.4	FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (3.8-6).....	124
5.5	INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DE (3.8-6).....	126
5.6	FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (4.3-1).....	129
5.7	INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DE (5.3-1).....	129
<b>CAPÍTULO 6.....</b>		<b>133</b>
6.1	OBJETIVOS.....	133
6.2	INTRODUCCIÓN.....	133
6.3	DIAGRAMA DE FLUJO PARA SUELOS NO SATURADOS.....	134
6.4	ALGORITMO DE RETORNO DE PLANO CORTANTE.....	137
<b>CAPÍTULO 7.....</b>		<b>139</b>
7.1	OBJETIVOS.....	139
7.2	ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DEL MODELO DE GRANDES DEFORMACIONES. ....	140
7.2.1	Ejemplo 1: Material elástico confinado con carga en la parte superior.....	140
7.2.2	Ejemplo 2: Viga bi-empotrada con comportamiento elástico y carga uniforme.....	141
7.2.3	Ejemplo 3: Comportamiento elastoplástico de una viga empotrada con carga concentrada en el medio.....	142
7.2.4	Ejemplo 4: Consolidación saturada unidimensional.....	144
7.2.5	Ejemplo 5: Consolidación saturada unidimensional no lineal.....	145
7.2.6	Ejemplo 6: Viga de material ortotrópico.....	147
7.3	ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DEL MODELO PARA SUELOS NO SATURADOS. ....	148
7.3.1	Ejemplo 1: Problema de consolidación unidimensional.....	148
7.3.2	Ejemplo 2: Problema de consolidación bidimensional. Zapata corrida.....	151
7.4	ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL.....	153
7.4.1	Ejemplo 1: Análisis de una viga empotrada-libre.....	153
7.4.2	Ejemplo 2: Análisis de un perfil normal.....	154
7.4.3	Ejemplo 3: Viga metálica de chapa doblada.....	156
7.5	ANÁLISIS PLÁSTICO DE SUELOS NO SATURADOS. APLICACIÓN TRIDIMENSIONAL. ....	158
7.5.1	Ejemplo 1: Problema de consolidación unidimensional usando un modelo tridimensional.....	158
7.5.2	Ejemplo 2: Problema de consolidación tridimensional.....	162
<b>CAPÍTULO 8.....</b>		<b>165</b>
8.1	OBJETIVOS.....	165
8.2	SOBRE EL MODELO DE CONSOLIDACIÓN DE SUELOS NO SATURADOS.....	165
8.3	SOBRE EL MODELO NO LINEAL PARA MATERIALES EN GENERAL.....	166
8.4	SOBRE EL MODELO NO LINEAL PARA CONSOLIDACIÓN.....	167
8.5	SOBRE EL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL.....	167
8.6	SOBRE EL PROGRAMA FECCUND.....	167
8.7	SOBRE LOS EJEMPLOS PRÁCTICOS RESUELTOS.....	168
8.8	RECOMENDACIONES PARA DESARROLLOS POSTERIORES.....	168
REFERENCIAS.....		171



---

## RESUMEN

En esta Tesis se desarrolla un modelo matemático, y el correspondiente programa computacional de elementos finitos, para la descripción del comportamiento no lineal, tanto físico como geométrico, de las arcillas blandas compresibles no saturadas semejantes a las comúnmente encontradas en la región del Nordeste Argentino. Inicialmente se formula un modelo que resuelva el problema de consolidación basado en la combinación de diferentes estados de tensión de la masa de material geológico. Para la parte no lineal, se trabaja en principio en forma genérica para cualquier sólido continuo elastoplástico, con una descripción hipoeástica del material basada en magnitudes co-rotadas. Posteriormente, para poder representar el comportamiento de las arcillas no saturadas, se extiende el modelo a materiales porosos no saturados. Se aplica el Método de los Elementos Finitos para obtener la forma discreta o algebraica de las ecuaciones diferenciales desarrolladas. Se resuelven diferentes ejemplos, incluyendo problemas de análisis de estructuras, cuyas soluciones se conocen previamente, por medio de los cuales se puede inferir que tanto los modelos por separado como en conjunto reproducen adecuadamente casos prácticos conocidos por lo que las hipótesis han sido verificadas.

## ABSTRACT

The main goal of the present work is to develop a mathematical model, and the corresponding finite element program, for the description of the physical and geometrical non linear mechanical behavior of non saturated soft compressible clay-type soils commonly found in the North East Region of Argentina. For the soil consolidation mathematical model, an approach based on the geological mass stress state combination is developed. Concerning with the non linear simulation, in the first place a hypoelastic description based on co rotated stress for any elastoplastic solid is carried out. Afterwards, this description is extended to non saturated porous materials. To obtain the discrete or algebraic form of the precedent equations, the Finite Element Method is applied. Many different examples, including structural analysis problems, for which previous solutions are known, were solved and through encouraging results it can be stated that for both separated and assembled mathematical models, the practical cases are adequately simulated and therefore, the hypotheses were verified.





---

## AGRADECIMIENTOS

Al personal del Departamento de Mecánica Aplicada, que siempre han puesto a mi entera disposición todos los recursos para que esta Tesis sea llevada adelante, y especialmente ha sido durante muchos años su Director, Ing. Mario P. Favretto, pilar fundamental de las Carreras de Postgrado de la Facultad de Ingeniería.

A Pablo Beneyto, Juan Manzollillo y Javier Mroginski, mis alumnos de Maestría, sin los cuales nunca hubiera culminado este trabajo. Ellos han sido y son la fuerza que muchas veces me abandona y el mejor ejemplo de se debe abrir un sendero para que otros lo hagan un camino.

A mi director, el Dr. Ing. Armando M. Awruch que desde siempre ha sido el ejemplo a seguir en mi carrera de investigador y cuya capacidad para abordar una diversidad impresionante de problemas diferentes nunca ha dejado de sorprenderme.

Al cuerpo integrante de la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ingeniería, por su interminable paciencia.

A las autoridades de la Facultad de Ingeniería y de la Universidad Nacional del Nordeste, por su apoyo económico.

A mis padres, porque recién después de mucho tiempo me di cuenta de que su insistencia en relación al estudio tenía sobrados fundamentos...

Finalmente, un profundo agradecimiento a mi esposa y mis hijos, porque la única manera de alcanzar las metas a largo plazo, es contar con el amor y el apoyo incondicional de los seres más cercanos y a mi eso, me ha sobrado.....

y , al igual que como me sentí al terminar mi tesis de Magíster, debo decir:

**MISIÓN CUMPLIDA!**



## LISTA DE SÍMBOLOS

Si bien a lo largo del texto se define toda la simbología a medida que se la utiliza, a continuación se ofrece, para revisiones rápidas, una lista de símbolos indicando lo que representan y las páginas donde fueron definidos.

Esta simbología tiene un formato uniforme a lo largo de todo el texto y se corresponde con el comúnmente utilizado en la mayoría de las publicaciones, así por ejemplo, las letras **negritas** se utilizan para la notación tensorial (o matricial compacta) de los tensores y arreglos en general (matrices y vectores), mientras que las letras en *cursivas* con subíndices a la derecha se utilizan para la notación indicial de los mismos. Las variables en general son escritas en *cursiva* y las funciones en letra normal.

Símbolo	Significado	Definido en página	Símbolo	Significado	Definido en página
$\Delta(\bullet)$	Incremento de la magnitud ( $\bullet$ )	79	$\phi^*$	Pendiente de la línea de estados críticos en el plano $p' - q$	107
$(\dot{\bullet})$	Tasa de la magnitud ( $\bullet$ )	81	$\phi$	Coefficiente de fricción interna del suelo en la configuración actual	107
$\nabla$	Operador gradiente espacial	82	$\bar{\phi}$	Coefficiente de fricción interna del suelo en la configuración co-rotada	108
$\{\bullet\}$	Vector en notación de Voigt	120	$\bar{\phi}^*$	Coefficiente $\phi^*$ en términos de $\bar{\tau}'$	108
$[\bullet]$	Matriz en notación de Voigt	120	$\mathcal{G}$	Método parámetro $\mathcal{G}$	129
$(\bullet)^E$	Parte elástica de la magnitud ( $\bullet$ )	98	$\eta$	Relación de variables del criterio de Estados Críticos Modificado	111
$(\bullet)^P$	Parte plástica de la magnitud ( $\bullet$ )	98	$\partial B$	Contorno de la geometría inicial $B$	89
$\alpha$	Constante de Biot	66	$\partial_t B$	Contorno de $B$ con fuerzas prescriptas	89
$\beta$	Relación $\{\mathbf{L}\} - \{\dot{\mathbf{u}}\}$	124	$\Lambda; \bar{\Lambda}$	Multiplicador plástico	98
$\beta$	Variable de endurecimiento (coeficiente de Awruch – Di Rado)	110	$\mu, \lambda$	constantes de Lamé	93
$\chi$	Coefficiente del criterio de Estados Críticos Modificado	110	$\mu_w$	Viscosidad dinámica de agua	45
$\delta_{ij}$	Delta de Kroenecker	66	$\theta_w, w$	Contenido de agua	32
$\bar{\epsilon}$	Deformación logarítmica simétrica	82			
$\epsilon_v^P$	Deformación volumétrica plástica	110			
$\varphi$	Función movimiento o deformación	79			

Símbolo	Significado	Definido en página	Símbolo	Significado	Definido en página
$\theta$	Tercer invariante del criterio de Estados Críticos Modificado	106	$\mathbf{C}^\tau$	Tensor constitutivo de $\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} \equiv L_v \boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{D}$	91
$\bar{\theta}$	Invariante $\theta$ expresado en términos de la tensión $\bar{\boldsymbol{\tau}}'$	107	$\bar{\mathbf{C}}^\tau$	Tensor constitutivo de $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ y $\bar{\mathbf{D}}$	88
$\Theta$	Parámetro para cálculo de derivadas en el tiempo	129	$\mathbf{C}^{\sigma \nabla}$	Tensor constitutivo de $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$ y $\mathbf{D}$	91
$\rho$	Densidad de masa	33,81	$\mathbf{C}^{\tau \nabla}$	Tensor constitutivo de $\boldsymbol{\tau}^\nabla$ y $\mathbf{D}$	91
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensiones Cauchy	84	$\mathbf{C}'$	Tensor constitutivo función de $\boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{D}$	94
$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$	Tasa de Jaumann de Cauchy	85	$\mathbf{C}''$	Tensor const. función de $\boldsymbol{\tau}$ , $\mathbf{W}$ y $\boldsymbol{\Omega}$	94
$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T}$	Tasa de Truesdell de Cauchy	85	$\mathbf{C}'''$	Tensor const. función de $\boldsymbol{\tau}$ , $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$	95
$\boldsymbol{\sigma}^\nabla$	Tasa objetiva genérica de Cauchy	91	$\hat{\mathbf{C}}^\tau$	Tensor const. $\mathbf{C}^\tau$ con simetría menor	95
$\boldsymbol{\sigma}'$	Tensión efectiva (o de la fase sólida) de Cauchy	65	$\bar{\mathbf{C}}_{EP}^\tau$	Tensor constitutivo de $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ y $\bar{\mathbf{D}} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$	100
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensiones de Kirchhoff	85	$\mathbf{C}^{\text{sim}}$	Parte simétrica del tensor const. $\mathbf{C}'''$	96
$\bar{\boldsymbol{\tau}}$	Tensor co-rotado de la tensión de Kirchhoff	85	$\mathbf{C}^{\text{asim}}$	Parte asimétrica del tensor const. $\mathbf{C}'''$	96
$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$	Tasa Jaumann de Kirchhoff	85	$\bar{C}_i$	Coefficientes componentes del vector de flujo plástico $\bar{\mathbf{a}}$	101
$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla G}$	Tasa Green Naghdi de Cauchy	85	$C^*$	Ordenada al origen de la línea de estados críticos	107
$\boldsymbol{\tau}^{\nabla G}$	Tasa Green Naghdi de Kirchhoff	85	$\bar{C}^*$	Coefficiente $C^*$ en función de $\bar{\boldsymbol{\tau}}'$	108
$\boldsymbol{\tau}^\nabla$	Tasa objetiva genérica de Kirchhoff	91	$C$	Concentración de aire	51
$L_v \boldsymbol{\tau}$	Derivada de Lie de Kirchhoff	85	$\mathbf{D}$	Tensor tasa de deformación	82
$\nu$	Coefficiente de Poisson	93	$\bar{\mathbf{D}}$	Tasa de deformación co-rotada	82
$\boldsymbol{\Omega}$	Tensor de giro	83	$D_i$	Coefficiente difusión de gas.	68
$\bar{\mathbf{a}}$	Dirección del flujo plástico en la configuración co-rotada	98	DIV	Operador divergencia material	89
$\bar{\mathbf{a}}_i$	Comp. vector de flujo plást. $\bar{\mathbf{a}}$	101	$\mathbf{e}$	Deformación lineal espacial	83
$a$	Abscisa al origen de la línea de estados críticos	107	$e$	Relación de vacíos del suelo	32
$\bar{a}$	Coefficiente $a$ expresado en términos de		$e_0$	Relación de vacíos inicial del suelo	110
$\bar{A}$	Parámetro de plasticidad co-rotado	99	$\mathbf{E}$	Tensor de deformación de Green	82
$\mathbf{A}$	Vector material fuerzas de inercia	89	$E$	Módulo de elasticidad de Young	93
$\mathbf{b}$	Vector espacial fuerzas de masa	90	$\bar{f}$	Función o tensión efectiva de fluencia configuración co-rotada	100
$\mathbf{B}$	Configuración geométrica inicial	81	$f$	Función o tensión efectiva de fluencia configuración actual	109
$\tilde{\mathbf{B}}$	Vector material fuerzas de masa	89	$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	Fuerzas nodales externas	78
$\mathbf{B}$	Relación $\{\mathbf{D}\} - \{\dot{\mathbf{u}}\}$	122	$\mathbf{F}_{\text{int}}$	Fuerzas nodales internas	78
$\mathbf{c}$	Función desplazamiento rígido	86	$\mathbf{F}$	Gradiente de deformación	81
$c$	Coefficiente de cohesión del suelo	107	$\bar{F}$	Superficie de fluencia en la configuración co-rotada	99
$c_s$	Compresibilidad del grano de suelo	66	$\bar{g}$	Tensión de comparación (límite elástico)	100
$\bar{c}$	Coefficiente de cohesión en la configuración co-rotada	108	$h_w$	Carga hidráulica	42
$\mathbf{C}^{\sigma J}$	Tensor constitutivo de $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$ y $\mathbf{D}$	88	$I_1$	Primer invariante del tensor $\boldsymbol{\sigma}$	102
$\mathbf{C}^{\text{SE}}$	Tensor constitutivo de $\dot{\mathbf{S}}$ y $\dot{\mathbf{E}}$	90			

Símbolo	Significado	Definido en página	Símbolo	Significado	Definido en página
$\bar{I}_1$	Primer invariante del tensor $\bar{\tau}$	102	$p^c$	Succión matricial	26
$J$	Determinante Jacobiano	81	$p'$	Primer invariante del criterio de Estados Críticos Modificado	106
$J_2$	2do invariante del desviador de $\sigma$	102	$\bar{p}'$	Invariante $p'$ en términos de $\bar{\tau}'$	107
$\bar{J}_2$	2do invariante del desviador de $\bar{\tau}$	102	$p_{co}$	Pre-consolidación o límite elástico del criterio de Estados Críticos Modificado	107
$J_3$	3er invariante del desviador de $\sigma$	102	$\ p^c - {}^0p^c\ $	Endurecimiento suelo no-satu.	114
$\bar{J}_3$	3er invariante del desviador de $\bar{\tau}$	102	$q$	Segundo invariante del criterio de Estados Críticos Modificado	106
$J_g$	Velocidad masa aire	51	$\bar{q}$	Invariante $q$ en términos de $\bar{\tau}'$	107
$\bar{\mathbf{k}}$	Variables internas de plasticidad en la configuración co-rotada	98	$\mathbf{Q}$	Matriz de rotación rígida	86
$k, \bar{k}$	Variable de endurecimiento	109	$\bar{G}$	Potencial plástico en la configuración co-rotada	98
$k_s$	Coefficiente de rigidez volumétrica de los granos	66	$\mathbf{R}$	Tensor rotacional	81
$k_{wi}$	Permeabilidad del suelo al agua	44,45,67	$\mathfrak{R}$	Vector residuo nodal	127
$k_{gi}$	Permeabilidad del suelo al aire	52	$\mathbf{S}$	2do. tensor de Piola-Kirchhoff	84
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez	79	$S_w$	Saturación del Agua	30,66
$\mathbf{K}_{mat}$	M. de rigidez de material	127	$S_g$	Saturación del Aire	31,66
$\mathbf{K}_{geo}$	M. de rigidez geométrica	127	$t$	Tiempo	78
$K_m$	Comp. Estructura Suelo a la Succión	66	$\bar{\mathbf{t}}$	Fuerza unitaria prescrita	89
$\ln$	Función logaritmo	82	$\hat{\mathbf{u}}$	Desplazamientos nodales	122
$\mathbf{L}$	Gradiente espacial de velocidad	82	$\mathbf{u}$	Desplazamiento de una partícula	80
$\mathbf{m}$	Vector de $\{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$	104	$\mathbf{U}$	Tensor derecho de elongaciones	81
$n_w$	Porosidad suelo al agua	31,67	$\mathbf{v}$	Velocidad espacial del movimiento	90
$n_g$	Porosidad suelo al aire	31,68	$\mathbf{v}_{wi}$	Velocidad espacial del fluido	44,67
$\mathbf{N}$	Función interpolación del e. finito	122	$\mathbf{v}_{si}$	Velocidad espacial del esqueleto	67
$\mathbf{N}^u$	F. de inter. de los desplazamientos	122	$\dot{w}$	Potencia mecánica específica	85
$\mathbf{N}^p$	F. de inter. de la presión de poros	122	$w_i$	Masa Molecular de i, (i=g, aire)	51, 56
$p$	Presión de poros saturada	104	$\mathbf{W}$	Tensor de giro o vorticidad	82
$\hat{\mathbf{p}}$	Presiones de poro nodales	122	$\mathbf{X}$	Coordenadas materiales	80
$\mathbf{P}$	1er. tensor de Piola-Kirchhoff	84	$\mathbf{x}$	Coordenadas espaciales	79



## PRÓLOGO

El presente trabajo de Tesis ha sido desarrollado por el Mag. Ing. Héctor Ariel Di Rado, bajo la dirección del Dr. Ing. Armando Miguel Awruch.

En el mismo se pretende demostrar que es posible desarrollar: (a) un nuevo modelo matemático apto para suelos de la región para describir el comportamiento mecánico ante cargas de materiales porosos con gas y líquido en sus intersticios y en condiciones isotérmicas; (b) un modelo matemático con no linealidad física y geométrica; (c) utilizar el Método de los Elementos Finitos para la integración de las ecuaciones obtenidas y posterior desarrollo del código tridimensional necesario para su resolución por medio de un computador.

Es importante aclarar que ya se han desenvuelto otros modelos que resuelven problemas semejantes al planteado aquí y que son detallados durante el capítulo correspondiente, pero estos en general son poco especializados y consecuentemente pueden no incluir totalmente el problema de nuestro interés, además de ser ofrecidos en forma de códigos comerciales de alto costo y sin posibilidades de ser modificados (sacando algunas excepciones).

Si bien lo anterior ha actuado como principal motivación para realizar el trabajo, se ha conseguido algunas ventajas adicionales que se irán detallando a lo largo de la tesis, la cual ha sido dividida en varias Capítulos con el siguiente criterio: Mientras que en el Capítulo 1 se ofrece una revisión bibliográfica de suelos no saturados, en los Capítulos 2, 3 y 4 se desarrollan, a criterio del autor, los aportes originales de este trabajo. En los Capítulos 5 y 6 se realiza la implementación computacional por elementos finitos y en los 7 y 8 se presentan ejemplos y conclusiones. Siempre al comienzo de cada Capítulo, bajo el título “OBJETIVOS”, se presenta una breve introducción que sirve de referencia rápida para que el lector se anticipe a los respectivos contenidos. Pero para una mayor comprensión de lo abarcado por la presente, se verá a continuación, con un poco mas de detalle, cada uno de ellos:

Durante el Capítulo 1 se ha expuesto una breve teoría de suelos parcialmente saturados que solo pretende remarcar los elementos sobresalientes del problema y que posteriormente serán usados para desarrollar el modelo matemático de consolidación, denominación bajo la cual se engloba al comportamiento bajo cargas de materiales granulares con uno o más fluidos en los intersticios. Sin embargo no debe esperarse que en sí, este repaso pueda constituir un curso sobre suelos parcialmente saturados cuando solo intenta ser una ayuda de memoria para quienes conozcan el tema.

En el Capítulo 2 se presenta el modelo matemático de consolidación desarrollado con una mecánica deductiva muy intuitiva que permite definir la importancia relativa que tienen las diferentes variables relevantes del problema, como por ejemplo el caso de la succión, y manifestar algunas interconexiones que quedan muchas veces encubiertas por los despliegues de formulas y expresiones.

El Capítulo 3 fue reservado para el análisis y la propuesta de soluciones, al problema no lineal geométrico que, antes de ser incorporado al problema geotécnico, debe ser revisado dado la complejidad que siempre se ve involucrada cuando se trabaja en esta área. Primeramente se enumeran tensores de tensiones y deformaciones, se indican las relaciones constitutivas que los vinculan y se da paso a la formulación hipoeelástica del problema. Esta elección se debe a que si bien este camino conduce a relaciones constitutivas no simétricas (para las que se ha presentado una alternativa durante este trabajo) es la manera más natural, y a la vez más parecida, de extender el problema plástico sin no linealidad geométrica al plástico con no linealidad geométrica. Y es justamente el problema plástico el motivo del Capítulo 4. Para trabajar con plasticidad aplicada al problema de suelos no saturados, se ha de prestar especial atención al modelo de función de falla que servirá como función de tensiones y como potencial plástico. Aquí la revisión bibliográfica ofrece un abanico de alternativas (motivo de muchísimas publicaciones) y aunque durante este trabajo no se ha profundizado mucho en las distintas posibilidades que pueden presentarse a la hora de modelar plasticidad, se dan los lineamientos para una modificación que permite la extensión del modelo usado durante la Tesis de Maestría indicada en la referencia [23] para suelos saturados, a suelos no saturados.

El Capítulo 5 desarrolla la forma discreta (o algebraica) de las ecuaciones diferenciales planteadas en las secciones anteriores a través de la aplicación del Método de los Elementos Finitos para la parte espacial del problema y el método del parámetro  $\theta$  para la integración en el tiempo. Para que este proceso sea más claro, luego de una breve mención del método en sí



mismo, se ha ido aplicando la técnica mencionada a las diferentes ecuaciones obtenidas previamente, esto es: (1) Al modelo de consolidación de suelos sin incluir no linealidad. (2) Al modelo no lineal de materiales no geológicos. (3) Finalmente al conjunto consolidación no lineal. El proceso de obtención de sistemas algebraicos de ecuaciones se ha hecho pensando siempre en el modelo tridimensional, con descripción detallada de las matrices involucradas en cada caso. Para complementar lo anterior y con miras a la implementación computacional de los sistemas algebraicos, se incluye en el Capítulo 6, una guía de los procesos involucrados en forma semejante a un diagrama de flujo muy general pero que permita individualizar los diferentes pasos que se debe dar para lograr el programa. De alguna manera se pretende que este capítulo sustituya la codificación.

En el Capítulo 7 se han resuelto varios ejemplos recorriendo los diferentes problemas afrontados durante la tesis, tratando de reproducir casos que hayan sido resueltos anteriormente y de los que se conozcan los resultados a partir de otros trabajos de manera de poder contrastar los obtenidos aquí. En lugar de desarrollar un capítulo de consecuencias o conclusiones, estas han sido incluidas a continuación de cada caso resuelto, de modo de que resulte mas claro par el lector.

Por último, el Capítulo 8 resume los logros mas importantes, se realizan las consideraciones finales y se enuncian los trabajos que pueden desprenderse del desarrollado durante esta Tesis.



**CAPÍTULO****1****EL PROBLEMA DE LA CONSOLIDACIÓN DE SUELOS NO SATURADOS.****1.1 OBJETIVOS.**

Se presentará aquí el marco teórico general para el análisis de suelos parcialmente saturado y se darán algunos lineamientos generales del comportamiento de los suelos en estado de no saturación con énfasis a los estudios de laboratorios realizados sobre estos especímenes. Básicamente se ha tomado como referencia principalmente los trabajos de Fredlund<sup>27,28,29,30</sup> quien ha desarrollado muchísima teoría en torno a observaciones experimentales, aunque también, por supuesto, se ha recurrido a otros autores. A lo largo de la revisión teórica se analizará las características físicas de cada una de las fases componentes, agua, aire y sólido, la influencia de la succión (sumamente importante en suelos no saturados) con relación a propiedades fundamentales de la masa de suelo como la permeabilidad o la porosidad y finalmente, la relación entre la succión y el grado de saturación algo imprescindible para el desarrollo del modelo matemático mostrado en el capítulo siguiente.

**1.2 EL FENÓMENO DE LA CONSOLIDACIÓN DE SUELOS.**

Los asentamientos experimentados por los suelos compresibles son por lo general excesivos y/o irregulares, causando daños muy serios a las estructuras que soportan, así como inestabilidades a taludes o a las presas de materiales sueltos o presas de gravedad constituidas por suelo. Se requiere entonces de rigurosos análisis, como la simulación numérica, que puedan predecir dichos efectos con procedimientos de cálculo que sean capaces de representar las no linealidades físicas y geométricas del comportamiento de la masa del suelo.

La deformación de una masa de suelo bajo carga se debe principalmente a la reducción del volumen de los vacíos, llamados poros. Si estos poros se encuentran llenos de agua, caso que se conoce como saturado, la disminución de volumen se produce cuando el agua es expulsada de dichos poros. Cuando los poros tienen además aire, caso que se conoce como no saturado, se inicia un conjunto de procesos que llevan a la disminución de los poros por eliminación de ambos componentes y por interacción entre ellos. Este proceso se denomina consolidación de suelos.

El proceso de consolidación de suelos puede ser prácticamente instantáneo o durar un largo periodo de tiempo, según sea la permeabilidad de los suelos cargados. En terrenos muy permeables como las arenas, el proceso es casi instantáneo, puesto que el agua de los poros puede drenar rápidamente. En cambio, la consolidación de arcillas o limos arcillosos es mucho más lenta, debido a la dificultad que encuentra el agua para escurrir dentro de una masa de suelo muy poco permeable, haciéndose necesario incluir al tiempo como una variable fundamental para tratar el problema. Este último caso es el analizado en el presente trabajo.

La deformación total de la masa de suelo, debido a la reducción de vacíos por la disipación de la presión de poros y a la deformación de las partículas sólidas, genera los asentamientos en superficie que afectan las estructuras fundadas sobre ese suelo. También, y como se mencionara en el comienzo, la presa de tierra ven comprometida su estabilidad general o la estabilidad de algún talud en particular.

### **1.3 EL PROBLEMA DE LOS SUELOS NO SATURADOS.**

En el suelo en estado no saturado coexisten tres fases, sólida, líquida y gaseosa. Fredlund y Morgenstern<sup>27</sup>, consideran que el suelo no saturado se puede tratar como un sistema con cuatro fases, añadiendo a las anteriormente citadas, la "membrana contráctil" producida por la interfase entre la fase líquida y la fase gaseosa como se indica en la Figura 1-1. Según dichos autores es posible hablar de esta cuarta fase por cuanto dicha interfase tiene propiedades diferentes a los materiales que la rodean y tiene unos límites definidos. Por ejemplo, la "membrana contráctil" es menos densa que el agua de la fase contigua, su conductividad térmica es mayor y sus propiedades birrefringentes son similares a las del hielo.

A efectos de este trabajo se seguirá el criterio tradicional de considerar al suelo en estado no saturado como un sistema trifásico por cuanto la "membrana contráctil" viene considerada

implícitamente al estudiar el comportamiento conjunto de las fases líquida y gaseosa con sus propiedades.

#### 1.4 PROPIEDADES ENTRE LAS FASES Y RELACIONES ENTRE ELLAS.

A un suelo no saturado se lo define como un sistema trifásico, sin embargo, el importante rol realizado por la interfase agua – aire o “membrana contráctil” (“contractile skin”, en su terminología en inglés) ha generado su inclusión como fase adicional al considerar ciertos mecanismos físicos; si bien lo anterior es cierto, a esta fase sólo se la tendrá en cuenta teóricamente y servirá para determinar los distintos coeficientes que rigen el comportamiento del suelo.

Cuando la fase aire es continua la membrana contráctil interactúa con las partículas del suelo e influye en el comportamiento mecánico del suelo. Al dejar de ser continuo, pasando a ser burbujas de aire ocluidas, el fluido se torna significativamente compresible.

Podemos idealizar un elemento de suelo no saturado, según la Figura 1-1:

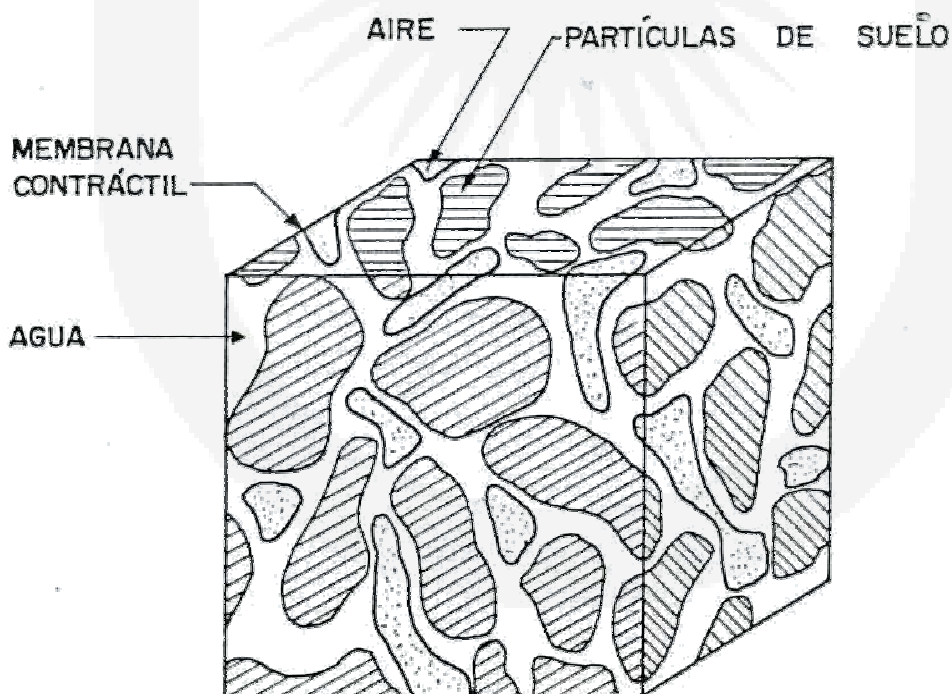
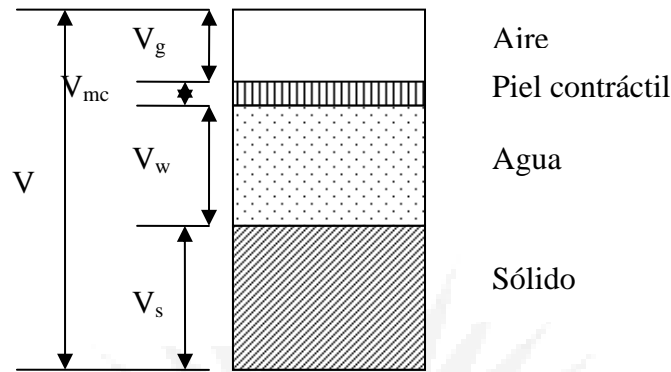


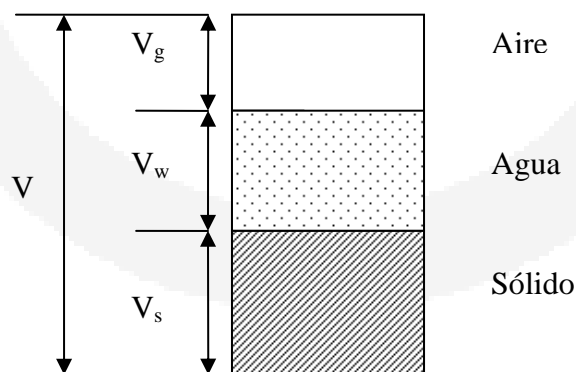
Figura 1-1: Fases de un suelo no saturado según Fredlund & Morgenstern<sup>27</sup> (1977).

y representarlo esquemáticamente, según la Figura 1-2:



**Figura 1-2 Representación esquemática de las 4 fases.**

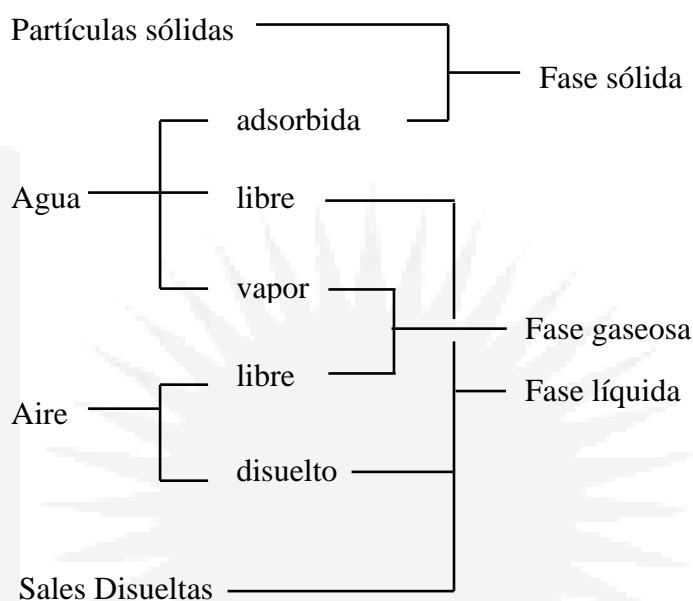
Mientras que la figura anterior muestra un riguroso diagrama de cuatro fases para suelos no saturados, esquematizando la muestra idealizada, la figura siguiente muestra un diagrama simplificado o trifásico, que será usado para describir las propiedades volumen – masa debido a que el espesor de la membrana contráctil, que es del orden de unas pocas moléculas, no influyen en la determinación de estas propiedades:



**Figura 1-3 Representación esquemática de las 3 fases.**

### 1.4.1 Fases componentes

Mediante el siguiente esquema podemos visualizar la composición de las fases de un suelo no saturado:



#### - Fase sólida

Las partículas de suelo, que componen la fase sólida, pueden presentar características altamente variables de unas a otras. Propiedades como su tamaño (granulometría), forma, textura, composición mineralógica, configuración cristalográfica, etc. pueden ser fundamentales en su comportamiento mecánico. Es conocida, por ejemplo, la influencia que tienen las cargas eléctricas de las partículas, su capacidad de cambio catiónico o la formación y variación de la capa doble difusa (capa formada por agua y sales que no puede ser separada hidrodinámicamente). Recordar que la teoría de la capa doble difusa trata de explicar las fuerzas de los contactos en función del tipo de estructura floculada (de tipo abierta, con numerosos contactos cara-borde) o dispersa. Considerando esta teoría, las caras de las partículas de arcilla están cargadas negativamente, mientras que los bordes, positiva y negativamente, de este modo se generan los contactos cara borde o borde-borde.

La estructura de las partículas sólidas es especialmente importante en el caso de suelos en estado no saturado debido a la influencia que tiene en el efecto del estado tensional provocado en las interfases entre dichas partículas, el agua y el aire. Así, por ejemplo, la compactación

por el lado seco o húmedo de lo que sería el punto óptimo puede producir estructuras distintas con la consecuente respuesta diferenciada.

En consecuencia la estructura del suelo es un factor de gran importancia para predecir su respuesta y se puede decir, de acuerdo con Lambe & Whitman<sup>46</sup>, que el conocimiento de la composición de sus partículas individuales, si bien proporciona datos básicos de su comportamiento, tiene pocas relaciones útiles con la mencionada estructura.

De todo ello se deduce la dificultad de obtener el comportamiento macroestructural del suelo a partir de sus propiedades microestructurales. Se han elaborado, sin embargo modelos que relacionan uno y otro nivel en aspectos parciales.

#### - **Fase líquida**

La fase líquida la compone fundamentalmente el agua. Químicamente este agua se puede clasificar en tres tipos: el agua higroscópica, adsorbida en la partícula o formando parte de la capa doble difusa, que no puede ser separada por acciones hidrodinámicas, el agua capilar, condicionada por las fuerzas capilares del suelo, y el agua gravitacional, que puede ser separada en condiciones de drenaje libre por gravedad. Las dos últimas son las que se pueden mover por acciones hidrodinámicas (agua libre) (Lambe & Whitman<sup>45</sup>).

El agua puede contener sales disueltas que aportan cationes a la capa doble difusa. Es conocida la influencia que la existencia y calidad de estos cationes puede tener en el comportamiento del suelo, pudiendo provocar notables variaciones volumétricas o de resistencia. Algunos autores<sup>46</sup> indican como la reducción de sales en el agua intersticial puede provocar alta sensibilidad en el suelo, pudiendo provocar inestabilidades de grandes masas de terreno.

#### - **Fase gaseosa**

La fase gaseosa está fundamentalmente compuesta por aire. Una característica importante del aire es su compresibilidad, en contraste con la incompresibilidad con que habitualmente se trata el agua. Como es sabido, el comportamiento de los gases y concretamente la relación entre su volumen, la presión y la temperatura, puede ser aproximada para intervalos pequeños y niveles bajos de presión por medio de la ley general de los gases perfectos.



## Interacción entre las fases

Existen interacciones entre las fases líquida y gaseosa. Por una parte el agua está en equilibrio con su vapor, que forma parte de la fase gaseosa. La presión de vapor, o presión a la que el líquido y su vapor están en equilibrio depende de diversos factores como son la temperatura, la presión parcial del aire o la curvatura de la superficie del líquido (ecuación de Kelvin).

De este capítulo se podrá concluir la gran dificultad que significa el deducir comportamientos macroestructurales generales a partir de estudios microestructurales. En realidad éste es un problema poco resuelto y entraña una tremenda complejidad, aunque en ocasiones las características microestructurales puedan derivar comportamientos cualitativos en las formulaciones.

### 1.4.2 Propiedades de las fases individuales

Antes de abordar el tema del comportamiento de un sistema de suelo, conviene entender las propiedades básicas de las partículas de suelo, aire, agua y membrana contráctil, de la que solo se trata la tensión superficial.

#### Densidad y volumen específico:

Cada fase del sistema tiene su propia densidad  $\rho$ , obtenida a partir del diagrama anterior; a la inversa de la densidad se la denomina volumen específico; también usaremos habitualmente el peso específico ( $\gamma = g \cdot \rho$ )

#### a) Partículas sólidas

La densidad de las partículas sólidas, se define como:

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} \quad (1.4-2)$$

Pero a la misma se la expresa generalmente a partir de una variable adimensional denominada gravedad específica  $G_s$ ; definida como la relación entre la densidad de las partículas de suelo y la del agua a 4 °C, bajo ciertas condiciones de presión atmosférica. En el sistema Internacional se la denomina densidad relativa de las partículas de suelo.

-Gravedad específica o densidad relativa de las partículas de suelo

$$G_s = \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (1.4-3)$$

### b) Fase agua

Se define su densidad como:

$$\rho_w = \frac{M_w}{V_w} \quad (1.4-4)$$

donde  $\rho_w$  será definida a seguir.

### c) Fase aire

La densidad y el volumen específico del aire puede expresarse respectivamente como:

$$\rho_g = \frac{M_g}{V_g} \quad \text{y} \quad v_{g0} = \frac{V_g}{M_g} \quad (1.4-5)$$

El aire se comporta como mezcla de varios gases, además de una cantidad variable de vapor de agua. La mezcla se denomina aire seco cuando no hay vapor de agua, y aire húmedo cuando tiene vapor de agua.

Puede considerarse que el aire seco o húmedo se comporta como un gas “ideal” bajo las presiones y temperaturas comúnmente encontradas en ingeniería geotécnica.

### Tensión superficial

La interfase agua – aire (o membrana contráctil) posee una propiedad denominada tensión superficial. El fenómeno de la tensión superficial resulta a partir de fuerzas intermoleculares que actúan sobre las moléculas en la membrana contráctil, estas fuerzas son diferentes a las actuantes en las moléculas en el interior del agua, según la Figura 1-4.

Una molécula en el interior del agua experimenta fuerzas iguales (no desbalanceadas) en todas direcciones. Una molécula de agua de la membrana contráctil experimenta una fuerza desbalanceada hacia el interior del agua. Para que la membrana contráctil esté en equilibrio, deberá generarse una fuerza de tensión a lo largo de la membrana contráctil. A la propiedad de ejercer esta tensión se la denomina tensión superficial y es tangencial a la superficie de la membrana contráctil.

La tensión superficial hace que la membrana contráctil se comporte como una membrana elástica. Este comportamiento es igual al de un globo inflado que tiene una presión mucho mayor adentro que afuera. Si una membrana bidimensional flexible está sujeta a presiones diferentes de cada lado, ésta asume una curvatura cóncava hacia el lado de mayor presión y ejercerá una tensión en la membrana hasta restablecer el equilibrio. La diferencia de presión a través de la

superficie curva puede relacionarse a la tensión superficial y el radio de curvatura de la superficie mediante la consideración del equilibrio en la membrana.

Las presiones actuantes en la membrana son  $u$  y  $u + \Delta u$ . La membrana tiene su radio de curvatura  $R_s$  y una tensión superficial  $T_s$ . Las fuerzas tangentes se equilibran a ambos lados de la membrana. Para el equilibrio en la dirección normal al punto central del elemento, se requiere que:

$$2 * T_s * \text{sen} \beta = 2 * \Delta u * R_s * \text{sen} \beta \tag{1.4-6}$$

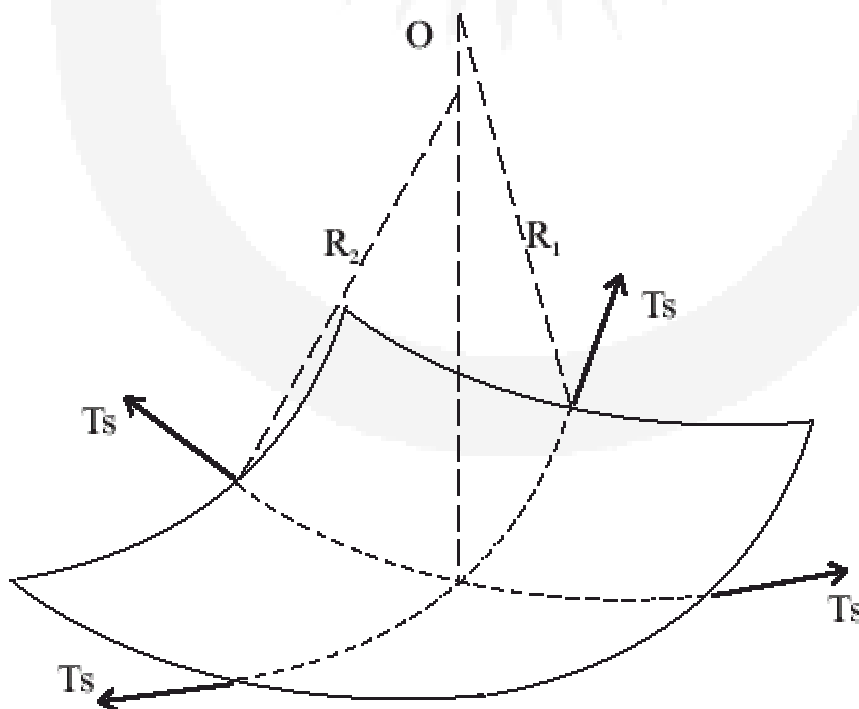
de donde resulta que:

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{T_s}{R_s} \tag{1.4-7}$$

Esta ecuación demuestra la diferencia de presión a través de una superficie bidimensional con un radio  $R_s$  y una tensión superficial  $T_s$ . Para superficies con forma de silla de montar o alabeadas (tridimensionales). La ecuación anterior, se transforma según la ecuación de Laplace en:

$$\Delta u = T_s * \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{1.4-8}$$

El fenómeno descrito puede observarse en la Figura 1-4:



### Figura 1-4 Tensión superficial.

Si el radio de curvatura es el mismo en todas las direcciones:

$$\Delta u = \frac{2 * T_s}{R_s} \quad (1.4-9)$$

En un suelo no saturado la membrana contráctil está sujeta a una presión de aire  $p^g$  que es más grande que la presión del agua  $p^w$ .

La diferencia de presión  $p^c = (p^g - p^w)$  es conocida como **succión matricial**, la diferencia de presión ocasiona que la membrana contráctil se curve según (1.4-8):

$$(p^g - p^w) = \frac{2 T_s}{R_s} \quad (1.4-10)$$

$(p^g - p^w)$ : Succión matricial o diferencia entre las presiones del poro de aire y de agua, actuantes sobre la membrana contráctil.

La (1.4-10) se conoce como ecuación capilar de Kelvin. Si la succión capilar crece, el radio de curvatura decrece, a la membrana contráctil curvada se la denomina frecuentemente “menisco”.

Si la diferencia de presión se vuelve cero, el radio de curvatura tiende a infinito, por lo tanto una superficie de interfase aire – agua, existirá solo si la succión matricial se vuelve cero.

#### 1.4.3 Teoría de la succión del suelo.

El concepto teórico de la succión de suelo fue presentado a principio de siglo, desarrollando una teoría principalmente para sistemas asiento – agua – suelo.

La succión es referida comúnmente como el estado de energía libre del agua del suelo y su importancia en la explicación del comportamiento mecánico de los suelos no saturados en problemas de ingeniería fue introducida por el Road Research Laboratory de Inglaterra.

En 1965 se produjo una definición cuantificada de la succión y sus componentes a partir de un contexto termodinámico.

La relación termodinámica entre la succión (o energía libre del agua del suelo) y la presión parcial del vapor de agua del poro puede escribirse como:

$$\mathfrak{S} = -\frac{R.T}{v_{wo} \cdot w_v} \cdot \ln\left(\frac{\bar{u}_v}{\bar{u}_{v_o}}\right) \quad (1.4-11)$$

donde

$R$ : Constante universal de los gases (8,31432 J/Kmol) y  $T$ , temperatura absoluta.

$v_{wo}$ : Volumen específico del agua o inversa de la densidad del agua  $\left(\frac{1}{\rho_w}\right)$

$w_v$ : Masa molecular del vapor de agua (18,016 Kg/kmol).

$\bar{u}_v$ : Presión parcial del vapor de agua del poro.

$\bar{u}_{v_o}$ : Presión de saturación del vapor de agua sobre una superficie plana de agua a la misma temperatura.

La (1.4-11) muestra que el estado de referencia para cuantificar los componentes de la succión es la presión de vapor sobre una superficie de agua pura. El término  $\bar{u}_v/\bar{u}_{v_o}$  se llama humedad relativa (HR) (%). Si seleccionamos una temperatura de referencia de 20°C, las constantes de (1.4-11) toman un valor de 135.022 Kpa, por lo que se la puede reescribir como una relación fija entre la succión total y la presión de vapor, relativa de la siguiente forma:

$$\mathfrak{S} = -135022 * \ln\left(\frac{\bar{u}_v}{\bar{u}_{v_o}}\right) \quad (1.4-12)$$

$\mathfrak{S}$ : Succión total o succión del suelo.

Valores menores que 100% de HR en un suelo indicaría la presencia de succión en la misma. Se sabe también que la succión puede ser extremadamente alta, por ejemplo para HR = 97%,  $\mathfrak{S} = 8000$  Kpa. El rango de succiones en ingeniería geotécnica corresponderá a altas humedades relativas.

#### - Componentes de la succión del suelo. :

A la succión del suelo se la cuantifica en función de la HR, también denominado succión total, está formada por dos componentes: succión matricial (“matric suction”, en su terminología en inglés) y succión osmótica (“osmotic suction”, en su terminología en inglés). Podemos definir la succión total y sus componentes de la siguiente manera:

Componente matricial o capilar de la energía libre: en términos de succión, es la succión equivalente derivada de la medición de la presión parcial del vapor de agua en equilibrio con el agua del suelo, similar a la presión parcial del vapor de agua en equilibrio con una solución idéntica, en composición, al agua.

**Componente osmótica de energía libre:** en términos de succión, es la succión equivalente derivada de la medición de la presión parcial del vapor de agua en equilibrio con una solución idéntica en composición a la del agua del suelo, semejante a la presión parcial del vapor de agua en equilibrio con el agua pura libre

**Succión total o energía libre del agua del suelo:** es la succión equivalente derivada de la medición de las presiones parciales del vapor de agua en equilibrio con una solución idéntica en composición a la del agua del suelo, semejante a la presión parcial del vapor de agua en equilibrio con el agua pura libre

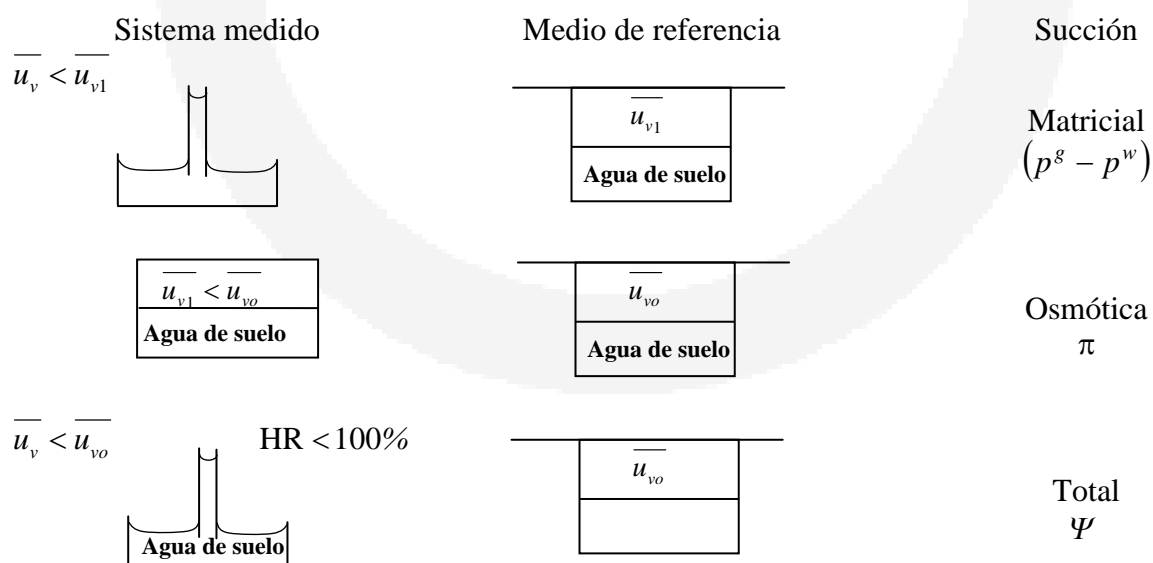
Estas definiciones establecen claramente que la succión total corresponde a la energía libre del agua del suelo, mientras que las succiones matriciales y las osmóticas son componentes de la energía libre, esto puede escribirse como:

$$\Psi = (p^s - p^w) + \pi \quad (1.4-13)$$

donde

- $\Psi$  : Succión total
- $(p^s - p^w)$  : Succión matricial ( $p^c$ )
- $\pi$  : Succión osmótica

La Figura 1-5 ilustra el concepto de succión total y sus componentes en relación de la energía libre del agua del suelo. La succión matricial está comúnmente asociada con el fenómeno de capilaridad a partir de la superficie de tensión del agua.



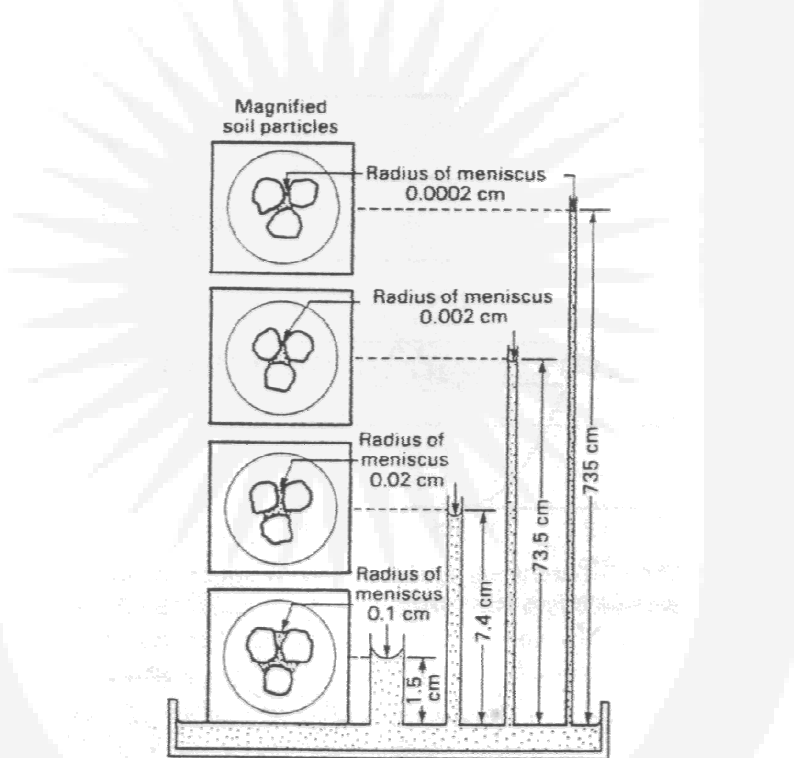
**Figura 1-5: Concepto de succión.**

En el suelo, los poros con radios pequeños actúan como tubos capilares que causan que el agua de los mismos ascienda sobre el nivel del agua a presión atmosférica.

La capilaridad tiene una presión negativa con respecto a la presión del aire, que generalmente es atmosférica.

En grados bajos de saturación la presión del poro de agua puede ser altamente negativa, con valores tan bajos como 7000 Kpa. En estos casos, la fuerza de adsorción juega un rol altamente importante en la presión de poro de agua negativa.

Consideramos un tubo capilar con agua de suelo; la superficie de agua en un tubo de agua es curva y se llama menisco, esta descripción puede observarse en la Figura 1-6 (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).



**Figura 1-6 Tubo capilar con agua de suelo**

Por otro lado, la misma agua del suelo tendrá una superficie plana cuando descansa en un gran recipiente. La presión parcial de vapor de agua sobre la superficie curvada del agua del suelo,  $\bar{u}_v$  es menor que la presión parcial del vapor de agua sobre una superficie plana de la misma agua del suelo  $\bar{u}_{v,1}$  (es decir  $\bar{u}_v < \bar{u}_{v,1}$  de la Figura 1-5). En otras palabras la humedad relativa en un suelo decrecerá debido a la presencia de superficie de aguas curvadas producidas por fenómenos capilares.

La presión de vapor de agua o la humedad relativa decrece cuando el radio de curvatura es inversamente proporcional a la diferencia entre las presiones de aire y de agua ( $p^g - p^w$ ) y se la llama succión matricial y esto contribuye a una reducción de la humedad relativa.

El agua de poro en un suelo contiene generalmente sales disueltas.

La presión del vapor de agua sobre una superficie plana de solvente,  $\bar{u}_{v,1}$ , es menor que la presión de vapor de agua sobre una superficie de agua pura  $\bar{u}_{v,0}$ . En otras palabras, la humedad relativa decrece para un incremento de sales disueltas en el agua de poro del suelo. El decrecimiento de la humedad relativa debido a la presencia de sales disueltas en el agua de poro referidas como succión osmótica  $\pi$ .

#### 1.4.4 Relaciones volumen - masa (Propiedades índices)

Las relaciones volumen – masa de las partículas de suelo y de las fases agua y aire son muy usadas en la práctica. Se obtienen de combinar las propiedades volumétricas y gravimétricas del suelo, primeramente las definiremos según su forma macroscópica por ser la usual en mecánica de suelos.

##### - Grado de saturación

Al porcentaje de espacio vacío que contiene agua se lo expresa como grado de saturación  $S_w$  %. Se lo puede subdividir en tres grupos

Suelo seco ( $S_w = 0$ ), consiste en partículas de suelo y aire, sin agua presente.

Suelo saturado ( $S_w = 1$ ), todos los vacíos en el suelo están llenos de agua.

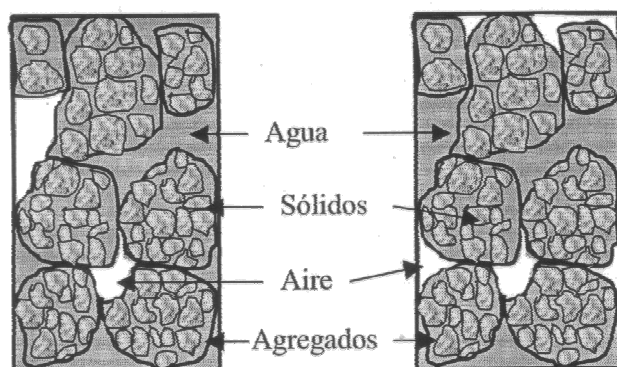
Suelos no saturados ( $0 < S_w < 1$ ), pudiendo a su vez dividirse, según su humedad en:

de fase de aire continua

con burbujas de aire ocluidas.

Este último aspecto puede observarse en la Figura 1-7:





a) Agua continua y discontinua la fase de aire

b) Fase de agua y aire continuos

**Figura 1-7 Fase líquida continua y discontinua**

Primeramente esta subdivisión depende del grado de saturación. Se define el grado de saturación de la siguiente forma:

$$S_w = \frac{V_w}{V_v} \quad (1.4-14)$$

Donde  $V_w$  y  $V_v$  son, respectivamente, los volúmenes de agua y de vacíos. De la misma manera podemos describir la saturación para el poro de aire, según la siguiente ecuación:

$$S_g = \frac{V_g}{V_v} = \frac{V_v - V_w}{V_v} = (1 - S_w) \quad (1.4-15)$$

Un suelo no saturado con una fase de aire continuo, tiene generalmente un grado de saturación menor que 80% ( $S_w < 80\%$ ). El aire ocluido en burbujas, ocurre cuando el grado de saturación se encuentra entre 80 y 90%.

### - Porosidad

La porosidad es la relación entre el volumen de vacíos y el volumen total,

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (1.4-16)$$

Donde  $V_v$  y  $V$  son, respectivamente, los volúmenes de vacíos y total. En suelos no saturados o en sistemas multifásicos es conveniente definir la porosidad como la relación entre el volumen de cada fase y el volumen total:

$$n_\pi = \frac{V_\pi}{V} \quad (1.4-17)$$

el subíndice  $\pi$  indica la fase a la cual se hace referencia

Pueden entonces definirse:

$$\text{Porosidad de granos de suelo.} \quad n_s = \frac{V_s}{V} \quad (1.4-18)$$

$$\text{Porosidad de agua.} \quad n_w = \frac{V_w}{V} \quad (1.4-19)$$

$$\text{Porosidad de aire.} \quad n_g = \frac{V_g}{V} \quad (1.4-20)$$

Las porosidades de agua y aire dependen del grado de saturación, y pueden obtenerse de la siguiente manera:

$$\text{Porosidad de agua.} \quad n_w = nS_w \quad (1.4-21)$$

$$\text{Porosidad de aire.} \quad n_g = nS_g = n(1 - S_w) \quad (1.4-22)$$

Al volumen de la piel contráctil se lo considera nulo o parte del volumen de la fase agua.

La porosidad de agua o de aire representa su proporción volumétrica en el suelo, y la suma de las porosidades de las fases debe ser igual a 1.

$$n_s + n = n_s + n_g + n_w = 1 \quad (1.4-23)$$

#### - Relación de vacíos

Se la define como la relación entre el volumen de vacíos y el volumen de suelo.

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (1.4-24)$$

siendo que la relación entre el volumen de vacíos y la porosidad es dada por la siguiente expresión:

$$n = \frac{e}{1 + e} \quad (1.4-25)$$

#### Contenido del agua

Al contenido de agua se lo define como la relación de la masa de agua y de partículas de suelo.

$$w = \frac{M_w}{M_s} \quad (1.4-26)$$

### Contenido volumétrico del agua.

Se lo define como contenido volumétrico de agua  $\theta_w$ , definido como la relación entre el volumen de agua  $V_w$  y el volumen total del suelo  $V$ .

$$\theta_w = \frac{V_w}{V} = \frac{S_w \cdot V_v}{V} = S_w \cdot n = \frac{S_w \cdot e}{1 + e} \quad (1.4-27)$$

### - Densidad del suelo.

Comúnmente se usan dos funciones de densidad del suelo, la densidad total y la seca.

La densidad total (o “bulk density” en terminología inglesa)  $\rho$ , es la relación entre la masa total  $M$  y el volumen total  $V$ .

Densidad total: 
$$\rho = \frac{M}{V} \quad (1.4-28)$$

La densidad seca  $\rho_d$ , se define como la relación entre la masa del suelo  $M_s$  y el volumen total  $V$ .

Densidad Seca: 
$$\rho_d = \frac{M_s}{V} \quad (1.4-29)$$

Otra densidad es la saturada o flotante. La densidad saturada de un suelo es la densidad total para el caso en que los vacíos están llenos de agua ( $V_g = 0$ ;  $S_w = 1$ ). La densidad flotante es la diferencia entre la densidad saturada y la del agua.

### 1.4.5 Relaciones básicas volumen-masa.

La masa y el volumen para cada fase pueden relacionarse unas a otras usando operaciones básicas a partir del diagrama esquemático de fases, obteniéndose las siguientes relaciones útiles:

$$\begin{aligned} M_w &= \rho^w \cdot V_w \\ V_w &= S_w \cdot e \cdot V_s \\ M_w &= \rho^w \cdot S_w \cdot e \cdot V_s \end{aligned} \quad (1.4-30)$$

$$\begin{aligned} M_w &= w \cdot M_s \\ M_s &= G_s \cdot \rho^w \cdot V_s \\ M_w &= w \cdot G_s \cdot \rho^w \cdot V_s \end{aligned} \quad (1.4-31)$$

$$S_w \cdot e = w \cdot G_s \quad (1.4-32)$$

$$\rho = \frac{G_s(1+w)}{1+e} \cdot \rho^w = \frac{G_s + S_w \cdot e}{1+e} \cdot \rho^w \quad (1.4-33)$$
$$\theta_w = \frac{S_w \cdot G_s}{S_w + w \cdot G_s}$$

### 1.4.6 Cambios en las relaciones volumen-masa.

Las relaciones básicas volumen-masa se aplican a cualquier combinación de  $S_w$ ,  $e$  y  $w$ . Cualquier cambio en alguna de estas propiedades puede producir cambios en las otras dos. Los cambios en dos de estas cantidades deben ser determinados o medidos para poder computar un cambio en la tercera cantidad. Si se conoce el cambio en  $e$  y  $w$ , podemos conocer y computar en  $S$  y viceversa.

Las relaciones entre los cambios en las propiedades volumen-masa pueden ser obtenidos de las “relaciones básicas volumen-masa”.

Se considera que un suelo sufre un proceso tal que produzca cambios en sus propiedades volumen-masa. Antes del mismo, las propiedades volumen-masa del suelo tienen las siguientes relaciones:

$$S_i \cdot e_i = w_i \cdot G_s \quad (1.4-34)$$

Al final del proceso, el suelo tiene una propiedad final Volumen-Masa del mismo tipo que la inicial:

$$S_f \cdot e_f = w_f \cdot G_s \quad (1.4-35)$$

Podemos entonces escribir las siguientes relaciones iniciales-finales:

$$S_f = S_i + \Delta S_w \quad (1.4-36)$$

$$e_f = e_i + \Delta e \quad (1.4-37)$$

$$w_f = w_i + \Delta w \quad (1.4-38)$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores podemos obtener:

$$\begin{aligned}\Delta S_w &= \frac{(\Delta w \cdot G_s - S_i \cdot \Delta e)}{e_f} \\ \Delta e &= \frac{(\Delta w \cdot G_s - \Delta S_w \cdot e_i)}{S_f} \\ \Delta w &= \frac{(S_f \cdot \Delta e + \Delta S_w \cdot e_i)}{G_s}\end{aligned}\tag{1.4-39}$$

## 1.5 VARIABLES DE ESTADO

El comportamiento mecánico de un suelo puede ser descrito en términos del estado de tensiones del suelo. El estado de tensiones en un suelo consiste en ciertas combinaciones de variables de tensión que pueden ser referidas como “variables de estado”. Estas variables deben ser independientes de las propiedades físicas de los suelos.

El número de variables de estado requeridos para la descripción del estado de tensiones de un suelo depende principalmente del número de fases involucradas.

La tensión efectiva,  $(\sigma - p^w)$ , para suelos saturados se ha considerado a menudo como una ley física. Más correctamente, la tensión efectiva es simplemente una variable de estado que puede usarse para describir el comportamiento de un suelo saturado.

La variable tensión efectiva es aplicable a arenas, limos, o arcillas porque es independiente de las propiedades del suelo. El proceso de cambio de volumen y las características de corte de un suelo saturado son controlados por la tensión efectiva.

Las variables del estado para un suelo no saturado han sido considerablemente más difíciles de establecer. Solo recientemente ha habido algún acuerdo sobre las variables de estado más aceptables a usar en la práctica.

### 1.5.1 Variables de estado para suelos no saturados.

El comportamiento mecánico de los suelos se controla por las mismas variables de tensión que controlan el equilibrio de la estructura de suelo. Por lo tanto, las variables de tensión requeridas para describir el equilibrio de la estructura de suelo pueden tomarse como variables de estado para el suelo. Las variables de estado de tensión deben expresarse en términos de tensiones que se puedan medir, tales como la tensión total, la presión del agua de poro  $p^w$ , y la presión del poro de aire  $p^g$ .

Un análisis de la tensión de equilibrio puede llevarse a cabo para un suelo no saturado después de considerar el estado en tensiones en un punto del suelo.

- **Análisis del equilibrio para suelos no saturados.**

Hay dos tipos de fuerza que puedan actuar en un elemento de suelo, las de masa y las de superficie. Las fuerzas de masa actúan a través del centroide del elemento de suelo y se expresan en fuerzas por unidad de volumen (por ejemplo fuerzas de interacción entre fases y la fuerza gravitacional). Las de superficie (ej. cargas externas) actúan solamente en las superficies del elemento. La componente perpendicular al plano del vector tensión se define como tensión normal. Las componentes paralelas como tensiones de corte. El signo positivo en  $\sigma$  significa, compresión. La variación espacial de los componentes de las tensiones pueden expresarse como su derivada con respecto al espacio, como se indica en la Figura 1-8.

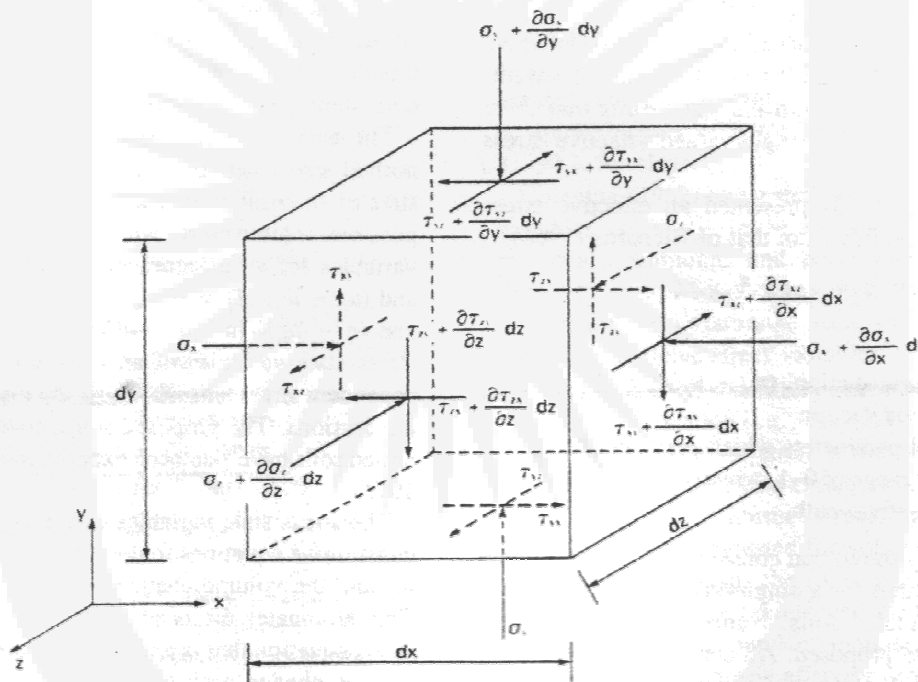


Figura 1-8 Estado de tensión del suelo no saturado (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).

- **Ecuaciones de equilibrio.**

Una condición de equilibrio para un elemento de suelo no saturado implica que las cuatro fases del suelo están en equilibrio. Asumimos que cada fase se comporta en forma independiente, lineal, continua y coincidente con el campo de tensiones en cada dirección.

Podemos escribir una ecuación de equilibrio independiente para cada fase y superponerla usando el principio de superposición. Sin embargo esto no da ecuaciones de equilibrio con

tensiones que puedan medirse. (Ej. Las tensiones íter partículas no pueden medirse directamente).

Por lo tanto es necesario combinar las fases independientes de manera tal que las tensiones mesurables aparezcan en la ecuación de equilibrio para la estructura del suelo.

La ecuación de fuerzas en equilibrio para la fase aire, la fase agua y la piel contráctil, junto con la ecuación de equilibrio total para el elemento de suelo se usan en la formulación de la ecuación de equilibrio para la estructura de suelo. En la dirección Y, la ecuación de equilibrio para la estructura de suelo tiene la siguiente forma (su deducción es compleja y puede verse en el apéndice B de la referencia [29]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_y - p^g)}{\partial y} + (n_w + n_c f^*) \frac{\partial (p^g - p^w)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + (n_c + n_s) \frac{\partial p^g}{\partial y} + \\ n_s \rho_s g - F_{sy}^w - F_{sy}^a + n_c (p^g - p^w) \frac{\partial f^*}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.5-2)$$

Donde

$n_c$  = Porosidad de la membrana contráctil.

$f^*$  : Función de interacción entre el equilibrio de la estructura de suelo y el equilibrio de la piel contráctil

$g$  : Aceleración de la gravedad.

$\rho_s$  : Densidad de las partículas de suelo.

$F_{sy}^w$  : Fuerza de interacción entre la fase agua y las partículas de sólidos en dirección y.

$F_{sy}^a$  : Fuerza de interacción entre la fase aire y las partículas de sólidos en dirección y.

Las variables de tensión que controlan el equilibrio de las partículas de suelo también controlan el equilibrio de la piel contráctil por medio de la función de interacción  $f^*$ .

De la ecuación de equilibrio para la estructura de suelo se puede obtener tres juegos independientes de tensiones normales (estos son  $(\sigma_y - p^g)$ ,  $(p^g - p^w)$  y  $(p^g)$ ) que gobiernan el equilibrio de la estructura de suelo y la piel contráctil. Las componentes de estas variables son cantidades físicamente mensurables. Al asumir que las partículas de suelo y el agua son incompresibles, podemos eliminar  $p^g$ <sup>29</sup>. Entonces,  $(\sigma_y - p^g)$  y  $(p^g - p^w)$  son llamadas variables de estado para suelos no saturados.

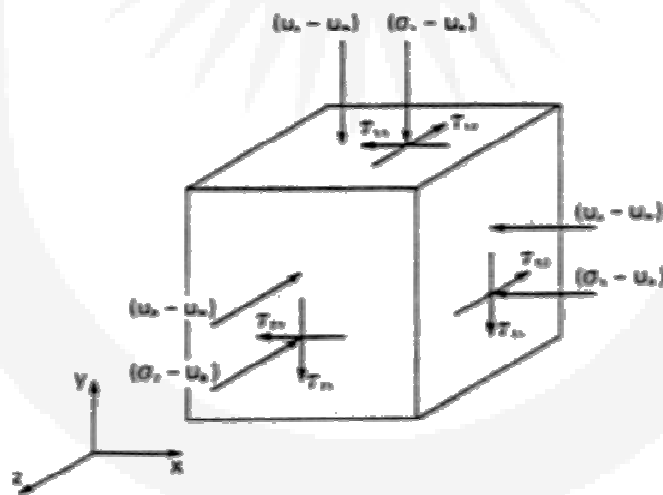
Variabes de estado similares pueden extraerse de las ecuaciones de equilibrio de la estructura de suelo para las direcciones X y Z .La forma completa de un estado de tensiones para un suelo no saturado puede escribirse como dos tensores de tensiones independientes.

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - p^g) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - p^g) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - p^g) \end{bmatrix} \quad (1.5-3)$$

y

$$\begin{bmatrix} (p^g - p^w) & 0 & 0 \\ 0 & (p^g - p^w) & 0 \\ 0 & 0 & (p^g - p^w) \end{bmatrix} \quad (1.5-4)$$

Estos tensores no pueden combinarse en una sola matriz, a partir de que las variables tienen diferentes propiedades del suelo (por ejemplo la porosidad) aparte de los términos de diferenciales parciales (1.5-2). Esto se puede ilustrar de la siguiente manera, como se indica en la Figura 1-9:



**Figura 1-9 Tensiones independientes (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).**

En el caso de partículas de suelo o fluido del poro compresibles, debe usarse un tensor adicional,  $p^g$ , para describir el estado de tensiones



$$\begin{bmatrix} p^g & 0 & 0 \\ 0 & p^g & 0 \\ 0 & 0 & p^g \end{bmatrix} \quad (1.5-5)$$

### 1.5.2 Otras combinaciones de variables de estado.

La ecuación de equilibrio para la estructura de suelo (1.5-2) puede ser formulada en una manera ligeramente diferente usando la presión del agua de poro,  $p^w$ , o la tensión normal  $\sigma$ , como referencia. Si usamos  $p^w$ , como referencia, pueden extraerse de las ecuaciones de equilibrio  $(\sigma - p^g)$ ,  $(\sigma - p^w)$  y  $(\sigma)$  como variables de estado para la estructura de suelo.

Puede ignorarse a  $\sigma$  cuando asumimos que las partículas de suelo son incompresibles.

Resumiendo, hay tres combinaciones posibles de variables de estado que pueden usarse para describir el estado relevante de tensiones de la estructura de suelo y de la piel contráctil en un suelo no saturado, a saber:

Presión de referencia	Variables de estado
Aire $\rightarrow p^g$	$(\sigma - p^g)$ y $(p^g - p^w)$
Agua $\rightarrow p^w$	$(\sigma - p^w)$ y $(p^g - p^w)$
Total $\rightarrow \sigma$	$(\sigma - p^g)$ y $(\sigma - p^w)$

Las tres combinaciones se obtienen de derivar la ecuación de equivalencia de la estructura de suelo con respecto a tres referencias distintas ( $p^g$ ,  $p^w$  y  $\sigma$ ).

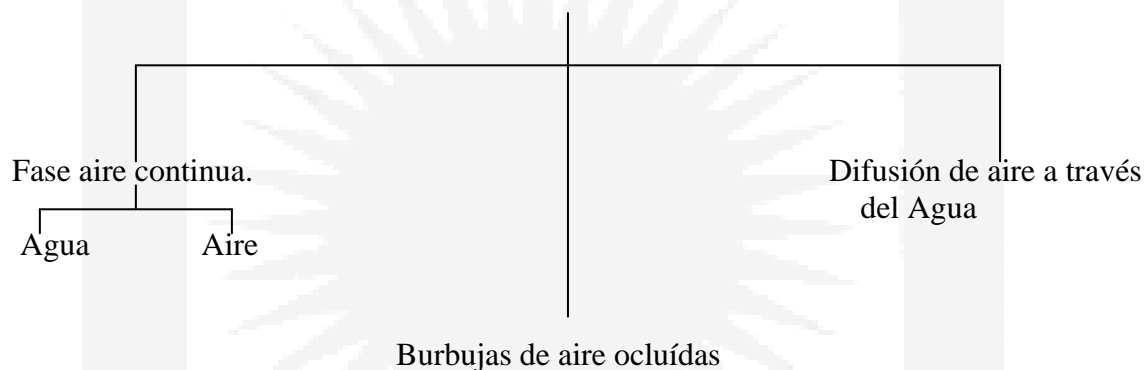
La primera es la combinación usada en este trabajo y la más ventajosa puesto que el efecto causado por un cambio en la tensión normal total puede separarse del efecto causado por un cambio en la presión de agua del poro. La presión del poro de aire para la mayoría de los problemas de ingeniería geotécnica es la atmosférica.

## 1.6 LEYES DE FLUJO

Dos de las fases de un suelo no saturado pueden clasificarse como fluidos (el agua y el aire). El análisis del flujo requiere una ley que relacione la velocidad de flujo con el potencial por medio del uso de coeficientes apropiados.

Cuando el grado de saturación es relativamente alto, el aire puede estar en forma ocluida (en burbujas), pero en grados más bajos de saturación la fase aire es predominantemente continua. Inclusive puede haber movimiento de aire a través de la fase agua (difusión de aire a través del agua de poro). En el diagrama que sigue se muestran estas alternativas:

### SISTEMAS DE FLUJO MÁS COMUNES PARA SUELOS NO SATURADOS



Para entender los mecanismos de flujo es necesario conocer el potencial, o “driving potentials” en su terminología en inglés, que causa el flujo o difusión de aire o agua.

### 1.6.1 Flujo de agua

Se han usado diversos conceptos para explicar el flujo de agua a través de un suelo no saturado. (Ejemplos: un gradiente de contenido de agua, un gradiente de succión, o un gradiente de carga hidráulica fueron considerados como potenciales o “driving potentials”).

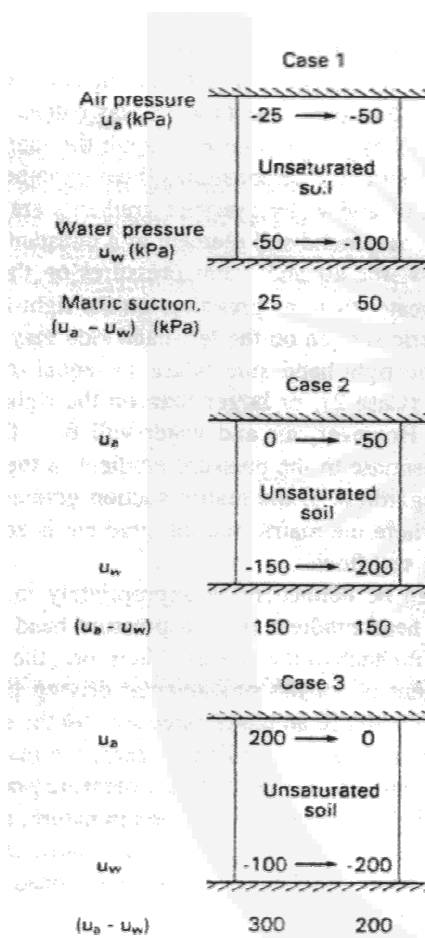
Sin embargo es importante usar la forma de la ley de flujo que gobierna fundamentalmente los movimientos del agua. Algunas veces se ha usado el gradiente en el contenido de agua para describir el flujo de agua a través de un suelo no saturado.

Se asume que el agua fluye de un punto de alto contenido de agua a uno de bajo contenido. Este tipo de ley de flujo, sin embargo, no tiene en cuenta que el agua puede también fluir de una región de bajo contenido a una de alto contenido cuando hay variaciones en un suelo complicado, efectos de histéresis o se encuentran variaciones de la historia de tensiones.

Por lo tanto el gradiente del contenido de agua no debe ser usado como potencial fundamental para el flujo de agua.

En un suelo no saturado se ha considerado algunas veces al gradiente de succión como potencial para el flujo de agua, sin embargo este no depende exclusiva y fundamentalmente del gradiente de succión, como será visto a continuación.

En la Figura 1-10 se muestran tres casos hipotéticos donde los gradientes de presión de agua y aire están controlados a través de un elemento de suelo no saturado y a una altura constante.



**Figura 1-10 (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>)**

En todos los casos las presiones de agua y aire a la izquierda son mayores que las de la derecha.

La succión a la izquierda puede ser menor (caso 1), igual (caso 2) o mayor (caso 3) que a la derecha. Sin embargo el agua fluirá de izquierda a derecha de acuerdo al gradiente de presión en las fases individuales, sin importar el gradiente de succión (en el caso 2 el gradiente de succión es cero, pero el agua y aire aún fluyen).

El flujo puede definirse más apropiadamente en términos del gradiente de carga hidráulica (“hydraulic head” en la terminología en inglés) o del gradiente altura piezométrica en este caso para cada una de las fases. Por lo tanto el gradiente de succión no es un potencial fundamental para el flujo de aguas en suelos no saturados.

En el caso especial donde el gradiente de presión de aire es cero, el gradiente de succión es numéricamente

igual al gradiente de presión en el agua. Esta es una situación común en la naturaleza, y es probablemente la razón para proponer la succión para resolver el flujo de agua. Sin embargo, la carga de altura piezométrica ha sido omitida.

El flujo de agua a lo largo del suelo no solo es gobernado por el gradiente de presión, sino también por el gradiente debido a diferencia de alturas. Los gradientes de presión y elevación

se combinan para dar el gradiente de carga hidráulica como potencial. El gradiente de carga hidráulica en una fase específica del fluido, es el potencial para el flujo en esa fase. Esto es igualmente cierto tanto para suelos saturados como no saturados.

- **Potencial para la fase agua.**

El potencial para el flujo de agua define la energía o capacidad de trabajo.

La energía se mide a través de un plano arbitrario, puesto que solo interesa el gradiente de energía entre dos puntos para describir el flujo, y en un punto A hipotético elevado sobre ese plano arbitrario tiene tres componentes primarios: gravitatoria, de presión y de velocidad.

Energía gravitatoria:

$$E_g = M_w \cdot g \cdot y \quad (1.6-2)$$

donde

$M_w$  masa de agua en el punto A  
 $g$  aceleración de la gravedad  
 $y$  elevación de A sobre el plano arbitrario

Energía de presión:

$$E_p = M_w \int_0^{p^w} \frac{V_w}{M_w} dp^w = M_w \int_0^{p^w} \frac{dp^w}{\rho_w} \quad (1.6-3)$$

donde

$V_w$  volumen de agua en el punto A  
 $p^w$  presión del agua de poro en A

Si  $\rho^w = \text{constante} \quad \rightarrow \quad E_p = \frac{M_w P^w}{\rho^w}$

Energía de velocidad

$$E_v = \frac{M_w \cdot v_w^2}{2} \quad (1.6-4)$$

donde

$M_w$  Masa de agua en el punto A  
 $v_w$  Velocidad del agua en A

Energía total:

$$E = M_w \cdot g \cdot y + \frac{M_w P^w}{\rho^w} + \frac{M_w v_w^2}{2} \quad (1.6-5)$$

$$\frac{E}{M_w \cdot g} = h_w = y + \frac{p^w}{\rho^w \cdot g} + \frac{v_w^2}{2g} \quad (1.6-6)$$

$h_w$ : altura de cargas totales (Hydraulic head o potential head en su terminología inglesa)

$y$ : altura geodésica

$\frac{p^w}{\rho^w \cdot g}$ : altura piezométrica

$\frac{v_w^2}{2g}$ : altura cinética

Conviene observar que la “Hydraulic head o potential head” es igual a la energía total en un punto expresado por unidad de peso.

La carga hidráulica o total está compuesta de:

Carga gravitacional:  $y$

Carga de presión:  $\frac{p^w}{\rho^w \cdot g}$

Carga de velocidad:  $\frac{v_w^2}{2g}$

Entonces se tiene que:  $h_w = y + \frac{p^w}{\rho^w \cdot g} + \frac{v_w^2}{2g}$  (1.6-7)

En suelos, la carga de velocidad es despreciable en comparación con la de presión y la gravitatoria, por lo que puede escribirse la (1.6-7) en una forma simplificada:

$$h_w = y + \frac{p^w}{\rho^w \cdot g} \quad (1.6-8)$$

que tiene la dimensión de una longitud y que es una cantidad mensurable y su gradiente provoca el flujo en suelos saturados y no saturados.

La succión osmótica fue incluida a veces como una componente en la ecuación del potencial total para flujo, sin embargo es mejor visualizarla como el potencial para el proceso de difusión osmótica. Este proceso consiste en mover los constituyentes iónicos o moleculares como resultado de una actividad cinética. Por ejemplo, un gradiente osmótico a través de una membrana semipermeable causa el movimiento del agua a través de la membrana.

- **Ley de Darcy para suelos no saturados.**

Esta ley se usa comúnmente para describir el flujo de agua en un suelo saturado. Darcy (1856) postuló que la velocidad del flujo de agua a través de una masa de suelo era proporcional al gradiente de carga hidráulica, o sea, que para una dirección Y se tiene:

$$v_w = -k_w \frac{\partial h_w}{\partial y} \quad (1.6-9)$$

Esto también es válido para las direcciones X y Z. El signo negativo indica que el agua fluye en el sentido que decrece la carga hidráulica.

$k_w$  es el coeficiente de proporcionalidad entre la velocidad de flujo y el gradiente de carga hidráulica y se denomina coeficiente de permeabilidad, este es relativamente constante para un suelo saturado específico.

La ley de Darcy también se aplica para el flujo en suelos no saturados, sin embargo no puede asumirse (generalmente) como constante a  $k_w$ , o mejor dicho,  $k_w$  es una variable que es predominantemente una función del contenido de agua o de la succión del suelo no saturado.

Con respecto al contenido de agua, puede imaginarse el agua fluyendo solo a través de los poros que contengan agua. Por lo tanto los poros de aire en un suelo no saturado se puede considerar que se comportan en forma similar a la fase sólida, y el suelo puede tratarse como un suelo saturado con un contenido de agua reducida. Subsecuentemente, la validez de la ley de Darcy puede verificarse para un suelo no saturado, de una manera similar que para uno saturado. Sin embargo, el volumen de agua (o contenido de agua) debe ser constante, mientras el gradiente de carga hidráulica es variable.

Resultados de distintos experimentos indican que en un contenido de agua específico, el coeficiente de permeabilidad  $k_w$  es constante para varios gradientes de carga hidráulica. Esto implica que la velocidad de flujo de agua a través de un suelo no saturado es linealmente proporcional al gradiente de carga hidráulica, siendo  $k_w$  una constante igual que en suelos saturados. Lo dicho anteriormente confirma que la ley de Darcy puede ser extendida a suelos no saturados.

- **Coefficiente de permeabilidad con respecto a la fase agua ( $k_w$ )**

$k_w$  es una medida del espacio disponible por el agua para fluir través del suelo, depende de las propiedades del fluido y de las del medio poroso. Diferentes tipos de fluidos o de suelos producen diferentes valores de  $k_w$ .

Componentes del fluido y del medio poroso.

$k_w$  puede expresarse en términos de la permeabilidad intrínseca  $K$  como se indica en la expresión que sigue:

$$k_w = \frac{\rho^w \cdot g}{\mu_w} \cdot K \quad (1.6-10)$$

donde

$\mu_w$  es la viscosidad absoluta (dinámica) del agua.

La (1.6-10) muestra la influencia de la densidad del fluido  $\rho^w$ , y de la viscosidad  $\mu_w$ , sobre  $k_w$ . La permeabilidad intrínseca  $K$  representa las características del medio poroso y es independiente de las propiedades del fluido. Las propiedades del fluido se consideran constantes durante el flujo. Las características del medio poroso, representada por  $K$ , son función de las propiedades volumen-masa del suelo.

- **Relación entre permeabilidad y propiedades volumen-masa.**

El coeficiente de permeabilidad  $k_w$  es función de dos cualesquiera de tres propiedades volumen-masa:

$$\begin{aligned} k_w &= k_w(S_w, e) \\ k_w &= k_w(e, w) \\ k_w &= k_w(w, S_w) \end{aligned} \quad (1.6-11)$$

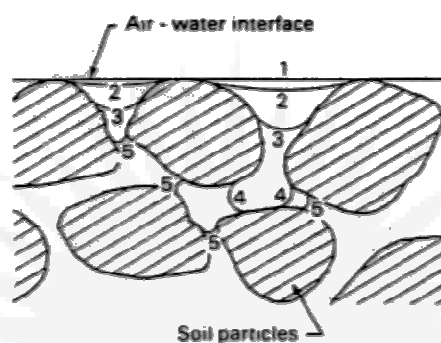
En un suelo saturado  $k_w$  es una función de la relación de vacíos  $e$ <sup>46</sup>, sin embargo se lo asume constante para problemas tales como el de flujo.

En suelos no-saturados  $k_w$  se ve significativamente afectado por el cambio combinado de la relación de vacíos  $e$  y del grado de saturación de agua  $S_w$  (ó contenido de agua  $w$ ) ya que el agua fluye a través de los poros que están llenos de agua, por lo que el porcentaje de vacíos llenos con agua es un factor importante.

Cuando el suelo se vuelve no saturado, el aire reemplaza primero los poros grandes de agua, y esto causa que el agua fluya a través de los poros más pequeños con un aumento en la tortuo-

sidad del camino de flujo. Un incremento de la succión lleva a una disminución del volumen de agua en los poros lo que provoca que la interfase agua-aire se tome más y más a las partículas de suelo.

Como resultado de esto  $k_w$  decrece rápidamente al tiempo que el espacio disponible para fluir se reduce, esta variación de  $k_w$  se observa claramente en la Figura 1-11, cuya descripción a lo largo de la variación de la succión se obtiene a partir de las ecuaciones (1.6-14).



**Figura 1-11 Efecto de la succión en la permeabilidad (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).**

- **Relación entre coeficiente de permeabilidad y grado de saturación.**

El coeficiente de permeabilidad  $k_w$  en un suelo no saturado puede variar considerablemente durante un proceso de tránsito como resultado de cambios en las propiedades volumen-masa. El cambio de la relación de vacíos  $e$  en un suelo no saturado puede ser pequeño y su efecto sobre  $k_w$  puede ser secundario. Sin embargo el efecto de un cambio en el grado de saturación  $S_w$  puede ser altamente significativo y, como resultado,  $k_w$  es frecuentemente descrito como función de la succión. Un cambio en la succión puede provocar un cambio más significativo en el grado de saturación que el que puede ser producido por un cambio en las tensiones netas. La relación entre la saturación y el grado de succión se denomina curva característica o curva succión-grado de saturación y puede según el tipo de suelo ser modelada matemáticamente (Ver párrafo 1.7).

En las figuras siguientes pueden observarse forma y valores habituales de la curva característica para distintos tipos de suelo (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>):



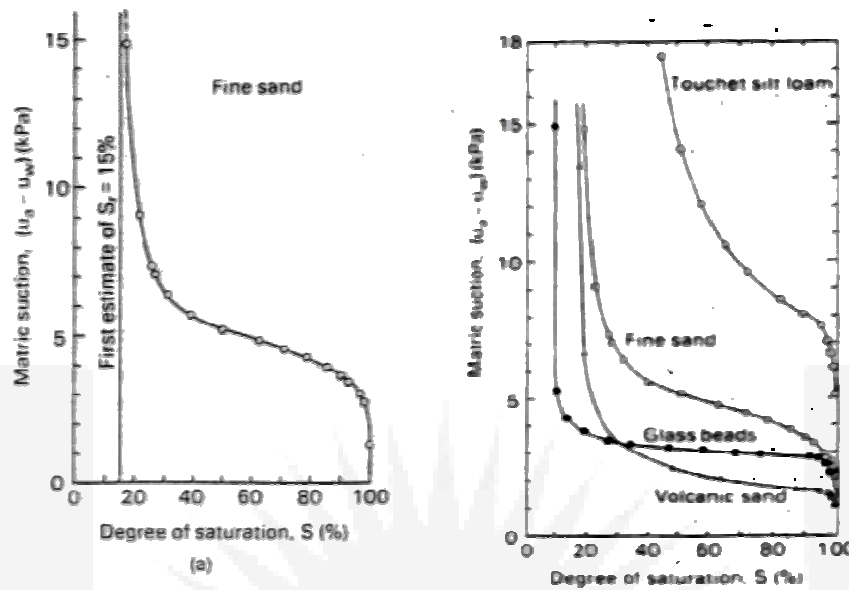


Figura 1-12 Curva Característica (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).

La función coeficiente de permeabilidad se obtiene de la relación succión-grado de saturación, propuesta por Brooks & Corey<sup>21</sup> entre otros.

Hay tres parámetros de suelo que pueden identificarse desde la curva succión-grado de saturación:

Valor de la entrada de aire del suelo  $(p^g - p^w)_b$

Grado de saturación residual  $S_{res}$

Índice de distribución del tamaño del poro  $\lambda$

Estos valores pueden ser fácilmente visualizados si la condición de saturación se expresa en términos de un grado de saturación efectivo  $S_e$

$$S_e = \frac{S_r - S_{res}}{1 - S_{res}} \quad (1.6-12)$$

donde

$S_e$  : grado efectivo de saturación

$S_{res}$  : grado residual de saturación

El grado residual de saturación,  $S_{res}$ , se define como el grado de saturación en que un incremento de la succión no produce un cambio significativo en el grado de saturación (Figura 1-12). El punto de intersección entre la pendiente recta y la ordenada de saturación. (i.e.  $S_e = 1,0$ ) define el valor de la entrada de aire del suelo. La línea inclinada para los puntos que tienen una succión más grande que el valor de entrada de aire, puede describirse mediante la siguiente ecuación (1.6-13), para  $(p^g - p^w) > (p^g - p^w)_b$ :

$$S_e = \left\{ \frac{(p^g - p^w)_b}{(p^g - p^w)} \right\}^\lambda \quad (1.6-13)$$

donde:

$\lambda$  es el índice de distribución de tamaño de poros definido como la pendiente negativa de la curva  $S_e - (p^g - p^w)$ .

Los suelos con un amplio rango de tamaños de poros tienen un valor de  $\lambda$  pequeño. La Figura 1-13 muestra valores de  $\lambda$  típicos para varios suelos obtenidos de las curvas succión-grado de saturación.

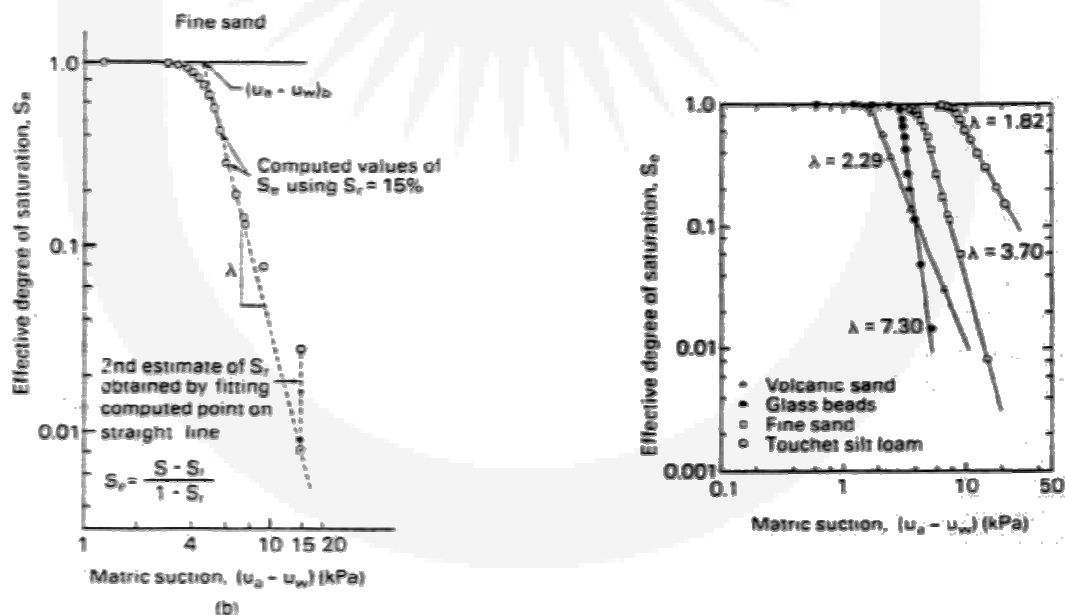


Figura 1-13 Succión vs. grado de saturación para varios  $\lambda$  (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).

Finalmente se concluye que  $k_w$  puede predecirse de la curva succión-grado de saturación como sigue:

$$\begin{aligned}
 k_w &= k_s \quad \text{para} && (p^g - p^w) \leq (p^g - p^w)_b \\
 k_w &= k_s S_e^\delta \quad \text{para} && (p^g - p^w) > (p^g - p^w)_b
 \end{aligned}
 \tag{1.6-14}$$

Donde:

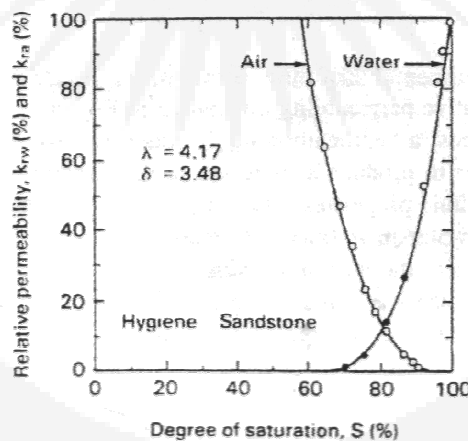
$k_s$  coeficiente de permeabilidad para suelos en saturación ( $S_w = 1$ )

$\delta$  constante empírica  $\left( \delta = \frac{2 + 3\lambda}{\lambda} \right)$

El  $k_w$  correspondiente a varios grados de saturación puede obtenerse según (1.6-14), y puede ser expresado como coeficiente de permeabilidad relativo de la fase agua

$$k_{rw} = \frac{k_w(S_w)}{k_s} \quad \text{coeficiente de permeabilidad relativa}$$

En la Figura 1-14, se observa un ejemplo de la variación del coeficiente de permeabilidad relativa con respecto a un cambio en la saturación



**Figura 1-14 Coeficiente de permeabilidad vs. Succión (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).**

**- Relación entre succión y coeficiente de permeabilidad**

El coeficiente de permeabilidad  $k_w$  puede expresarse como una función de la succión, sustituyendo  $S_e$  (1.6-13) en la función permeabilidad (1.6-14).

### 1.6.2 -Flujo de aire

La fase aire de un suelo no saturado puede encontrarse de dos formas, según puede observarse en 1.4.4. y que son las siguientes:

- fase aire continua.
- burbujas de aire ocluidas.

La fase aire generalmente se vuelve continua cuando el grado de saturación se reduce a un 85% o menos y el flujo de aire a través de un suelo no saturado, comienza en ese punto.

Bajo condiciones de ocurrencia naturales, este flujo a través de un suelo puede ocurrir por factores tales como: variaciones en presiones barométricas, infiltración de agua por lluvia que comprima el aire en los poros de suelo, y cambios de temperatura. También, en rellenos compactos, puede deberse a cargas aplicadas.

Cuando el grado de saturación es superior al 90%, la fase aire se vuelve ocluida, y el flujo de aire se reduce al proceso de difusión a través de los poros de agua.

#### - **Potencial para la fase aire.**

El flujo de aire en la forma de fase de aire continua está gobernado por la concentración o gradiente de presión. El gradiente de elevación tiene un efecto despreciable. El gradiente de presión está considerado comúnmente como el único potencial para la fase aire. Las leyes de Darcy y Fick han sido usadas para describir el flujo de aire en un medio poroso.

#### - **Ley de Fick para la fase aire**

La ley de Fick se usa frecuentemente para describir la difusión de gases a través de los líquidos. Una forma modificada puede aplicarse para proceso de flujo de aire. La primera ley de Fick establece que la velocidad de transferencia de masa de la sustancia difundida a través de un área unitaria es proporcional al gradiente de concentración de la sustancia difundida. En el caso de flujo de aire en suelos no-saturados, el medio poroso puede usarse como referencia para ser consistente con el concepto de permeabilidad para la fase agua. Esto significa que la tasa de flujo de masa y el gradiente de concentración de aire están computados con respecto a un área unitaria y a un volumen unitario de suelo, pudiendo obtenerse la siguiente formula que relaciona la velocidad del aire con el gradiente de concentración de aire:

$$J_g = -D_g \frac{\partial C}{\partial y} \quad (1.6-15)$$

El signo negativo indica que el aire fluye en el sentido que decrece el grado de concentración.

En la ecuación (1.6-15) se tiene:

$J_g$  : Velocidad de masa de aire que fluye por unidad de área de suelo.

$D_g$  : Constante de transmisión para flujo de aire en suelos.

$C$  : Concentración de aire expresado en términos de masa de aire por unidad de volumen de suelo.

$\frac{\partial C}{\partial y}$  : Gradiente de concentración en la dirección Y.

La concentración de aire es dada por:

$$C = \frac{M_a}{V_g / (1 - S_w) n} = \rho^g (1 - S_w) n \quad (1.6-16)$$

$$\rho^g = \frac{(w_g \bar{p}^g)}{RT}$$

donde

$V_g$  : Volumen de aire en el suelo

$\rho^g$  : Densidad del aire

$\bar{p}^g$  : Presión absoluta

$w_g$  : Masa Molecular Aire

Como puede verse en la (1.6-16), la densidad del aire está relacionada a la presión absoluta del aire en concordancia con la ley de los gases .

Por lo tanto, el gradiente de concentración en (1.6-15) puede expresarse en función del gradiente de presión en el aire. La medida de la presión de aire se usa en la reformulación de (1.6-15) puesto que, solo el gradiente es de importancia. Entonces

$$J_g = -D_g \frac{\partial C}{\partial p^g} \frac{\partial p^g}{\partial y} \quad (1.6-17)$$

donde

$p^g$  : Presión del poro de aire

$\frac{\partial p^g}{\partial y}$  : Gradiente de presión de aire en los poros en la dirección Y

De esta fórmula podemos obtener una forma modificada de la ley de Fick, introduciendo un coeficiente de transmisión para flujo de aire a través de suelos,  $D_g^*$  que es dado por:

$$D_g^* = -D_g \frac{\partial C}{\partial p^g} \quad (1.6-18)$$

ó

$$D_g^* = -D_g \frac{\partial [\rho^g (1 - S_w) n]}{\partial p^g} \quad (1.6-19)$$

Sustituyendo (1.6-18) ó (1.6-19) en (1.6-17), tenemos:

$$J_g = -D_g^* \frac{\partial p^g}{\partial y} \quad (1.6-20)$$

Esta forma modificada de la ley de Fick ha sido usada en Ingeniería Geotécnica para describir el flujo de aire en suelos<sup>16</sup>.

El coeficiente de transmisión,  $D_g^*$ , puede relacionarse con el coeficiente de permeabilidad de aire  $k_g$ , valor mensurable en laboratorio.

Un flujo de aire estacionario puede establecerse a través de una muestra de suelo no saturado con respecto a una succión promedio o a un grado de saturación promedio. La muestra de suelo es tratada como un elemento de suelo que tiene un valor para su coeficiente de permeabilidad de aire que corresponde a la succión o grado de saturación medio. Esto significa que suponemos que  $k_g$  es constante a lo largo de la muestra.

El flujo de aire estacionario se produce por aplicación de un gradiente de presión entre los extremos de la muestra.

La velocidad de la masa de aire que fluye se mide a una densidad de aire constante que tiende a  $\rho_{mg}$ , por lo tanto podemos reescribir la (1.6-20) para este caso particular:

$$\rho_{mg} \frac{\partial V_g}{\partial t} = -D_g^* \frac{\partial p^g}{\partial y} \quad (1.6-21)$$

ó

$$v_g = -D_g^* \frac{1}{\rho_{mg}} \frac{\partial p^g}{\partial y} = -D_g^* g \frac{\partial h_g}{\partial y} \quad (1.6-22)$$

y como por la ley de Darcy se tiene:

$$v_g = -k_g \frac{\partial h_g}{\partial y} \quad (1.6-23)$$

resulta que

$$k_g = D_g^* \cdot g \quad (1.6-24)$$

$D_g^*$  y  $k_g$  varían con las propiedades volumen-masa.

- **Coefficiente de permeabilidad con respecto a la fase aire.**

Se han propuesto diversas relaciones entre el coeficiente de permeabilidad de aire y las relaciones volumen-masa de un suelo. El coeficiente de transmisión,  $D_g^*$  puede computarse según (1.6-18) o medirse directamente con experimentos. El coeficiente de permeabilidad para la fase aire,  $k_g$ , es una función del fluido y de las propiedades volumen-masa.

Las propiedades del fluido se consideran generalmente constantes durante el flujo. Por lo tanto el coeficiente de permeabilidad de aire puede expresarse como una función de las propiedades volumen-masa del suelo. En este caso el porcentaje de volumen de aire en los poros es un factor importante dado que el aire fluye a través de los poros con aire. Cuando la succión crece o el grado de saturación decrece, el coeficiente de permeabilidad de aire crece.

- **Relación entre el coeficiente de permeabilidad de aire y el grado de saturación.**

La predicción del coeficiente de permeabilidad de aire basada en la distribución del tamaño de poros y en la curva característica o succión-grado de saturación ha sido también propuesta para la fase aire. El coeficiente de permeabilidad  $k_g$  es esencialmente la inversa de  $k_w$  y la siguiente ecuación se ha usado para describir la función  $k_g(S_e)$

$$k_g = 0.0 \quad \text{para } (p^g - p^w) \leq (p^g - p^w)_b \quad (1.6-25)$$

$$k_g = k_d (1 - S_e)^2 \left( 1 - S_e^{(2+\lambda)/\lambda} \right) \text{ para } (p^g - p^w) > (p^g - p^w)_b \quad (1.6-26)$$

donde

$k_d$ : Coeficiente de permeabilidad con respecto a la fase aire para grado de saturación cero  
 En forma análoga a lo realizado para la fase agua, podemos escribir el coeficiente de permeabilidad de aire relativo de la siguiente manera:

$$k_{rg} = \frac{k_g(S_g = 1)}{k_d} \quad (1.6-27)$$

donde

$k_{rg}$ : Coeficiente de permeabilidad de aire relativo

- **Relación entre el coeficiente de permeabilidad del aire y la succión**

Obtenemos otra forma de (1.6-26) cuando el grado de saturación efectivo,  $S_e$ , se expresa en términos de succión:

$$k_g = 0 \text{ para } (p^g - p^w) \leq (p^g - p^w)_b \quad (1.6-28)$$

$$k_g = k_d \left( 1 - \left\{ \frac{(p^g - p^w)_b}{(p^g - p^w)} \right\}^\lambda \right)^2 \left( 1 - \left\{ \frac{(p^g - p^w)_b}{(p^g - p^w)} \right\}^{2+\lambda} \right) \text{ para } (p^g - p^w) > (p^g - p^w)_b \quad (1.6-29)$$

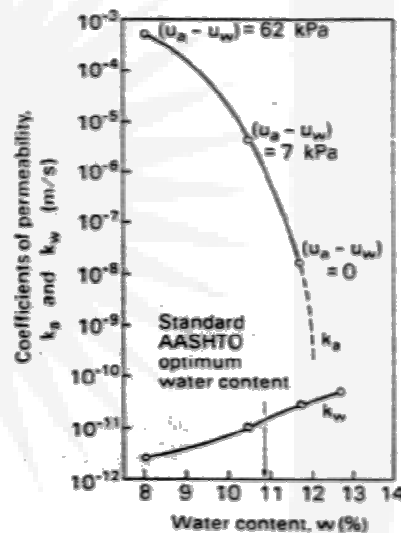
Según estudios  $k_g$  decrece cuando el contenido de agua o grado de saturación crece.  $k_g$  decrece rápidamente al acercarse al contenido de agua óptimo. En ese punto, la fase aire se vuelve ocluida, y el flujo de aire tiene lugar como difusión de aire a través del agua. El estadio ocluido para suelos con un alto contenido de arcilla, ocurre cuando el contenido de agua es mayor que el contenido de agua óptimo.

Si bien  $k_g$  decrece y  $k_w$  crece con un incremento del contenido de agua (ver Figura 1-15), los valores de permeabilidad de aire permanecen significativamente mayores que los valores de permeabilidad de agua para todos los contenidos de agua, una de las principales razones para que esto ocurra es la diferencia de viscosidad entre agua y aire.

El coeficiente de permeabilidad es inversamente proporcional a la viscosidad de fluido  $\mu$ . La viscosidad del agua  $\mu_w$  es aproximadamente 56 veces la viscosidad del aire  $\mu_g$  (condición normal de temperatura y presión).

Asumiendo que las propiedades volumen-masa no varían para los estados completamente saturado y completamente seco, el coeficiente de permeabilidad de agua saturado se espera sea 56 veces el coeficiente de permeabilidad de agua en condición seca (Este no es el caso de todos los suelos).

Otro factor que afecta la medición de  $k_g$  es el método de compactación. Una compactación dinámica usualmente tiene un  $k_g$  mayor que un suelo de la misma densidad compactado estáticamente.



**Figura 1-15: Coeficientes de permeabilidad y el contenido de agua. (Fredlund & Rahardjo<sup>29</sup>).**



El coeficiente de transmisión,  $D_g^*$  puede obtenerse dividiendo  $k_g$  por la aceleración de la gravedad,  $g$ . Si asumimos que  $g$  es constante, la función  $D_g^*$  es similar a las descritas anteriormente para la función  $k_g$ .

### - Difusión

El proceso de difusión ocurre en respuesta al gradiente de concentración.

El movimiento molecular o iónico tendrá lugar de regiones de mayores a las de menores concentraciones. Las fases agua y aire de un suelo son los medios conductivos para los procesos de difusión. El transporte de gases ( $O_2$ ,  $CO_2$ ), vapor de agua y químicos, son ejemplos de procesos de difusión en suelos.

Hay dos mecanismos de difusión habituales para suelos no saturados. El primer tipo de difusión envuelve el flujo de aire a través de los poros de agua en un suelo saturado o no saturado. Este tipo de difusión envuelve gases disueltos en agua y subsecuentemente saliendo del agua. El segundo tipo de difusión envuelve el movimiento de componentes a través de la fase agua debido a gradientes de concentración química o a gradientes de succión osmótica.

### - Difusión del aire a través del agua

La Ley de Fick puede usarse para describir el proceso de difusión.

El gradiente de concentración que provee el potencial para el proceso de difusión esta expresado con respecto a los vacíos del suelo (ejemplo fases agua y aire). En otras palabras, la velocidad de difusión de masa y el gradiente de concentración se expresan con respecto a un área o a un volumen unitario de vacíos de suelo respectivamente.

La formulación de la Ley de Fick para difusión puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -D \frac{\partial C}{\partial y} \quad (1.6-30)$$

donde

$\frac{\partial M}{\partial t}$ : Velocidad de la masa de aire difundido por unidad de área de vacíos de aire

$D$ : Coeficiente de difusión

$C$ : Concentración de aire difundido

$\frac{\partial C}{\partial y}$ : Gradiente de concentración en la dirección Y

La ecuación de difusión puede aparecer en varias formas, similares a la forma presentada para flujo de aire a través de un medio poroso.

El gradiente de concentración para gases o vapor de agua  $\frac{\partial C}{\partial y}$  puede expresarse en términos de sus presiones parciales, pudiéndose reescribir la (1.6-30) con respecto a la presión parcial del componente de difusión de la siguiente forma.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -D \frac{\partial C}{\partial p^i} \frac{\partial p^i}{\partial y} \quad (1.6-31)$$

donde:

$\frac{\partial C}{\partial p^i}$  : Cambio en la concentración con respecto a un cambio en la presión parcial

$\frac{\partial p^i}{\partial y}$  : Gradiente de presión parcial en la dirección y

$p^i$  : Presión parcial de los componentes difundidos

La tasa de masa de los componentes de difusión a través de un área unitaria de vacíos de suelo (Ej.  $\frac{\partial M}{\partial t}$ ) puede también determinarse para medir el volumen de componentes difundidos bajo condiciones de presión constantes.

Aplicamos la ley de gases ideales al componente de difusión para obtener la tasa del flujo de masa:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = p_f^i \frac{w_i}{RT} \frac{\partial V_{fi}}{\partial t} \quad (1.6-32)$$

donde

$p_f^i$  : Presión constante absoluta usada en la medición del volumen del componente de difusión.

$w_i$  : Masa molecular del componente de difusión.

$V_{fi}$  : Volumen de constituyente de difusión que pasa por unidad de área de vacíos de suelo.

$\frac{\partial V_{fi}}{\partial t} = v_{fi}$  : Tasa del flujo del componente de difusión por unidad de área de vacíos del suelo.

El cambio en la concentración del componente de difusión relativo a un cambio en la presión parcial (Ej.  $\frac{\partial C}{\partial p^i}$ ) se obtiene considerando que el cambio de densidad del componente disuelto en el poro de agua es la razón entre la masa de componente disuelto y el volumen de agua.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \left( \frac{M_{di}}{V_w} \right)}{\partial p^i} \quad (1.6-33)$$

Aplicando la ley de los gases ideales se tiene que

$$\frac{\partial C}{\partial p^i} = \frac{\partial \left( \frac{V_{di}}{V_w} p^i \frac{w_i}{RT} \right)}{\partial p^i} \quad (1.6-34)$$

donde  $V_{di}$  es el volumen de componente disuelto en el poro de agua

La razón entre el volumen del componente disuelto y el volumen de agua se refiere a un coeficiente de solubilidad  $h$ , que bajo condiciones isotérmicas, es esencialmente constante.

$$\frac{\partial C}{\partial p^i} = h \frac{w_i}{RT} \quad (1.6-35)$$

Reemplazando (1.6-33) y (1.6-34) en (1.6-32):

$$v_{fi} = - \frac{Dh}{p_f^i} \frac{\partial p^i}{\partial y} \quad (1.6-36)$$

La (1.6-36) puede aplicarse a la difusión de aire o gas a través del agua de poros en un suelo, o de agua libre o de algún otro material tal como una membrana de goma.

La presión parcial en (1.6-36) puede expresarse en términos de la carga de presión parcial,  $h_{fi}$

(Ej.  $h_{fi} = \frac{p^i}{\rho_{fi} \cdot g}$ ) con respecto a la densidad del componente,  $\rho_{fi}$  (densidad correspondiente

a la presión absoluta constante,  $\bar{p}_f^i$ , usada en la medición del volumen del componente de difusión). A  $\bar{p}_f^i$  se lo elige usualmente en correspondencia a las condiciones atmosféricas, y  $\rho_{fi}$  es la densidad del componente a la presión correspondiente. Entonces la (1.6-35) queda:

$$v_{fi} = -Dh \frac{\rho_{fi} g}{\bar{p}_f^i} \frac{\partial h_{fi}}{\partial y} \quad (1.6-37)$$

La (1.6-37) tiene una forma similar a la ley de Darcy, por lo tanto puede considerarse como una forma modificada de la Ley de Darcy para flujo de aire en suelos no saturados con burbujas de aire ocluidas, donde el flujo de aire se produce en forma de difusión, obteniéndose:

$$v_{fi} = -k_{fi} \frac{\partial h_{fi}}{\partial y} \quad (1.6-38)$$

donde  $k_{fi}$  es ese coeficiente de difusión de permeabilidad del aire a través de un suelo no saturado con burbujas de aire ocluidas y siendo

$$k_{fi} = Dh \frac{\rho_{fi} g}{\bar{p}_f^i} \quad (1.6-39)$$

Otra forma de  $k_{fi}$  puede obtenerse reemplazando en la ley de gases ideales, de forma que el coeficiente de difusión de permeabilidad del aire queda expresado de la siguiente forma:

$$k_{fi} = Dh \frac{w_i g}{RT} \quad (1.6-40)$$

La (1.6-40) indica que bajo condiciones isotérmicas, el coeficiente de permeabilidad es directamente proporcional al coeficiente de difusión dado que  $\left(\frac{hw_i g}{RT}\right)$  es constante.

Los valores de difusión para medios porosos (suelos) aparecen como más pequeños que los de difusión para agua libre. Esto ha sido atribuido a factores tales como la tortuosidad en el suelo y la alta viscosidad del agua absorbida; entonces los valores de difusión decrecen cuando el contenido de agua decrece.

En la formulación obtenida en este trabajo de tesis, este fenómeno es tenido en cuenta sólo a través de los coeficientes componentes de las matrices resultantes.

### Difusión química a través del agua.

El flujo de agua inducida por un gradiente de succión osmótica (o gradiente de concentración química) a través de una membrana semipermeable puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -D_0 \frac{\partial \pi}{\partial y} \quad (1.6-41)$$

donde

$\frac{\partial M}{\partial t}$  : Tasa de masa de agua difundida por unidad de área de una membrana semipermeable

$\frac{\partial \pi}{\partial y}$  : Gradiente de succión osmótica en la dirección y

$D_0 = D \frac{\partial C}{\partial \pi}$  : Coeficiente de difusión con respecto a la succión osmótica

$C$  : Concentración de químicos

$\pi$  : Succión osmótica

Una membrana semipermeable restringe el pasaje de sales disueltas, pero permite el pasaje de la moléculas solventes (Ej. moléculas de agua). Los suelos arcillosos pueden considerarse como membranas semipermeables a causa de las cargas negativas sobre la superficie de la arcilla.

Las sales disueltas no están libres para difundirse a través de las partículas de arcilla a causa de la absorción de los cationes a la superficie de arcilla y a la repulsión de los aniones.

Esto, sin embargo, puede no restringir completamente el pasaje de sales disueltas, como sería el caso de una membrana perfectamente semipermeable.

Por lo tanto, la difusión de agua pura a través de una membrana semipermeable no describe totalmente el mecanismo de flujo relacionado al gradiente de succión osmótica en suelos.

### 1.7 CURVA CARACTERÍSTICA SUELO AGUA.

Cuando se modela suelos no saturados, es necesario establecer una relación entre el grado de saturación y la succión de modo de poder calcular la primera a medida que se van obteniendo valores de la segunda. A esta relación se la llama curva característica suelo- agua<sup>4,49,60</sup>.

Debido a que la curva característica es utilizada para estimar varios de los parámetros utilizados en el modelado en estudio, es conveniente contar con algún método que nos permita defi-

nirla para los distintos tipos de suelo. Fredlund & Xing<sup>30</sup>, presentaron la siguiente ecuación, que permite representar una curva característica a partir de valores sacados de la curva obtenida en laboratorio.

$$S_w = \left[ 1 - \frac{\left( \ln \left( 1 + \frac{p^c}{p_r^c} \right) \right)}{\left( \ln \left( 1 + \frac{10^6}{p_r^c} \right) \right)} \right] \left[ \frac{S_{w_0}}{\left( \ln \left( e + (p^c / a)^n \right) \right)^m} \right] \quad (1.7-1)$$

Siendo

$p^c$	Valores de succión (kpa)
$p_r^c$	Valores de succión residual (kpa)
$S_w$	Valores de saturación de agua
$S_{w_0}$	Valor de inicio. (Igual a 1)

Los valores de los coeficientes son los siguientes:

$a = p_i^c$  : Valor de la succión en el punto de inflexión.

$m = 3.67 \ln \left( \frac{S_{w_0}}{S_{w_i}} \right)$ ; con  $S_{w_i}$  valor de la saturación en el punto de inflexión.

$n = \frac{1.31^{m+1}}{m S_0} 3.72 s \cdot p_i^c$

$s = \frac{S_{w_i}}{p_p^c - p_i^c}$ ; que es la pendiente de la recta de transición, con  $p_p^c$  intersección de la recta con

eje succión.

Luego de numerosos intentos, se observó que mediante la ecuación (1.7-1) podían modelarse las variaciones del contenido de agua con respecto a la succión. Mediante la normalización de dicha expresión, se obtiene la descripción de la variación del grado de saturación con respecto a la succión.

Mediante la correcta elección de los parámetros  $a$ ,  $m$  y  $n$ , se puede modelar la curva característica, permitiendo representar una variedad de posibilidades como se observa en las Figura 1-16 a Figura 1-18.

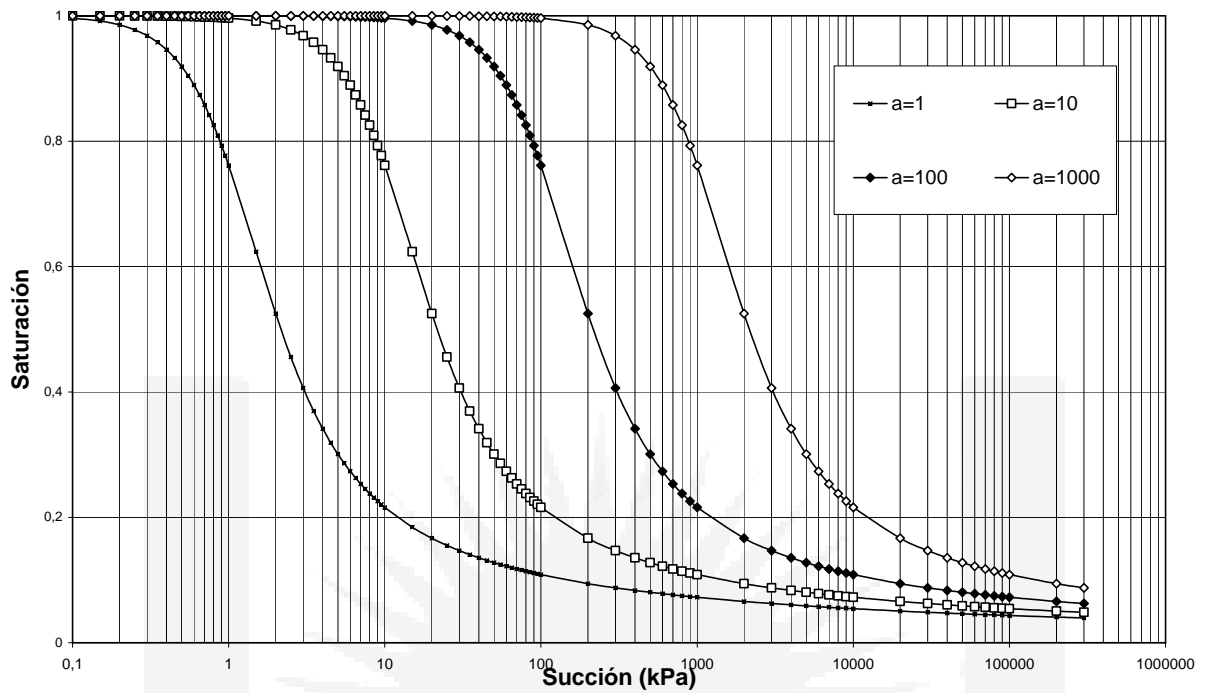


Figura 1-16 Curva característica con a variable y  $n=2, m=1$

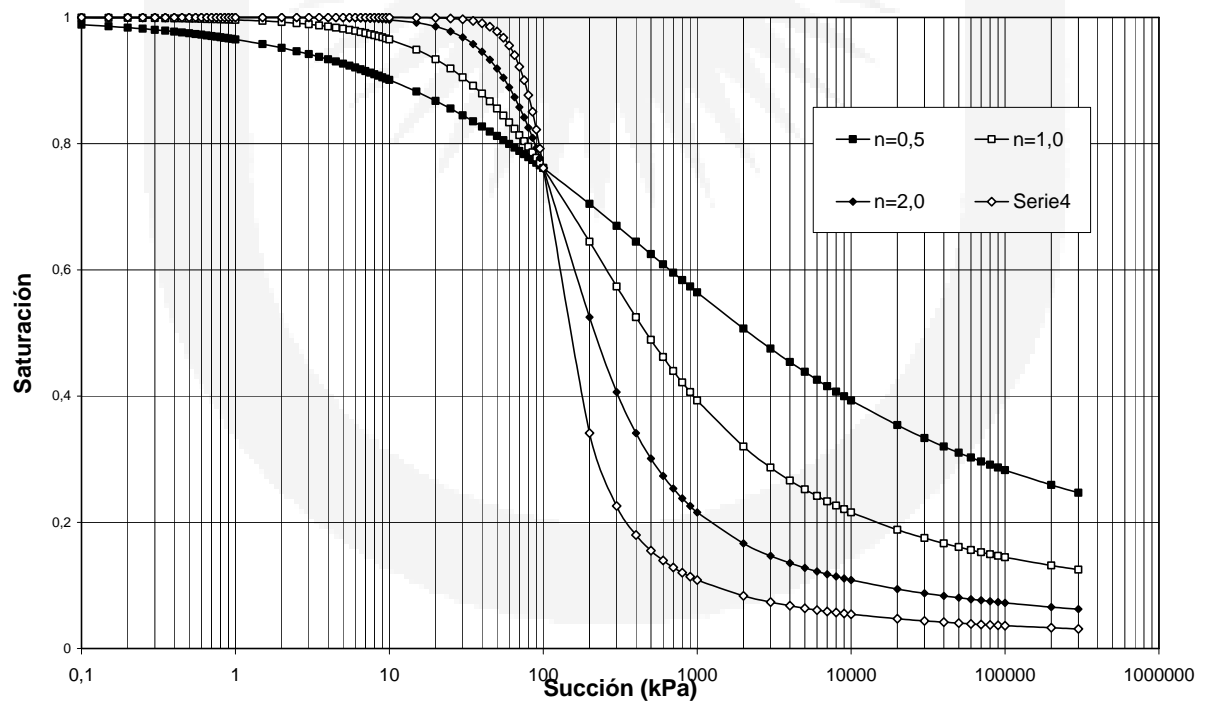
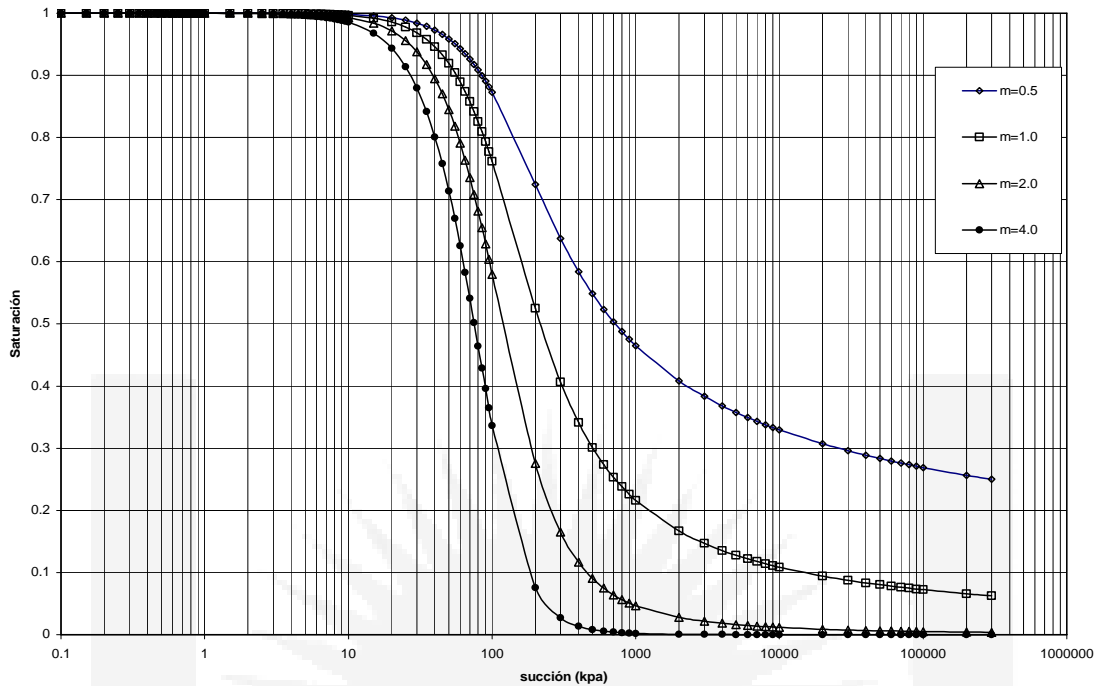


Figura 1-17 Curva característica con n variable y  $a=100, m=1$



**Figura 1-18 Curva característica con m variable y a=100, n=2**

Como puede observarse, la ecuación obtenida posee la versatilidad necesaria para describir correctamente la variación del grado de saturación con respecto a una variación en la succión, permitiendo obtener la formulación inversa e implementarla sin mayores dificultades en el programa computacional.

Otra ecuación de importancia obtenida durante la presente tesis, es la derivada de (1.7-1) que es dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial S_w}{\partial p^c} = \left[ 1 - \frac{\left( \ln \left( 1 + \frac{p^c}{p_r^c} \right) \right)}{\left( \ln \left( 1 + \frac{10^6}{p_r^c} \right) \right)} \right] \cdot S_{w_0} (-m) \left[ \ln \left( e + \left( \frac{p^c}{a} \right)^n \right) \right]^{-(m-1)} \left[ \frac{\left( n \left( \frac{p^c}{a} \right)^{(n-1)} \left( \frac{1}{a} \right) \right)}{\left( e + \left( \frac{p^c}{a} \right)^n \right)} \right] + \left[ \frac{\left( \frac{1}{p_r^c} \right)}{\left( \ln \left( 1 + \frac{10^6}{p_r^c} \right) \right) \left( 1 + \frac{p^c}{p_r^c} \right)} \right] \left[ \frac{S_{w_0}}{\left( \ln \left( e + \left( \frac{p^c}{a} \right)^n \right) \right)^m} \right] \quad (1.7-2)$$

Esta expresión será usada al resolver problemas (en el Capítulo 7) para la valoración del error entre la formulación presentada en esta tesis y otras formulaciones (referencias [12] y [40]).



**CAPÍTULO**  
**2****EL MODELO MATEMÁTICO PARA  
LA CONSOLIDACIÓN DE SUELOS  
NO SATURADOS.****2.1 OBJETIVOS.**

En este Capítulo se desarrolla un modelo matemático para la consolidación de suelos no saturados. Para esto, se hace referencia a otro modelo para la consolidación de este tipo de materia geológico desarrollado por Khalili & Khabbaz<sup>40</sup>, ampliado e implementado en computador por Beneyto<sup>10,12</sup>. En el apartado 2.4, el autor introduce la variación de la saturación en el tiempo (ecuación (2.4-4), no tomada en cuenta en referencia [40]) y se introducen dos nuevos casos (4 y 5) a los tres originalmente propuestos en la citada referencia; conduciendo lo anterior a un nuevo modelo, ecuación (2.5-13), que permite considerar efectos no tenidos en cuenta anteriormente y agregando la posibilidad de poder ser reducido fácilmente a otros más sencillos (como el presentado en las referencias [12] y [40]) con solo seguir lo indicado en el párrafo 2.6. El coeficiente indicado en la ecuación (2.3-7), no tenía explicitada forma alguna en las referencias consultadas, por lo que, basados en experiencias de laboratorio y el significado físico, ha sido propuesto por el Autor y el Mag. Ing. Pablo Beneyto.

**2.2 DESARROLLO DEL MODELO.**

El estudio de consolidación de suelos no saturados es mayormente abordado en la actualidad a través de la aplicación del método de los elementos finitos a modelos matemáticos y estos han evolucionado de manera tal que se han logrado importantes avances para predecir el comportamiento de este tipo de medio poroso con una base conceptual más fundamentada.

Desde los trabajos pioneros de Biot<sup>11,72</sup>, muchos han realizado diversas propuestas para el análisis de consolidación. Específicamente para suelos no saturados, Ghaboussi et al<sup>31</sup> presentaron un modelo bifásico, Lewis et al<sup>47</sup> desarrollaron algunos de los primitivos modelos trifásicos y Masters et al<sup>56</sup> introducen temperatura en modelos de suelos saturados mientras que Yang et al<sup>68</sup> desarrollan un modelo no saturado con inclusión del calor.

Más recientemente y basados en Hassanizadeh et al<sup>35,36,37</sup>, se han abordado problemas relativos a geomecánica ambiental (Schrefler<sup>63</sup>, entre otros). La ecuación constitutiva mecánica para suelos ha sido desarrollada por Alonso et al<sup>1</sup> y posteriormente ampliada por Khalili & Khabbaz<sup>40</sup> y Sun et al<sup>64</sup> entre otros.

Uno de los puntos controversiales en la formulación de estos modelos es el grado de saturación como elemento de acoplamiento agua - aire<sup>41</sup> y su variación con la succión. Surge a partir de la revisión realizada, que la variación de la succión torna altamente no lineal el problema<sup>41</sup> y provoca la pérdida de simetría de las ecuaciones para el caso isotérmico que es específicamente el objeto de este trabajo. Empero, no ha sido claramente analizado a través de las diferentes publicaciones revisadas, cuando es indispensable asumir el costo computacional por pérdida de simetría y cuan confiable son las simulaciones numéricas con la inclusión o no de esta succión variable.

Para abordar la cuestión, se podría simplemente tomar cualquier modelo entre alguno de los mencionados y eliminar en las ecuaciones de los que lo permitan, todos los términos que reflejen una variación de la succión y resolver lo que queda. Sin embargo, esta puede ser una tarea tediosa generadora de incertidumbre. Además, las ecuaciones remanentes pueden no ser válidas desde un punto de vista conceptual.

En cambio, aquí se toma en cuenta una línea diferente y que sigue la propuesta de Khalili et al<sup>40</sup> para el desarrollo de un modelo matemático para consolidación no saturada. Esta se basa en la combinación de diferentes estados de saturación y conduce a un sistema de ecuaciones simétricas simples. Estas, fueron depuradas e implementadas en computador usando elementos finitos con buen desempeño en ciertas circunstancias<sup>10,11</sup>. A lo largo del presente trabajo, se extendió el modelo desarrollado en referencia [10] mediante la recombinación de nuevos estados y la inclusión de la variación de la saturación con la succión. Se obtiene así un modelo cuyos resultados son comparables a los obtenidos en las referencias [29] y [47], en condiciones isotérmicas pero con un desarrollo conceptual que permite discernir entre asumir o no el costo computacional por pérdida de simetría debido a la variación de la saturación.

En relación al modelo usado para describir el comportamiento mecánico del suelo, debe mencionarse que puede ser elástico o alternativamente plástico (ver apartado 4.4).

Por último es menester resaltar que el problema de flujo en medios porosos con o sin transporte de masa es de gran importancia en muchas disciplinas de la ingeniería. El análisis de este tipo de fenómenos, sin considerar efectos térmicos, es de relevancia para el estudio de estabilidad en edificios y otras estructuras civiles como presas de tierra en el área comprendida por la región N.E. de Argentina, sur de Paraguay y S.O. de Brasil. Por esta razón resulta de sumo interés rescatar los valores de formulaciones simples y especialmente si estas pueden conservar la simetría del sistema de ecuaciones que ahorrará costo computacional en cualquier caso.

En función del modelo presentado, se ha desarrollado un código que ha permitido verificar cuales serían las condiciones más adecuadas para continuar usando modelos simples simétricos y cuales obligarían al uso de modelos más complejos. Cabe agregar que si bien el mercado ofrece códigos muy conocidos entre lo que podemos citar a Abaqus, Cleo, Code\_Aster, Compass, Rockflow, etc., la decisión de desarrollar uno se ha apoyado en la posibilidad de realizar modificaciones demandadas por problemas locales particulares y porque facilita las actividades de investigación con nuevas implementaciones.

## 2.3 ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA

### 2.3.1 Equilibrio mecánico

Para describir la relación tensión-deformación en un suelo no saturado, se considera un volumen representativo de suelo sujeto a una tensión externa total de Cauchy cuyas componentes  $\sigma_{ij}$ . El estado de tensiones en este volumen de suelo debe satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \text{con } i, j=1,2,3 \quad (2.3-2)$$

Extendiendo el concepto de tensiones efectivas<sup>32,63</sup> de Terzaghi<sup>65</sup> a suelos no saturados y considerando los efectos de las presiones de agua y aire en los poros, la tensión total con componentes  $\sigma_{ij}$  y la tensión efectiva de Cauchy con componentes  $\sigma'_{ij}$ , pueden relacionarse en forma incremental según la siguiente expresión:

$$d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij} - a_1 dp^w \delta_{ij} - a_2 dp^g \delta_{ij} \quad (2.3-3)$$

siendo  $dp^w$  y  $dp^g$  diferenciales de presión de los poros de agua y aire respectivamente,  $a_1$  y  $a_2$  los parámetros de tensión efectiva para las fases agua y aire y  $\delta_{ij}$  delta de Kronecker. Se obtuvo, a partir de la descomposición del estado general de tensiones en la suma de tensiones efectivas y presiones del poro, la siguiente forma de la ecuación de equilibrio mecánico<sup>40</sup>:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - a_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - a_2 \dot{p}^g \delta_{ij} \quad (2.3-4)$$

con

$$a_1 = \frac{c_m}{c} - \frac{c_s}{c} \quad (2.3-5)$$

$$a_2 = 1 - \frac{c_m}{c} \quad (2.3-6)$$

donde

$c_m = \frac{1}{K_m}$ : Compresibilidad de la estructura de suelo con respecto a un cambio en la succión  $p^c$ . ( $p^c = p^g - p^w$ )

$c = \frac{1}{K_T}$ : Compresibilidad drenada de la estructura de suelo

$c_s = \frac{1}{K_s}$ : Compresibilidad de los granos de sólido

$K_T = (1-\alpha) \cdot K_s$ : Módulo volumétrico del esqueleto<sup>47</sup> y “ $\alpha$ ” coeficiente de Biot<sup>12</sup>.

Originalmente Khalili & Khabbaz<sup>40</sup> no explicitan  $K_m$ . Para el presente trabajo se propone la siguiente expresión del valor de la compresibilidad de la estructura de suelo ante un cambio en la succión, basados en estudios experimentales<sup>40,63</sup>:

$$K_m = \frac{K_T K_s}{S_w K_s + S_g K_T} \quad (2.3-7)$$

siendo  $S_w$  (recordar que  $S_w = S_w(p^c)$ ) y  $S_g$  las saturaciones correspondientes a las fases agua y aire, respectivamente, y cuyas expresiones son  $S_w = V_w/V_v$  y  $S_g = V_g/V_v$  con  $V_w$  siendo el volumen del poro de agua,  $V_g$  el volumen del poro de aire y  $V_v$  el volumen de vacíos. La (2.3-7) cumple con las restricciones impuestas<sup>40</sup> dado que  $S_w \rightarrow 1$  cuando el coeficiente  $K_m \rightarrow K_T$ .

### 2.3.2 Modelo de flujo I: Fase Agua

El flujo de agua en suelos saturados y no saturados puede describirse mediante una combinación de la Ley de Darcy y de la ley de conservación de la masa de fluido.

Según Darcy<sup>45</sup> se tiene que:

$$v_{wi} = -\frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \quad (2.3-8)$$

Siendo  $k_{wi}$  la permeabilidad intrínseca de la fase agua,  $v_{wi}$  la velocidad relativa de descarga del agua y  $\gamma_w$  densidad del agua, debiendo satisfacer además la continuidad de la masa de fluido dada por:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^w n_w v_{ei}) = \frac{\partial}{\partial t} (n_w \rho^w) \quad (2.3-9)$$

expresión en la cual  $v_{ei}$  representa a la velocidad absoluta de agua en la estructura de suelo y  $n_w = V_w/V$  a la porosidad relativa al agua. Además,  $v_{wi} = n_w (v_{ei} - v_{si})$  con  $v_{si} = \dot{u}_i$ .

A partir de las expresiones anteriores, y luego de aplicar la derivada lagrangiana total con respecto a sólidos en movimiento ( $\frac{d(\bullet)}{dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + v_{si} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i}$ ), se obtiene<sup>40</sup>:

$$-\frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^w v_{wi}) = n_w \frac{1}{\rho^w} \frac{d\rho^w}{dt} + \frac{dn_w}{dt} + n_w \frac{\partial v_{si}}{\partial x_i} \quad (2.3-10)$$

Introduciendo en la expresión anterior la definición de compresibilidad del fluido. Después de una serie de operaciones algebraicas, se puede escribir que:

$$-\frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) = -n_w c_f \frac{dp^w}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV_w}{dt} \quad (2.3-11)$$

### 2.3.3 Modelo de flujo II: Fase Aire

El flujo de aire a través de un suelo no saturado es a menudo descrito usando la Ley de Fick (detalles en apartado 1.6.2). De acuerdo a la mencionada, la tasa de masa transferida por una

sustancia por difusión a través de un área unitaria  $J_{gi}$ , es proporcional al gradiente de concentración de la sustancia  $C$ .

Estos términos pueden relacionarse a través del coeficiente de difusión  $D_i$  mediante la siguiente ley<sup>29</sup>:

$$J_{gi} = -D_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (2.3-12)$$

Para condiciones isotérmicas, y teniendo en cuenta la concentración de aire con respecto a una unidad de volumen de suelo, se puede obtener una forma modificada de la ley de Fick, dada por:

$$J_{gi} = -D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \quad (2.3-13)$$

definiendo al coeficiente de transmisión para la fase aire como:

$$D_i^* = D_i \frac{w_g}{RT} (1 - S_w) (n_w + n_g) = D_i \frac{w_g}{RT} S_g (n_w + n_g) \quad (2.3-14)$$

Donde  $w_g$  es el peso molecular de la masa de aire, R la constante universal de los gases, T la temperatura absoluta y  $n_g = V_g/V$  la porosidad del aire. Usando la definición de  $J_{gi}$ , satisfaciendo la conservación de la masa de aire, y siguiendo exactamente los mismos procedimientos que para la fase agua se tiene<sup>40</sup>:

$$-\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) = -\frac{n_g}{P} \frac{dp^g}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV_g}{dt} \quad (2.3-15)$$

donde  $P$  es presión atmosférica.

Las ecuaciones (2.3-11) y (2.3-15) son las que describen el flujo de agua y aire a través de un medio poroso no saturado. Nótese que existen 2 ecuaciones y 4 incógnitas ( $p^w, p^g, V_w$  y  $V_g$ ), por lo tanto se necesitan dos ecuaciones adicionales, las cuales pueden obtenerse relacionando

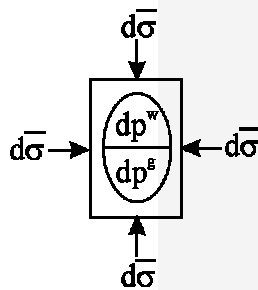
$\frac{dV_g}{dt}$  y  $\frac{dV_w}{dt}$  a las variables primarias  $p^w, p^g$  y a las componentes de desplazamientos “u”.

Esto supone habilitar las ecuaciones (2.3-4), (2.3-11) y (2.3-15) para resolverlas simultáneamente.

### 2.4 DEFORMACIÓN DEL PORO DE AGUA Y DEL PORO DE AIRE.

Para establecer las relaciones requeridas entre  $\frac{dV_w}{dt}$  y las variables primarias de fluido, Khalili & Khabbaz<sup>40</sup>, consideran un volumen representativo de medio poroso no saturado sujeto a las siguientes condiciones:

CASO (1)

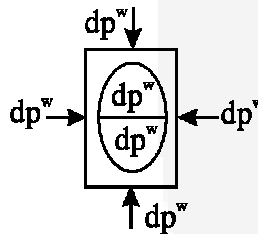


$$dV = V(c d\bar{\sigma} - (c_m - c_s) dp^w - (c - c_m) dp^g)$$

$$dV_w = ?$$

$$dV_g = ?$$

CASO (2)

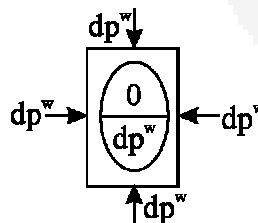


$$dV^I = V c_s dp^w$$

$$dV_w^I = n_w V c_s dp^w$$

$$dV_g^I = n_g V c_s dp^w$$

CASO (3)



$$dV^{II} = V c_m dp^w$$

$$dV_w^{II} = ?$$

$$dV_g^{II} = n_g V c_m dp^w$$

El caso (1) corresponde a una presión isotrópica externa de  $d\bar{\sigma}$ , una presión interna de agua  $dp^w$ , y una presión interna de aire  $dp^g$ .

El caso (2) se refiere a presiones externas e internas iguales a  $dp^w$ .

El caso (3) corresponde a una presión externa y de poro de aire iguales a  $dp^w$ , y presión del agua igual a cero.

A partir de este análisis, y luego de aplicar el teorema de reciprocidad a los casos [(1) - (2)], [(1) - (3)], y [(2) - (3)], Khalili y Khabbaz<sup>40</sup> obtienen la siguiente relación:

$$\frac{dV_w}{V} = \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) d\bar{\sigma} - \left[ (1 - n_g) \frac{1}{K_m} - (1 + n_w - n_g) \frac{1}{K_s} \right] dp^w - n_g \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) dp^g \quad (2.4-1)$$

la cual puede ser desarrollada según las siguientes expresiones:

$$\frac{dV_w}{V} = \alpha S_w \varepsilon_{ii} + \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) (\alpha - n) S_g dp^g - \left[ \frac{S_w}{K_s} (\alpha - n) + S_g (\alpha - n) \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) \right] dp^w \quad (2.4-2)$$

$$\frac{dV_w}{V} = \alpha S_w \varepsilon_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} (S_w S_w dp^w + S_g S_w dp^g) + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g S_w (dp^g - dp^w) \quad (2.4-3)$$

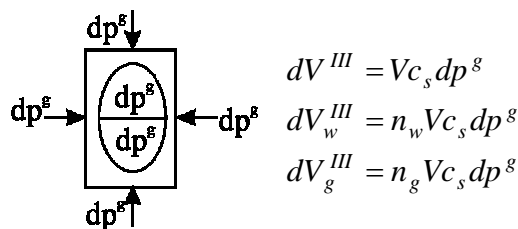
Una expresión equivalente a la anterior fue obtenida en la referencia [40]. También, en esa referencia se realiza el reemplazo de (2.4-3) en la ecuación (2.3-11). Sin embargo, allí no se tomó en cuenta la variación de la saturación con el tiempo. Ahora, agregando este tópico, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) - \frac{n S_w}{K_w} \dot{p}^w - \frac{\alpha - n}{K_s} S_w^2 \dot{p}^w + \alpha S_w \dot{\varepsilon}_{ii} - \frac{\alpha - n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\ & - \left( \frac{\alpha - n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha - n}{K_s} S_w dp^g \right) \dot{S}_w + S_w \frac{\alpha - n}{K_T} (S_g \dot{p}^c + dp^c \dot{S}_g) = 0 \end{aligned} \quad (2.4-4)$$

donde  $\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^w$  y  $n$  es la porosidad ( $n = \frac{n_g}{S_g} = \frac{n_w}{S_w}$ ).

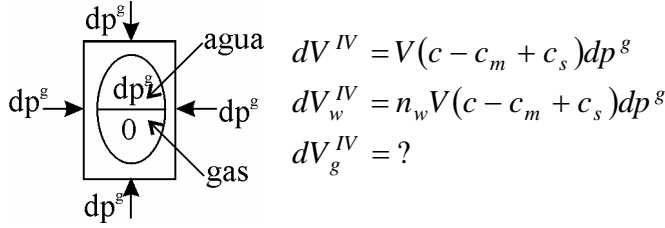
Al incorporar la tasa de saturación, la deducción de la ecuación para el aire requiere de dos nuevos estados en relación a la referencia [40]:

CASO (4)





CASO (5)



El caso (4) se refiere a presiones externas e internas iguales a  $dp^g$ .

El caso (5) corresponde a una presión externa y de poro de agua iguales a  $dp^g$ , y presión del aire igual a cero.

A partir de este nuevo análisis, aplicando el teorema de reciprocidad a los casos [(1) - (4)], [(1) - (5)], y [(4) - (5)], se obtienen las siguientes relaciones:

$$(dV - dV_w) dp^g = -dV_g^IV dp^g + V((c - c_m + c_s) d\bar{\sigma} - n_w (c - c_m + c_s) dp^w) dp^g \quad (2.4-5)$$

$$V(c - c_m + c_s)(dp^g - n_w dp^g) dp^g - dV_g^IV dp^g = V(c_s dp^g - n_w c_s dp^g) dp^g \quad (2.4-6)$$

$$(dV - dV_w - dV_g) dp^g = V c_s dp^g d\bar{\sigma} - n_w V c_s dp^g dp^w - n_g V c_s dp^g dp^g \quad (2.4-7)$$

Resolviendo las ecuaciones (2.4-5) a (2.4-7) para  $dV_g$ , se puede obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{dV_g}{V} = (c_m - c_s) d\bar{\sigma} - [(1 - n_w) c_m - (1 - n_w + n_g) c_s] dp^g - n_w (c_m - c_s) dp^w \quad (2.4-8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_g}{V} &= \alpha S_g \varepsilon_{ii} + ((c - c_m) \alpha S_w - n S_w (c - c_m)) dp^w \\ &+ ((c - c_m) \alpha S_g + c_s n S_g - c(1 - n S_w) + c_m (1 - n S_w)) dp^g \end{aligned} \quad (2.4-9)$$

$$\frac{dV_g}{V} = S_g \left[ \alpha \varepsilon_{ii} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} (S_w dp^w + S_g dp^g) - \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_w dp^c \right] \quad (2.4-10)$$

Reemplazando en la ecuación (2.3-15) y operando, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) &= -\frac{nS_g}{P} \dot{p}^g + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g^2 \dot{p}^g \\
 -\frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dt} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_g}{dt} - S_g \frac{(\alpha-n)}{K_T} \left( S_w \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) &
 \end{aligned} \tag{2.4-11}$$

## 2.5 EL MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO

Para crear un sistema de ecuaciones que pueda ser resuelta aplicando MEF, es necesario realizar algunas transformaciones sobre (2.3-4), (2.4-4) y (2.4-11) a fines de homogeneizar las incógnitas.

EQUILIBRIO MECÁNICO: recordando la ecuación (2.3-4) se tiene que:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - a_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - a_2 \dot{p}^g \delta_{ij} \tag{2.5-1}$$

Considerando en esta etapa solo pequeños desplazamientos y deformaciones, la relación tensión deformación puede expresarse:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \text{ con } \dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_k} \right) \tag{2.5-2}$$

Inicialmente, no se impondrán restricciones a la relación constitutiva  $C_{ijkl}$ , es decir, podrá ser elástica o plástica. La ecuación de equilibrio (2.3-2) en tasas es:

$$\nabla \dot{\sigma}_{ij} + \dot{F}_i = 0 \tag{2.5-3}$$

Combinando (2.5-1), (2.5-2) y (2.5-3), se obtiene la ecuación que gobierna la deformación en sólidos en términos de tasa:

$$\nabla (C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) + a_1 \nabla \dot{p}^w + a_2 \nabla \dot{p}^g + \dot{F}_k = 0 \tag{2.5-4}$$

FASE AGUA: operando a partir de la (2.4-4), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) - \frac{nS_w}{K_w} \dot{p}^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 \dot{p}^w + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\
 - \left( \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dt} + S_w \frac{\alpha-n}{K_T} \left( S_g \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{2.5-5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) - \frac{nS_w}{K_w} \dot{p}^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 \dot{p}^w + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\ & - \left( \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} \dot{p}^c + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left( S_g \dot{p}^c - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \dot{p}^c \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5-6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} - \left( \frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 + \frac{nS_w}{K_w} \right) \dot{p}^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\ & + \left[ - \left( \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left( S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \dot{p}^c = 0 \end{aligned} \quad (2.5-7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} \\ & - \left\{ \left( \frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 + \frac{nS_w}{K_w} \right) + \left[ - \left( \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left( S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w \\ & - \left\{ \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w - \left[ - \left( \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left( S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^g = 0 \end{aligned} \quad (2.5-8)$$

quedando finalmente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} \\ & - \left\{ \frac{nS_w}{K_w} - \left[ \left( \frac{\alpha-n}{K_s} \right) S_w \left( dp^w \frac{dS_w}{dp^c} - S_w - dp^g \frac{dS_w}{dp^c} \right) - \frac{(\alpha-n)}{K_T} S_w \left( S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w \\ & - \left\{ \frac{\alpha-n}{K_s} S_w \left[ S_g - (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} \right] - \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left( S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right\} \dot{p}^g = 0 \end{aligned} \quad (2.5-9)$$

FASE AIRE: las ecuaciones constitutivas correspondientes a esta fase pueden obtenerse a partir de operaciones algebraicas sobre (2.4-11) lo que significa que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) - \frac{nS_g}{P} \dot{p}^g + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g^2 \dot{p}^g \\ & - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dt} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_g}{dt} - S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_w \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5-10)$$

haciendo:  $\frac{dS_w}{dt} = \frac{dS_w}{dp^c} \frac{dp^c}{dt}$  y  $\frac{dS_g}{dt} = \frac{dS_g}{dp^c} \frac{dp^c}{dt} = -\frac{dS_w}{dp^c} \frac{dp^c}{dt}$

se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \left( \frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g^2 \right) \dot{p}^g \\ & \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dp^c} - S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \dot{p}^c = 0 \end{aligned} \quad (2.5-11)$$

Realizando la descomposición  $\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^w$ , puede expresarse la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} \\ & - \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_g + S_g \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w \\ & - \left( \frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g^2 - S_g \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right) \dot{p}^g = 0 \end{aligned} \quad (2.5-12)$$

Finalmente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que representan un modelo matemático para la formulación del problema de consolidación en suelos no saturados:

$$\left. \begin{aligned} & \nabla(C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) + a_1 \nabla \dot{p}^w + a_2 \nabla \dot{p}^g + \dot{F}_k = 0 \\ & a_1 \dot{\epsilon}_{ii} - a_{11} \dot{p}^w - a_{12} \dot{p}^g + \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) = 0 \\ & a_2 \dot{\epsilon}_{ii} - a_{21} \dot{p}^w - a_{22} \dot{p}^g + \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5-13)$$

donde los coeficientes valen:

$$\begin{aligned}
 : \quad a_1 &= \alpha S_w \\
 a_2 &= \alpha S_g \\
 a_{11} &= \left\{ \frac{nS_w}{K_w} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left( S_w + (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^w \right\} \\
 a_{12} &= \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left( S_g - (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^w \right\} \\
 a_{21} &= \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_w + (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^g \right\} \\
 a_{22} &= \left\{ \frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_g - (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^g \right\}
 \end{aligned}$$

y siendo:

$$\begin{aligned}
 C_s &= n \frac{dS_w}{dp^c} \\
 C_s^w &= -S_w \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \\
 C_s^g &= -S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right)
 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones acoplado no simétrico deducido a partir de combinación de estados que permite modelar el comportamiento del suelo no saturado ante el fenómeno de consolidación, con la posibilidad de ser reducido a otros mas simples conservando una base conceptual.

## 2.6 APLICABILIDAD GENERAL.

Para analizar la confiabilidad de la formulación obtenida en el párrafo 2.5, es conveniente intentar simular casos límites. En primer lugar, se trata la situación en que los valores de los coeficientes se adaptan al caso de granos incompresibles y saturación total:

$$\text{Si } S_w = 1 \Rightarrow a_1 = \alpha, \quad a_2 = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0, \quad a_{11} = \frac{nS_w}{K_w} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} \quad (2.6-1)$$

Estos valores aplicados al sistema (2.5-13), conduce a un sistema de ecuaciones que coincide con los obtenidos para el caso saturado<sup>23,24,40</sup>.

Se considera ahora el caso general (no saturado), pero cuando la saturación no varía con respecto a la succión (o al tiempo):

$$a_1 = \alpha S_w \quad , \quad a_2 = \alpha S_g \quad (2.6-2)$$

$$a_{11} = \left\{ \frac{nS_w}{K_w} + (\alpha - n)S_w \left[ \frac{S_w}{K_s} + \frac{S_g}{K_T} \right] \right\}, \quad a_{22} = \left\{ \frac{nS_g}{P} + (\alpha - n)S_g \left( \frac{S_g}{K_s} + \frac{S_w}{K_T} \right) \right\} \quad (2.6-3)$$

$$a_{12} = a_{21} = \left\{ (\alpha - n)S_w S_g \left( \frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_T} \right) \right\} \quad (2.6-4)$$

que son valores idénticos a los obtenidos en formulaciones simétricas, fáciles de implementar<sup>12,40</sup>. Este punto es fundamental porque pone en evidencia que al tener en cuenta la variación de la saturación con la succión, se pierde la simetría del problema isotérmico.

**CAPÍTULO****3****NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA Y  
PLASTICIDAD GENERAL.****3.1 OBJETIVOS.**

En la primera parte de este capítulo, se realiza un repaso general de los conceptos principales que son necesarios para abordar el problema de no linealidad geométrica. Se presentan diferentes tensores de deformación, posteriormente los correspondientes de tensión y las relaciones principales entre ellos.

En el párrafo 3.10, se describe un modelo no lineal geométrico hipoeelástico basado en magnitudes co-rotadas con aplicación a materiales en general. Este tipo de formulación lleva a ecuaciones constitutivas no simétricas tal como se indica en las referencias [9] y [61]. En este trabajo, el autor presenta en el párrafo 3.11, una sustitución en uno de los tensores que surgen del análisis anterior (ecuación (3.11-6)) que permite una descomposición aditiva en un simétrico y antisimétrico (ecuación (3.11-9)) ofreciendo una solución al problema de simetría dentro de ciertos límites. Este modelo fue iniciado con la colaboración de Juan Manzollillo<sup>53</sup> y terminado de implementar en computador durante la presente tesis además de expandirlo para problemas ortotrópicos y tridimensional.

En la segunda parte, se aborda brevemente el problema plástico en general haciendo un repaso de la teoría. A posteriori se extiende el análisis hasta abarcar la formulación en términos de tensiones co-rotadas. Se finaliza con algún comentario sobre plasticidad e isotropía.

**3.2 EL ANÁLISIS NO LINEAL.**

El análisis de materiales en general debe separarse entre Lineales y No Lineales. Cuando la deformación de un cuerpo sometido a cargas externas es infinitesimalmente pequeña, y la relación entre las tensiones y las deformaciones es linealmente elástica, las cargas y los

desplazamientos del cuerpo mantienen en todo momento una relación lineal. Cuando alguno de los supuestos anteriores no se cumple, las cargas y los desplazamientos seguirán una relación no lineal.

Dentro de los problemas no lineales de la mecánica de los sólidos se puede distinguir dos grandes grupos: la No Linealidad Física, y la No Linealidad Geométrica. La No Linealidad Física, también llamada No Linealidad del Material, se presenta cuando la relación constitutiva entre tensiones y deformaciones va cambiando para distintos niveles de carga, es decir, no es constante a lo largo del proceso de deformación. La no Linealidad Geométrica, en cambio, aparece cuando el cuerpo experimenta grandes desplazamientos o deformaciones, que producen cambios significativos en su configuración geométrica al avanzar el proceso de carga.

Por supuesto que existen otros tipos de no linealidad como por ejemplo la que aparece en la mecánica de los sólidos por cambio en las condiciones de borde (o contorno) a lo largo del proceso de deformación, pero no serán aquí abordadas.

El problema básico en el análisis no lineal, es encontrar la configuración carga – desplazamiento que garantice el equilibrio del cuerpo en cualquier instante de tiempo. Esta definición no permite a priori detectar la diferencia con un caso lineal, sin embargo la diferencia subyace en el hecho que tanto la geometría como las características mecánicas del material no permanecen constantes a lo largo de ese tiempo como sí ocurría en el caso lineal. Utilizando la nomenclatura discreta (entiéndase “discreta” o “en ciertos puntos elegidos del continuo”) que ofrece elementos finitos (se verá en detalle en 5.2), se busca obtener en cada instante  $t+\Delta t$  el equilibrio entre las cargas nodales externas  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}}$  y las fuerzas nodales correspondientes a las tensiones internas del cuerpo  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}$ .

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{0} \quad (3.2-1)$$

En todo análisis considerando no linealidad geométrica, el equilibrio del sistema debe ser alcanzado sobre la geometría actual o deformada del cuerpo. Obviamente, como esta es aún desconocida, el equilibrio se plantea gradualmente (en forma iterativa) sobre configuraciones intermedias que terminan llevando a la configuración definitiva, tras aceptar un cierto valor de error.

Los problemas a resolver durante la presente son los denominados “dependientes de la trayectoria”, en los que se requiere resolver la (3.2-1) en todo el rango de tiempo precedente, para lo



cual se utiliza una solución incremental paso a paso. Esto es debido a que se incluye el problema plástico y al modo en que se ha elegido resolver el problema no lineal geométrico, como se verá más adelante.

En la solución incremental paso a paso se asume que la solución para el tiempo  $t$  es conocida y que la relación carga – desplazamiento en el incremento de tiempo  $\Delta t$  es lineal:

$${}^t \mathbf{K} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (3.2-2)$$

donde  ${}^t \mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del sistema de elementos finitos, tangente a la relación carga – desplazamiento, y  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  es el incremento de desplazamientos nodales (o respuesta) que experimenta el cuerpo en el intervalo  $\Delta t$  debido al incremento  $\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}}$  de las cargas externas:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} = {}^t \mathbf{F}_{\text{ext}} + \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.2-3)$$

Los desplazamientos nodales al tiempo  $t+\Delta t$  resultan:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}} = {}^t \hat{\mathbf{u}} + \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (3.2-4)$$

pudiéndose calcular también las tensiones y fuerzas nodales internas:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}} = {}^t \mathbf{F}_{\text{int}} + \Delta \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (3.2-5)$$

donde  $\Delta \mathbf{F}_{\text{int}}$  es el incremento de las fuerzas internas en el intervalo  $\Delta t$ . Debido a que el comportamiento real del cuerpo es no lineal, la solución anterior está sujeta a errores, cuya magnitud depende del tamaño del paso de tiempo  $\Delta t$  (o de carga) utilizado, por lo tanto será necesario iterar hasta que la solución (3.2-1) sea alcanzada con suficiente precisión. Los métodos de iteración ampliamente utilizados en los análisis no lineales de elementos finitos están basados en la técnica de Newton–Raphson. En este trabajo en particular se optó por utilizar la técnica de Newton–Raphson Modificado<sup>6</sup>

### 3.3 LA DEFORMACIÓN.

Una descripción detallada de este tema puede verse en Simo & Hughes<sup>61</sup>(capítulo 7). Se llama deformación al movimiento total que sufre una fibra de material, el cual es resultado de desplazamientos más deformaciones específicas (o elongaciones) de la fibra. El movimiento o deformación del cuerpo se describe por una función  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  que representa la posición espacial de la partícula, como una función del tiempo, a través de las coordenadas espaciales o Eulerianas, dadas por:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (3.3-1)$$

con  $\mathbf{X}$  las coordenadas materiales o referenciales y  $t$  el tiempo.

Luego, el desplazamiento de una partícula es la diferencia entre su posición actual y original:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (3.3-2)$$

La descripción de la deformación depende de la elección de las variables independientes, es decir, si se colocan las variables del problema en función de las coordenadas materiales, se tendrá una descripción Lagrangiana, en cambio, si las variables dependientes están en función de las coordenadas espaciales, resultará una descripción Euleriana. La elección del marco para describir la deformación llevará también consecuencias sobre la malla de elementos finitos a usar:

Malla Lagrangiana de elementos finitos: está fija en las coordenadas materiales, es decir está ‘pegada’ a la materia, en consecuencia los elementos se deforman junto con el material, permaneciendo la malla coincidente con el cuerpo a lo largo de toda la deformación. Esto puede producir severas distorsiones en los elementos, por lo tanto resulta útil cuando es limitada la magnitud de la deformación que puede ser simulada. Es la más natural y efectiva a ser utilizada en problemas de mecánica de sólidos.

Malla Euleriana: está fija en las coordenadas espaciales, manteniéndose la forma y tamaño de los elementos constantes a lo largo de la deformación. Por supuesto, la malla no permanece coincidente con el cuerpo y se produce traspaso de materia a través de los contornos de los elementos. Tiene mayor aplicación en problemas de mecánica de fluidos, donde se estudia el comportamiento de la materia que atraviesa un volumen de control estacionario

Malla ALE<sup>9</sup>: Usada en problemas de interacción fluido estructura y casos similares ya que permite la transición entre los dos tipos mencionados.

Para este trabajo se adoptó la descripción “Lagrangiana Actualizada”: Las medidas de tensiones, deformaciones, derivadas e integrales se realizan sobre las coordenadas espaciales o Euleriana, es decir, las variables están descriptas en la configuración actual pero la malla de elementos finitos es Lagrangiana, es decir, permite que se realicen derivadas totales sobre magnitudes espaciales sin tener que recurrir a derivadas convectivas<sup>9</sup>.

### 3.4 MEDIDAS DE DEFORMACIONES.

Brevemente se mencionarán algunos tensores de deformación muy usados:

**Gradiente de deformación:**

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \text{ ó } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.4-1)$$

Describe todas las deformaciones específicas (o elongaciones), desplazamientos y rotaciones que sufre una fibra de material desde la configuración original o de referencia (tiempo 0) hasta la configuración deformada actual (tiempo  $t$ ). Así, por la regla de diferenciación en cadena, la fibra de material, de longitud  $d\mathbf{X}$  en la configuración de referencia, en el tiempo  $t$  está dada por:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} \quad (3.4-2)$$

o, inversamente, también se puede escribir:

$$d\mathbf{X} = [\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.4-3)$$

donde:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.4-4)$$

Una importante propiedad del gradiente de deformación es que puede ser descompuesto en un único producto de dos tensores, un tensor simétrico definido positivo  $\mathbf{U}$ , llamado tensor derecho de elongaciones, y un tensor ortogonal  $\mathbf{R}$ , llamado tensor rotacional:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t)\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (3.4-5)$$

Por el principio de conservación de masa, que expresa la indestructibilidad e impenetrabilidad de la materia, el determinante del gradiente de deformación, también conocido como determinante Jacobiano<sup>48</sup>, viene dado por:

$$J(\mathbf{X}, t) = \det[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] \equiv \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{d\mathbf{B}} = \frac{\rho_0}{\rho} > 0 \quad (3.4-6)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en la configuración inicial  $\mathbf{B}$  y  $\rho$  es la densidad de masa en la configuración actual  $\varphi(\mathbf{B})$ . La tasa (o derivada material) del determinante Jacobiano

$$\dot{J} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \text{div}(\mathbf{v}) \quad (3.4-7)$$

donde  $v_i$  son las componentes de la velocidad  $\mathbf{v}$ .

**Tensor de deformación de Green:**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (3.4-8)$$

**Gradiente espacial de velocidad  $\mathbf{L}$**

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v}, \text{ ó } L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.4-9)$$

Por la regla de diferenciación en cadena, también se puede escribir:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.4-10)$$

Además se cumple que  $\dot{J} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \text{ traza}(\mathbf{L})$

**Tasa de deformación o velocidad de deformación. Tensores de rotación:**

El gradiente espacial de velocidad puede ser descompuesto aditivamente en una parte simétrica  $\mathbf{D}$  y otra antisimétrica  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3.4-11)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor velocidad de deformación y  $\mathbf{W}$  es el tensor de giro (o tensor vorticidad), dados por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \text{ ó } D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4-12)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \text{ ó } W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4-13)$$

**Tasa de deformación co-rotada:**

Es una medida de deformación muy utilizada en el análisis no lineal de materiales sin isotropía, y viene dada por:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \quad (3.4-14)$$

**Tasa de la deformación logarítmica simétrica**

Para definir la tasa, debemos definir primero a la deformación logarítmica<sup>51</sup> simétrica como:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\ln \mathbf{U} + (\ln \mathbf{U})^T] \quad (3.4-15)$$

La tasa será

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}) \quad (3.4-16)$$

### Tensores de deformación incrementales

En el cálculo incremental será necesario definir algunos tensores de deformación expresados como incrementos y no en tasas. Así surgen, por ejemplo, el tensor gradiente espacial del incremento de desplazamientos, definido análogamente a (3.4-9) como:

$$\nabla\Delta\mathbf{u} = \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}, \text{ ó } \Delta u_{i,j} = \frac{\partial\Delta u_i}{\partial x_j} \quad (3.4-17)$$

La parte simétrica de este tensor es el incremento de deformación lineal espacial, definida sobre la configuración actual deformada, y cuya expresión, análogamente a (3.4-12), está dada por:

$$\Delta\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla\Delta\mathbf{u} + \nabla\Delta\mathbf{u}^T), \text{ ó } \Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\Delta u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.4-18)$$

### Tensores tasa de deformación incremental

Expresando (3.4-18) en forma de tasas, y recordando la (3.4-14), se obtiene:

$$\frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t} + \nabla\frac{\Delta\mathbf{u}^T}{\Delta t}\right), \text{ ó } \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.4-19)$$

### Relaciones entre magnitudes:

a) Teniendo en cuenta (3.4-5), tomando la tasa de  $\mathbf{F}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{F} = (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T)\mathbf{F} = \\ \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (3.4-20)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es un tensor de giro antisimétrico, expresado como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \mathbf{L} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T, \text{ ó } \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{R} \text{ antisim}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1})\mathbf{R}^T \quad (3.4-21)$$

Usando la (3.4-10) y la segunda de (3.4-20), se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \quad (3.4-22)$$

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \quad (3.4-23)$$

Se observa inmediatamente que para una variación como cuerpo rígido del movimiento, esto es  $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$ , resulta  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}$ .

b) En contraste con la deformación de Green, la velocidad de deformación es una medida en tasas. Tomando la derivada en el tiempo de (3.4-8), y llevando en cuenta a (3.4-10) y (3.4-12), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \quad (3.4-24)$$

Esta última expresión es similar a la deformación usada en teoría infinitesimal excepto que involucra derivadas sobre la configuración actual deformada de la tasa de los desplazamientos.

c) Considerando la expresión (3.4-14), podemos compararla con (3.4-22) y se obtiene la expresión:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) \quad (3.4-25)$$

la que, al igual que  $\mathbf{D}$ , sólo presenta valores no nulos cuando existe una variación en las elongaciones, es decir  $\dot{\mathbf{U}} \neq \mathbf{0}$ , o en otras palabras,  $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$  ante variaciones como cuerpo rígido del movimiento.

d) Considerando las expresiones (3.4-16) y (3.4-25) se obtiene:

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) = \dot{\bar{\mathbf{e}}} \quad (3.4-26)$$

En la anterior queda claramente establecido que la tasa de deformación corrotada equivale a la tasa de deformación logarítmica.

### 3.5 MEDIDAS DE TENSIONES.

En la mecánica no lineal de los medios continuos se utilizan normalmente varios medidas de tensiones además del clásico tensor de Cauchy, “ $\boldsymbol{\sigma}$ ”. Brevemente, mencionaremos algunos de ellos y especialmente los usados en esta tesis:

**Primer tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$ :**

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.5-1)$$

**Segundo tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ :**

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (3.5-2)$$

Detalles de estos, se pueden ver en [50], entre otros autores.

Otras medidas de tensiones pueden definirse también a partir del principio de conservación de energía<sup>9,61</sup>. Estableciendo la igualdad de la potencia mecánica (o tasa de energía) específica en la configuración inicial o sin deformación,  $\rho_0 \dot{w}$ , se puede escribir:

$$\rho_0 \dot{w} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}} \quad (3.5-3)$$

y en base a las definiciones de las medidas de deformaciones, dadas en la sección 3.4, se puede despejar las relaciones entre las distintas medidas de tensiones

**Tensor de tensiones de Kirchhoff:**

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (3.5-4)$$

**Tensor co-rotado de la tensión de Kirchhoff** (o simplemente tensión co-rotacional de Kirchhoff):

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} = J\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{P}\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U} \quad (3.5-5)$$

**Tensor tasa de Jaumann de la tensión de Cauchy:**

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T \quad (3.5-6)$$

**Tensor tasa de Jaumann del tensor de Kirchhoff:**

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^T \quad (3.5-7)$$

**Tensor tasa de Truesdell de la tensión de Cauchy:**

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \text{traza}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma} \quad (3.5-8)$$

**Tensor derivada de Lie de la tensión de Kirchhoff:**

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{F}^T = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{L} \quad (3.5-9)$$

**Tensor tasa de Green-Naghdi de la tensión de Cauchy:**

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla G} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega}^T \quad (3.5-10)$$

**Tensor tasa de Green-Naghdi de la tensión de Kirchhoff:**

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla G} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^T \quad (3.5-11)$$

### 3.6 MOVIMIENTOS SUPERPUESTOS DE CUERPO RÍGIDO. OBJETIVIDAD.

Considérese un movimiento de cuerpo rígido superpuesto a la deformación  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ . La posición  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$  de cada partícula  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  cambia a:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} = \varphi(\mathcal{B}) \quad (3.6-1)$$

donde  $\mathbf{c}(t)$  es una función sólo del tiempo que representa un desplazamiento, y  $\mathbf{Q}(t)$  es una matriz ortogonal, función sólo del tiempo, que representa una rotación. El movimiento es llamado rígido porque se preserva la distancia entre dos puntos cualesquiera  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}$ , o sea que:

$$\mathbf{x}_1^+ - \mathbf{x}_2^+ = \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \Rightarrow \|\mathbf{x}_1^+ - \mathbf{x}_2^+\|^2 = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 \quad (3.6-2)$$

donde  $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  es el cuadrado de la distancia Euclidiana.

El gradiente de deformación, ante un movimiento de este tipo, se transforma en:

$$\mathbf{F}^+ = \frac{\partial \mathbf{x}^+}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{F} \quad (3.6-3)$$

Un tensor espacial se dice objetivo cuando ante un movimiento como cuerpo rígido se transforma según las reglas de transformación de tensores, es decir, para tensores de segundo orden, según el doble producto de matrices de rotación:

$$(\bullet)^+ = \mathbf{Q}(t) \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{Q}(t)^T \quad (3.6-4)$$

donde  $(\bullet)$  es un tensor objetivo de segundo orden.

El gradiente espacial de velocidad, teniendo en cuenta (3.4-10) y (3.6-3), resulta:

$$\mathbf{L}^+ = \dot{\mathbf{F}}^+ \cdot (\mathbf{F}^+)^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.6-5)$$

el cual no se transforma objetivamente debido al término adicional antisimétrico  $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T$ . Sin embargo, de acuerdo a (3.4-12) y (3.6-5), la velocidad de deformación se transforma objetivamente:

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.6-6)$$

Mientras que, de acuerdo a la (3.4-13), el tensor rotación resulta no objetivo:

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.6-7)$$

Los tensores materiales, que son tensores definidos en la configuración de referencia, permanecen inalterados ante movimientos espaciales superpuestos de cuerpo rígido. Así, por ejemplo, de (3.4-8) y (3.6-3):

$$\mathbf{E}^+ = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^+)^T \cdot \mathbf{F}^+ - \mathbf{I}^+] = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \equiv \mathbf{E} \quad (3.6-8)$$

Lo mismo sucede con  $\mathbf{U}$ , de (3.4-5) y (3.6-3):

$$\mathbf{U}^+ = [(\mathbf{F}^+)^T \cdot \mathbf{F}^+]^{1/2} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})^{1/2} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{1/2} \equiv \mathbf{U} \quad (3.6-9)$$



El tensor rotación queda:

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{F}^+ \cdot (\mathbf{U}^+)^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \quad (3.6-10)$$

y también, de (3.4-21):

$$\mathbf{\Omega}^+ = \dot{\mathbf{R}}^+ \cdot (\mathbf{R}^+)^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.6-11)$$

El tensor de tensiones de Cauchy es objetivo, es decir que cumple:

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.6-12)$$

pero su tasa, que viene dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}^T + (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (3.6-13)$$

resulta claramente no objetiva debido a los últimos dos términos.

Análogamente, el tensor de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  es objetivo, es decir:

$$\boldsymbol{\tau}^+ = J\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.6-14)$$

sin embargo, su tasa es no objetiva:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^+ = \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{Q}^T + (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^+ \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (3.6-15)$$

Al igual que los tensores materiales, los tensores espaciales definidos en configuración corrotada, como por ejemplo (3.4-14) y (3.5-5), se mantienen inalterados ante movimientos espaciales superpuestos de cuerpo rígido:

$$\bar{\mathbf{D}}^+ = (\mathbf{R}^+)^T \cdot \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \equiv \bar{\mathbf{D}} \quad (3.6-16)$$

y

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^+ = (\mathbf{R}^+)^T \cdot \boldsymbol{\tau}^+ \cdot \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (3.6-17)$$

Por supuesto, los escalares tampoco se ven afectados por estos movimientos de cuerpo rígido. Por ejemplo, de (3.4-6) y (3.6-3), y teniendo en cuenta que el determinante de cualquier matriz de rotación es igual a la unidad, se obtiene:

$$J^+ = \det(\mathbf{F}^+) = \det(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) \equiv J \quad (3.6-18)$$

Otros tensores, como los (3.5-6) a (3.5-11), son también objetivos pero no se demuestran.

### 3.7 INFLUENCIA DE LA OBJETIVIDAD EN LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS.

En las soluciones incrementales (mas adelante se darán detalles) las ecuaciones constitutivas relacionan tasas de tensiones con tasas de deformaciones específicas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}, \text{ ó } \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (3.7-1)$$

Pero la anterior no es una ecuación válida a ser utilizada cuando se producen rotaciones de cuerpo rígido como se muestra en Belytschko et al<sup>9</sup>.

Las rotaciones como cuerpo rígido son tenidas en cuenta por las tasas objetivas de los tensores de tensiones. El tensor de Jaumann (3.5-6), por ejemplo, es una medida objetiva y presenta una ecuación constitutiva en tasa de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}, \text{ ó } \sigma_{ij}^{\nabla J} = C_{ijkl}^{\sigma J} D_{kl} \quad (3.7-2)$$

donde  $\mathbf{C}^{\sigma J}$  es el tensor constitutivo de cuarto orden, que contiene las características del material, correspondiente a esta medida de tensiones. Por lo tanto, la forma correcta de la ecuación (3.7-1), para el cálculo de la tasa del tensor de Cauchy, es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T = \underbrace{\mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}}_{\text{material}} + \underbrace{\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T}_{\text{rotación}} \quad (3.7-3)$$

Se aprecia que el cálculo de la tasa del tensor de Cauchy está compuesto de dos partes: la respuesta objetiva del material, debido a deformaciones específicas, y el cambio de las tensiones debido a las rotaciones de cuerpo rígido.

Cualquiera de los tensores tasas objetivas anteriores puede ser utilizado para calcular  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ; en consecuencia, para que el resultado no varíe, los tensores constitutivos  $\mathbf{C}$  deben definir según la tasa objetiva elegida. Por lo tanto, se les agrega superíndices para especificar la tasa objetiva a la que está asociada.

Por último, también se pueden definir la ecuación constitutiva en términos de magnitud corrotada, especialmente usada en esta tesis:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}} \quad (3.7-4)$$

Una ecuación como la (3.7-4), es insensible a cualquier movimiento espacial superpuesto de cuerpo rígido. En (3.6-16) se demostró que  $\bar{\mathbf{D}}^+ = \bar{\mathbf{D}}$ , en tanto, la tasa de la tensión corrotada de Kirchhoff, partiendo de (3.5-5), realizando la derivada en forma semejante de como se hizo en (3.6-13) en términos de  $\mathbf{R}$  y conformando los productos para poder usar (3.4-21), resulta:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T \cdot (\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{R} \quad (3.7-5)$$

Además, observando la (3.7-5) y la (3.5-11) vemos que la tasa de tensión corrotada de Kirchhoff equivale al tensor tasa de Green Naghdi de Kirchhoff corrotada:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau}^{\nabla G} \cdot \mathbf{R} \quad (3.7-6)$$

Luego, a partir de que (3.5-11) es objetiva y usando (3.6-10), se obtiene:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^+ = \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.7-7)$$

De esta forma, como  $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$  también es insensible a rotaciones de cuerpo rígido, lo será la relación (3.7-4).

### 3.8 FORMA DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EXPRESADA EN TASAS.

La descripción Lagrangiana de la ecuación de movimiento, o ecuación de conservación de momento, está dada por<sup>9</sup> :

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \tilde{\mathbf{B}} = \rho_0 \mathbf{A}, \quad \text{ó} \quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 \tilde{B}_i = \rho_0 \frac{\partial V_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad \text{en } B \quad (3.8-1)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en la configuración de referencia  $B$ ,  $\mathbf{P}$  es la primer tensión de Piola-Kirchhoff,  $\tilde{\mathbf{B}}$  son las fuerzas de masa,  $\mathbf{A}$  las fuerzas de inercia y  $\mathbf{V}$  velocidad en coordenadas materiales. Además, las fuerzas de superficie vienen dadas por:

$$\bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{P} \mathbf{n}_0|_{\partial_1 B} \quad (3.8-2)$$

donde  $\bar{\mathbf{t}}_0$  es la fuerza por unidad de área prescrita en una porción  $\partial_1 B$  del contorno  $\partial B$ .

En problemas estáticos las aceleraciones (o fuerzas de inercia) son despreciadas, obteniéndose la ecuación de equilibrio:

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad \text{en } B \quad (3.8-3)$$

La forma en tasas de esta ecuación, necesaria en las soluciones incrementales, se calcula asumiendo que las cargas de masa  $\tilde{\mathbf{B}}$  y las de superficie  $\bar{\mathbf{t}}_0$  son configuracionalmente independientes, es decir, no dependen de la deformación  $\varphi$ . Entonces, la ecuación de equilibrio en tasas se escribe como:

$$\text{DIV } {}^t \dot{\mathbf{P}} + \rho_0 \dot{\tilde{\mathbf{B}}} = \mathbf{0} \quad \text{en } B \quad (3.8-4)$$

que es una expresión válida para un incremento de carga dado por  $\dot{\tilde{\mathbf{B}}}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{t}}}_0$  en un cierto tiempo fijo  $t$ .

La deducción de la forma débil de (3.8-4) puede verse en las referencias [9], [53] y [61] con ligeros cambios entre versiones, llegándose a:

$$\int_{{}^t \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{L} : [{}^t \mathbf{L} \cdot {}^t \boldsymbol{\tau} + {}^t L_v \boldsymbol{\tau}] \frac{d\varphi(B)}{J} = \int_{{}^t \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{{}^t \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\bar{\mathbf{t}}} \cdot d\partial\varphi(B) \quad (3.8-5)$$

De acuerdo a referencia [61] se puede sustituir  ${}^t\boldsymbol{\eta}$  por  ${}^t\mathbf{v}$ , y  ${}^t\nabla\boldsymbol{\eta}$  por  ${}^t\mathbf{L} = {}^t\nabla\mathbf{v}$  (la velocidad espacial, en un tiempo fijo  $t$ , es una variación admisible  ${}^t\mathbf{v} \in V_{t,\varphi}$ ). En el apartado siguiente (3.9), se verá que la relación constitutiva para el tensor derivada de Lie viene dada por:  $L_v\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau : \mathbf{D}$ , entonces, la (3.8-5) queda expresada:

$$\int_{{}^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{L} : [{}^t\mathbf{L} \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} + {}^t\mathbf{C}^\tau : {}^t\mathbf{D}] \frac{d\varphi(B)}{J} = \int_{{}^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{{}^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{t}} \cdot d\partial\varphi(B) \quad (3.8-6)$$

Esta es la forma débil de la ecuación de equilibrio expresada en tasas, que permite calcular, en un cierto tiempo  $t$ , la velocidad espacial actual  ${}^t\mathbf{v}$ , para una cierta carga, dada por el miembro derecho de (3.8-6), sobre una cierta configuración  ${}^t\varphi$  en la que se halla en equilibrio un cierto campo de tensiones  ${}^t\boldsymbol{\tau}$ . En la anterior,  $\dot{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{X})$  es la tasa de la fuerza de masa y  $\dot{\mathbf{t}} \cdot d\partial\varphi(B) = \dot{\mathbf{t}}_0 \cdot d\partial B$  la tasa de fuerzas de superficie.

### 3.9 ECUACIONES CONSTITUTIVAS HIPER E HIPOELÁSTICAS.

La relación constitutiva de un material también puede ser expresada, a diferencia del capítulo previo, en términos de tasa de magnitudes espaciales:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{\text{SE}} : \dot{\mathbf{E}}, \text{ ó } \dot{S}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{SE}} \dot{E}_{kl} \quad (3.9-1)$$

aquí  $\mathbf{C}^{\text{SE}}$  es llamado tensor constitutivo tangente<sup>9</sup>. Estos tensores se deducen de una función energía de deformación almacenada<sup>61</sup>. Como se asume que esta matriz es definida positiva y los tensores involucrados en la relación anterior son simétricos,  $\mathbf{C}^{\text{SE}}$  presenta simetría mayor:

$$C_{ijkl}^{\text{SE}} = C_{klij}^{\text{SE}} \quad (3.9-2)$$

y simetría menor:

$$C_{ijkl}^{\text{SE}} = C_{jikl}^{\text{SE}} = C_{ijlk}^{\text{SE}} \quad (3.9-3)$$

La (3.9-1) es una ecuación constitutiva **hiperelástica** en términos de tasas de magnitudes materiales, pero también puede escribirse en términos de tasas de magnitudes espaciales. Por ejemplo, recordando la primer igualdad de (3.5-9) y teniendo en cuenta la última de (3.4-24), en notación indicial, se deduce que:

$$L_v\tau_{ij} = F_{im} (C_{mnpq}^{\text{SE}} \dot{E}_{pq}) F_{jn} = F_{im} (C_{mnpq}^{\text{SE}} F_{kp} D_{kl} F_{lq}) F_{jn}$$

$$= F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} C_{mnpq}^{SE} D_{kl} = C_{ijkl}^{\tau} D_{kl} \quad (3.9-4)$$

de donde:

$$C_{ijkl}^{\tau} = F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} C_{mnpq}^{SE} \quad (3.9-5)$$

Por lo tanto, la correspondiente ecuación constitutiva hiperelástica espacial en tasas es:

$$L_{\nu} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{\tau} : \mathbf{D} \quad (3.9-6)$$

Una importante consideración a realizar es que, a partir de relaciones hiperelásticas invariantes de la forma (3.9-1), se pueden deducir ecuaciones constitutivas espaciales en tasas, también invariantes, de la forma (3.9-6). Pero la inversa no se cumple, es decir, a partir de cualquier ecuación en tasas de la forma (3.9-6) (cualquier tensor constitutivo  $\mathbf{C}$ ), no siempre es posible obtener un funcional de energía almacenada  $w$  tal que las tensiones sean calculadas con (3.9-1). Para ampliar el comentario, ver el capítulo 7 de la referencia [61].

Las ecuaciones constitutivas en tasas de la forma (3.9-6) que no derivan de un funcional de energía almacenada se denominan relaciones **hipoelásticas**. En forma genérica, las relaciones hipoelásticas, se expresan como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\sigma\nabla} : \mathbf{D}, \text{ ó } \boldsymbol{\tau}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{D} \quad (3.9-7)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$  y  $\boldsymbol{\tau}^{\nabla}$  son cualquiera de las tasas objetivas de la tensión de Cauchy y Kirchhoff, respectivamente, y,  $\mathbf{C}^{\sigma\nabla}$  y  $\mathbf{C}^{\tau\nabla}$  son sus correspondientes tensores constitutivos. En hipoelasticidad es común considerar que alguno de estos  $\mathbf{C}$  es igual al tensor constitutivo constante obtenido de la teoría de elasticidad infinitesimal, en consecuencia, ese  $\mathbf{C}$  poseerá simetría mayor de acuerdo con (3.9-2) y como la tasa de deformación  $\mathbf{D}$  y las tasas objetivas de tensiones son simétricas,  $\mathbf{C}$  también posee simetría menor como es indicado en (3.9-3).

Según el párrafo previo, expresiones análogas a (3.9-6) pueden ser obtenidas para **cualquiera** de los tensores tasas objetivas deduciéndolas partiendo de (3.9-6), considerando las relaciones entre dichos tensores ((3.5-6) a (3.5-11)) y recordando que para todos ellos, la deformación conjugada es  $\mathbf{D}$ . Obviamente cada expresión se completará por un tensor constitutivo ad-hoc diferente según la tasa de tensión elegida. Particularmente, son dos las relaciones que especialmente interesan para este trabajo: la (3.9-6), y la (3.7-4). La primera porque surge naturalmente de la forma débil de ecuación de equilibrio (3.8-5), y la segunda por ser una forma objetiva de la relación constitutiva (sección 3.7). Este último punto, junto con la preservación de la simetría del sistema de ecuaciones generado por aplicación de elementos finitos,

son puntos de fundamental importancia en el modelado del comportamiento de materiales basados en relaciones constitutivas hipoelásticas.

Una relación del tipo (3.9-7) es incrementalmente lineal y reversible, esto significa que para pequeños incrementos de deformación sobre un cuerpo finito deformado, los incrementos de tensiones y deformaciones están linealmente relacionados y son recuperados en la descarga. Sin embargo, para grandes deformaciones, la energía no es necesariamente conservada y el trabajo realizado en un ciclo cerrado de deformación no es necesariamente igual a cero. A pesar de esto, existen algunas cuestiones que hacen conveniente recurrir a relaciones hipoelásticas. Entre estas razones, quizás la de mayor peso es la facilidad con que se puede representar problemas de plasticidad, como se vera en la sección 3.13. Ahora bien, ¿Qué ocurre con el problema de la energía no conservada? Algunos trabajos, por ejemplo, la referencia [20], indican en que condiciones especiales este problema no traerá mayores consecuencias. Sin entrar en detalles y muy brevemente, en el próximo punto se darán indicios de esas condiciones.

### 3.10 MODELO NO LINEAL HIPOELÁSTICO.

Las descripciones hipoelásticas de la respuesta del material son muy cómodas cuando se desea modelar en conjunto plasticidad y no linealidad geométrica. Sin embargo, como se viera en la sección 3.9, la energía no es conservada en un ciclo cerrado de deformación elástica para materiales hipoelásticos, pero si las **deformaciones elásticas son pequeñas** el error en la energía es muy pequeño, es decir, el trabajo remanente de un ciclo cerrado de deformación no es significativo.

Hacia el final de la sección 3.9 se señaló que en la elección de la ecuación constitutiva hipoelástica, que gobernará la respuesta del material, se tienen en cuenta distintos requerimientos. Uno de estos requerimientos es la independencia de las constantes del material respecto del sistema coordenado cartesiano adoptado como referencia. Considerando una relación como la (3.9-7),  $\tau^{\nabla} = \mathbf{C}^{\tau^{\nabla}} : \mathbf{D}$ , la indiferencia referencial del material requiere que:

$$\tau^{\nabla+} = \mathbf{C}^{\tau^{\nabla}} : \mathbf{D}^+ \quad (3.10-1)$$

Recordando la transformación objetiva de los tensores de segundo orden (3.6-4), se puede escribir:

$$\mathbf{Q} \cdot \tau^{\nabla} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{C}^{\tau^{\nabla}} : \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \text{ ó } Q_{im} Q_{jn} \tau_{mn}^{\nabla} = C_{ijkl}^{\tau^{\nabla}} Q_{kp} Q_{lq} D_{pq} \quad (3.10-2)$$

y reordenando se tiene:

$$\tau_{mn}^{\nabla} = (Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} C_{ijkl}^{\tau\nabla}) D_{pq} \quad (3.10-3)$$

Pero la relación constitutiva es  $\tau^{\nabla} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{D}$ , por lo tanto debe cumplirse:

$$C_{mnpq}^{\tau\nabla} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} C_{ijkl}^{\tau\nabla}, \quad \forall Q_{ij} \quad (3.10-4)$$

condición que se satisface sólo para un material isotrópico. Para eliminar esta restricción, se elige la relación constitutiva (3.7-4),  $\dot{\bar{\tau}} = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}}$ , en términos de los tensores tasa de la tensión co-rotada de Kirchhoff y tasa de deformación co-rotada, insensibles a rotaciones de cuerpo rígido, es decir,  $\dot{\bar{\tau}}^+ \equiv \dot{\bar{\tau}}$  y  $\bar{\mathbf{D}}^+ \equiv \bar{\mathbf{D}}$ . En consecuencia:

$$\dot{\bar{\tau}}^+ = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}}^+ \equiv \dot{\bar{\tau}} = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}} \quad (3.10-5)$$

cumpléndose la condición (3.10-1) para toda rotación rígida, no imponiendo restricciones a este tensor constitutivo, esto es,  $\bar{\mathbf{C}}^{\tau}$  puede ser no isotrópico.

Por otro lado, cuando se integra la tasa  $\mathbf{D}$  en forma objetiva y se toma en el centro del intervalo, se puede asemejar al tensor de pequeñas deformaciones<sup>61</sup>. Como  $\bar{\mathbf{D}}$  es estrictamente  $\mathbf{D}$  en ejes que rotan con el punto<sup>9</sup>, vale la misma consideración. Así, cuando el material es isotrópico y teniendo en cuenta intervalos de carga pequeños, resulta:

$$\bar{C}_{ijkl}^{\tau} = m(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) \quad (3.10-6)$$

siendo  $\delta_{ij}$  el delta de Kronecker, y:

$$\mu = E/2(1+\nu), \text{ y } \lambda = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu) \quad (3.10-7)$$

las constantes de Lamé en función del módulo Young  $E$  y del coeficiente de Poisson  $\nu$ , mientras que  $m$  es una constante que debe tener en cuenta el tensor de tensiones usado en la configuración co-rotada.

Otro de los requerimientos a tener en cuenta en la elección de la ecuación constitutiva hipoeelástica es la simetría de la matriz de rigidez tangente de los elementos finitos, necesaria para acelerar la solución del sistema de ecuaciones que resulte de aplicar elementos finitos y reducir la demanda de almacenamiento en memoria en el cálculo computacional. La matriz  ${}^t\sigma$  es simétrica por ser simétrico el tensor de Cauchy y el tensor constitutivo  $C_{ijkl}^{\tau}$  posee simetría menor. Recordando (3.7-5), (3.5-9), (3.9-6) y (3.4-11), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\tau}} &= \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T (\dot{\bar{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}\bar{\tau} - \bar{\tau}\boldsymbol{\Omega}^T) \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T \left[ \dot{\bar{\tau}} - \mathbf{W}\bar{\tau} - \bar{\tau}\mathbf{W}^T + (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})\bar{\tau} + \bar{\tau}(\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T \right] \mathbf{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{R}^T \left[ L_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} + (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T \right] \mathbf{R} \\
 &= \mathbf{R}^T \left[ (\mathbf{C}^\tau + \mathbf{C}' + \mathbf{C}'') : \mathbf{D} \right] \mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{3.10-8}$$

donde:

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} \quad \text{ó} \quad C'_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \tau_{jl} + \delta_{il} \tau_{jk} + \delta_{jk} \tau_{il} + \delta_{jl} \tau_{ik}) \tag{3.10-9}$$

y

$$\mathbf{C}'' : \mathbf{D} = (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T \tag{3.10-10}$$

Recordando la (3.4-14) y realizando operaciones sobre (3.10-8), se tiene:

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{C}}^\tau : \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}) \mathbf{R}^T = (\mathbf{C}^\tau + \mathbf{C}' + \mathbf{C}'') : \mathbf{D} \tag{3.10-11}$$

o en notación indicial:

$$R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}_{mnpq}^\tau D_{kl} = (C_{ijkl}^\tau + C'_{ijkl} + C''_{ijkl}) D_{kl} \tag{3.10-12}$$

de donde se despeja:

$$\mathbf{C}^\tau = \mathbf{R} \mathbf{R} \bar{\mathbf{C}}^\tau \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \mathbf{C}' - \mathbf{C}'', \quad \text{ó} \quad C_{ijkl}^\tau = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}_{mnpq}^\tau - C'_{ijkl} - C''_{ijkl} \tag{3.10-13}$$

Los tensores  $\bar{\mathbf{C}}^\tau$  y  $\mathbf{C}'$  poseen simetría menor y mayor, pero el tensor  $\mathbf{C}''$  no posee simetría mayor (detalles en Capítulo 7 de referencia [61]) tornando no simétrico al tensor  $\mathbf{C}^\tau$ , en consecuencia, la matriz de rigidez material que involucre la relación constitutiva (3.9-6) resulta no simétrica. Por lo tanto, para conservar la simetría de la matriz de rigidez tangente debería eliminarse el tensor  $\mathbf{C}''$ , es decir, se debería considerar que  $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}$ , resultando, a partir de la primer igualdad de (3.10-8), que:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau}^{\nabla \mathbf{J}} \mathbf{R} \tag{3.10-14}$$

donde  $\boldsymbol{\tau}^{\nabla \mathbf{J}}$  es la tasa de Jaumann de la tensión de Kirchhoff definida en (3.5-7). La suposición simplificativa de considerar  $\mathbf{C}'' \cong \mathbf{0}$  aparentemente no provoca errores apreciables cuando las tensiones internas del cuerpo se mantienen con valores cuyos órdenes de magnitud son menores respecto a los valores establecidos por las constantes del material, o también, cuando las tensiones de corte, definidas según el sistema cartesiano elegido como referencia, son muy reducidas respecto de las tensiones normales<sup>61</sup>. Este tipo de simplificaciones también aparecen cuando se trabaja con formulaciones hiperelásticas y es en ese caso donde encuentran su mejor adaptación. Pero en los casos hipoeelásticos no es del todo viable, por lo que en este trabajo se presenta el formato final de la alternativa que ya fuera bosquejada en Manzóllilo<sup>53</sup>.



### 3.11 PROPUESTA PARA MODELO NO LINEAL HIPOELÁSTICO.

La tasa de  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , calculada en (3.10-8), también puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} &= \mathbf{R}^T (\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^T) \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T [L_v \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] \mathbf{R}\end{aligned}\quad (3.11-1)$$

Considerando además la antisimetría de  $\boldsymbol{\Omega}$ , se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] \quad (3.11-2)$$

Reemplazando esta expresión en las relaciones constitutivas:  $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \bar{\mathbf{D}}$  y  $L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau : \mathbf{D}$  sustituyendo ambas en (3.11-1) y sumando algebraicamente los términos que daban origen a “ $\mathbf{C}^\tau : \mathbf{D}$ ” y “ $\mathbf{C}^\tau : \mathbf{D}$ ”, para crear ahora a “ $\mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})$ ”, se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{C}}^\tau : \mathbf{R}^T \frac{1}{2}[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] \mathbf{R} &= \\ = \mathbf{R}^T \left\{ \mathbf{C}^\tau : \frac{1}{2}[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] + \mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) \right\} \mathbf{R}\end{aligned}\quad (3.11-3)$$

donde:

$$\mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T, \text{ ó } C'''_{ijkl} = \delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{il}\tau_{jk} \quad (3.11-4)$$

La expresión (3.11-3) puede modificarse de modo de que en ambos miembros quede cada tensor constitutivo multiplicado por la deformación “ $(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})$ ”

Para ello tengamos presente que  $\bar{\mathbf{C}}^\tau$  posee simetría menor y puede ser escrito:

$$\bar{C}^\tau_{mnpq} = \frac{1}{2}(\bar{C}^\tau_{mnpq} + \bar{C}^\tau_{mnpq}) \quad (3.11-5)$$

Como  $\mathbf{C}^\tau$  a priori no nos asegura nada, introducimos, en notación indicial, un tensor:

$$\hat{C}^\tau_{ijkl} = \frac{1}{2}(C^\tau_{ijkl} + C^\tau_{ijlk}) \quad (3.11-6)$$

Este tensor, con simetría menor: “ $\hat{C}^\tau_{ijkl} = \hat{C}^\tau_{ijlk}$ ”, puede ser utilizado en lugar de  $C^\tau_{ijkl}$  para el modelo de elementos finitos, puesto que es conjugado de la velocidad de deformación  $D_{kl}$  (ver (3.9-6)), es simétrica, lo que no alterará el producto, y no introduce error.

Al introducir (3.11-5) y (3.11-6) en (3.11-3), se puede resolver las semisumas que resultan y obtener la expresión:

$$\bar{\mathbf{C}}^\tau : \mathbf{R}^T (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \left\{ \hat{\mathbf{C}}^\tau : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) \right\} \mathbf{R} \quad (3.11-7)$$

que en notación indicial, resulta,

$$C_{ijkl}^{\tau} \cong \hat{C}_{ijkl}^{\tau} = \frac{1}{2}(C_{ijkl}^{\tau} + C_{ijlk}^{\tau}) = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\bar{C}_{mnpq}^{\tau} - C_{ijkl}''' \quad (3.11-8)$$

El tensor  $\bar{C}^{\tau}$ , como generalmente se hace en los modelos hipoelásticos, es asumido con simetría mayor. Sin embargo, el tensor  $C'''$  no posee simetría mayor:  $C_{ijkl}''' \neq C_{klij}'''$ , tornando no simétrico a  $\hat{C}^{\tau}$  y consecuentemente a la matriz de rigidez del sistema de elementos finitos. Separando  $C'''$  en una parte simétrica  $C^{\text{sim}} \equiv C'$  y otra asimétrica  $C^{\text{asim}}$ , se obtiene:

$$C_{ijkl}''' = C_{ijkl}^{\text{sim}} + C_{ijkl}^{\text{asim}} \quad (3.11-9)$$

donde:

$$C_{ijkl}^{\text{sim}} \equiv C'_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il} + \delta_{jl}\tau_{ik}), \quad C'_{ijkl} = C'_{jikl} = C'_{ijlk} = C'_{klij} \quad (3.11-10)$$

que posee simetría mayor y menor, y:

$$C_{ijkl}^{\text{asim}} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} - \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il} - \delta_{jl}\tau_{ik}), \quad C_{ijkl}^{\text{asim}} = C_{jikl}^{\text{asim}} = -C_{ijlk}^{\text{asim}} \quad \text{y} \quad C_{ijkl}^{\text{asim}} \neq C_{klij}^{\text{asim}} \quad (3.11-11)$$

que no posee simetría mayor.

Como se desprende de las expresiones (3.11-6), (3.11-9) y (3.11-11), para mantener la simetría mayor de  $C^{\tau}$  (y de la matriz de rigidez de los elementos finitos), se puede eliminar el término  $C^{\text{asim}}$ , en general, cuando las tensiones internas  $\tau_{ij}$  del cuerpo son de un orden de magnitud menor respecto a las constantes del material, es decir:  $C^{\text{asim}} \ll \bar{C}^{\tau}$ , y en particular cuando las tensiones tangenciales  $\tau_{ij}$  (con  $i \neq j$ ) y  $\frac{1}{2}(\tau_{ii} - \tau_{jj})$  son de valor despreciable, resultando:  $C^{\text{asim}} \cong \mathbf{0}$ . Por lo tanto, en estos casos se podrá calcular  $C^{\tau}$  de (3.8-5), sin generar errores significativos, utilizando la expresión:

$$C_{ijkl}^{\tau} \cong \hat{C}_{ijkl}^{\tau} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\bar{C}_{mnpq}^{\tau} - C'_{ijkl} \quad (3.11-12)$$

Por supuesto, en los demás casos, en que  $C^{\text{asim}}$  posea un valor no despreciable, el tensor  $C^{\tau}$  se tiene que calcular con (3.10-13) o (3.11-6), debiendo resolverse necesariamente sistemas no simétricos de ecuaciones de elementos finitos.

### 3.12 ELASTOPLASTICIDAD.

Los materiales que desarrollan deformaciones totalmente recuperables (deformaciones elásticas) sólo hasta un cierto nivel de tensiones o límite elástico, y deformaciones irreversibles (deformaciones plásticas) más allá de este límite, se denominan materiales elastoplásticos. Estos materiales también son clasificados como independientes de la tasa (o independientes del tiempo) porque la respuesta del material no depende de la tasa de deformación, es decir, de la velocidad con que se aplica la carga, contrastando con los materiales viscoelastoplásticos<sup>69</sup>, típicamente dependientes de la tasa (o del tiempo), que no serán tratados en este trabajo.

En el campo plástico los materiales elastoplásticos presentan un comportamiento disipativo y dependiente de la trayectoria, esto es, parte de la energía de deformación es irreversiblemente transformada a otras formas de energía, como calor, generándose deformaciones plásticas irreversibles cuya magnitud habrá que conocer antes de calcular las tensiones. En consecuencia, al depender las tensiones de la historia completa de la deformación, no pueden calcularse con una simple función de la deformación actual. En estos casos sólo pueden establecerse relaciones entre tasas de tensiones y de deformaciones, adoptándose, como fuera señalado en las secciones 3.2 y 3.3, procesos incrementales de solución con formulaciones lagrangianas.

La inclusión del análisis de la no linealidad geométrica permite la representación de los grandes desplazamientos, rotaciones y elongaciones que sufre el material a lo largo del proceso de carga, pero requiere del uso de magnitudes y relaciones constitutivas objetivas, de acuerdo a lo visto en la sección 3.7. Además, estas leyes constitutivas pueden ser hiperelásticas o hipoeelásticas, según deriven o no de un funcional de energía almacenada (ver sección 3.9). En consecuencia, los modelos de plasticidad se denominan hiperelastoplásticos o hipoeelastoplásticos, según la respuesta del material en el campo elástico siga una ley hiperelástica o hipoeelástica, respectivamente. En ambos casos, la formulación del campo plástico se desarrolla de manera análoga a la plasticidad infinitesimal (o de pequeñas deformaciones), es decir, se utiliza la teoría clásica de plasticidad<sup>73</sup> pero debe reiterarse que en el caso de hiperelastoplasticidad, la extensión de modelos lineales (plasticidad infinitesimal) no es tan directa (ver capítulo 7 de Simo & Hughes<sup>61</sup>). A modo de recordatorio, se mencionará los principales elementos de la teoría clásica de plasticidad:

- a) Descomposición de la deformación, en una parte reversible elástica y otra irreversible plástica, que define la relación incremental tensión – deformación elastoplásticas.
- b) Una superficie de fluencia que determina el límite elástico, a partir del cual se producen las deformaciones plásticas.
- c) Un criterio de carga que define cuando existe carga en el sentido de la plasticidad.
- d) Una regla de flujo (o de fluencia) que gobierna el flujo plástico, es decir, determina el vector de deformaciones plásticas.
- e) Una regla de endurecimiento que gobierna las variables internas que definen la evolución de la superficie de fluencia.

### 3.13 TEORÍA DE PLASTICIDAD EN TÉRMINOS DE TENSIONES CO-ROTADAS.

La formulación de plasticidad en forma hipoelástica basada en configuraciones rotadas de la forma (3.7-4) agrega a las ventajas mencionadas anteriormente un punto fundamental: la posibilidad de no quedar restringidos a isotropía.

En los modelos hipoelastoplásticos, el tensor velocidad de deformación es típicamente descompuesto aditivamente en partes elástica y plástica, opción válida si las deformaciones elásticas son pequeñas<sup>20</sup>:

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^E + \bar{\mathbf{D}}^P \quad (3.13-1)$$

La parte elástica es la que se relaciona, a través de la ecuación constitutiva (3.10-5), con la tasa corrotada de la tensión de Kirchhoff, esto es:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \bar{\mathbf{D}}^E = \bar{\mathbf{C}}^\tau : (\bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{D}}^P) \quad (3.13-2)$$

La parte plástica queda definida por la regla de flujo plástico como:

$$\bar{\mathbf{D}}^P = \dot{\bar{\lambda}} \bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) \quad (3.13-3)$$

donde  $\dot{\bar{\lambda}}$  es la tasa del multiplicador plástico,  $\bar{\mathbf{k}}$  es el conjunto de variables internas, ligadas al endurecimiento, que gobiernan la evolución de la superficie de fluencia  $\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})$  y  $\bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})$  es la dirección del flujo plástico:

$$\bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = \frac{\partial \bar{G}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.13-4)$$

siendo  $\bar{G}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})$  un potencial plástico que define el incremento de deformaciones plásticas. Estas deformaciones plásticas se producen sólo si las tensiones  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  satisfacen el criterio de plasti-

ficación, es decir, si alcanzan el límite elástico o superficie de fluencia  $\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = 0$ . El caso particular en que  $\bar{G} \equiv \bar{F}$ , es conocido como plasticidad asociada, concepto que deberá revisarse para el caso de modelos de consolidación no saturada. Por lo tanto, la (3.13-3), expresada en forma diferencial y recordando la última equivalencia de (3.4-26), resulta:

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = d\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.13-5)$$

El resto de las ecuaciones de plasticidad, incluidas las deducciones del parámetro plástico  $d\bar{\lambda}$  y de la matriz constitutiva elastoplástica  $\bar{\mathbf{C}}_{EP}^T$  se desarrollan de manera totalmente análoga al caso de plasticidad infinitesimal (linealidad geométrica), pero en términos de las tensiones co-rotadas. El incremento total de la deformación logarítmica simétrica (3.4-15) resulta:

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E + d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \bar{\mathbf{C}}^{\tau^{-1}} d\bar{\boldsymbol{\tau}} + d\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.13-6)$$

Se mencionó que la condición de plastificación, que determina el nivel de tensiones  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  para el cual se inician las deformaciones plásticas, puede ser escrita en forma genérica como:

$$\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.13-7)$$

Sobre esta superficie de fluencia  $\bar{F} = 0$  se mantienen las tensiones durante un proceso de carga plástica ( $d\bar{\lambda} > 0$ ). Esto también puede ser establecido por la condición de consistencia  $d\bar{F} = 0$  que, por la regla de diferenciación en cadena, puede ser escrita como:

$$d\bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} d\bar{\boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{k}}} d\bar{\mathbf{k}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} d\bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{A} d\bar{\lambda} = 0 \quad (3.13-8)$$

donde el parámetro  $\bar{A}$  viene dado por:

$$\bar{A} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{k}}} \frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\bar{\lambda}} \quad (3.13-9)$$

Luego, a partir de (3.13-6) y (3.13-8), análogamente a la plasticidad infinitesimal, se deduce el incremento del multiplicador plástico:

$$d\bar{\lambda} = \frac{\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{C}}^{\tau} d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{C}}^{\tau} \bar{\mathbf{a}} + \bar{A}} \quad (3.13-10)$$

donde  $\bar{\mathbf{a}}$  es la dirección del flujo plástico (3.13-4), representado en la plasticidad asociada por el vector normal a la superficie de fluencia:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.13-11)$$

Para los casos de endurecimiento isotrópico:

$$\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - \bar{g}(\bar{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.13-12)$$

donde  $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$  es una función escalar que determina el nivel de las tensiones  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , y  $\bar{g}(\bar{\mathbf{k}})$  es el límite elástico que depende de un conjunto de variables internas  $\bar{\mathbf{k}}$  del material. Resulta en estos casos:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}, \text{ ó } \bar{\mathbf{a}}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{11}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{22}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{33}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{23}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{31}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{12}} \right\} \quad (3.13-13)$$

La matriz constitutiva elastoplástica, definida por:

$$d\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{C}}_{EP}^{\boldsymbol{\tau}} d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{C}}_{EP}^{\boldsymbol{\tau}} (d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E + d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) \quad (3.13-14)$$

puede ser deducida a partir de (3.13-6) y (3.13-10), obteniéndose en notación matricial o de Voigt:

$$\bar{\mathbf{C}}_{EP}^{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\bar{\mathbf{a}}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{a}} + \bar{A}} \quad (3.13-15)$$

y en notación tensorial:

$$\bar{\mathbf{C}}_{EP}^{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\bar{\mathbf{a}}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{a}} + \bar{A}}, \text{ ó } \bar{C}_{EPijkl}^{\boldsymbol{\tau}} = \bar{C}_{ijkl}^{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\bar{C}_{ijmn}^{\boldsymbol{\tau}} \bar{a}_{mn} \bar{a}_{pq} \bar{C}_{pqkl}^{\boldsymbol{\tau}}}{\bar{a}_{rs} \bar{C}_{rstu}^{\boldsymbol{\tau}} \bar{a}_{tu} + \bar{A}} \quad (3.13-16)$$

### 3.14 PLASTICIDAD EN TENSIONES CO-ROTADAS Y LA ISOTROPÍA.

La formulación de plasticidad en forma hipoeástica basada en configuraciones rotadas de la forma (3.7-4) agrega a las ventajas mencionadas en 3.13, un punto fundamental: la posibilidad de no quedar restringidos a materiales con isotropía. La condición de respuesta isótropa establece fuertes restricciones a las formas admisibles de una función respuesta, como puede serlo la función de fluencia. Una función  $f: S \rightarrow R$  (donde  $R$  es el espacio de los números reales) de tensores simétricos  $\mathbf{H} \in S$  es isótropo si y solo si:

$$f(\mathbf{QHQ}^T) = f(\mathbf{H}) \quad \forall \mathbf{Q} \in SO(3) \quad (3.14-1)$$

Esta función  $f$  puede ser la energía de la deformación o cualquier otra función respuesta, como por ejemplo, la función de fluencia en plasticidad. Dependiendo de lo que se analice,  $\mathbf{H} \in S$  puede ser el tensor derecho de Green, de Cauchy o el de tensión corrotada de Kirchhoff; solamente debe cumplir la condición de ser simétrico.

Ahora bien, si se usara el tensor de Cauchy existe una relación que no puede dejarse de lado y es la de objetividad de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$ , dada por (3.6-12), por lo que *siempre* que se use Cauchy, se cumplirá (3.14-1) y la formulación quedará restringida a la condición de isotropía. Como las tensiones co-rotadas de Kirchhoff se mantienen invariables ante rotaciones rígidas, esto es  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^+ \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}}$  de acuerdo a (3.6-17), entonces no se imponen restricciones a la función de fluencia, es decir, la función escalar de variable tensorial satisface la condición de objetividad según (3.6-18):

$$\bar{f}^+ = \bar{f}, \text{ ó } \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^+) = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \quad (3.14-2)$$

sin obligación de cumplir (3.14-1), por lo que  $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$  puede representar un comportamiento no isotrópico en la plastificación (ver capítulo 7 de Simo & Hughes<sup>61</sup>).

Ahora bien, si el material modelado es isótropo, la función escalar de variable tensorial, queda representada totalmente a través de sus invariantes. Entonces, si este es el caso,  $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$  puede ser expresada en términos de los invariantes  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{J}_2$  y  $\bar{\theta}$  de la tensión corrotada  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ .  $\bar{I}_1$  es el primer invariante del tensor de tensiones,  $\bar{J}_2$  es el segundo invariante del tensor desviador y  $\bar{\theta}$  una forma conveniente de expresar el tercer invariante del tensor desviador<sup>58</sup>, que puede verse posteriormente en el apartado 4.4.

Por la regla de diferenciación en cadena, el vector de flujo plástico (3.13-11) puede ser rescrito como (ver Owen & Hinton<sup>58</sup>):

$$\bar{\mathbf{a}}^T = \frac{\partial \bar{f}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, \bar{\theta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial (\bar{J}_2^{1/2})} \frac{\partial (\bar{J}_2^{1/2})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{C}_1 \bar{\mathbf{a}}_1^T + \bar{C}_2 \bar{\mathbf{a}}_2^T + \bar{C}_3 \bar{\mathbf{a}}_3^T \quad (3.14-3)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{a}}_1^T = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2^T = \frac{\partial (\bar{J}_2^{1/2})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \left\{ \bar{\tau}_{11}^d, \bar{\tau}_{22}^d, \bar{\tau}_{33}^d, 2\bar{\tau}_{12}, 2\bar{\tau}_{23}, 2\bar{\tau}_{31} \right\} \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \quad (3.14-4)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3^T = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \left\{ \bar{\tau}_{22}^d \bar{\tau}_{33}^d - \bar{\tau}_{23}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3}, \bar{\tau}_{11}^d \bar{\tau}_{33}^d - \bar{\tau}_{13}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3}, \bar{\tau}_{11}^d \bar{\tau}_{22}^d - \bar{\tau}_{12}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3}, 2\bar{\tau}_{11}^d \bar{\tau}_{23}, 2\bar{\tau}_{22}^d \bar{\tau}_{13}, 2\bar{\tau}_{33}^d \bar{\tau}_{12} \right\}$$

Las constantes  $\bar{C}_i$ , al igual que la forma explícita de la función de fluencia (3.13-7), están definidas según el criterio de plastificación que se adopte, el cual depende del material en estudio. Para el caso de materiales geológicos, la forma de estas constantes se verá en la sección 4.4.

Los invariantes formulados en términos de  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , serán:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \quad (3.14-5)$$

Expresándolo en función de las tensiones co-rotadas  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  se tiene:

$$\bar{I}_1 = \bar{\tau}_{ii} = J(\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^E : \mathbf{I} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{R}^E \mathbf{I} (\mathbf{R}^E)^T = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = J I_1 \quad (3.14-6)$$

El segundo invariante del tensor desviador de las tensiones de Cauchy es:

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^d = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d \quad (3.14-7)$$

y en términos de la tensión corrotada  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  resulta:

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &= \frac{1}{2} \bar{\tau}_{ij}^d \bar{\tau}_{ij}^d = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}^d : \bar{\boldsymbol{\tau}}^d \\ &= \frac{1}{2} [J(\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\sigma}^d \mathbf{R}^E : J(\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\sigma}^d \mathbf{R}^E] = \frac{1}{2} J^2 (\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d) = J^2 J_2 \end{aligned} \quad (3.14-8)$$

El tercer invariante del tensor desviador de Cauchy, teniendo en cuenta la simetría de  $\boldsymbol{\sigma}$ , es:

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij}^d \sigma_{jk}^d \sigma_{ki}^d = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^d : (\boldsymbol{\sigma}^d \boldsymbol{\sigma}^d)^T = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d \boldsymbol{\sigma}^d \quad (3.14-9)$$

y expresado en términos de la tensión corrotada de Kirchhoff es:

$$\bar{J}_3 = \frac{1}{3} \bar{\tau}_{ij}^d \bar{\tau}_{jk}^d \bar{\tau}_{ki}^d = \frac{1}{3} \bar{\boldsymbol{\tau}}^d : \bar{\boldsymbol{\tau}}^d \bar{\boldsymbol{\tau}}^d = \frac{1}{3} J^3 (\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d \boldsymbol{\sigma}^d) = J^3 J_3 \quad (3.14-10)$$



## CAPÍTULO

## 4

EL MODELO NO LINEAL PARA  
SUELO NO SATURADO.**4.1 OBJETIVOS.**

En esta parte del trabajo, se volcará lo expuesto en el capítulo 3 (3.10, 3.11, 3.13), a la teoría desarrollada en el párrafo 2.5 para lograr un modelo matemático no lineal que resuelva el problema de consolidación de un suelo parcialmente saturado. En el apartado 4.2, el autor introduce un análisis de las tensiones que se generan en la masa granular cuando se considera el efecto de no linealidad geométrica basando el desarrollo en los tensores que surgen naturalmente en 3.8 y los que surgen en el modelo hipoelastoplástico en configuración rotada plasmado en las ecuaciones (4.2-7) a (4.2-9).

En el apartado 4.4, se han obtenido los coeficientes para el vector de flujo apoyado en el modelo desarrollado en la referencia [23] pero ahora en términos de la tensión co-rotada de Kirchhoff para suelos saturados y en el apartado 4.6, el autor introduce una modificación a la función de tensiones mencionada para tener en cuenta el efecto de la succión, ecuaciones (4.6-1) y (4.6-2), algo indispensable para modelar plasticidad para el caso de suelos no saturados. Se termina con una discusión sobre las posibles maneras de considerar a la succión de modo de evitar la plasticidad no asociada.

## 4.2 LAS TENSIONES NO LINEALES EN LA MASA DE SUELO.

El estudio de tensiones en suelos totalmente o parcialmente saturado, como se viera en el capítulo 1, se realiza mediante una descomposición del tensor de tensiones en diferentes partes, la correspondiente a tensiones efectivas y la correspondiente a los poros. Esta última se descompone a su vez en la correspondiente a tensiones de la masa de agua y las correspondientes a la parte gaseosa, esto último cuando se trata de suelo no saturado.

Suelos Saturados: Para suelos saturados, el tema está ampliamente desarrollado en las referencias [23] y [53]. Simplemente se transcribirá aquí a modo de recordatorio que, al igual que en el estudio de tensiones en un sólido sin fluido, la formulación de la no linealidad puede hacerse en función de diferentes medidas de tensión:

1) Usando la tasa tensión total de Jaumann (3.5-7):

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = \underbrace{\mathbf{C}^{\tau j} \cdot \mathbf{D}}_{\text{efectiva}} + \underbrace{J \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot \alpha \cdot p + J \mathbf{m} \cdot \alpha \cdot \dot{p}}_{\text{Poros}} \quad (4.2-1)$$

con

$$\alpha = 1 - \frac{\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{C}^{\tau j} \cdot \mathbf{m}}{9k_s} \quad (4.2-2)$$

siendo la constante de Biot,  $k_s$  es el módulo de rigidez volumétrica de los granos del suelo,  $\mathbf{m}^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$ ,  $p$  presión del poro de agua y considerando al grano de suelo isotrópico. La ecuación constitutiva es

$$\mathbf{C}^{\tau j} = \mathbf{R} \mathbf{R} \bar{\mathbf{C}}^{\tau} \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T, \text{ ó } C_{ijkl}^{\tau j} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}_{mnpq}^{\tau} \text{ con } \mathbf{C}'' \cong \mathbf{0} \text{ de acuerdo a (3.10-14)}$$

2) Usando la tasa de tensión total de Lie (3.5-9) combinada con Jaumann:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{\tau} \cdot \mathbf{D} + J \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot \alpha \cdot p + J \mathbf{m} \cdot \alpha \cdot \dot{p} \quad (4.2-3)$$

con la ecuación constitutiva de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}^{\tau} = \mathbf{C}^{\tau j} - \mathbf{C}' = \mathbf{R} \mathbf{R} \bar{\mathbf{C}}^{\tau} \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \mathbf{C}', \text{ ó } C_{ijkl}^{\tau} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}_{mnpq}^{\tau} - C'_{ijkl} \quad (4.2-4)$$

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{D}, \text{ ó } C'_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \tau_{jl} + \delta_{il} \tau_{jk} + \delta_{jk} \tau_{il} + \delta_{jl} \tau_{ik}) \quad (4.2-5)$$

siendo usada en (4.2-5) el tensor de Kirchhoff de tensiones totales y  $\mathbf{C}'' \cong \mathbf{0}$  de acuerdo a (3.10-13). Para la constante de Biot, se usa (4.2-2).

Suelos No Saturados: Si se pretende ahora formular el problema de no linealidad para el caso de suelos no saturados, resultan las expresiones (4.2-1) y (4.2-3) un punto de partida excelente para lograrlo. La principal diferencia es el agregado de la presión del gas (aire) en el poro. Partiendo de la ecuación (2.3-4) pero formulada en término de Kirchhoff, será:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' + J.a_1.p^w \mathbf{I} + J.a_2.p^g \mathbf{I} \quad (4.2-6)$$

que sustituye a la presentada en la referencia [53]  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - J.\bar{\alpha}.p.\mathbf{I}$  (el signo no influye).

Considerando que puede formularse todo en término de tasas y repetir el procedimiento llevado a cabo en la referencia [53], se puede llegar a formas semejantes a las (4.2-1) y (4.2-3):

1) Usando la tasa de tensión total de Jaumann (3.5-7) se tiene:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla j} = \mathbf{C}^{\nabla j} \cdot \mathbf{D} + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}).a_1.p^w + J.\mathbf{m}.a_1.\dot{p}^w + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}).a_2.p^g + J.\mathbf{m}.a_2.\dot{p}^g \quad (4.2-7)$$

2) Usando la tasa de tensión total de Lie (3.5-9) combinada con Jaumann se tiene:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau \cdot \mathbf{D} + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}).a_1.p^w + J.\mathbf{m}.a_1.\dot{p}^w + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}).a_2.p^g + J.\mathbf{m}.a_2.\dot{p}^g \quad (4.2-8)$$

En las anteriores, la ecuación constitutiva para tensiones efectivas es la misma que para el caso saturado y también en el cálculo de las constantes que dependen del coeficiente de Biot (4.2-2).

Pero ahora se agrega una tercera posibilidad, más aplicable al caso de hipoelasticidad y se basa en plantear todo el sistema de tensiones en derivada de Lie:

3) Usando la tasa de tensión total de Lie (3.5-9):

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau \cdot \mathbf{D} + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}).a_1.p^w + J.\mathbf{m}.a_1.\dot{p}^w + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}).a_2.p^g + J.\mathbf{m}.a_2.\dot{p}^g \quad (4.2-9)$$

con la ecuación constitutiva planteada según (3.11-8) o (3.11-12) en lugar de (3.10-13)

$$\mathbf{C}^\tau \cong \hat{\mathbf{C}}^\tau = \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{C}^\tau \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \mathbf{C}', \text{ ó } C'_{ijkl} = \hat{C}'_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}'_{mnpq} - C'_{ijkl} \quad (4.2-10)$$

Con  $\mathbf{C}'$  según (3.11-10) y en término de tensiones **efectivas**.

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\tau}'\mathbf{D}, \text{ ó } C'_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau'_{jl} + \delta_{il}\tau'_{jk} + \delta_{jk}\tau'_{il} + \delta_{jl}\tau'_{ik}) \quad (4.2-11)$$

Además deberá usarse  $\hat{\mathbf{C}}^\tau$  en la constante de Biot:

$$\alpha = 1 - \frac{\mathbf{m}^T \cdot \hat{\mathbf{C}}^\tau \cdot \mathbf{m}}{9k_s} \quad (4.2-12)$$

### 4.3 FORMA DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN LA MASA DE SUELO NO SATURADO.

Recordando la ecuación (3.8-5), es posible obtener la forma débil de la ecuación de equilibrio expresada en tasas, pero aplicable a medios porosos no saturados. Se debe tener en

cuenta que la ecuación citada se plantea para tensiones totales. Sin embargo, en el caso de suelos no saturados, la tensión se descompone en efectiva y de poros. En concreto, se debe plantear la ecuación mecánica en término de **tensiones efectivas** pero sustituirlo en una ecuación que considera la tensión total. Para ello debemos recurrir a cualquiera de las relaciones planteadas en el párrafo anterior (4.2), prefiriéndose en este caso a la (4.2-9):

$$\int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{L} : \left[ \underbrace{{}^t \mathbf{L} : \boldsymbol{\tau}}_{total} + \underbrace{{}^t \mathbf{C} : \dot{\mathbf{D}}}_{efectiva} + J \mathbf{I} : (\mathbf{I} : \mathbf{D}) : a_1 : p^w + J \mathbf{I} : a_1 : \dot{p}^w + J \mathbf{I} : (\mathbf{I} : \mathbf{D}) : a_2 : p^g + J \mathbf{I} : a_2 : \dot{p}^g \right] \frac{d\varphi(B)}{J} =$$

$$= \int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} : \mathbf{b} : p : d\varphi(B) + \int_{\partial\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} : \dot{\mathbf{t}} : d\partial\varphi(B) \quad (4.3-1)$$

Como se puede apreciar, se han generado nuevas integrales que deberán resolverse en forma simultánea por medio de elementos finitos.

#### 4.4 CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN PARA SUELOS SATURADOS.

En la sección 3.14 se indicó que se dejaba pendiente el cálculo de los coeficientes del vector de flujo plástico que fuera aplicable a materiales geológicos. En esta sección se desarrollará el tema para suelos saturados y no saturados.

Para el caso de suelos saturados se ha elegido el criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado. El criterio de Estados Críticos, ha sido propuesto originalmente por Zienkiewicz et al<sup>66,70,71</sup>, y modificado luego por Di Rado<sup>23</sup>. En esta última referencia se ha detallado los fundamentos de este modelo para el caso de tensión de Cauchy, pero para este trabajo y para modelar no linealidad geométrica, es necesario re-formularlo en términos de la tensión corotada de Kirchhoff.

El criterio de Estados Críticos Modificado establece una función de fluencia  $F(p', q, \theta) = 0$  expresada en término de los invariantes  $p'$ ,  $q$  y  $\theta$ , cuyas expresiones son:

$$p' = -\frac{I_1}{3} \quad (4.4-1)$$

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (4.4-2)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsen \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right) \quad (4.4-3)$$

donde  $I_1$  es el primer invariante,  $J_2$  y  $J_3$  son los segundo y tercer invariantes, respectivamente, del tensor desviador, los tres de las tensiones efectivas de Cauchy  $\sigma'$ . El valor de  $\theta$  calculado a partir de (4.4-3) tiene como valores límites:  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ .

Expresando los invariantes en términos de la tensión efectiva co-rotada  $\bar{\tau}'$ , llevando en cuenta (3.14-6), (3.14-8) y (3.14-10), se obtiene:

$$\bar{p}' = -\frac{\bar{I}_1}{3} = -\frac{JI_1}{3} = Jp' \quad (4.4-4)$$

$$\bar{q} = \sqrt{3\bar{J}_2} = \sqrt{3J^2J_2} = Jq \quad (4.4-5)$$

$$\bar{\theta} = \theta = \frac{1}{3} \arcsen \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{J}_3}{(\bar{J}_2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{3} \arcsen \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J^3J_3}{(J^2J_2)^{3/2}} \right) \quad (4.4-6)$$

Concretamente, el criterio de fluencia de Estados Críticos Modificado<sup>23</sup> puede escribirse:

$$F(p', q, \theta) = f(p', q, \theta) - g(k) = \frac{p'+a}{2} \left[ \left( \frac{q}{p'+a} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2\phi^*} + 1 \right] - p_{co} = 0 \quad (4.4-7)$$

donde  $g(k) = p_{co}$  es la tensión de comparación que define el límite elástico de la función de fluencia, y  $(2p_{co} - a)$  es la presión inicial de preconsolidación (ver Figura 4-1). Además:

$$a = \frac{C^*}{\text{tg}\phi^*} = \frac{c}{\text{tg}\phi} \quad (4.4-8)$$

con:

$$\text{tg}\phi^* = \frac{3\text{sen}\phi}{\sqrt{3}\cos\theta - \text{sen}\phi\text{sen}\theta} \quad (4.4-9)$$

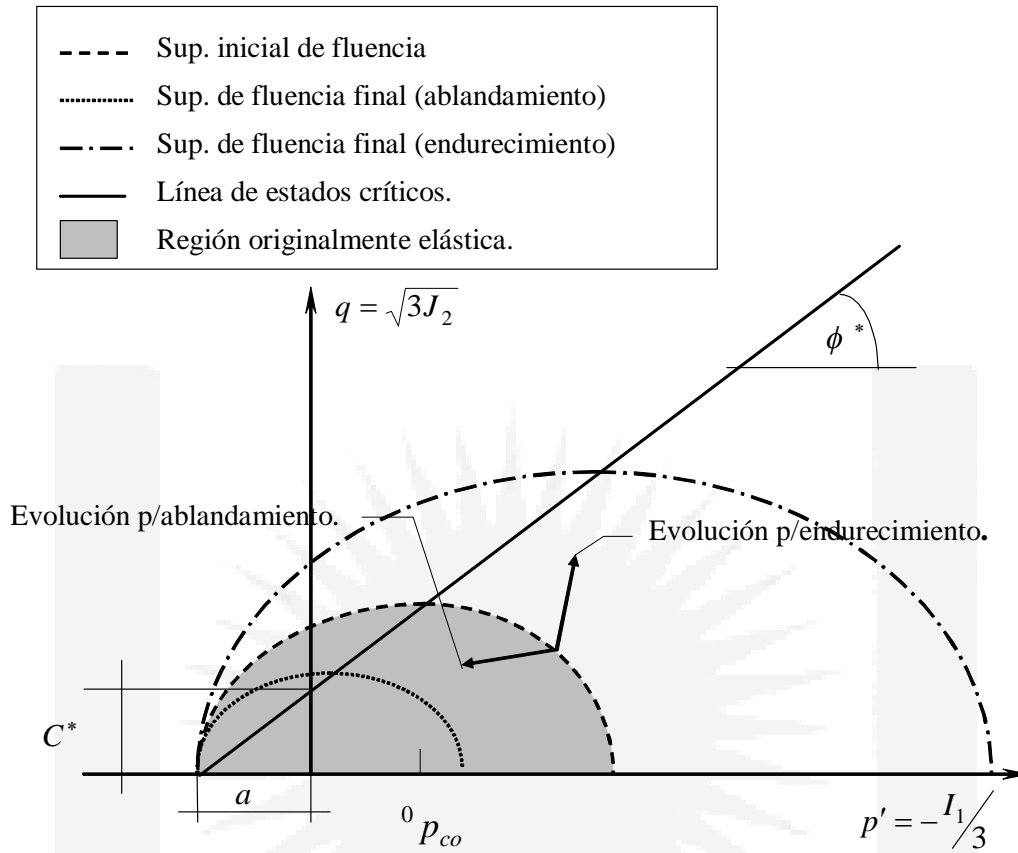
y

$$C^* = \frac{3.c.\cos\phi}{\sqrt{3}\cos\theta - \text{sen}\phi\text{sen}\theta} \quad (4.4-10)$$

siendo  $c$  y  $\phi$  los coeficientes de cohesión y fricción interna del suelo, respectivamente.

En la Figura 4-1 se puede observar que sobre la línea de estados críticos se tiene que

$$\left[ \frac{q}{(p'+a)\text{tg}\phi^*} \right] = 1, \text{ tornando al material plástico perfecto.}$$



**Figura 4-1: Criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado.**

El coeficiente de cohesión medido en la configuración co-rotada resulta:  $\bar{c} = J.c$ , mientras que el ángulo de fricción interna se mantiene inalterado, esto es:  $\bar{\phi} \equiv \phi$ . En consecuencia, expresando las magnitudes (4.4-8), (4.4-9) y (4.4-10) en términos de las tensiones efectivas co-rotadas, recordando además que  $\bar{\theta} \equiv \theta$  según (4.4-6), se tiene:

$$\bar{a} = \frac{\bar{c}}{\text{tg}\phi} = J.a \quad (4.4-11)$$

$$\text{tg}\bar{\phi}^* = \frac{3\text{sen}\bar{\phi}}{\sqrt{3}.\text{cos}\bar{\theta} - \text{sen}\bar{\phi}.\text{sen}\bar{\theta}} = \text{tg}\phi^* \quad (4.4-12)$$

$$\bar{C}^* = \frac{3.\bar{c}.\text{cos}\bar{\phi}}{\sqrt{3}.\text{cos}\bar{\theta} - \text{sen}\bar{\phi}.\text{sen}\bar{\theta}} = J.C^* \quad (4.4-13)$$

La función de fluencia para endurecimiento isotrópico, resulta:

$$\bar{F}(\bar{\tau}, \bar{k}) = \bar{f}(\bar{\tau}) - \bar{g}(\bar{k}) = 0 \quad (4.4-14)$$

donde  $\bar{g}(\bar{k})$  es la tensión de comparación, dependiente de una única variable  $\bar{k}$  de endurecimiento, que define el límite elástico de la función de fluencia. Esta tensión de comparación es un parámetro que depende del material, y no depende de la rotación de las tensiones, es decir, su valor es el mismo si se mide sobre la configuración actual deformada o sobre la configuración co-rotada pero si debe tenerse en cuenta la relación entre el tensor de tensiones de Kirchhoff y el de Cauchy:

$$\bar{g}(\bar{k}) = J \cdot g(k) \Rightarrow \bar{f}(\bar{\tau}) = J \cdot f(\sigma) \quad (4.4-15)$$

Análogamente a lo visto en (4.4-14), la tensión de comparación  $p_{co}$  será:

$$\bar{g}(\bar{k}) \equiv Jg(k) = Jp_{co} \Rightarrow \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) = J \cdot f(p', q, \theta) \quad (4.4-16)$$

siendo  $\bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta})$  la función de fluencia definida en términos de las tensiones efectivas co-rotadas  $\bar{\tau}'$ , como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) &= \frac{\bar{p}' + \bar{a}}{2} \left[ \left( \frac{\bar{q}}{\bar{p}' + \bar{a}} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} + 1 \right] \\ &= J \cdot \frac{Jp' + Ja}{2} \left[ \left( \frac{Jq}{Jp' + Ja} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \phi^*} + 1 \right] \\ &= f(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) = J \cdot f(p', q, \theta) \end{aligned} \quad (4.4-17)$$

donde se tuvieron en cuenta las (4.4-4), (4.4-5), (4.4-11) y (4.4-12).

El vector de flujo plástico  $\bar{\mathbf{a}}$  se desarrolla en función de  $\bar{\tau}'$  según (3.14-3), y sus términos  $\bar{\mathbf{a}}_i$  lo hacen según (3.14-4), en tanto que las constantes  $\bar{C}_i$ , para el criterio de Estados Críticos Modificado, quedan definidos como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{1}{6} \left\{ \left[ \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \text{tg} \bar{\phi}^*} \right]^2 - 1 \right\} \\ \bar{C}_2 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial (\bar{J}_2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \text{tg} \bar{\phi}^*} \left[ \frac{3}{\text{tg} \bar{\phi}^*} + \text{tg} 3\theta \frac{(\sqrt{3} \text{sen} \theta + \cos \theta \text{sen} \phi)}{\text{sen} \phi} \right] \\ \bar{C}_3 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\theta}} = \frac{1}{2 \cdot \cos 3\theta} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \cdot \text{tg} \bar{\phi}^* \cdot \bar{J}_2} \left( \frac{\sqrt{3} \text{sen} \theta + \cos \theta \text{sen} \phi}{\text{sen} \phi} \right) \end{aligned} \quad (4.4-18)$$

En el caso que  $\theta$  adopte los valores límites anteriormente señalados,  $\theta = \pm 30^\circ$ , las constantes  $\bar{C}_2$  y  $\bar{C}_3$  vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\bar{C}_2|_{\theta=\pm 30^\circ} &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a})} \left[ \frac{1}{\sin^2 \phi} \left( \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sin \phi \right)^2 \right] \\ \bar{C}_3|_{\theta=\pm 30^\circ} &= 0\end{aligned}\quad (4.4-19)$$

La evolución de la superficie de fluencia en términos del tensor de Cauchy, sea ésta un endurecimiento o un ablandamiento, se calcula con la siguiente ecuación:

$$p_{co} = {}^0 p_{co} \cdot \exp(\chi \cdot \varepsilon_v^P) \quad (4.4-20)$$

siendo  ${}^0 p_{co}$  la pre-consolidación inicial (ver Figura 4-1),  $\varepsilon_v^P$  la deformación volumétrica plástica total y  $\chi$  un coeficiente dado por:

$$\chi = -\beta \frac{1 + e_0}{\omega - K} \quad (4.4-21)$$

donde  $e_0$  es la relación inicial de vacíos,  $\omega$  y  $K$  son los índices de compresión y expansión respectivamente definidos a partir de ensayos odométricos y  $\beta$  es una variable adimensional de endurecimiento introducida en la referencia [24] y que debe ser ajustada en función del tipo de suelo, pero su valor es del orden de  ${}^0 p_{co}$ .

Cuando se trata de la configuración rotada, los parámetros medidos en ensayos no sufren alteración. La deformación volumétrica merece una reflexión adicional: ésta queda definida a partir de (3.13-5), pero en la configuración sin rotar, como:

$$d\varepsilon_v^P = d\Lambda \frac{\partial f(p', q, \theta)}{\partial (I_1/3)} \quad (4.4-22)$$

donde  $d\Lambda$  es el multiplicador plástico.

Sin embargo, para el caso de configuración co-rotada, la ecuación (4.4-22), se puede escribir:

$$d\bar{\varepsilon}_v^P = d\bar{\Lambda} \frac{\partial \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta})}{\partial (\bar{I}_1/3)} \quad (4.4-23)$$

Así, la deformación volumétrica puede ser calculada a partir de las variables en el espacio co-rotado sin perder exactitud.

Derivando  $\bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta})$ , dada en (4.4-17), respecto a  $\bar{p}' = (\bar{I}_1/3)$ , se puede escribir:



$$d\bar{\varepsilon}_v^P = d\bar{\Lambda} \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} - 1 \right) \quad (4.4-24)$$

y también:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_v^P}{d\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} - 1 \right) \quad (4.4-25)$$

con  $\text{tg} \bar{\phi}^*$  definida en (4.4-9) igual a  $\text{tg} \bar{\phi}^*$  por la ecuación (4.4-12) y siendo:

$$\eta = \frac{q}{(p'+a)} = \frac{J^{-1} \cdot \bar{q}}{J^{-1} \cdot (\bar{p}'+\bar{a})} = \bar{\eta} \quad (4.4-26)$$

Volviendo a la expresión (4.4-20) en términos de l tensor de Cauchy, si se aplica logaritmo natural y diferencian ambos miembros, se deduce la relación entre la variación de la presión  $p_{co}$  y la deformación volumétrica  $\varepsilon_v^P$ :

$$\frac{dp_{co}}{p_{co}} = \chi \cdot d\varepsilon_v^P \quad (4.4-27)$$

pasando  $p_{co}$  a la izquierda y  $d\varepsilon_v^P$  a la derecha, se obtiene:

$$\frac{dp_{co}}{d\varepsilon_v^P} = p_{co} \cdot \chi \quad (4.4-28)$$

que en espacio co-rotado será:

$$\frac{d\bar{p}_{co}}{d\bar{\varepsilon}_v^P} = \bar{p}_{co} \cdot \chi \quad (4.4-29)$$

Las expresiones (4.4-29) y (4.4-24), son las utilizadas para el cálculo del parámetro  $\bar{A}$ , definido en (3.13-9), que para este criterio de plastificación y considerando que:  $d\bar{k} = d\bar{\varepsilon}_v^P$  (“strain hardening” en su terminología inglesa), resulta:

$$\bar{A} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\bar{\Lambda}} = \frac{d\bar{p}_{co}}{d\bar{\Lambda}} = \frac{d\bar{p}_{co}}{d\bar{\varepsilon}_v^P} \frac{d\bar{\varepsilon}_v^P}{d\bar{\Lambda}} = \frac{\bar{p}_{co}}{2} \chi \left( \frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} - 1 \right) = J \frac{p_{co}}{2} \chi \left( \frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) = J \cdot A \quad (4.4-30)$$

Como puede observarse, al igual que  $\bar{g}(\bar{k}) = J \cdot g(k) = J \cdot p_{co}$ , este parámetro también es una magnitud configuracionalmente independiente pero afectada por el determinante del Jacobiano.

#### 4.5 ALGORITMO DE RETORNO. MÉTODO DE PLANO CORTANTE.

Para el cálculo de las deformaciones plásticas y del multiplicador plástico, se ha utilizado el algoritmo de retorno de plano cortante<sup>61</sup> pero lo particularizaremos para el caso de suelo con endurecimiento isotrópico.

El algoritmo se basa en integraciones explícitas en torno a un intervalo  $\Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)}$  de longitud (dentro de una iteración plástica). Para ello, se dirá que el incremento de tensiones para el paso de carga  $(t+\Delta t)$ , viene dado por (3.13-2) y (3.13-5), pero en forma discreta:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\tau} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{\mathbf{C}}^\tau : \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j+1)} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(j)} \right) \Big|_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e(j+1)} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(j+1)} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(j)} \right) \Big|_{t+\Delta t} \\ \frac{d\Delta \bar{\tau}}{d\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{\mathbf{C}}^\tau : \frac{d \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e(j+1)} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(j+1)} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(j)} \right)}{d\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} = \\ &= \bar{\mathbf{C}}^\tau : \frac{d \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(j+1)} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(j)} \right)}{d\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.5-1)$$

Integrando explícitamente (apoyada en la iteración anterior,  $j$ ) la última expresión de (4.5-1), queda:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \cdot \left( -\bar{\mathbf{C}}^\tau : \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right) \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-2)$$

Aplicando igual tratamiento a la variable de endurecimiento, debemos partir de la expresión (4.4-30) en forma discreta, quedando ahora:

$$\frac{\Delta \bar{p}_{co}}{\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} = \bar{A} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\bar{p}_{co}}{2} \chi \left( \frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-3)$$

que también puede ser escrita, considerando la iteración en curso como en (4.5-2):

$$\Delta \bar{p}_{co}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \cdot \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-4)$$

También es condición:

$$\bar{F}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} = 0 \quad (4.5-5)$$

que desarrollado en serie de Taylor lineal (para  $\bar{g}(\bar{k}) = \bar{p}_{co}$ ):

$$\bar{F}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{g}} \cdot \Delta \bar{p}_{co}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = 0 \quad (4.5-6)$$

Reemplazando (4.5-2) y (4.5-4) en (4.5-6), y despejando el incremento de multiplicador plástico, queda:

$$\Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\bar{F}^{(j)}}{\frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \bar{\mathbf{C}}^\tau : \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{g}} + \bar{A}^{(j)}} \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-7)$$

Una vez obtenido este valor, debe procederse a actualizar las deformaciones plásticas, el multiplicador plástico y las tensiones:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} &= \Delta \bar{A}^{(j-1)} \Big|_{t+\Delta t} + \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} + \bar{\mathbf{C}}^\tau \left[ \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \bar{\mathbf{a}}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g}) \right] \Big|_{t+\Delta t} \\ \bar{p}_{co}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{p}_{co}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} + \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.5-8)$$

Esta presentación teórica se ha formulado como algoritmo en la sección 0.

#### 4.6 INTRODUCCIÓN A UN CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN PARA SUELOS NO SATURADOS.

Para el caso de suelos no saturados, la literatura nos muestra una gran cantidad de modelos desarrollados, muchos de ellos a partir de suelos saturados<sup>1,27</sup>. La principal diferencia entre modelos para suelos saturados y no saturados radica en que, a través de ensayos de laboratorios, se ha podido detectar una fuerte influencia de la succión<sup>17,29</sup> en el proceso de plastificación afectando directamente el modelo constitutivo del suelo.

A los efectos de esta tesis, no se profundizará demasiado en este tema y simplemente se detallará una posible modificación al modelo visto en el párrafo 4.4 para suelos saturados<sup>24</sup> y se resolverán ejemplos sencillos para pequeñas deformaciones.

Las modificaciones fundamentales se refieren al manejo del endurecimiento y a la función de tensiones propiamente dicha. Mientras que en el caso saturado el endurecimiento era exclusivamente isotrópico, ahora se plantea una expansión isotrópica combinada con una cinemática. Además, tanto la expansión como el desplazamiento de la superficie, se verán afectados por los valores de succión.

Ahora bien, la inclusión de la succión puede ser tratada de dos maneras diferentes:

1) Como una variable más en la función de tensiones, que pasaría a ser función de tensiones y de la succión.

2) Como un parámetro de endurecimiento más.

Pero en cualquiera de los casos se enfrenta un problema inmediato: La teoría de estados críticos establece que sobre la Línea de Estados Críticos (L.E.C.), no debe haber incremento de la deformación volumétrica plástica<sup>23</sup>. Esto equivale a decir que la succión podrá intervenir en el proceso pero sin provocar, sobre la mencionada línea, deformaciones plásticas. Para cumplir con esto, tendremos ahora dos salidas:

a) Hacemos uso de la opción (1) anterior y utilizamos como potencial plástico otra función que no dependa de la succión. El problema es que la plasticidad no asociada lleva a formulaciones no simétricas por la pérdida de simetría de la matriz elastoplástica<sup>41</sup>.

b) Hacemos uso de la opción (2) anterior y asumimos independencia del multiplicador plástico con relación al parámetro de endurecimiento “succión”.

Es claro que esta última instancia puede ser considerada en algún aspecto contradictoria como se verá a continuación, pero no es un error mayor que el que introduce la plasticidad no asociada al no cumplir con el principio de máxima disipación plástica<sup>61</sup>. Además, la modificación respeta las bases de la teoría de estados críticos y responde a los experimentos en los que se indica que la succión debe ser incluida en la función de tensiones.

Tenemos entonces que la expansión cinemática de la superficie se consigue modificando el coeficiente de  $a$  de (4.4-8) de modo que dependa del valor actual de la succión  $p^c$ , mas específicamente del valor  $\|p^c - {}^0p^c\|$  siendo  ${}^0p^c$  el valor inicial de la succión. La inclusión de las barras de valor absoluto se basa en que, de esta manera, el modelo numérico se torna más estable ante las oscilaciones de la succión. Además, se introduce un nuevo coeficiente  $k$ , de manera que el nuevo valor de  $a$  sea:

$$a = \frac{c}{\operatorname{tg}\phi} + \|p^c - {}^0p^c\|k \quad (4.6-1)$$

El efecto será un desplazamiento hacia la izquierda de la superficie de fluencia y de la línea de estados críticos a medida que aumenta la succión. Si esta disminuye, la superficie de fluencia será la correspondiente a suelos saturados. Autores como Xikui Li et al<sup>67</sup>, proponen metodologías semejantes. Sin embargo resultados experimentales<sup>17,27</sup> demuestran que el in-

crecimiento de la succión debe corresponderse con un incremento en la superficie de fluencia, restando validez a esta expansión cinemática propuesta.

Para responder a los resultados experimentales, se modifica a la expansión isotrópica de modo de que dependa de la succión modificando el término  $p_{co}$  (4.4-20) y el módulo de endurecimiento,  $A$  (en vez de  $\bar{A}$  por ser pequeñas deformaciones), de (4.4-30):

$$A = \frac{p_{co} + H_w}{2} \chi \left( \frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \quad (4.6-2)$$

que surge de sustituir la ecuación (4.4-20) por:

$$p_{co}^* = (p_{co} + H_w) \cdot \exp(\chi \cdot \varepsilon_v^p) \quad (4.6-3)$$

teniendo siempre en cuenta que

$$\frac{\partial p_{co}^*}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{\partial p_{co}}{\partial \varepsilon_v^p} \quad (4.6-4)$$

En la expresión (4.6-3), se supone que  $H_w$  varía en forma lineal con la succión:

$$H_w = \|m \cdot (p^c - p^c)\| \quad (4.6-5)$$

pudiendo proponerse otro tipo de variación según el suelo<sup>27</sup>.

Sin embargo, para justificar (4.6-2), se debe reemplazar la expresión (4.6-4) en la versión de la (4.4-30) para espacios sin co-rotar:

$$A = - \frac{\partial F}{\partial k} \frac{dk}{d\lambda} = \frac{\partial g}{\partial k} \frac{dk}{d\lambda} = \frac{\partial p_{co}^*}{\partial k} \frac{dk}{d\lambda} \quad (4.6-6)$$

Además habrá que aplicar la condición de consistencia para dos parámetros y asumir que el primero es  $k_1 = \varepsilon_v^p$  y el segundo es  $k_2 = \|p^c - p^c\|$ :

$$A = \frac{\partial p_{co}^*}{\partial k_1} \frac{dk_1}{d\lambda} + \frac{\partial p_{co}^*}{\partial k_2} \frac{dk_2}{d\lambda} \quad (4.6-7)$$

Si se toma:

$$\frac{dk_2}{d\lambda} = 0 \quad (4.6-8)$$

Usando la (4.4-25) sin co-rotar, quedará:

$$\frac{dp_{co}^*}{d\varepsilon_v^p} \frac{d\varepsilon_v^p}{d\lambda} = \frac{p_{co}^*}{2} \chi \left( \frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \quad (4.6-9)$$

Así, no habrá expansión volumétrica ni endurecimiento cuanto se toca la L.E.C. al permanecer el coeficiente  $\left(\frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1\right)$  como multiplicador. Es claro que asumir validez para la (4.6-8) es contradictorio con la expresión (3.13-10) ya que el parámetro, A, aparece como denominador del multiplicador plástico y a su vez recibe influencia de la succión. Sin embargo, nuevamente, esta inconsistencia no se considera de mayor orden que el introducido por a plasticidad no asociada.

#### 4.7 EVOLUCIÓN DEL MODELO. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

A los modelos elastoplásticos comúnmente se los representa en el espacio de Haig Westergaard para analizar su evolución con las tensiones principales. Para el caso de modelos de estados críticos y tal como se hiciera en la Figura 4-1, se usa como referencia al primer invariante del tensor efectivo y al segundo invariante del tensor desviador de tensiones.

A continuación se presentan sendos gráficos en los que se puede observar como afectan a la representación del modelo en la curva  $p'$ - $q$ , distintos valores de la succión. En la Figura 4-2 se puede observar el efecto de la succión  $p^c$  en el endurecimiento cinemático según (4.6-1). En cambio, en la Figura 4-3 el efecto de la succión es aplicado como endurecimiento isotrópico (4.6-5). Es claro que se ha pensado el modelo de modo que ambos efectos actúen en conjunto generando un endurecimiento mixto tal como se aprecia en la Figura 4-4.

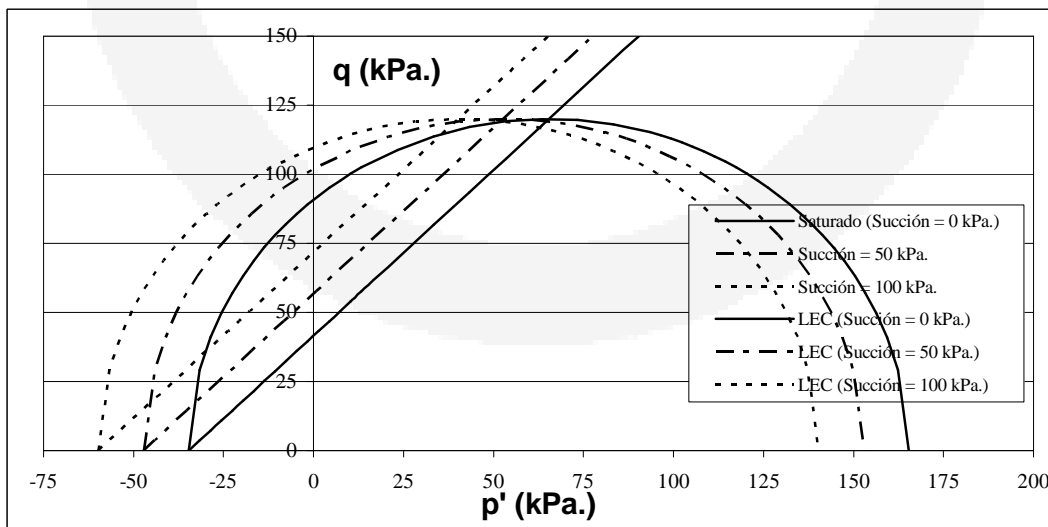
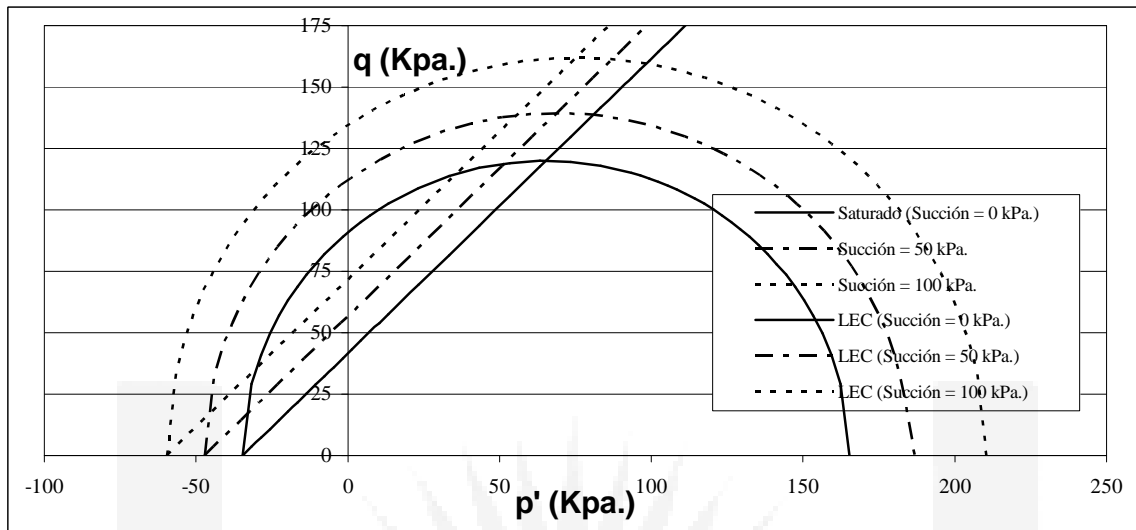
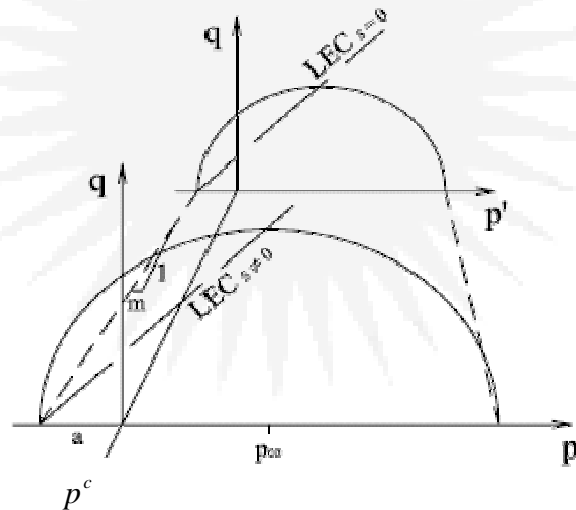


Figura 4-2 Efecto del endurecimiento cinemático.



**Figura 4-3 Efecto del endurecimiento isotrópico.**



**Figura 4-4. Combinación de efectos: endurecimiento mixto.**

#### 4.8 CONSIDERACIONES PARA ESPACIOS CO-ROTADOS.

Todo lo anterior no se ve mayormente alterado cuando se formula el modelo en espacios co-rotados, ya que se el modelo, así como se ha presentado en la sección anterior, se basa en la validez de (4.6-8). Sin embargo, no se entrará en detalles y el tema seguirá siendo estudiado en el futuro en proyectos del Departamento de Mecánica Aplicada y en concordancia con lo que se expondrá en el apartado 8.3.





**CAPÍTULO****5****LAS ECUACIONES DISCRETAS.  
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE  
LOS ELEMENTOS FINITOS.****5.1 OBJETIVOS.**

En este capítulo se realizará la versión discreta de las ecuaciones formuladas en capítulos anteriores usando el Método de los Elementos Finitos. Se presentará a veces en forma matricial y a veces usando la notación de Voigt<sup>9</sup>. En la mayor parte de los casos se mostrará la estructura de matrices y vectores necesarios para la programación en tres dimensiones aunque se dará también la versión en dos para algunos casos especiales teniendo siempre en cuenta que detalles de la forma 2D y su programación pueden consultarse en la referencia [53].

**5.2 SOBRE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.**

Brevemente mencionaremos aquí algunas características generales que se han usado en la formulación por el método mencionado. Todo lo que se ha desarrollado en la presente tesis se ha incorporado al programa FECCUND (Finite Element Consolidation Code Using a Non-linear Development) iniciado durante el desarrollo de la referencia [23] y que resolvía el problema de la consolidación de suelos arcillosos saturados con versiones muy rudimentarias de no linealidad geométrica pero con énfasis en la no linealidad física. Este código fue ampliado en 2003 a través de los trabajos descriptos en las referencias [10] y [53]. En la primera se incorporó el modelo para consolidación de suelos no saturados planteado en forma teórica en referencia [40] y en la segunda se amplió la capacidad del modelo saturado por agregado de una descripción mejorada de la no linealidad geométrica agregándose además el tratamiento de tensiones y pre-consolidaciones iniciales.

El programa completo ha sido codificado en el lenguaje Fortran 90/95, y se encuentra disponible en el Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la UNNE.

Para los cálculos en dos dimensiones se utilizan elementos finitos rectangulares de ocho nodos para la descripción del desplazamiento, y de cuatro nodos para la descripción de la variable presión de poros (usada en los modelos de suelos saturados), con 2 x 2 puntos de Gauss para la integración numérica. Los problemas resueltos corresponden a estados planos de tensiones y estados planos de deformaciones, y fueron tomados en su mayoría de publicaciones de reconocidos autores con el objeto de poder comparar y validar los resultados de los modelos desarrollados y programados en esta Tesis<sup>62</sup>, tanto para sólidos continuos como para suelos saturados. El problema tridimensional es resuelto con elementos isoparamétricos de 20 nodos para desplazamientos 8 para presiones de poro con integración 2 x 2 x 2.

En los ejemplos presentados se utilizan los criterios de plastificación de Von Mises para metales y de Estados Críticos Modificado para suelos compresibles.

Al aplicar el Método de los Elementos Finitos, los tensores simétricos son escritos como arreglos de menor orden para simplificar la codificación en programas computacionales. El procedimiento para realizar esta conversión se denomina regla de Voigt<sup>9</sup>. Así, las tensiones y las deformaciones se convierten de tensores de segundo orden a matrices columnas (o vectores). A modo de ejemplo, para un problema bidimensional se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \text{ y } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.2-1)$$

En tanto, los tensores constitutivos de cuarto orden se convierten a matrices de segundo orden de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ ó } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \xrightarrow{\text{notación de Voigt}} \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \text{ ó } \sigma_a = C_{ab} \varepsilon_b \quad (5.2-2)$$

Lo que lleva, en problemas bidimensionales, a:

$$[\mathbf{C}] \equiv \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (5.2-3)$$

La contracción de índices de la matriz constitutiva acompaña la contracción de los tensores de tensión y deformación. A modo de ejemplo, se representa un problema 3D:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (5.2-4)$$

que se transformará en:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (5.2-5)$$

Si el tensor  $\mathbf{C}$  posee simetría mayor (3.9-2), la matriz  $[\mathbf{C}]$  resulta simétrica. También es importante destacar que transformaciones del tipo (3.10-12) ó (3.11-8) no pueden realizarse en notación de Voigt. Esta notación, también llamada notación matricial, utiliza los corchetes  $\{ \}$  y las llaves  $[ ]$  para identificar vectores y matrices respectivamente aunque cuando resulte redundante, se obviará esta diferenciación.

### 5.3 FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (2.5-13).

Para poder implementar en computador al sistema de ecuaciones obtenidos en el apartado 2.5 del capítulo 1 debemos primeramente llevarlas a su forma débil aplicando el método de Galerkin<sup>3,73</sup> que por tratarse de un procedimiento muy conocido, no se ha detallado aquí. Luego de obtener la forma débil del sistema (2.5-13), queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{sw} \dot{\mathbf{p}}^w + \mathbf{C}_{sg} \dot{\mathbf{p}}^g &= \dot{\mathbf{F}}_s \\ \mathbf{C}_{ws} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}_{ww} \dot{\mathbf{p}}^w + \mathbf{Q}_{wg} \dot{\mathbf{p}}^g + \mathbf{H}_{ww} \dot{\mathbf{p}}^w &= \dot{\mathbf{F}}_w \\ \mathbf{C}_{gs} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}_{gw} \dot{\mathbf{p}}^w + \mathbf{P}_{gg} \dot{\mathbf{p}}^g + \mathbf{H}_{gg} \dot{\mathbf{p}}^g &= \dot{\mathbf{F}}_g \end{aligned} \quad (5.3-1)$$

Siendo que, para problemas tridimensionales se tiene:

$\{\dot{\mathbf{u}}\}$ : Vector velocidad de desplazamiento nodal,

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}^T = \{\dot{u}_1^1, \dot{u}_2^1, \dot{u}_3^1; \dot{u}_1^2, \dot{u}_2^2, \dot{u}_3^2; \dots \dot{u}_1^n, \dot{u}_2^n, \dot{u}_3^n\} \quad (5.3-2)$$

$\{\dot{\mathbf{p}}^w\}$ : Vector tasa de presión de agua nodal,

$$\{\dot{\mathbf{p}}^w\}^T = \{\dot{p}^{w1}; \dot{p}^{w2}; \dots \dot{p}^{wn}\} \quad (5.3-3)$$

$\{\dot{\mathbf{p}}^g\}$ : Vector tasa de presión de aire nodal,

$$\{\dot{\mathbf{p}}^g\}^T = \{\dot{p}^{g1}; \dot{p}^{g2}; \dots \dot{p}^{gn}\} \quad (5.3-4)$$

$\{\hat{\mathbf{p}}^w\}$ ,  $\{\hat{\mathbf{p}}^g\}$ : Vectores presión de agua y aire respectivamente.

$n$  = número de nodos del elemento finito.

$N^u$ : funciones de interpolación para desplazamiento:

$$\{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}^u] \{\dot{\mathbf{u}}\}, \text{ ó } \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & \dots & N_n^u & 0 & 0 \\ 0 & N_1^u & 0 & \dots & 0 & N_n^u & 0 \\ 0 & 0 & N_1^u & \dots & 0 & 0 & N_n^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \dot{u}_3^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^n \\ \dot{u}_2^n \\ \dot{u}_3^n \end{Bmatrix} \quad (5.3-5)$$

$N^p$ : funciones de interpolación para presión de poros (agua o aire):

$$\{\dot{\mathbf{p}}^w\} = [\mathbf{N}^p] \{\dot{\mathbf{p}}^w\}, \text{ ó } \dot{p}^w = \begin{bmatrix} N_1^p & \dots & N_n^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1^w \\ \vdots \\ \dot{p}_n^w \end{Bmatrix} \quad (5.3-6)$$

$[\mathbf{B}]$ : relación tasa de deformación – velocidad nodal:

$$\{\mathbf{D}\} = [\mathbf{B}^u] \{\dot{\mathbf{u}}\}, \text{ ó } \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,2} \\ \dot{u}_{3,3} \\ \dot{u}_{2,3} + \dot{u}_{3,2} \\ \dot{u}_{1,3} + \dot{u}_{3,1} \\ \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1}^u & 0 & 0 & \dots & N_{n,1}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,2}^u & 0 & \dots & 0 & N_{n,1}^u & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,3}^u & \dots & 0 & 0 & N_{n,1}^u \\ 0 & N_{1,3}^u & N_{1,2}^u & \dots & 0 & N_{n,3}^u & N_{n,2}^u \\ N_{1,3}^u & 0 & N_{1,1}^u & \dots & N_{n,3}^u & 0 & N_{n,1}^u \\ N_{1,2}^u & N_{1,1}^u & 0 & \dots & N_{n,2}^u & N_{n,1}^u & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \dot{u}_3^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^n \\ \dot{u}_2^n \\ \dot{u}_3^n \end{Bmatrix} \quad (5.3-7)$$

$$\text{Con } \dot{u}_{i,j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \text{ y } N^u_{i,j} = \frac{\partial N^u_i}{\partial x_j}$$

Las matrices en (5.3-1), con  $d\Omega$  en lugar de  $d\varphi(B)$ , son:

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^u]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}^u] d\Omega \quad \{\dot{\mathbf{F}}_s\} = \int_{\Omega} [\mathbf{N}^u]^T \{\dot{\mathbf{b}}\} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} [\mathbf{N}^u]^T \{\dot{\mathbf{t}}\} d\Gamma \quad (5.3-8)$$

$$[\mathbf{C}_{sg}] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^u]^T a_2 \mathbf{m} [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad [\mathbf{C}_{gs}] = \int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T \mathbf{m} a_2 [\mathbf{B}^u] d\Omega \quad (5.3-9)$$

$$[\mathbf{C}_{ws}] = \int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T \mathbf{m} a_1 [\mathbf{B}^u]^T d\Omega \quad [\mathbf{C}_{sw}] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^u]^T a_1 \mathbf{m} [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad (5.3-10)$$

$$[\mathbf{Q}_{wg}] = -\int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T a_{12} [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad [\mathbf{Q}_{gw}] = -\int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T a_{21} [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad (5.3-11)$$

$$[\mathbf{H}_{ww}] = \int_{\Omega} \nabla [\mathbf{N}^p]^T \frac{\mathbf{k}_{wi}}{\gamma_w} \nabla [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad [\mathbf{H}_{gg}] = \int_{\Omega} \nabla [\mathbf{N}^p]^T \frac{D_i}{P} (1 - S_w) n \nabla [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad (5.3-12)$$

$$[\mathbf{P}_{ww}] = -\int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T a_{11} [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad [\mathbf{P}_{gg}] = -\int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T a_{22} [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad (5.3-13)$$

$$\{\dot{\mathbf{F}}_g\} = -\int_{\Gamma_g} [\mathbf{N}^p]^T \{\dot{\mathbf{q}}_g\} d\Gamma \quad \{\dot{\mathbf{F}}_w\} = -\int_{\Gamma_w} [\mathbf{N}^p]^T \{\dot{\mathbf{q}}_w\} d\Gamma \quad (5.3-14)$$

con los siguientes valores para los coeficientes (calculados en forma discreta en el tiempo anterior y siendo que los valores de saturación deberán obtenerse de la curva característica del apartado 1.7):

$$a_1 = \alpha S_w \text{ y } a_2 = \alpha S_g \quad (5.3-15)$$

$$a_{11} = \left\{ \frac{n S_w}{K_w} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left( S_w + (\Delta p^g - \Delta p^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^w \right\} \quad (5.3-16)$$

$$a_{12} = \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left( S_g - (\Delta p^g - \Delta p^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^w \right\} \quad (5.3-17)$$

$$a_{21} = \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_w + (\Delta p^g - \Delta p^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^g \right\} \quad (5.3-18)$$

$$a_{22} = \left\{ \frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_g - (\Delta p^g - \Delta p^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^g \right\} \quad (5.3-19)$$

$$C_s = n \frac{\Delta S_w}{\Delta p^c}, \quad C_s^w = -S_w \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_g - \Delta p^c \frac{\Delta S_w}{\Delta p^c} \right) \quad \text{y} \quad C_s^g = -S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left( S_w - \Delta p^c \frac{\Delta S_w}{\Delta p^c} \right) \quad (5.3-20)$$

#### 5.4 FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (3.8-6).

Se verá ahora la forma discreta de la ecuación del principio de trabajos virtuales para sólidos en general.

Se comienza por el producto  ${}^t \delta \mathbf{L} : {}^t \mathbf{C}^\tau : {}^t \mathbf{D}$ , que forma parte del primer miembro de la (3.8-6). Este puede ser reemplazado por  ${}^t \delta \mathbf{D} : {}^t \mathbf{C}^\tau : {}^t \mathbf{D}$ , debido a la simetría menor (3.9-3) del tensor  $\mathbf{C}^\tau$ . Luego, la forma discreta del cuerpo continuo en elementos finitos, utilizando la notación de Voigt, y teniendo en cuenta (3.5-4), la (3.8-6) se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta \dot{\mathbf{u}} \right\}^T \cdot \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{B}^u \right]^T \cdot \left[ {}^t \mathbf{C}^\tau \right] \left[ \mathbf{B}^u \right] \frac{d\varphi(B)}{J} \cdot \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\} + \left\{ \delta \dot{\mathbf{u}} \right\}^T \cdot \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \boldsymbol{\beta} \right]^T \cdot \left[ {}^t \boldsymbol{\sigma} \right] \left[ \boldsymbol{\beta} \right] d\varphi(B) \cdot \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\} = \\ & = \left\{ \delta \dot{\mathbf{u}} \right\}^T \cdot \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{N} \right]^T \cdot \left\{ \mathbf{b} \right\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \left\{ \delta \dot{\mathbf{u}} \right\}^T \cdot \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{N} \right]^T \cdot \left\{ \dot{\mathbf{t}} \right\} d\varphi(B) \end{aligned} \quad (5.4-1)$$

siendo, para problemas tridimensionales  $\boldsymbol{\beta}$  la relación gradiente espacial de velocidad – velocidad nodal, definida en esta Tesis de la siguiente forma

$$\left\{ \mathbf{L} \right\} = \left[ \boldsymbol{\beta} \right] \left\{ \dot{\mathbf{u}} \right\}, \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{1,2} \\ \dot{u}_{1,3} \\ \dot{u}_{2,1} \\ \dot{u}_{2,2} \\ \dot{u}_{3,3} \\ \dot{u}_{3,1} \\ \dot{u}_{3,2} \\ \dot{u}_{3,3} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccccc} N_{1,1}^u & 0 & 0 & \dots & N_{n,1}^u & 0 & 0 \\ N_{1,2}^u & 0 & 0 & \dots & N_{n,2}^u & 0 & 0 \\ N_{1,3}^u & 0 & 0 & \dots & N_{n,3}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,1}^u & 0 & \dots & 0 & N_{n,1}^u & 0 \\ 0 & N_{1,2}^u & 0 & \dots & 0 & N_{n,2}^u & 0 \\ 0 & N_{1,3}^u & 0 & \dots & 0 & N_{n,3}^u & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,1}^u & \dots & 0 & 0 & N_{n,1}^u \\ 0 & 0 & N_{1,2}^u & \dots & 0 & 0 & N_{n,2}^u \\ 0 & 0 & N_{1,3}^u & \dots & 0 & 0 & N_{n,3}^u \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \dot{u}_3^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^n \\ \dot{u}_2^n \\ \dot{u}_3^n \end{array} \right\} \quad (5.4-2)$$

con  $\dot{u}_{i,j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$  y  $N_{i,j}^u = \frac{\partial N_i^u}{\partial x_j}$ , ambas medidas sobre la configuración  ${}^t\varphi(\mathbf{B})$ .

La distribución de los elementos de la matriz  $[\mathbf{C}^\tau]$ , correspondiente a la relación constitutiva  $\{L_v \boldsymbol{\tau}\} = [\mathbf{C}^\tau] \cdot \{\mathbf{D}\}$ , es similar a la de (5.2-5).

El cálculo del tensor  $\mathbf{C}^\tau$  fue mostrado en (3.10-13), (3.11-8) o (3.11-12). La primer referencia corresponde lo usual según la bibliografía mientras que los dos últimos corresponden a la propuesta realizada en esta tesis según sean o no importantes las tensiones tangenciales (Apartado 3.11). Es importante presentar el formato de la parte simétrica y no simétrica de (3.11-9):

$$\mathbf{C}^{sim} = \begin{bmatrix} 2\tau_{11} & 0 & 0 & 0 & \tau_{13} & \tau_{12} \\ & 2\tau_{22} & 0 & \tau_{23} & 0 & \tau_{12} \\ & & 2\tau_{11} & \tau_{23} & \tau_{13} & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(\tau_{33} + \tau_{22}) & \frac{1}{2}\tau_{21} & \frac{1}{2}\tau_{13} \\ & & & & \frac{1}{2}(\tau_{33} + \tau_{11}) & \frac{1}{2}\tau_{23} \\ & & & & & \frac{1}{2}(\tau_{22} + \tau_{11}) \end{bmatrix} \quad (5.4-3)$$

*Simetrico*

$$\mathbf{C}^{asim} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{13} & \tau_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{23} & 0 & -\tau_{21} \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_{32} & -\tau_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\tau_{33} - \tau_{22}) & -\frac{1}{2}\tau_{21} & -\frac{1}{2}\tau_{31} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\tau_{12} & \frac{1}{2}(\tau_{33} - \tau_{11}) & \frac{1}{2}\tau_{32} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\tau_{13} & \frac{1}{2}\tau_{23} & \frac{1}{2}(\tau_{22} - \tau_{11}) \end{bmatrix} \quad (5.4-4)$$

Por otro lado, el arreglo de la matriz  ${}^t\boldsymbol{\sigma}$  es obtenido considerando la igualdad que se debe mantener entre el producto tensorial y el producto matricial. Es de aclarar que no es la única forma de generarlo, pero es la adoptada aquí. Teniendo en cuenta que

$${}^t\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^T \cdot [\boldsymbol{\beta}]^T \cdot [{}^t\boldsymbol{\sigma}] \cdot [\boldsymbol{\beta}] \cdot \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}$$

la matriz  ${}^t\boldsymbol{\sigma}$  viene dada por:

$$\Rightarrow \left[ {}^t \boldsymbol{\sigma} \right] \equiv \begin{bmatrix} {}^t \sigma_{11} & {}^t \sigma_{21} & {}^t \sigma_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t \sigma_{12} & {}^t \sigma_{22} & {}^t \sigma_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t \sigma_{13} & {}^t \sigma_{23} & {}^t \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t \sigma_{11} & {}^t \sigma_{21} & {}^t \sigma_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t \sigma_{12} & {}^t \sigma_{22} & {}^t \sigma_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t \sigma_{13} & {}^t \sigma_{23} & {}^t \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t \sigma_{11} & {}^t \sigma_{21} & {}^t \sigma_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t \sigma_{12} & {}^t \sigma_{22} & {}^t \sigma_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t \sigma_{13} & {}^t \sigma_{23} & {}^t \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (5.4-5)$$

### 5.5 INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DE (3.8-6).

Para buscar la solución paso a paso del problema no lineal, con pasos discretos de tiempo  $\Delta t$ , se requiere que la (5.4-1) esté expresada en forma incremental. En consecuencia, es necesario transformar los diferenciales de tiempo (o tasas) a diferencias finitas:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cong \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}}{\Delta t} \quad (5.5-1)$$

De acuerdo a lo discutido en la sección 3.2, todas las magnitudes se definen sobre la última configuración equilibrada (tiempo  $t$ ), y se pasa a la siguiente (tiempo  $t+\Delta t$ ) mediante un proceso iterativo, como el de Newton-Raphson modificado. Por lo tanto, se hace lineal al problema considerando que tanto las variables en tasas como sus incrementos están referenciados sobre la configuración del tiempo  $t$ , es decir, se utilizan las mismas matrices  $\boldsymbol{\beta}$  de (5.4-2) y  $\mathbf{B}$  de (5.3-7), medidas en el tiempo  $t$ , para el cálculo incremental. La matriz de rigidez del sistema de elementos finitos, que surge de hacer lineal el primer miembro de la (5.4-1), se denomina matriz de rigidez tangente.

Simplificando  $\{\delta \hat{\mathbf{u}}\}^T$  de la (5.4-1) y pasando a la forma incremental, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{{}^t \varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T \cdot [{}^t \mathbf{C}^t] [\mathbf{B}^u] \frac{d\varphi(B)}{J} + \int_{{}^t \varphi(B)} [\boldsymbol{\beta}]^T \cdot [{}^t \boldsymbol{\sigma}] [\boldsymbol{\beta}] d\varphi(B) \right) \cdot \{\Delta \hat{\mathbf{u}}\} = \\ & = \int_{{}^t \varphi(B)} [\mathbf{N}]^T \cdot \{\Delta \mathbf{b}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{{}^t \varphi(B)} [\mathbf{N}]^T \cdot [\Delta \bar{\mathbf{t}}] \cdot d\varphi(B) \end{aligned} \quad (5.5-2)$$

El primer miembro se conoce comúnmente como fuerzas nodales internas, por ser las reacciones internas que equilibran al segundo miembro, conocido como fuerzas nodales externas. Nótese que las fuerzas internas están relacionadas al incremento de los desplazamientos nodales.



les  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  a través de dos términos: el primero debido a la respuesta del material, y el segundo debido al estado actual de tensiones, el cual lleva en cuenta todos los efectos geométricos de la deformación, como rotaciones y elongaciones. En consecuencia, a estos términos se los denomina rigidez de material  $\mathbf{K}_{\text{mat}}$  y rigidez geométrica  $\mathbf{K}_{\text{geo}}$ , respectivamente, y la suma de ambas forma la matriz de rigidez tangente del sistema de elementos finitos. En forma matricial compacta se puede escribir la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}}) \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (5.5-3)$$

siendo:

$$\mathbf{K}_{\text{mat}} = \int_{\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T \cdot [{}^t \mathbf{C}^\tau] [\mathbf{B}] \frac{d\varphi(B)}{J} \quad (5.5-4)$$

$$\mathbf{K}_{\text{geo}} = \int_{\varphi(B)} [\boldsymbol{\beta}]^T \cdot [{}^t \boldsymbol{\sigma}] [\boldsymbol{\beta}] d\varphi(B) \quad (5.5-5)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{\varphi(B)} [\mathbf{N}]^T \cdot \{\Delta \mathbf{b}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial \varphi(B)} [\mathbf{N}]^T \cdot [\Delta \mathbf{t}] d\partial \varphi(B) \quad (5.5-6)$$

La solución de la (5.5-3), que da los desplazamientos nodales  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ , se calcula con cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas, luego de imponer las condiciones de borde (o de contorno) al sistema de elementos finitos, y en cada iteración del proceso incremental. Debido a que el problema es no lineal, y de acuerdo a lo discutido en la sección 3.2, al final de cada iteración o ciclo de cálculo aparece un error o residuo  $\mathfrak{R}$  que, según la (3.2-1) y para un proceso incremental, vale:

$$\mathfrak{R} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} - \Delta \mathbf{F}_{\text{int}} \neq \mathbf{0} \quad (5.5-7)$$

Llevando en cuenta la (5.4-1), se obtiene la expresión para el cálculo del residuo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} - (\mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}}) \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ &= \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} - \left( \int_{\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T \cdot [{}^t \mathbf{C}^\tau] \{\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}\} \frac{d\varphi(B)}{J} + \int_{\varphi(B)} \boldsymbol{\beta}^T \cdot [{}^t \boldsymbol{\sigma}] \nabla \{\Delta \hat{\mathbf{u}}\} d\varphi(B) \right) \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.5-8)$$

donde  $\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  es el incremento de deformación lineal nodal, en la configuración actual, definido a partir de (3.4-19) y (5.3-7) como:

$$\Delta \hat{\mathbf{e}} = {}^t \mathbf{B} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{e}_1 \\ \Delta \hat{e}_2 \\ \Delta \hat{e}_3 \\ \Delta \hat{e}_4 \\ \Delta \hat{e}_5 \\ \Delta \hat{e}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{e}_{11} \\ \Delta \hat{e}_{22} \\ \Delta \hat{e}_{33} \\ 2\Delta \hat{e}_{23} \\ 2\Delta \hat{e}_{13} \\ 2\Delta \hat{e}_{12} \end{Bmatrix}, \text{ con } \Delta \hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_i}{\partial {}^t x_j} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_j}{\partial {}^t x_i} \right) \quad (5.5-9)$$

y  $\nabla \Delta \hat{\mathbf{u}}$  es el gradiente espacial del incremento de los desplazamientos nodales, definido a partir de (3.4-17) y (5.4-2) como:

$$\nabla \Delta \hat{\mathbf{u}} = {}^t \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \nabla \Delta \hat{u}_1 \\ \nabla \Delta \hat{u}_2 \\ \Delta \nabla \hat{u}_3 \\ \nabla \Delta \hat{u}_4 \\ \nabla \Delta \hat{u}_5 \\ \nabla \Delta \hat{u}_6 \\ \nabla \Delta \hat{u}_7 \\ \nabla \Delta \hat{u}_8 \\ \nabla \Delta \hat{u}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{u}_{1,1} \\ \Delta \hat{u}_{1,2} \\ \Delta \hat{u}_{1,3} \\ \Delta \hat{u}_{2,1} \\ \Delta \hat{u}_{2,2} \\ \Delta \hat{u}_{3,3} \\ \Delta \hat{u}_{3,1} \\ \Delta \hat{u}_{3,2} \\ \Delta \hat{u}_{3,3} \end{Bmatrix}, \text{ con } \Delta \hat{u}_{i,j} = \frac{\partial \Delta \hat{u}_i}{\partial {}^t x_j} \quad (5.5-10)$$

El cálculo del residuo  $\mathfrak{R}$  con la (5.5-8) puede introducir, en algunos casos, errores numéricos por redondeo, que se acumulan hacia adelante al avanzar en el tiempo con los incrementos de carga. Para evitar estos errores y lograr un mejor control en el cálculo de la tensión total en el tiempo  $t+\Delta t$ , se puede calcular el vector residuo como la diferencia que surge de plantear el equilibrio del cuerpo en un instante determinado  $t+\Delta t$ , con el total de los esfuerzos actuantes en ese momento, es decir:

$$\mathfrak{R} = \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\} - \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i)} \right\} \neq \mathbf{0} \quad (5.5-11)$$

$$\mathfrak{R} = \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\} - \int_{{}^t \varphi(\mathbf{B})} \left[ \mathbf{B}^u \right]^T \cdot \left\{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \right\} d\varphi(\mathbf{B}) \neq \mathbf{0} \quad (5.5-12)$$

Siendo,  $(i)$ , una iteración por no linealidad. El vector residuo  $\mathfrak{R}$ , calculado con (5.5-8) o (5.5-12), es tenido en cuenta como carga para la siguiente iteración de cálculo. El proceso iterativo se detiene, para proceder con el siguiente incremento de tiempo (o carga), cuando el valor de  $\mathfrak{R}$  se hace menor o igual a una cierta tolerancia preestablecida.

### 5.6 FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (4.3-1).

Para hacer discreta la ecuación de equilibrio (4.3-1) de manera análoga a lo hecho en los apartados 5.3 y 5.4 , debemos fijar nuestra atención en la manera de definir la matriz de rigidez del elemento. La ecuación (4.3-1) debe sustituirse en el primer término de la primer ecuación de la (2.5-13) o más recientemente, de la (5.3-1). Recordando esta última:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{sw}\dot{\hat{\mathbf{p}}^w} + \mathbf{C}_{sg}\dot{\hat{\mathbf{p}}^g} = \dot{\hat{\mathbf{F}}}_s \quad (5.6-1)$$

Ahora, la matriz  $\mathbf{K}$ , a diferencia de (5.5-2), y en notación de Voigt, será:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \int_{\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T \cdot [{}^t\mathbf{C}^r] [\mathbf{B}^u] \frac{d\varphi(B)}{J} + \\ & + \int_{\varphi(B)} [\boldsymbol{\beta}]^T \cdot [{}^t\boldsymbol{\sigma}] [\boldsymbol{\beta}] d\varphi(B) + \int_{\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T \cdot {}^t a_1 \cdot {}^t p^w \cdot \{\mathbf{m}\} \cdot \{\mathbf{m}\}^T \cdot [\mathbf{B}^u] d\varphi(B) + \\ & + \int_{\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T \cdot {}^t a_2 \cdot {}^t p^g \cdot \{\mathbf{m}\} \cdot \{\mathbf{m}\}^T \cdot [\mathbf{B}^u] d\varphi(B) \end{aligned} \quad (5.6-2)$$

y:

$$\dot{\hat{\mathbf{F}}}_{\text{ext}} = \int_{\varphi(B)} [\mathbf{N}^u]^T \cdot \{\dot{\mathbf{b}}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial\varphi(B)} [\mathbf{N}^u]^T \cdot \{\dot{\mathbf{t}}\} \cdot d\partial\varphi(B) \quad (5.6-3)$$

donde  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\mathbf{B}^u$  son las relaciones  $\{\mathbf{L}\} - \{\hat{\mathbf{u}}\}$ , según (5.4-2), y  $\{\mathbf{D}\} - \{\hat{\mathbf{u}}\}$ , según (5.3-7), respectivamente, pero expresados ambos en términos de  $[\mathbf{N}^u]$ . Además, el valor de las constantes se dan en (2.5-13) ó (5.3-15), y el de  $[{}^t\mathbf{C}^r]$  se obtiene de (4.2-10).

### 5.7 INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DE (5.3-1).

Durante el párrafo 5.5 se indicó la necesidad de aprovechar la integración en el tiempo para lograr la solución paso a paso de un problema no lineal. Ahora volvemos a realizar lo mismo sobre el sistema indicado en (5.3-1) con la incorporación de la no linealidad indicada en (5.6-2). En esta ocasión nos detendremos sobre la técnica de integración por la aparición conjunta de  $(\dot{\hat{\mathbf{p}}^w}, \dot{\hat{\mathbf{p}}^g})$  y  $(\hat{\mathbf{p}}^w, \hat{\mathbf{p}}^g)$  en el sistema de ecuaciones. Para ello se puede recurrir al método del parámetro  $\vartheta^{9,61}$  aplicado, por ejemplo, a la incógnita genérica  $p$ . Así, se tiene:

$$\dot{p} = \mathcal{G} \cdot {}^{t+\Delta t} \dot{p} + (1 - \mathcal{G}) \cdot {}^t \dot{p} \quad (5.7-1)$$

con  $0 \leq \mathcal{G} \leq 1$ ; y considerando que:  $(*) = \frac{{}^{t+\Delta t} (*) - {}^t (*)}{\Delta t}$ , se puede escribir:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{sw} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{ws} & \mathbf{P}_{ww} & \mathbf{Q}_{wg} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{Q}_{gw} & \mathbf{P}_{gg} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{sw} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{ws} & \mathbf{P}_{ww} & \mathbf{Q}_{wg} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{Q}_{gw} & \mathbf{P}_{gg} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{gg} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} \mathcal{G} \cdot \Delta t + \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{gg} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} (1 - \mathcal{G}) \Delta t = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_s \\ \dot{\mathbf{F}}_w \\ \dot{\mathbf{F}}_g \end{Bmatrix} \Delta t \end{aligned} \quad (5.7-2)$$

ó

$$\begin{aligned} & {}^t \begin{vmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{sw} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{ws} & (\mathbf{P}_{ww} + \mathbf{H}_{ww} \mathcal{G} \Delta t) & \mathbf{Q}_{wg} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{Q}_{gw} & (\mathbf{P}_{gg} + \mathbf{H}_{gg} \mathcal{G} \Delta t) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} + \\ & + \Delta t \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{gg} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} = \Delta t \begin{Bmatrix} \mathcal{G} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{F}}_s + (1 - \mathcal{G}) {}^t \dot{\mathbf{F}}_s \\ \mathcal{G} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{F}}_w + (1 - \mathcal{G}) {}^t \dot{\mathbf{F}}_w \\ \mathcal{G} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{F}}_g + (1 - \mathcal{G}) {}^t \dot{\mathbf{F}}_g \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.7-3)$$

o también:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} {}^t \mathbf{K} & \mathbf{C}_{sw} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{ws} & (\mathbf{P}_{ww} + \mathbf{H}_{ww} \mathcal{G} \Delta t) & \mathbf{Q}_{wg} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{Q}_{gw} & (\mathbf{P}_{gg} + \mathbf{H}_{ww} \mathcal{G} \Delta t) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}^w \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} {}^t \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\Delta t \mathbf{H}_{ww}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\Delta t \mathbf{H}_{gg}) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_s \\ \Delta \mathbf{F}_w \\ \Delta \mathbf{F}_g \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.7-4}$$

La expresión (5.7-4) luego de ser montada para todo el dominio en estudio, e incluidas las correspondientes condiciones de contorno, conduce al sistema de ecuaciones algebraicas incrementales que son resueltas en forma iterativa, de acuerdo a lo discutido en la sección 3.2, debido a que el problema es no lineal. Se hace especial referencia a que las matrices son tomadas en el tiempo anterior equilibrado para el cálculo de cada incremento de las incógnitas y es por esto que en (5.3-16) a (5.3-20) se usan los incrementos del tiempo anterior.

El proceso iterativo se extiende hasta que el error o residuo  $\mathfrak{R}$  sea menor o igual a una tolerancia preestablecida. Este residuo, análogamente a (5.5-12), se calcula para medios porosos saturados de la siguiente manera y usando notación de Voigt:

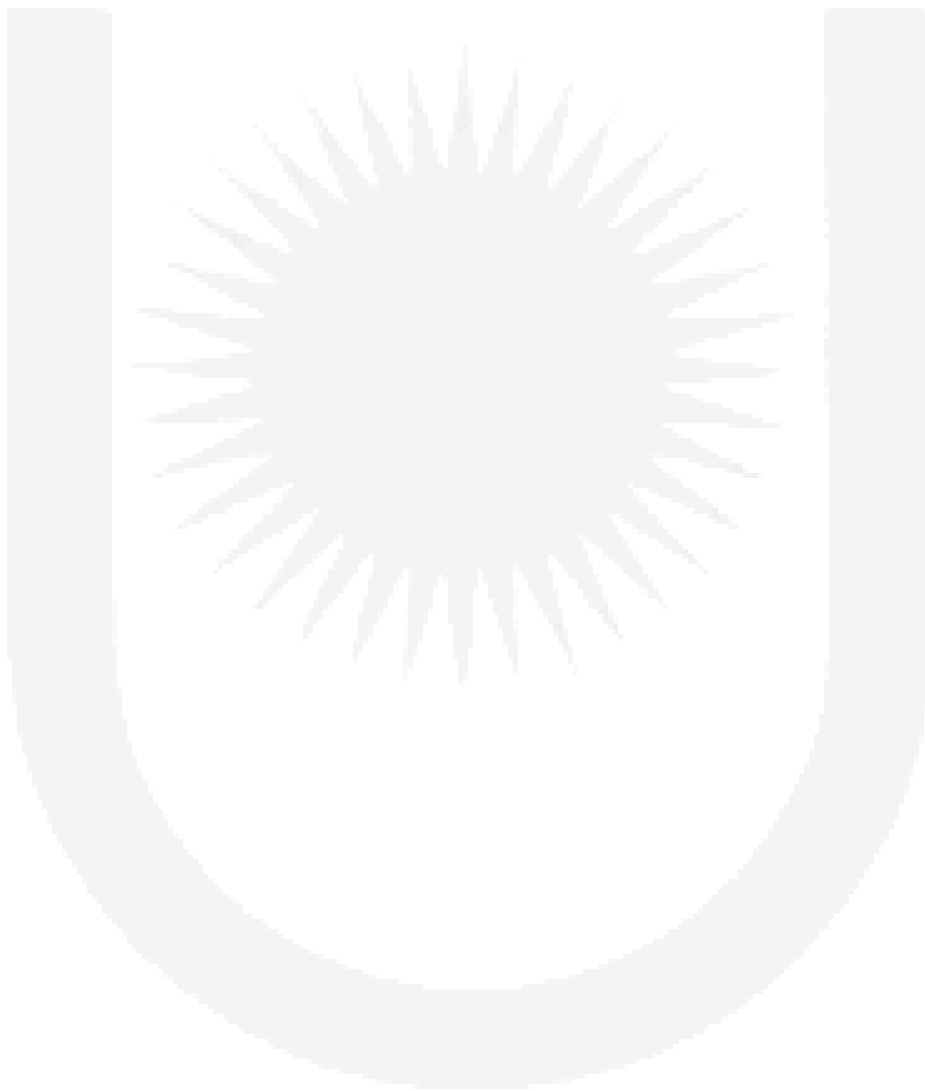
$$\{\mathfrak{R}\} = \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^G_{\text{ext}} \right\} - \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^G_{\text{int}} \right\} \quad (G \text{ indica general}) \tag{5.7-5}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R} = & \begin{Bmatrix} -\Delta t [\mathbf{H}]_{ww} \left\{ {}^t \hat{\mathbf{p}}^w \right\} + \left\{ \Delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_w \right\} \\ -\Delta t [\mathbf{H}]_{gg} \left\{ {}^t \hat{\mathbf{p}}^g \right\} + \left\{ \Delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_g \right\} \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{Bmatrix} -\int [\mathbf{B}^u]^T \left\{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \right\} d\varphi(B) \\ -[\mathbf{C}]_{ws} \left\{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^t \hat{\mathbf{u}} \right\} - \left( [\mathbf{P}]_{ww} + \alpha \Delta t [\mathbf{H}]_{ww} \right) \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^w \right\} - [\mathbf{Q}]_{wg} \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^g \right\} \\ -[\mathbf{C}]_{gs} \left\{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^t \hat{\mathbf{u}} \right\} - [\mathbf{Q}]_{wg} \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^w \right\} - \left( [\mathbf{P}]_{gg} + \alpha \Delta t [\mathbf{H}]_{gg} \right) \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^g \right\} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.7-6}$$

donde  $\left\{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \right\}$  es el vector de tensiones totales (tensiones efectivas mas presión de poros) de Cauchy, calculado a partir de (3.5-5), como:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\left(J^{-1}\mathbf{R}\bar{\boldsymbol{\tau}}'\mathbf{R}^T\right)^{(i)} + {}^{t+\Delta t}\left(a_1\cdot p^w\mathbf{I}\right)^{(i)} + {}^{t+\Delta t}\left(a_2\cdot p^s\mathbf{I}\right)^{(i)} \quad (5.7-7)$$

La anterior se da en términos de la tensión co-rotacional efectiva de Kirchhoff  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  cuyo valor en la iteración  $(i)$  del tiempo  $t+\Delta t$  es directamente la sumatoria de los incrementos de tensión efectiva hasta ese momento. El mismo tratamiento se hace para  $p^w$  y  $p^s$ .



**CAPÍTULO****6****DIAGRAMA DE SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.****6.1 OBJETIVOS.**

En este capítulo se realizará en forma muy breve un esquema general del procedimiento de cálculo que permite resolver el problema de consolidación no saturado usando el conjunto de matrices desarrollado en capítulo 5, tomando específicamente las mostradas en los apartados 5.6 y 5.7, es decir, el caso más completo con no linealidad general y tridimensional.

**6.2 INTRODUCCIÓN.**

La formulación de los procedimientos se encuentra ordenada según la secuencia con que el programa computacional realiza los cálculos. La definición de las ecuaciones y variables de la formulación presentada debe ser buscada en los Capítulos respectivos, o más resumidamente en la lista de símbolos ubicada al comienzo del texto.

En el desarrollo numérico se toma como configuración de referencia a la geometría original y se la va actualizando al alcanzar el equilibrio en cada paso de carga, genéricamente en el tiempo  $t$ , actualizándose también las magnitudes que describen el estado tensional y de deformación del cuerpo. En cuanto a las tensiones iniciales se las toma como preexistentes en el cuerpo al momento de comenzar el análisis, sin llevar en cuenta las deformaciones que acompañaron su aparición, es decir, se toma la configuración original (no deformada) sometida a estas tensiones preexistentes.

### 6.3 DIAGRAMA DE FLUJO PARA SUELOS NO SATURADOS.

(a) Inicio del proceso con:  $t = 0$ ,  ${}^t \mathbf{x} = \mathbf{X}$ ,  ${}^t \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ,  ${}^t \mathbf{F} = {}^t \mathbf{R} \cdot {}^t \mathbf{U} = {}^t \mathbf{F}^E \cdot {}^t \mathbf{F}^P = \mathbf{I}$ ,  ${}^t \bar{\boldsymbol{\tau}} = {}^t \boldsymbol{\sigma} = {}^0 \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \bar{g}(\bar{\mathbf{k}}) = {}^0 g$ ,  ${}^t \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ . Siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad,  ${}^0 \boldsymbol{\sigma}$  las tensiones iniciales o preexistentes en el cuerpo y  ${}^0 g$  la tensión de comparación (o límite elástico) inicial.

(b) Progreso del tiempo un paso  $\Delta t$  (tiempo actual =  $t + \Delta t$ ) con un incremento de los vectores de cargas definidos en (5.3-8) ó (5.3-14).

$$\left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\} = \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{N}^u \right]^T \cdot \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} \right\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial {}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{N}^u \right]^T \cdot \left\{ {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{t}} \right\} \cdot d\partial \varphi(B)$$

$$\left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_g \right\} = - \int_{\Gamma_g} \left[ \mathbf{N}^p \right]^T \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_g \right\} d\Gamma \quad \text{y} \quad \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_w \right\} = - \int_{\Gamma_w} \left[ \mathbf{N}^p \right]^T \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_w \right\} d\Gamma$$

$$\text{con: } \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} \right\} = \left\{ {}^t \mathbf{b} \right\} + \left\{ \Delta \mathbf{b} \right\}, \quad \left\{ {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{t}} \right\} = \left\{ {}^t \bar{\mathbf{t}} \right\} + \left\{ \Delta \bar{\mathbf{t}} \right\}, \text{ etc.}$$

(c) Cálculo, a nivel de cada elemento finito, de la matriz de rigidez (5.6-2):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{B}^u \right]^T \cdot \left[ {}^t \mathbf{C}^\tau \right] \cdot \left[ \mathbf{B}^u \right] \frac{d\varphi(B)}{J} + \\ & + \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \boldsymbol{\beta} \right]^T \cdot \left[ {}^t \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \left[ \boldsymbol{\beta} \right] d\varphi(B) + \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{B}^u \right]^T \cdot {}^t a_1 \cdot {}^t p^w \cdot \left\{ \mathbf{m} \right\} \cdot \left\{ \mathbf{m} \right\}^T \cdot \left[ \mathbf{B}^u \right] d\varphi(B) + \\ & + \int_{{}^t \varphi(B)} \left[ \mathbf{B}^u \right]^T \cdot {}^t a_2 \cdot {}^t p^s \cdot \left\{ \mathbf{m} \right\} \cdot \left\{ \mathbf{m} \right\}^T \cdot \left[ \mathbf{B}^u \right] d\varphi(B) \end{aligned}$$

y de las matrices de flujo (5.3-9) a (5.3-13):

$$\left[ \mathbf{C}_{\text{sg}} \right] = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{B}^u \right]^T a_2 \mathbf{m} \left[ \mathbf{N}^p \right] d\Omega \quad \left[ \mathbf{C}_{\text{gs}} \right] = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{N}^p \right]^T \mathbf{m} a_2 \left[ \mathbf{B}^u \right] d\Omega$$

$$\left[ \mathbf{C}_{\text{ws}} \right] = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{N}^p \right]^T \mathbf{m} a_1 \left[ \mathbf{B}^u \right]^T d\Omega \quad \left[ \mathbf{C}_{\text{sw}} \right] = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{B}^u \right]^T a_1 \cdot \mathbf{m} \left[ \mathbf{N}^p \right] d\Omega$$

$$\left[ \mathbf{Q}_{\text{wg}} \right] = - \int_{\Omega} \left[ \mathbf{N}^p \right]^T a_{12} \left[ \mathbf{N}^p \right] d\Omega \quad \left[ \mathbf{Q}_{\text{gw}} \right] = - \int_{\Omega} \left[ \mathbf{N}^p \right]^T a_{21} \left[ \mathbf{N}^p \right] d\Omega$$

$$\left[ \mathbf{H}_{\text{ww}} \right] = \int_{\Omega} \nabla \left[ \mathbf{N}^p \right]^T \frac{\mathbf{k}_{wi}}{\gamma_w} \nabla \left[ \mathbf{N}^p \right] d\Omega \quad \left[ \mathbf{H}_{\text{gg}} \right] = \int_{\Omega} \nabla \left[ \mathbf{N}^p \right]^T \frac{D_i}{P} (1 - S_w) n \nabla \left[ \mathbf{N}^p \right] d\Omega$$



$$[\mathbf{P}_{ww}] = -\int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T a_{11} [\mathbf{N}^p] d\Omega \quad [\mathbf{P}_{gg}] = -\int_{\Omega} [\mathbf{N}^p]^T a_{22} [\mathbf{N}^p] d\Omega$$

Con relación a  $\mathbf{H}_{ww}$  y  $\mathbf{H}_{gg}$ , debe decirse que se deberá actualizar el valor de la saturación en las matrices en que esta intervenga usando la curva característica y el valor  ${}^t p^c = {}^t p^g - {}^t p^w$  en el punto de Gauss y en el tiempo equilibrado.

Ensamblaje del sistema acoplado para todo el conjunto de elementos finitos.

(d) Imposición de las condiciones de contorno, desplazamientos y presiones de poros prescritos, y cálculo de las incógnitas  $\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)}$  y  $\Delta \hat{\mathbf{p}}^w{}^{(i)}$  y  $\Delta \hat{\mathbf{p}}^g{}^{(i)}$  del sistema de ecuaciones acoplado dado en (5.7-4):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{sw} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{ws} & (\mathbf{P}_{ww} + \mathbf{H}_{ww} \vartheta \Delta t) & \mathbf{Q}_{wg} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{Q}_{gw} & (\mathbf{P}_{gg} + \mathbf{H}_{ww} \vartheta \Delta t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)} \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}^w{}^{(i)} \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}^g{}^{(i)} \end{Bmatrix} =$$

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\Delta t \mathbf{H}_{ww}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\Delta t \mathbf{H}_{gg}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^w \\ {}^t \hat{\mathbf{p}}^g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_s \\ \Delta \mathbf{F}_w \\ \Delta \mathbf{F}_g \end{Bmatrix}$$

Con  $\Delta \mathbf{F}_s = \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} \} - \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{int}^{(i)} \}$  siendo  $(i)$  la iteración en curso, y :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{int}^{(i-1)} = \int_{\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T \cdot \{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} \} \cdot d\varphi(B) \quad (\text{Ver (5.7-5) ó (5.7-6)})$$

donde  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  es la tensión total de la iteración anterior calculada en el punto (l) para la iteración anterior.

(e) Actualización de los desplazamientos y presiones de poro nodales:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)}, \text{ con } {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(0)} \equiv {}^t \hat{\mathbf{u}}$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^w{}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^w{}^{(i-1)} + \Delta \hat{\mathbf{p}}^w{}^{(i)}, \text{ con } {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^w{}^{(0)} \equiv {}^t \hat{\mathbf{p}}^w$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^g{}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^g{}^{(i-1)} + \Delta \hat{\mathbf{p}}^g{}^{(i)}, \text{ con } {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^g{}^{(0)} \equiv {}^t \hat{\mathbf{p}}^g$$

(f) Cálculo del gradiente de deformación (3.4-1) y su determinante (3.4-6):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{I} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}, \text{ y } {}^{t+\Delta t} J^{(i)} = \det[{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)}]$$

(g) Cálculo del tensor derecho de elongaciones definido en (3.4-5):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = \sqrt{({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)})^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)}}$$

por descomposición espectral, o sea:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda^{(j)}} \cdot \mathbf{p}^{(j)} \otimes \mathbf{p}^{(j)}, \text{ ó } {}^{t+\Delta t} U_{mn}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda^{(j)}} \cdot p_m^{(j)} \cdot p_n^{(j)}$$

donde  $\lambda^{(j)}$  y  $\mathbf{p}^{(j)}$  son los autovalores y autovectores, respectivamente, de  $[({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)})^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)}]$ ; y  $N$  es la dimensión del problema.

(h) Cómputo del incremento de deformación co-rotada según (3.4-16):

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} &= \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{U}^{(i)} \cdot ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} + ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{U}^{(i)}] \\ &= \frac{1}{2} [({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^t \mathbf{U}^{(i)}) \cdot ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} + ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^t \mathbf{U}^{(i)})] \\ &= \frac{1}{2} [{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} \cdot ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} + ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)}] - \mathbf{I} \end{aligned}$$

(i) Cálculo de la tensión efectiva elástica de prueba a partir de (3.13-2) y teniendo en cuenta (3.4-26)

$$\{\Delta \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)}\} = [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}\} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)} = {}^t \bar{\boldsymbol{\tau}}' + \Delta \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)}$$

(j) Evaluación de la función de fluencia (3.13-7):

$$\bar{F}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) = \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) - \bar{g}(\bar{k}) = \frac{\bar{p}' + \bar{a}}{2} \left[ \left( \frac{\bar{q}}{\bar{p}' + \bar{a}} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} + 1 \right] - \bar{p}_{co} = 0$$

con o sin las modificaciones indicadas en el apartado 4.6.

- Si  $\bar{F} < 0 \Rightarrow$  campo elástico, no se corrige la tensión calculada en (i). Saltar al punto (k).
- Si  $\bar{F} \geq 0 \Rightarrow$  campo plástico, se reduce la tensión calculada en (i) a la superficie de fluencia utilizando algún algoritmo de retorno de tensiones (ver sección 0), obteniéndose al final del mismo los valores de  ${}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{P}(i)}$  y  ${}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)}$ .

(k) Cálculo del tensor rotación:

A partir de (3.4-5):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)})^{-1}$$

(l) Cálculo de las tensiones totales. De (5.7-7):

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \left( J^{-1} \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}}' \mathbf{R}^T \right)^{(i)} + {}^{t+\Delta t} \left( a_1 \cdot p^w \mathbf{I} \right)^{(i)} + {}^{t+\Delta t} \left( a_2 \cdot p^g \mathbf{I} \right)^{(i)}$$

con  ${}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}'^{(i)}$  obtenido de (j).

(m) Evaluación del equilibrio del cuerpo mediante el cálculo del residuo  $\mathfrak{R}$  (5.7-6):

$$\mathfrak{R} = \left\{ \begin{array}{l} -\Delta t [\mathbf{H}]_{\text{ww}} \left\{ {}^t \hat{\mathbf{p}}^w \right\} + \left\{ \Delta^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\} \\ -\Delta t [\mathbf{H}]_{\text{gg}} \left\{ {}^t \hat{\mathbf{p}}^g \right\} + \left\{ \Delta^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\} \end{array} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\int [\mathbf{B}^u]^T \left\{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \right\} d\varphi(\mathbf{B}) \\ -[\mathbf{C}]_{\text{ws}} \left\{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^t \hat{\mathbf{u}} \right\} - \left( [\mathbf{P}]_{\text{ww}}^{\Omega} + \alpha \Delta t [\mathbf{H}]_{\text{ww}} \right) \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^w \right\} - \mathbf{Q}_{\text{wg}} \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^g \right\} \\ -[\mathbf{C}]_{\text{gs}} \left\{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^t \hat{\mathbf{u}} \right\} - [\mathbf{Q}]_{\text{wg}} \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^w \right\} - \left( [\mathbf{P}]_{\text{gg}} + \alpha \Delta t [\mathbf{H}]_{\text{gg}} \right) \left\{ {}^{t+\Delta t} \Delta \hat{\mathbf{p}}^g \right\} \end{array} \right\}$$

- Si  $\mathfrak{R}$  es mayor a un error preestablecido, se itera a partir del punto (d) haciendo  $i=i+1$ .
- Si  $\mathfrak{R}$  es menor al error preestablecido, se avanza en el tiempo con el siguiente incremento de carga a partir del punto (b), actualizándose todas las magnitudes:  ${}^t(\bullet) = {}^{t+\Delta t}(\bullet)$ , siendo  ${}^{t+\Delta t}(\bullet)$  la magnitud calculada en la última iteración, y la configuración deformada de referencia pasa a ser la geometría recientemente equilibrada:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{x} = \mathbf{X} + {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}$ .

#### 6.4 ALGORITMO DE RETORNO DE PLANO CORTANTE.

En este trabajo se utilizó el Algoritmo Plano Cortante (ver referencias [9] y [61]) para el retorno de las tensiones a la superficie de fluencia. El lineamiento teórico fue descrito en la sección 4.5 y aquí se da el proceso computacional:

(a) Se inicializa:  $j=0$  (iteración plástica), y  ${}^{t+\Delta t} \Delta \bar{A}^{(0)} = 0$ .

Nótese que en la notación se reemplazó el superíndice de la iteración de equilibrio ( $i$ ) por el de la iteración plástica ( $j$ ), estando comprendido un proceso iterativo plástico completo dentro de cada iteración de equilibrio.

(b) Se computa, de acuerdo al criterio de fluencia utilizado, la función de fluencia

$${}^{t+\Delta t} \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})^{(j)}, \text{ la dirección del flujo plástico } {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{a}}^{(j)}, \text{ y el módulo plástico } {}^{t+\Delta t} \bar{A}^{(j)}.$$

(c) Se calcula el multiplicador plástico:

$$\Delta^{(2)} \bar{\lambda}^{(j)} = \frac{{}^{t+\Delta t} \bar{f}^{(j)} - {}^{t+\Delta t} \bar{g}^{(j-1)}}{({}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{a}}^{(j)})^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{a}}^{(j)} + {}^{t+\Delta t} \bar{\lambda}^{(j)}}$$

(d) Se actualiza el límite de fluencia:

$${}^{t+\Delta t} \bar{g}(\bar{\mathbf{k}})^{(j)} = {}^{t+\Delta t} \bar{g}(\bar{\mathbf{k}})^{(j-1)} + \Delta^2 \bar{\lambda}^{(j)} \cdot {}^{t+\Delta t} \bar{\lambda}^{(j)}$$

(e) Se calcula el verdadero multiplicador plástico para esta iteración:

$$\Delta^{(2)} \bar{\lambda}^{(j)} = \frac{{}^{t+\Delta t} \bar{f}^{(j)} - {}^{t+\Delta t} \bar{g}^{(j)}}{({}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{a}}^{(j)})^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{a}}^{(j)} + {}^{t+\Delta t} \bar{\lambda}^{(j)}}$$

Si este módulo es menor que un cierto error preestablecido, vale decir que:

$${}^{t+\Delta t} \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = {}^{t+\Delta t} \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - {}^{t+\Delta t} \bar{g}(\bar{\mathbf{k}}) \cong 0$$

entonces finaliza el algoritmo. En caso contrario, se continúa con el punto (f).

(f) Se actualiza las variables:

$${}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{P}(j)} = {}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{P}(j-1)} + \Delta^{(2)} \bar{\lambda}^{(j)} \cdot {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{a}}^{(j)}$$

$${}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\lambda}^{(j)} = {}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\lambda}^{(j-1)} + \Delta^{(2)} \bar{\lambda}^{(j)}$$

(g) Se computa las tensiones:

$${}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(j)} = {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}} - [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot {}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{P}(j)}$$

siendo  ${}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}$  la tensión elástica de prueba calculada en el punto (i) (sección 6.3).

(h) Se hace  $j = j+1$ , y se reinicia el algoritmo a partir del punto (b).

Al finalizar las iteraciones para el equilibrio del paso de tiempo actual, es decir cuando  $\mathfrak{R}$  es menor al error tolerable preestablecido (ver punto (m) de las sección 6.3), se inicializa el incremento de deformaciones plásticas:  ${}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{P}} = \mathbf{0}$ .

**CAPÍTULO****7****EJEMPLOS RESUELTOS.  
CONCLUSIONES.****7.1 OBJETIVOS.**

En este capítulo se resolverán algunos problemas que sean representativos de los distintos temas abordados durante la tesis. Para la verificación del comportamiento del modelo hipoplástico de grandes deformaciones, se ha preferido trabajar en primer lugar sobre materiales no geológicos y, según sea el caso tratado, sobre materiales ortotrópicos. Luego, el mismo modelo será aplicado a materiales tipo suelo. También se presentarán ejemplos que permitan validar el modelo de consolidación de suelos no saturados para problemas bidimensionales y posteriormente resolver ejemplos tridimensionales. En cuanto al modelo elastoplástico para este mismo material, se presentaran ejemplos que permitirán visualizar la evolución del endurecimiento. Finalmente se incluirán otros ejemplos que involucren algunos de los tópicos mencionados pero para casos tridimensionales.

Además, después de cada ejemplo, se remarcarán las conclusiones más importantes que merite cada caso.

## 7.2 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DEL MODELO DE GRANDES DEFORMACIONES.

Para verificar el modelo desarrollado en Capítulo 3 (párrafo 3.11) y en forma discreta en el párrafo 5.4, se resolverán casos en los que el efecto de los esfuerzos cortantes se vaya incrementando gradualmente con relación a los otros de manera que pueda ponerse de manifiesto cuanto afecta al problema la simplificación de la  $C^{asim}$  mostrada en (5.4-4).

### 7.2.1 Ejemplo 1: Material elástico confinado con carga en la parte superior.

Considérese un material (semejante al suelo) confinado lateralmente (estado plano de tensiones) con una carga distribuida sobre su parte superior, la que se incremente lentamente de 0 a 90 kPa (Figura 7-1). Para este caso y a través de todo el proceso de carga, el estado de tensiones permanece uniforme y con tensiones cortantes casi nulas.

En la Figura 7-2 se presenta la curva carga desplazamiento considerando la ecuación constitutiva no simétrica (expresión (5.4-4)) y la simplificada, es decir, considerando solo la expresión (5.4-3). Se agrega también la curva de pequeños desplazamientos.

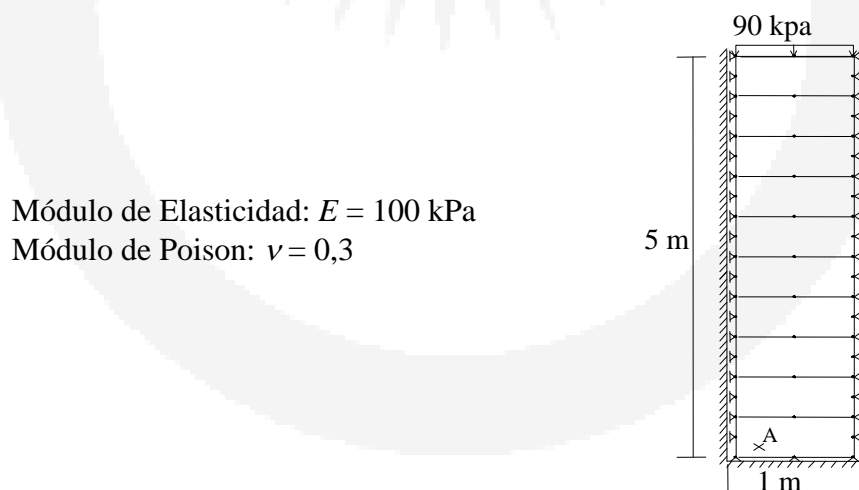


Figura 7-1: Datos del material y malla de elementos finitos.

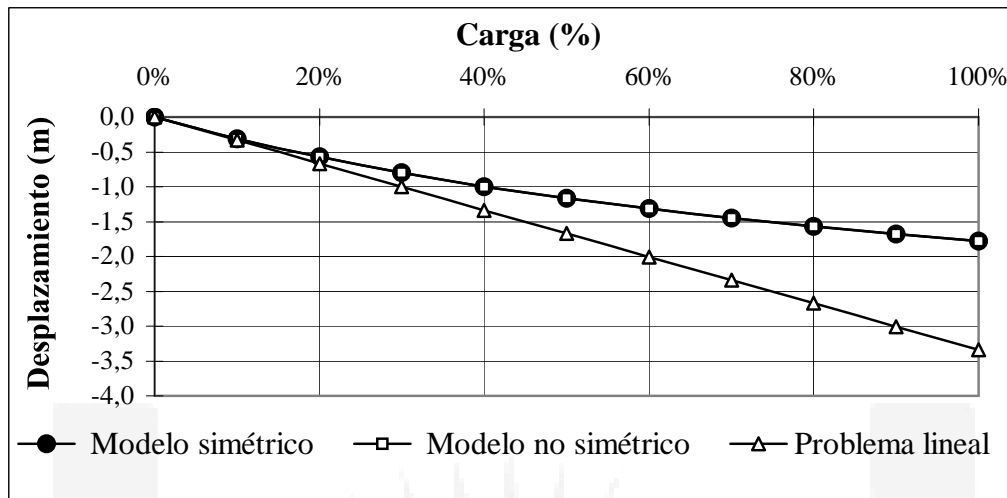


Figura 7-2: Respuesta con y sin la matriz  $C^{asim}$ .

A través de este ejemplo puede verse que, a pesar de no considerar al término  $C^{asim}$ , el comportamiento elástico permanece sin cambiar debido a que los valores de las tensiones de corte son despreciables y la matriz  $C^{asim}$  (expresión (5.4-4)) se torna también despreciable frente a  $C^{sim}$  (expresión (5.4-3)) o  $RR\bar{C}^rR^T$  (de (3.11-8)).

### 7.2.2 Ejemplo 2: Viga bi-empotrada con comportamiento elástico y carga uniforme.

El siguiente caso es una viga elástica e isotrópica empotrada. Este ejemplo permite ver la influencia de despreciar  $C^{asim}$  cuando las tensiones de corte son sensiblemente, mayores que en el caso anterior. También el ejemplo permite validar resultados ya que se conoce la solución exacta<sup>8</sup>.

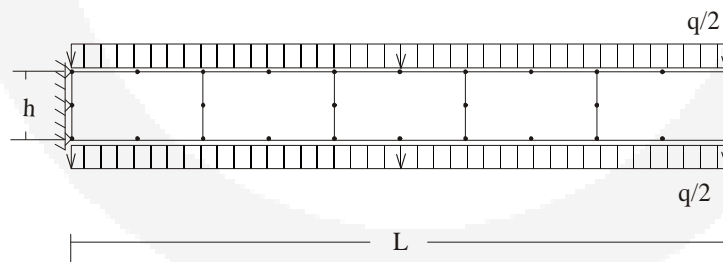


Figura 7-3 Viga bi empotrada con carga uniforme

Los datos son los siguientes:

Módulo de elasticidad:  $E = 1,2 \times 10^4 \text{ lb/in}^2 = 82740 \text{ KN/m}^2$

Módulo de Poisson  $\nu = 0,2$ . Carga distribuida q. Longitud  $L = 0,254\text{m}$ . Ancho  $b = 0,092\text{m}$

Altura  $h = 0,50 \text{ m}$ . Descenso vertical extremo libre:  $d \text{ (m)}$

En la Figura 7-4 los resultados obtenidos por Bathe & Ozdemir<sup>8</sup> son comparadas con los obtenidos aquí con y sin la matriz no simétrica. También se presentan los resultados para pequeñas deformaciones.

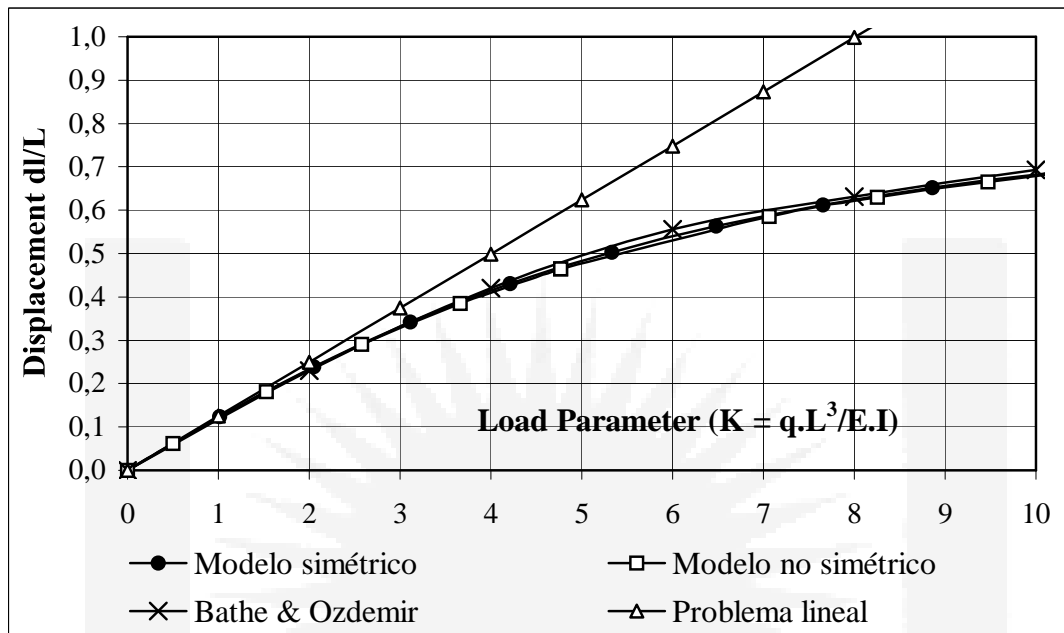


Figura 7-4: Curva carga desplazamiento con y sin matriz  $C^{asim}$ .

En esta ocasión las tensiones de corte alcanzan valores del orden del de las tensiones normales, entonces el término  $C^{asim}$  no es mas despreciable en relación a  $C^{sim}$ . A pesar de esta situación, puede resaltarse que aun en el caso de que se haya elegido un material muy flexible (en oposición a la porción de suelo del caso anterior), la respuesta para los casos en los que se implemento la simplificación presentada en esta tesis y en los que no se implementó, las diferencias fueron menores que 0,5 %.

### 7.2.3 Ejemplo 3: Comportamiento elastoplástico de una viga empotrada con carga concentrada en el medio.

Se sabe que el proceso plástico es tratado como una continua degradación del tensor constitutivo  $\bar{C}^\tau$  y esta situación puede llevar a una influencia creciente de la matriz  $C^{asim}$  en la respuesta del material. Para aclarara esta situación, se ha resuelto una viga empotrada con un material elastoplástico isotrópico del tipo  $J2^{42}$ :



La viga puede verse en la Figura 7-5 y los datos son los siguientes:

Modulo de elasticidad:  $E = 12000000$  kPa

Módulo de Poisson:  $\nu = 0,3$

Carga:  $P = 500$  KN

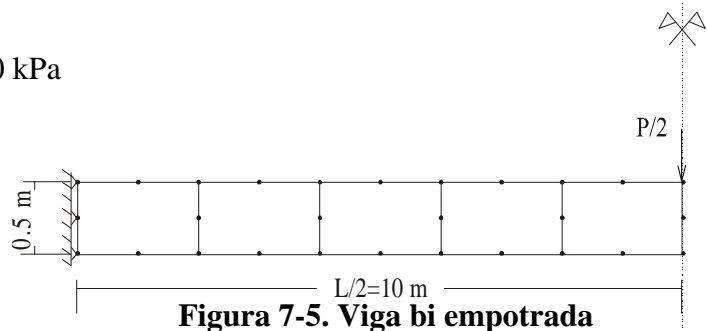
Tensión de fluencia:  $\sigma_y = 30000$  kPa

Longitud:  $L = 20$  m

Ancho:  $b = 0,092$  m

Alto  $h = 0,50$  m

Modulo plástico A (ecuación (3.13-9))= $4000$  kPa



En la Figura 7-6 se muestran las curvas carga desplazamiento usando los modelos constitutivos simétricos y no simétricos y ambos son comparados con los resultados obtenidos por Kanchi et al<sup>42</sup>.

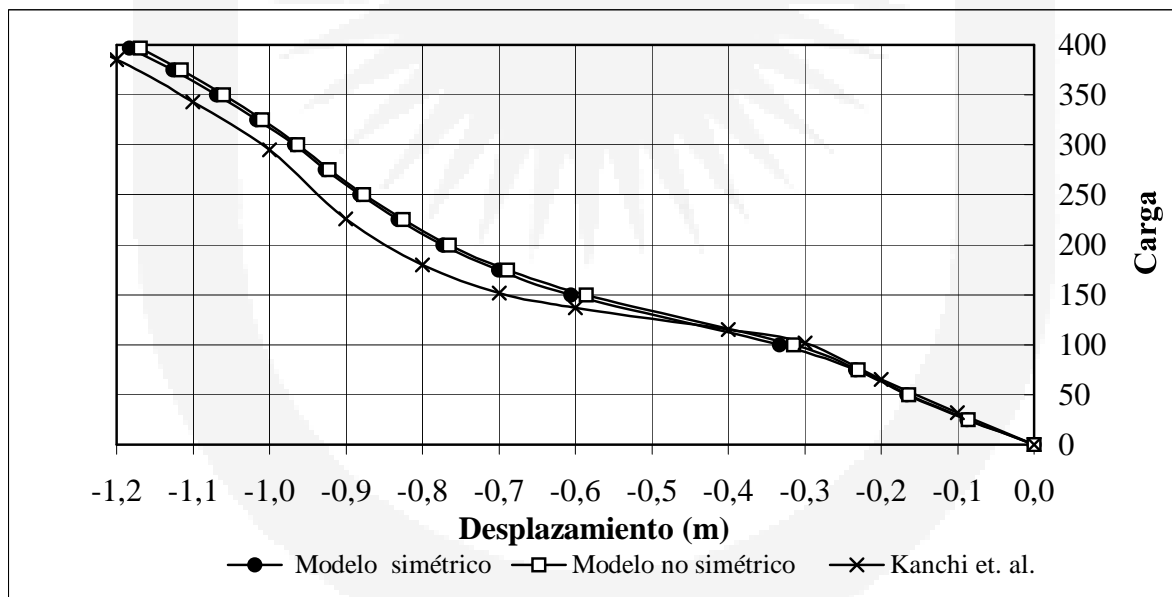


Figura 7-6: Curva carga desplazamiento con y sin la matriz  $C^{asim}$

Contrariamente a lo que podría suponerse con relación al efecto debilitante que provocaría la elastoplasticidad y el consecuente aumento de la influencia del término despreciado generando una solución muy inexacta, este ejemplo muestra que son sospechas infundadas ya que el error relativo fue menor del 1,77 %.

### 7.2.4 Ejemplo 4: Consolidación saturada unidimensional.

El ejemplo que sigue consiste en una columna de suelo saturado elástico lineal simulado con las ecuaciones de consolidación obtenidas en la referencia [23] pero que también pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (2.5-13) con las indicaciones del párrafo 2.6, comparadas con la solución teórica de Terzaghi<sup>65</sup>. La carga total es de  $1 \text{ Kn/m}$  aplicada en un día y dividida en 40 intervalos regulares. El drenaje es permitido solo bajo la carga representando así los  $\frac{1}{2}$  superiores del caso clásico de doble drenaje con un  $H=10\text{m}$  (distancia de drenaje). En la figura,  $C_v$  y  $m_v$  son coeficientes usados en la teoría de Terzaghi y  $T$  es factor de tiempo.

$$\phi = 0.1745; \quad e_0 = 1.08$$

$$v = 0.0; \quad E = 1 \text{ Kpa}$$

$$k_y = 10 \text{ m/día}$$

$$C_v = 1 \frac{1}{\text{día}}; \quad m_v = 1 \frac{1}{\text{Kpa}}; \quad T = \frac{t}{100}$$

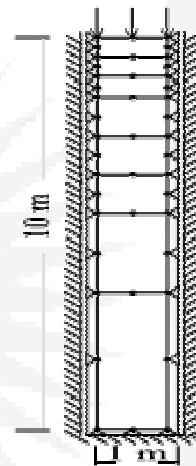


Figura 7-7: Datos y malla de elementos finitos

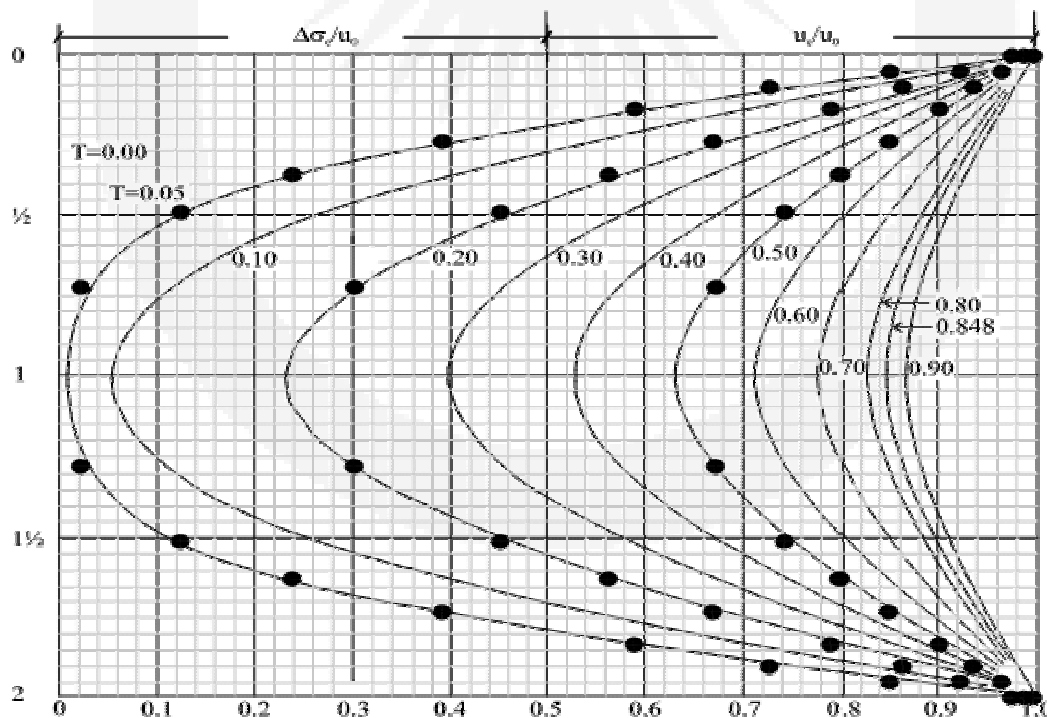
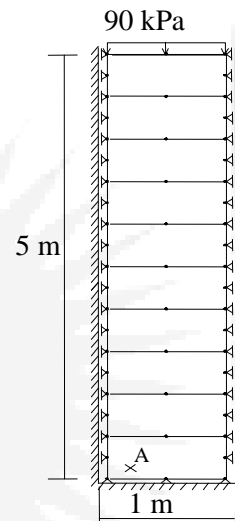


Figura 7-8: Isócronas y simulación numérica. Puntos= Simulación. Líneas= Solución de Terzaghi

### 7.2.5 Ejemplo 5: Consolidación saturada unidimensional no lineal.

Se realiza a continuación el análisis no lineal geométrico, pero dentro del campo elástico, de un suelo saturado inicialmente libre de tensiones. La malla de elementos finitos está representada por una columna de 10 elementos rectangulares en la Figura 7-9. Se trata de un problema en estado plano de deformaciones, cuyas condiciones de contorno son: base impermeable con desplazamientos restringidos en ambos sentidos, laterales verticales impermeables con desplazamiento horizontal restringido, y superficie cargada con sobrepresiones de poro nulas a lo largo de todo el proceso de deformación.

Módulo de elasticidad del suelo:  $E = 100 \text{ kPa}$   
 Coeficiente de Poisson del suelo:  $\nu = 0.3$   
 Permeabilidad vertical:  $k = 8.64 \times 10^{-4} \text{ m/día}$   
 Peso específico del agua:  $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$   
 Cohesión:  $c = 100 \text{ kPa}$   
 Angulo fricción interna:  $\phi = 10^\circ$   
 A: punto donde se mide la presión de poros.  
 (Nota: ver acotación con relación a los datos en sección 8.7.)

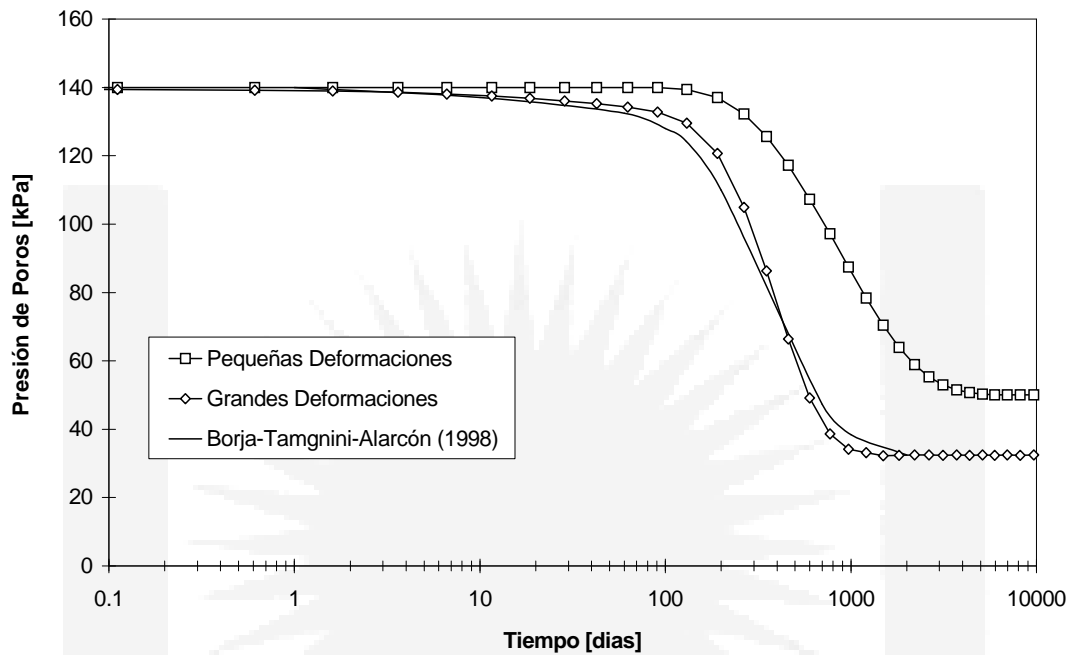


**Figura 7-9: Consolidación unidimensional. Datos y malla de elementos finitos.**

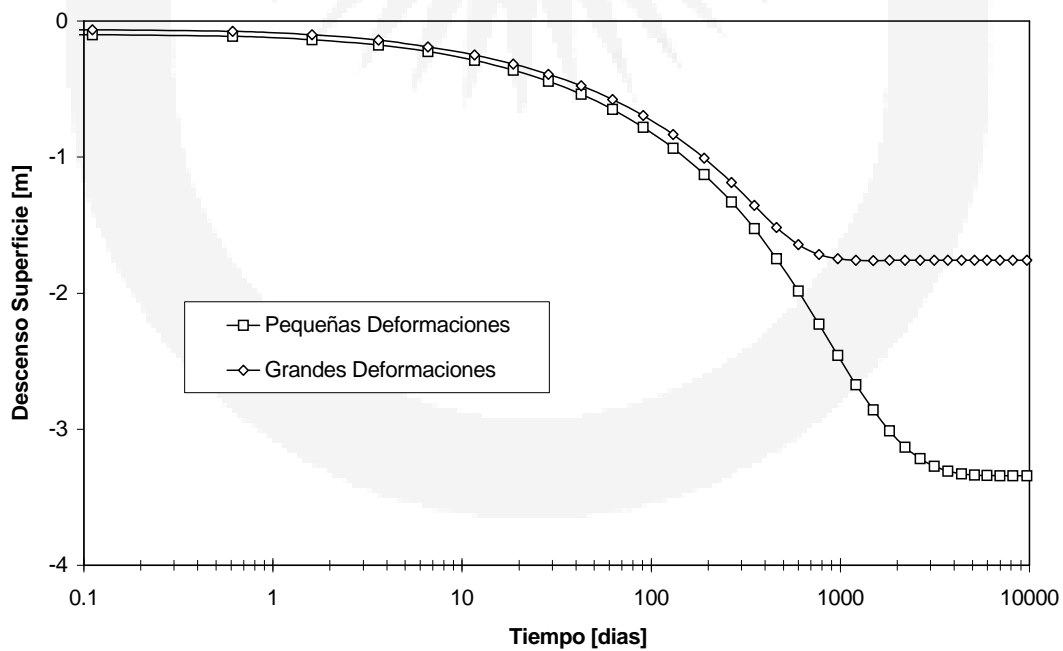
Los datos del tipo de suelo, mostrados junto a la geometría inicial en la Figura 7-9, si bien no corresponden a un suelo típico de la región Nordeste Argentino, fueron tomados de la publicación de Borja et al<sup>19</sup> a efectos de poder comparar los resultados obtenidos. En cuanto a la carga, consiste en una compresión uniforme de 90 kPa aplicada en forma instantánea en la parte superior de la columna de suelo.

En la Figura 7-10 se aprecian las curvas de consolidación que representan la presión de poros total, en el eje vertical, contra el tiempo, en escala logarítmica en el eje horizontal. La medición de las presiones de poro se realiza en el punto de Gauss "A" (mostrado en la Figura 7-9) cercano al fondo de la columna de suelo. La presión de poros total es igual a la presión hidrostática más la sobrepresión generada por la carga en superficie, así, la presión total inicial de 140 kPa es el resultado de sumar 50 kPa de la presión hidrostática inicial y 90 kPa de la carga instantánea en superficie. También en la Figura 7-10, se contrastan los resultados de los análisis lineal (pequeñas deformaciones) y no lineal geométrico (grandes deformaciones).

Los valores finales de presión de poros son las presiones hidrostáticas finales, correspondientes con la altura final de la columna de suelo, esto es, 5 m para el análisis lineal, y 3.24 m para el análisis no lineal. En la misma figura, se puede apreciar la gran coincidencia de los resultados de esta tesis con los obtenidos por Borja et al<sup>19</sup>.



**Figura 7-10: Curvas de consolidación.**



**Figura 7-11: Asentamiento de la superficie.**

La Figura 7-11 grafica los descensos de superficie, en el eje vertical, contra el tiempo, en escala logarítmica en el eje horizontal. Se observa que para el análisis lineal se obtiene un asentamiento total de 3,34 m, en tanto para el análisis no lineal geométrico, el asentamiento total resulta de 1,76 m.

A pesar de la gran magnitud del descenso, es sabido que el análisis lineal no lleva en cuenta la variación de la geometría a lo largo de la deformación, obteniéndose en consecuencia los 50kPa de la presión hidrostática final de la Figura 7-10.

### 7.2.6 Ejemplo 6: Viga de material ortotrópico

Finalmente, se muestra una viga de material elástico ortotrópico con grandes deformaciones y desplazamientos. La descripción física es la misma del ejemplo 3 pero presentando en este caso dos módulos diferentes y carga diferente:

Módulo de elasticidad:  $E_1 = 95000 \text{ kPa}$

$$E_2 = 19000 \text{ kPa}$$

Módulo de Poisson  $\nu_{12} = 0.3$

$$\nu_{21} = 0,06$$

Carga:  $P = 200 \text{ Kn}$

Longitud:  $L = 20 \text{ m}$

Ancho:  $b = 0,092\text{m}$

Alto:  $h = 0,50\text{m}$

Módulo transversal:  $\frac{1}{G_{12}} \cong \frac{1+\nu_{21}}{E_1} + \frac{1+\nu_{12}}{E_2}$

$$\text{Matriz elástica ortotrópica: } \mathbf{C} = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \begin{vmatrix} E_1 & \nu_{12}E_1 & 0 \\ \nu_{21}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_{12}\nu_{21}G_{12} \end{vmatrix}$$

(Nota: ver aclaración con relación a los datos en sección 8.7.)

En la Figura 7-12 se muestran las curvas carga desplazamiento para matrices simétricas y no simétricas así como también se han incluido los resultados correspondientes al análisis lineal, o sea, de pequeñas deformaciones.

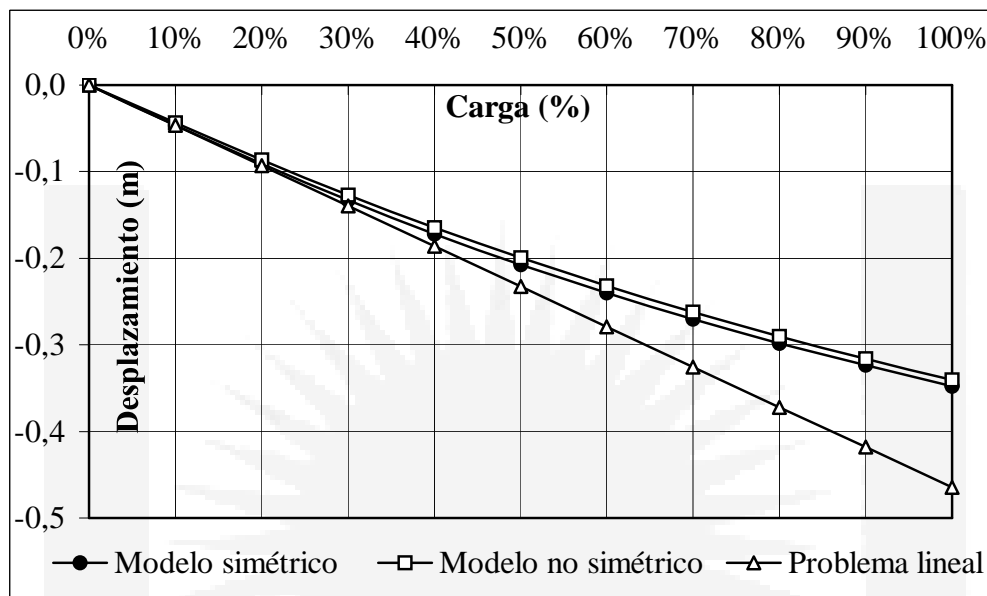


Figura 7-12 : Carga desplazamiento viga ortotrópica.

Este es el caso en el que el nivel de tensiones tangenciales ha sido mas elevado y por supuesto el caso en el que ha sido mayor el error 3,66 %. Nuevamente, no se han hallado grandes discrepancias y la sustitución realizada entre (3.11-6) y (3.11-12), puede considerarse adecuada.

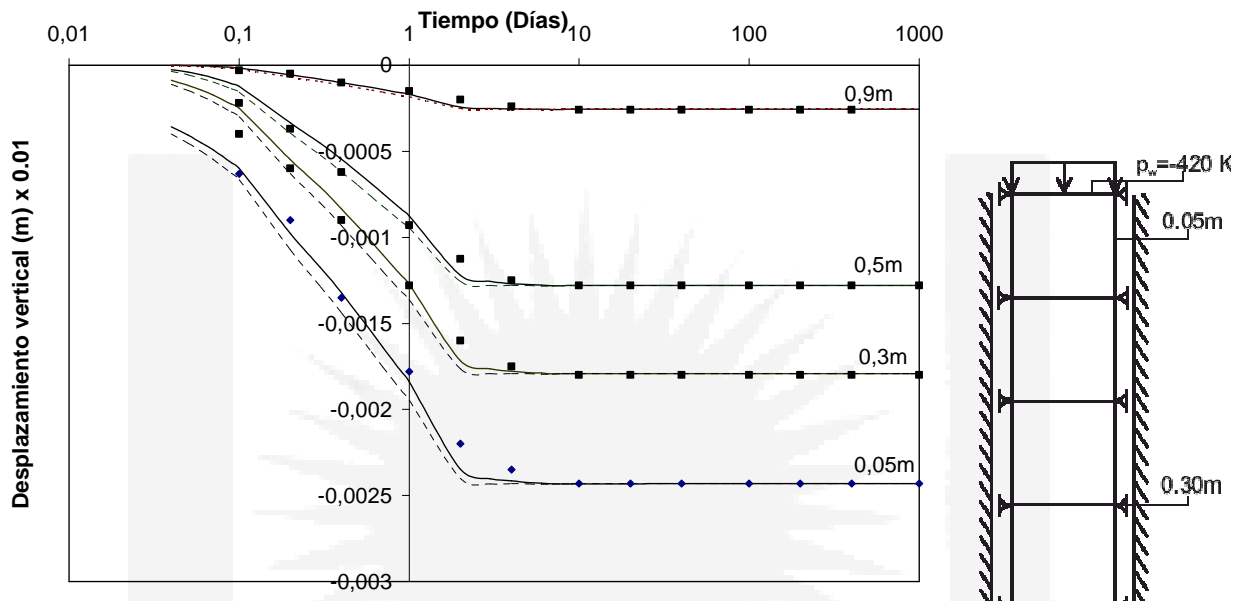
### 7.3 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DEL MODELO PARA SUELOS NO SATURADOS.

Para dar validez al modelo desarrollado en el Capítulo 2 (ecuación (2.5-13)) y en forma discreta en párrafo 5.3 se ha resuelto un problema unidimensional y los resultados se contrastan con los obtenidos por Lewis et al<sup>48</sup>. Posteriormente, se resuelve un caso bidimensional que permite analizar la evolución de las variables que intervienen.

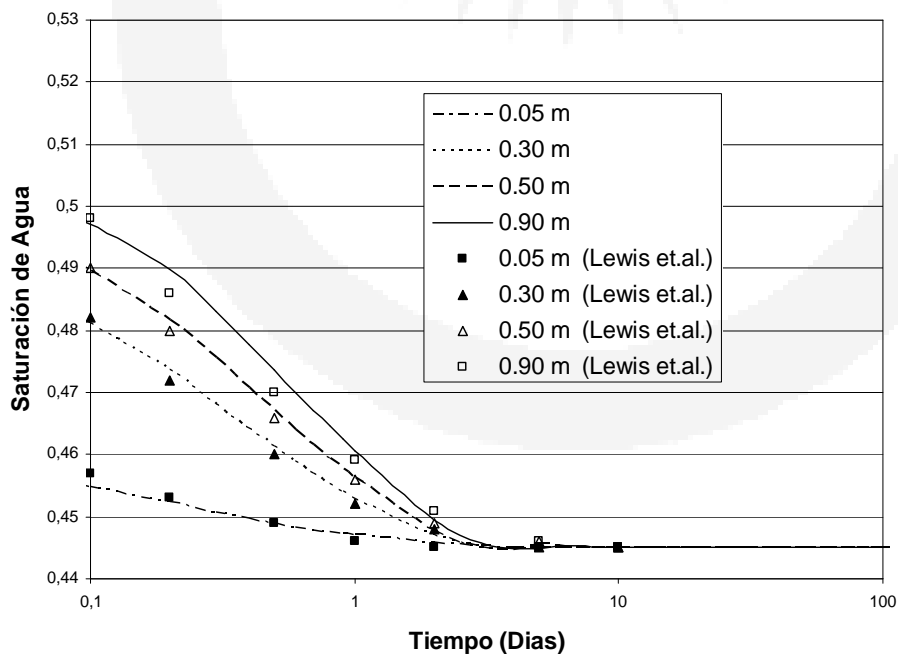
#### 7.3.1 Ejemplo 1: Problema de consolidación unidimensional.

Se asume que la columna de suelo tiene una saturación inicial de 0,52. La presión de poros inicial es de -280 kPa y las condiciones de borde de presión de poros se cambian instantáneamente a -420 kPa en la superficie. El coeficiente de permeabilidad es de 0,11456 m/día y la altura de la columna de 1m.

Las otras condiciones de borde son (1) En la superficie lateral  $u_1 = 0$ . (2) En la superficie superior  $p_w = -420 \text{ kPa}$ ,  $p_g = p_{atm}$ , (3) En la parte inferior  $u_2 = 0$ . La Figura 7-13 muestra los desplazamientos verticales para ciertos puntos seleccionados y la Figura 7-14 la distribución de la saturación de agua en el tiempo en distintos puntos de la columna.



**Figura 7-13. Desplazamiento vertical (Formulación actual no simétrica=línea llena. Formulación actual simétrica=línea puntos. Lewis et al<sup>48</sup> = Puntos aislados)**



**Figura 7-14: Saturación de agua - tiempo**

Las ecuaciones (5.3-15) a (5.3-20) muestran la fuerte dependencia del sistema (5.3-1) con relación a la saturación a través de los coeficientes de las matrices, algo que ya ha sido establecido claramente con antelación. Para relacionar los valores de la saturación con la succión se emplean las curvas características citadas en el párrafo 1.7. Estas curvas pueden adoptar diferentes formas de acuerdo a los suelos analizados.

Otra ecuación muy importante para los objetivos de este ejemplo, es la derivada de la curva característica la cual también se ha presentado en el párrafo 1.7. Para el análisis a realizar inmediatamente, se ha tomado la presión de poro en un punto situado a una profundidad de 0,30 m versus la succión, tanto para el caso simétrico de referencias [12] y [40] como para el no simétrico, representado por las ecuaciones (5.3-1). Además, para el estudio, se ha tenido en cuenta una de las curvas características aplicables a algunos suelos zonales y se presenta en la Figura 7-15.

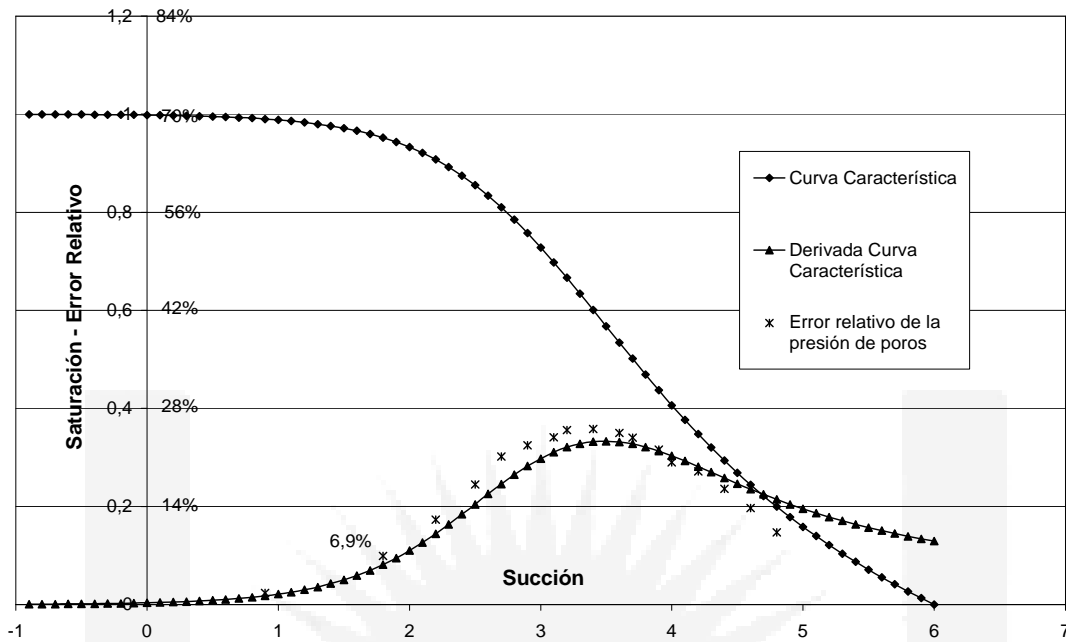
Luego, a partir de los datos obtenidos con el programa, se calculó el error relativo entre los casos simétricos y no simétricos expuestos versus la succión. Comparando la derivada de la curva característica con la del error relativo se puede apreciar una correspondencia clara entre las mencionadas.

Así, cuando mayor es la pendiente de la curva característica, mayor es el error relativo entre formulaciones y este hecho provee un criterio para decidir cuando asumir el costo computacional de usar formulaciones del tipo (5.3-1) o asumir un error racional y limitado a valores lógicos usando ecuaciones simétricas.

Concretamente para el caso del ejemplo de Figura 7-15, suponiendo que un error del 10 % es tolerable, la porción de suelo con saturación por encima del 90 % o, lo que es lo mismo, pendientes menores a 0.14, puede considerarse el uso de aproximaciones simétricas. Por el contrario, el problema de consolidación para la porción de suelo con menor contenido de agua debe ser resuelto con el caso general indicado en esta tesis. Pero esto que parece ser una complicación, es muy sencillo con la aproximación (5.3-1) ya que puede hacerse en forma directa y con solo modificar los coeficientes (como se indica en el párrafo 2.6) y posteriormente, aplicar técnicas de análisis por subdominios<sup>6</sup>.

Es importante aclarar que este estudio reviste gran importancia en la zona de influencia de nuestra región (básicamente Chaco, Formosa, Sur de Paraguay y Brasil) ya que es muy común encontrar suelos con alto contenido de humedad debido a la poca profundidad de las napas freáticas.





**Figura 7-15. – Derivada de las curvas característica error relativo de presión de poro de agua – Succión.**

**7.3.2 Ejemplo 2: Problema de consolidación bidimensional. Zapata corrida.**

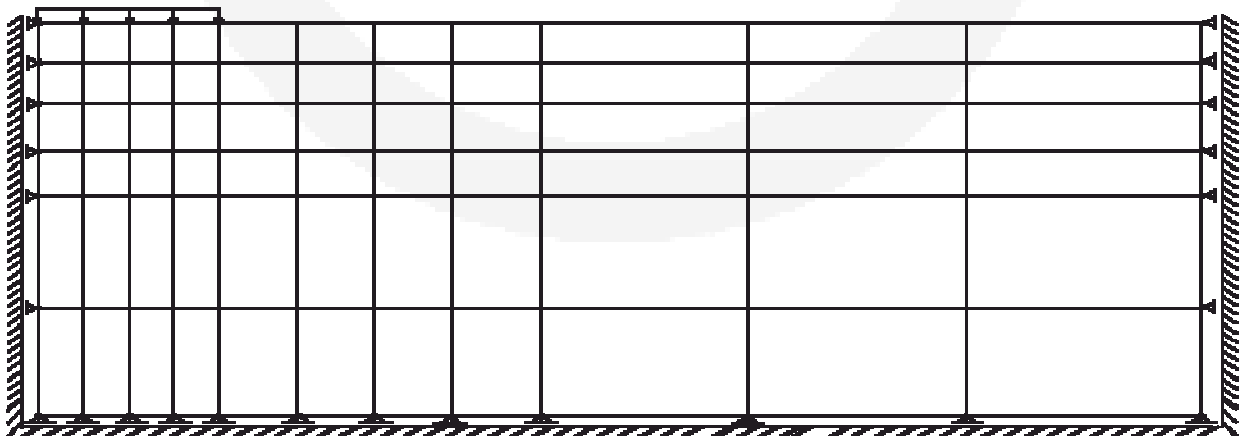
Otro ejemplo interesante es una Zapata corrida con carga uniforme presentado en la referencia [47]. Los datos se dan a continuación (Figura 7-16):

Ancho: 6B. Profundidad: 2B (B=1)

Módulo de Young  $E = 13000$  kPa, Módulo de Poisson  $\nu = 0,4$

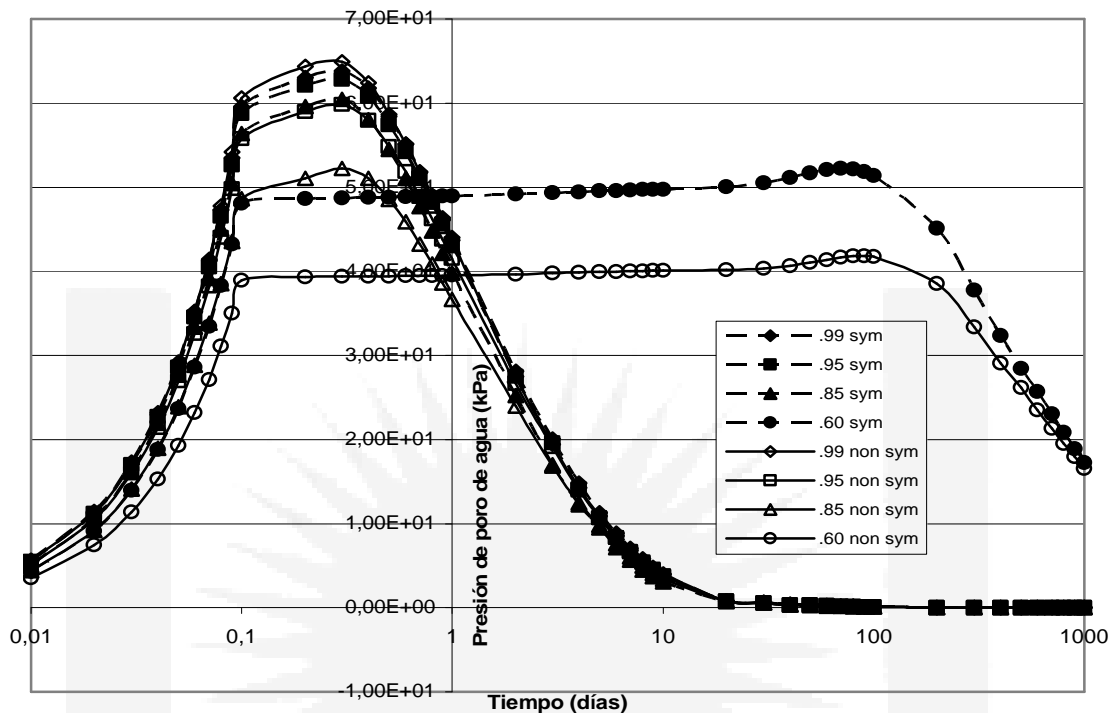
Permeabilidad  $k = 3,4 \times 10^{-4}$  m/día, Relación de vacíos  $e = 0,9$

Carga  $Q = 100B$  kPa/m



**Figura 7-16: Zapata corrida. Malla y dimensiones.**

En primer lugar, en la Figura 7-17, se dibujó la presión de poros para diferentes saturaciones para el caso simétrico y el no simétrico.

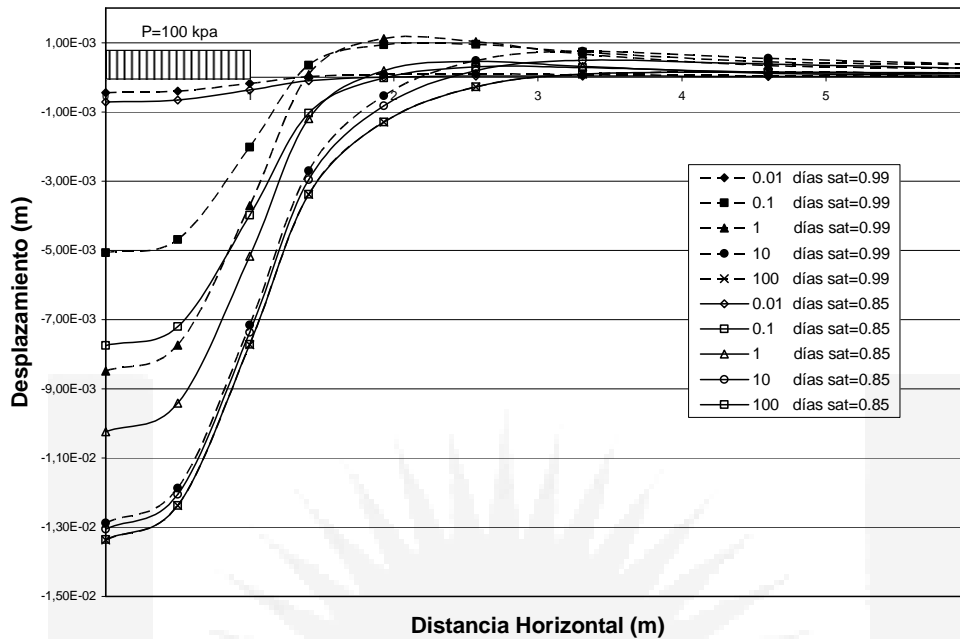


**Figura 7-17: Presión de poro de agua vs. tiempo para diferentes saturaciones.**

La Figura 7-17 nos permite confirmar la fuerte influencia que la saturación, e indirectamente la succión, ejerce sobre la confiabilidad de los resultados de la presión de poros en un punto a 1 m de profundidad debajo del centro de la Zapata. Para valores elevados de la saturación, casi no hay diferencia entre los resultados obtenidos por ambos métodos.

Otro punto importante que debe ser enfatizado es la dependencia del coeficiente de permeabilidad con respecto a la saturación<sup>29</sup>. A medida que un suelo se vuelve no saturado, el aire reemplaza el agua en los poros de gran tamaño y esto obliga al agua a fluir por los más pequeños aumentando la tortuosidad del recorrido. Posteriores incrementos en la succión matricial va transformando a la fase aire en una más y más continua y empuja al agua contra los granos de suelo. Así, a medida que decrece el grado de saturación el coeficiente de permeabilidad también disminuye y la disipación de la presión de poros se lleva a cabo en un tiempo mucho mayor.

Finalmente, en la Figura 7-18, se presentan los asentamientos de la superficie versus la distancia horizontal para varios tiempos resolviendo con el caso general no simétrico.



**Figura 7-18: Asentamiento de la superficie para varios tiempos.**

#### 7.4 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL.

A lo largo del capítulo de elementos finitos, se ha puesto énfasis en el desarrollo de problemas tridimensionales. A tal efecto, se presentan los siguientes ejemplos:

##### 7.4.1 Ejemplo 1: Análisis de una viga empotrada-libre.

El siguiente ejemplo consiste en el modelado no lineal geométrico y físico de una viga empotrada libre. El caso no reviste otro interés más que validar los resultados obtenidos con el programa FECCUND.

Los datos son:

Longitud = 10 m.; Ancho = 0,5 m.;

Alto = 1,0 m.

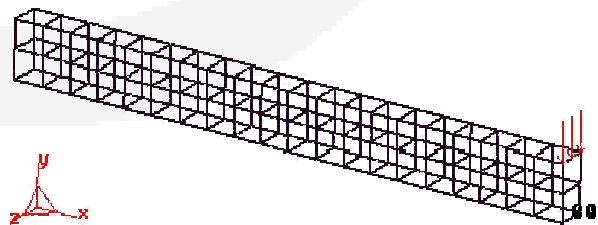
$E = 300000 \text{ kPa.}; \nu = 0,2, A = 100000 \text{ kPa.}$

Pensión de fluencia = 3000 kPa.

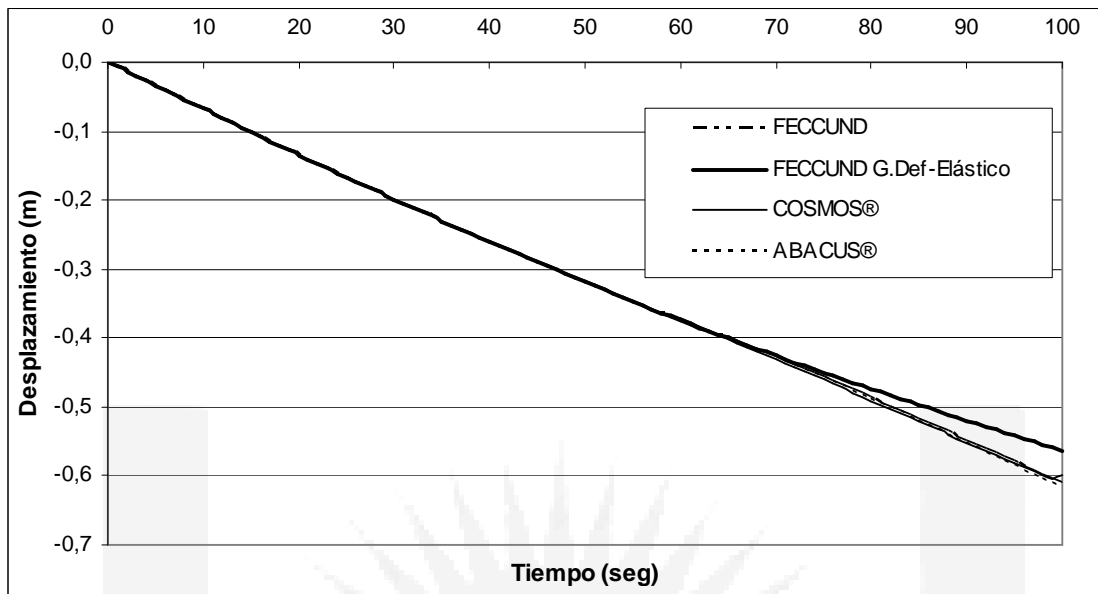
Carga = 200 Kn.

Modelo de Von Mises.

Nodo graficado: numero 30



**Figura 7-19: Malla de elementos finitos.**



**Figura 7-20: Descensos verticales en el tiempo.**

Como puede apreciarse en la Figura 7-20, no existe apreciable diferencia entre los resultados arrojados por conocidos productos enlatados y el obtenido a partir del FECCUND, lo que permite proceder a analizar elementos mas complejos.

#### 7.4.2 Ejemplo 2: Análisis de un perfil normal.

El siguiente ejemplo consiste en el modelado no lineal geométrico y físico de una correa metálica compuesta por un perfil angular normalizado 50 x 5 de cantos vivos (DIN 1022, edición 1963) cuyas dimensiones son 0,05 m de ala y 0,005 m de espesor (dos alas iguales); sometido una carga de succión uniformemente distribuida de 100 kPa. En cuanto a las condiciones de borde, se ha considerado a la viga como doblemente empotrada. Cabe aclarar que por tratarse de un material dúctil como el acero, el modelo plástico adoptado fue el de Von Mises.

Para la generación de la malla como para la interpretación de resultados, se ha empleado el programa GID<sup>®33</sup>.

Los datos son:

$$E = 210 \text{ GPa}; \nu = 0,2; A = 4 \times 10^6 \text{ kPa.}$$

Tensión de fluencia = 235000 kPa.

El mallado para el método de los elementos finitos se llevo a cabo mediante elementos serendipíticos de 20 nodos. En la Figura 7-21 puede verse la forma discreta del continuo:

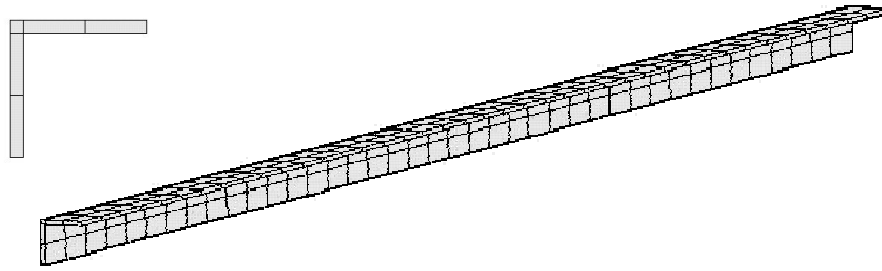


Figura 7-21. Forma discreta del perfil de acero A37-24ES.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.5-3) considerando la formulación simétrica del tensor constitutivo, dado en (3.11-8) y (3.11-10), se obtuvieron los siguientes resultados (Figura 7-22 y Figura 7-23):

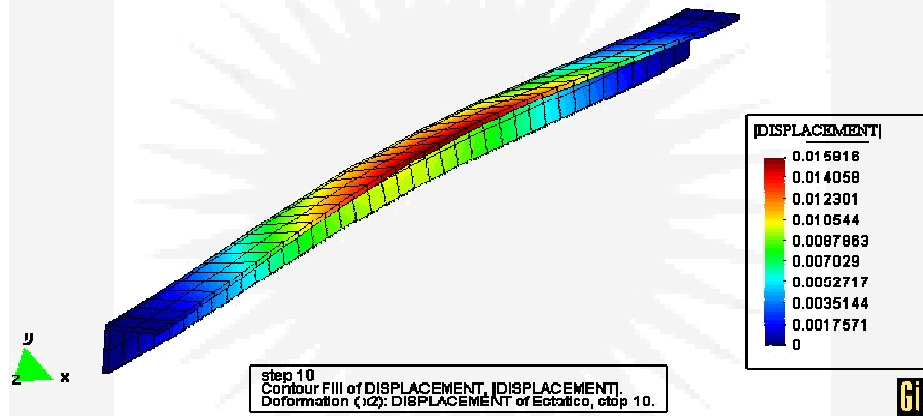


Figura 7-22. Desplazamientos totales por efecto de las cargas (GID<sup>®33</sup>).

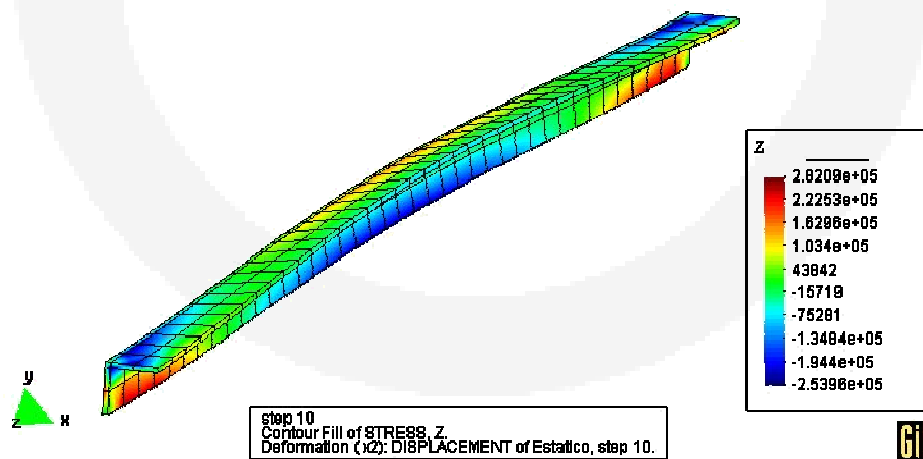


Figura 7-23. Distribución de tensiones normales según el eje longitudinal de la pieza (GID<sup>®33</sup>).

### 7.4.3 Ejemplo 3: Viga metálica de chapa doblada.

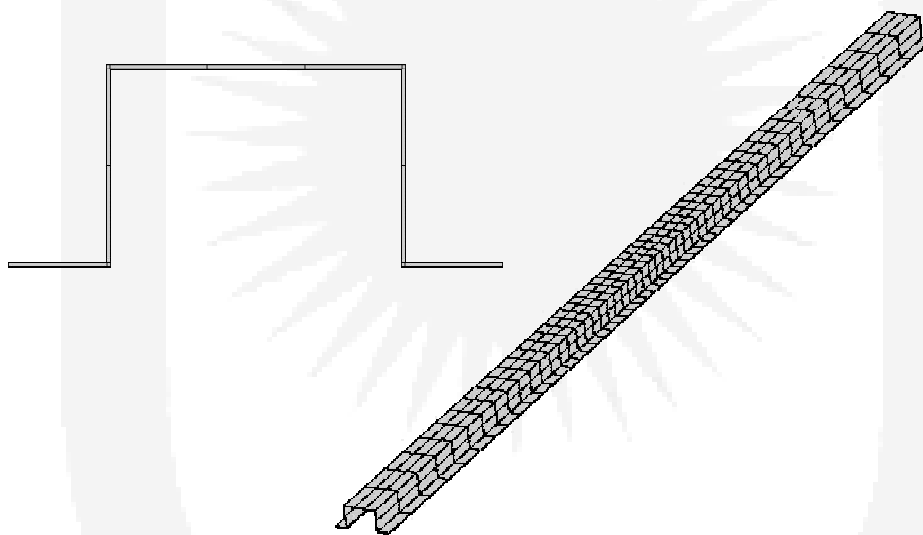
En el siguiente ejemplo se pretende modelar únicamente el comportamiento elastoplástico (no linealidad física) de una viga metálica de chapa doblada de sección Omega (ver Figura 7-24) de 5 m de longitud. El espesor del material es de 0,2 cm. mientras que las dimensiones de las alas laterales son de 0,05 m. y la del ala central es de 0,15 m. Así como también, se consideró el alma con una dimensión de 0,10 m.

Propiedades físicas del material son las correspondientes al acero F24

$E = 210\text{Gpa}$ ;  $A=4 \times 10^6 \text{ kPa}$ .;  $\nu = 0,2$ .

Tensión de fluencia = 240000 kPa

Criterio de fluencia plástica: Von Mises



**Figura 7-24: Forma discreta del continuo.**  
(Número de Elementos: 650; Número de Nodos: 5068)

La carga actuante consiste en una fuerza vertical concentrada aplicada en el centro de la viga de 7 KN., mientras que las condiciones de contorno impuestas consisten en impedir el desplazamiento de los nodos de las alas laterales de los dos elementos extremos.

Resolviendo nuevamente el sistema de ecuaciones sin considerar al tensor constitutivo no simétrico  $\mathbf{C}^{asim}$  de (5.4-4) por razones de practicidad y teniendo en cuenta el poco error observado, se obtuvieron los siguientes resultados (Figura 7-25, Figura 7-26 y Figura 7-27)

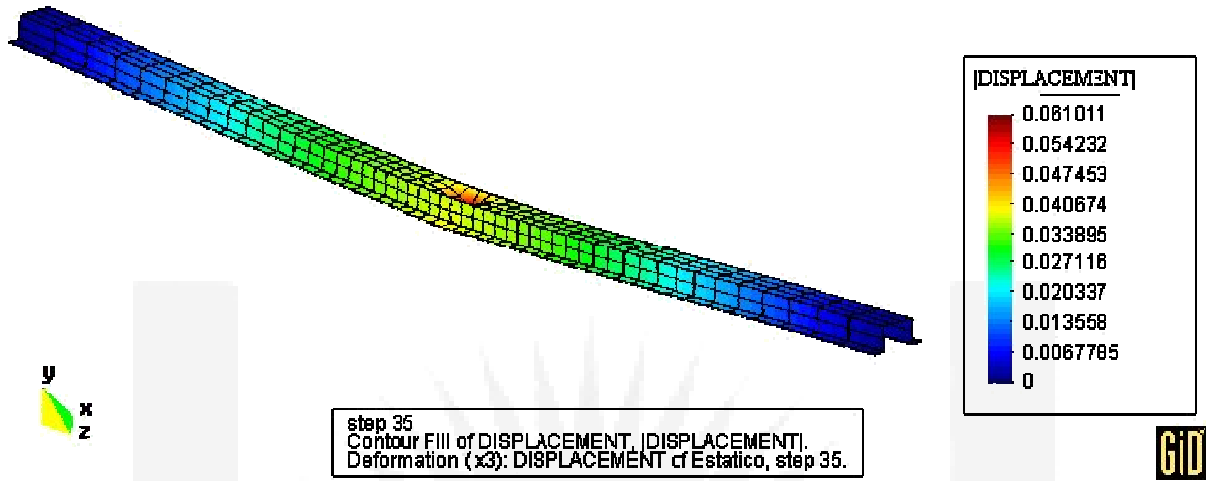


Figura 7-25: Desplazamientos totales de la viga metálica (m) (GID<sup>®33</sup>).

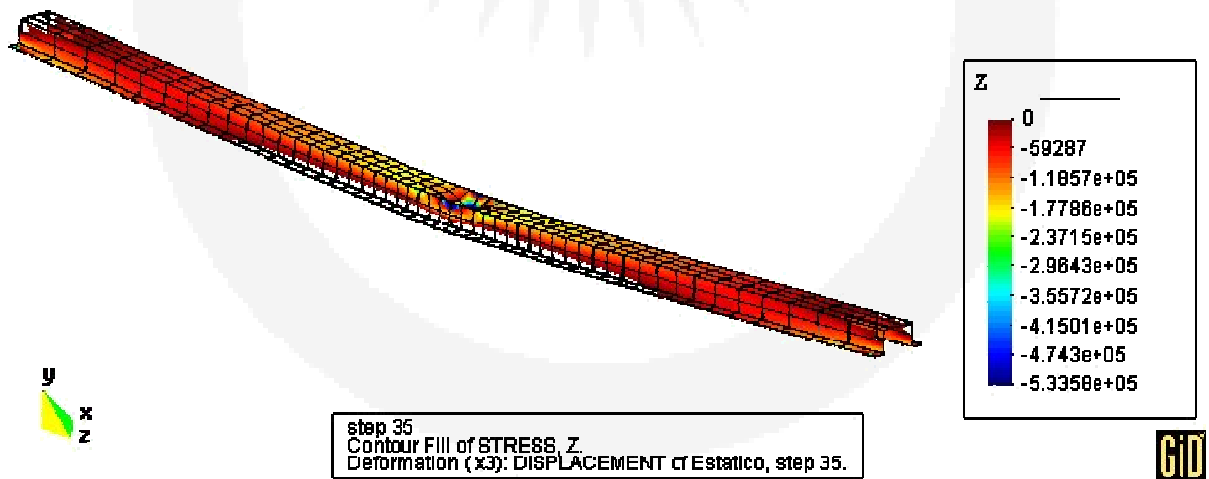


Figura 7-26: Tensiones normales de compresión según el eje longitudinal de la pieza (GID<sup>®33</sup>).

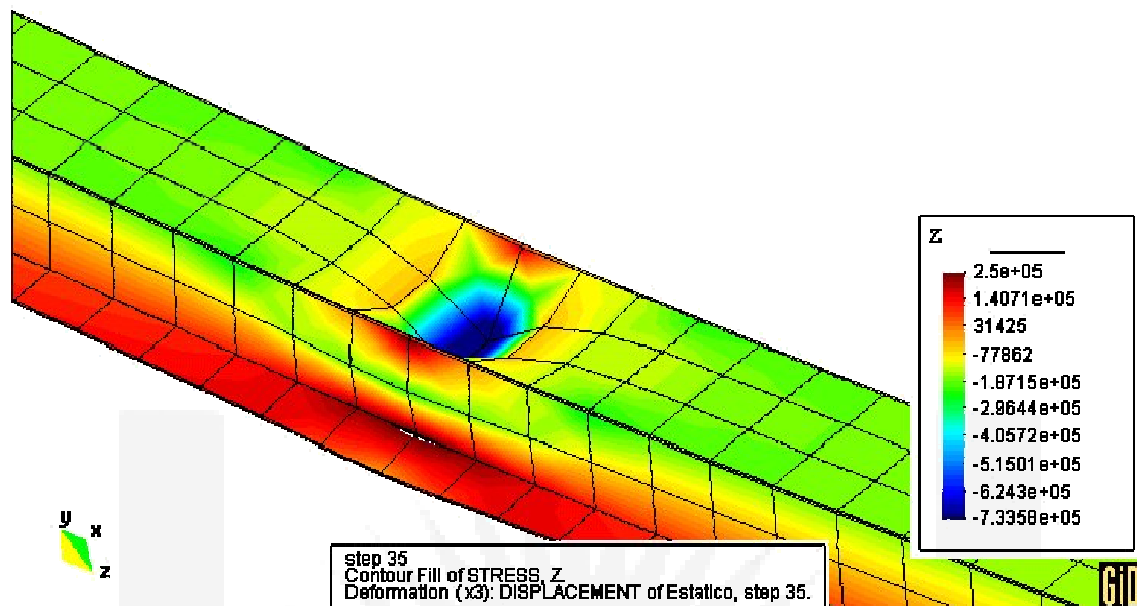


Figura 7-27: Detalle de las tensiones en el punto de aplicación de la carga (GID<sup>®33</sup>).

En la Figura 7-27, puede observarse que, en la zona de aplicación de la carga, un elevado valor de tensiones de compresión. Esto se debe a que se muestra la viga desde arriba y las fibras superiores se han acortado. Si se realizara la observación desde abajo, se notaría el alargamiento de las fibras.

## 7.5 ANÁLISIS PLÁSTICO DE SUELOS NO SATURADOS. APLICACIÓN TRIDIMENSIONAL.

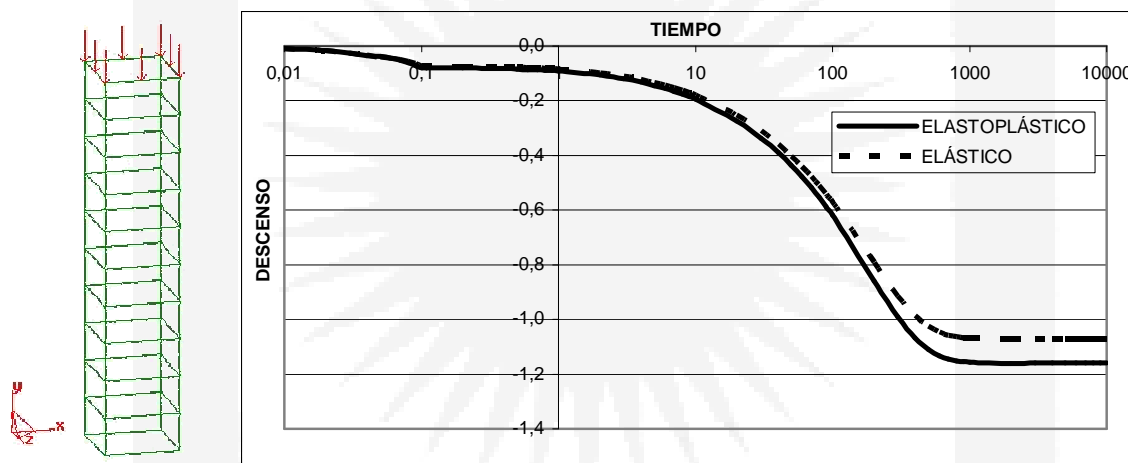
En este apartado, se mostrarán los resultados obtenidos al aplicar el modelo plástico presentado en la sección 4.6, tomando primero un ejemplo unidimensional resuelto con elementos tridimensionales adecuadamente restringidos y luego un ejemplo de una zapata aislada.

### 7.5.1 Ejemplo 1: Problema de consolidación unidimensional usando un modelo tridimensional.

El siguiente ejemplo consiste en un estrato de longitud infinita y 5m de profundidad, de suelo parcialmente saturado cargado uniformemente con  $q = 200$  kPa. Las propiedades del suelo son: Modulo de Elasticidad  $E = 1000$  kPa, Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , Permeabilidad vertical  $k_y = 8.64 \times 10^{-4}$  m/día, Cohesión  $c = 50$  kPa, Angulo de fricción interna  $\phi = 10^\circ$ , saturación inicial  $S_r = 0.85$ , compresibilidad de los granos  $k_s = 1 \times 10^6$  kPa. Por otro lado, los coefi-



cientes del modelo plástico propuesto son  $m = 0.1$ ,  $k = 1.5$  y la presión inicial de preconsolidación  $p_{co} = 100$  kPa (Nota: ver acotación con relación a los datos en sección 8.7). El mallado se realizó con 10 elementos de tipo serendipity, de 20 nodos para los desplazamientos y de 8 nodos para las presiones de poro (ver Figura 7-28). En cuanto a las condiciones de borde en desplazamientos, se ha permitido únicamente el descenso vertical en todos los nodos laterales, mientras que los de la base se encuentran restringidos en todas direcciones. En lo que respecta a las condiciones de contorno de presión de poro, los nodos correspondientes a la superficie, por estar en contacto con la presión atmosférica, deben tener sobrepresión nula.



**Figura 7-28. Columna de suelo no saturado. Malla y Descenso vs. Tiempo.**

En la Figura 7-28 se ha incluido también la curva de descenso para varios tiempos.

También es importante analizar a lo largo del tiempo y para este caso, las otras variables relevantes del problema como la presión del poro de agua y la succión, tal como se presenta en la Figura 7-29 y en la Figura 7-30 respectivamente. Se puede observar que el efecto de la plasticidad provoca incrementos de la presión de agua y decremento de la succión. El cumplimiento de las ecuaciones (3.8-5) o (4.3-1) equivale a satisfacer el principio de mínima energía potencial. Al presentar la masa de suelo una rigidez menor para la estructura sólida por el efecto plástico, es comprensible el incremento de la toma de carga por parte del agua tal como se aprecia en la Figura 7-30.

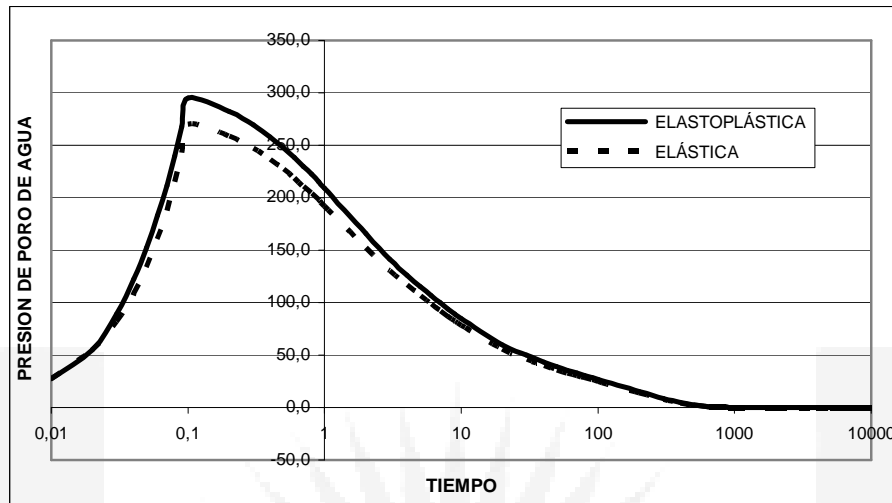


Figura 7-29 Presión de poro de agua en distintos tiempos.

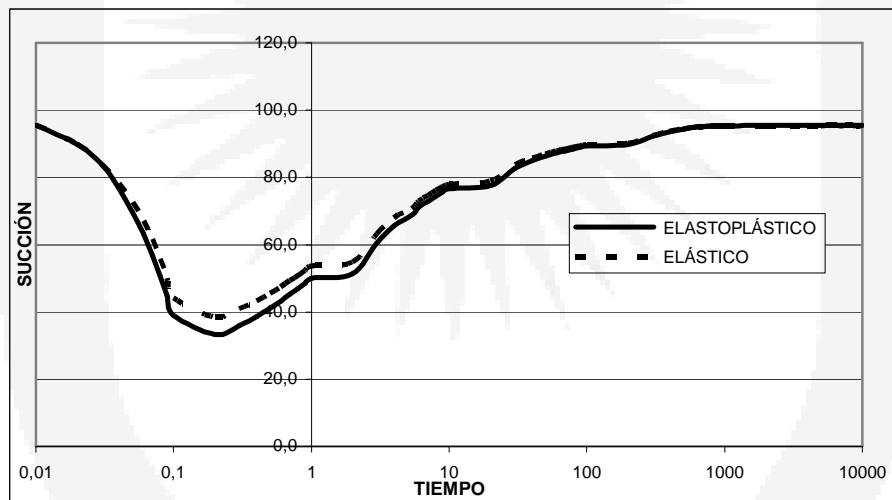
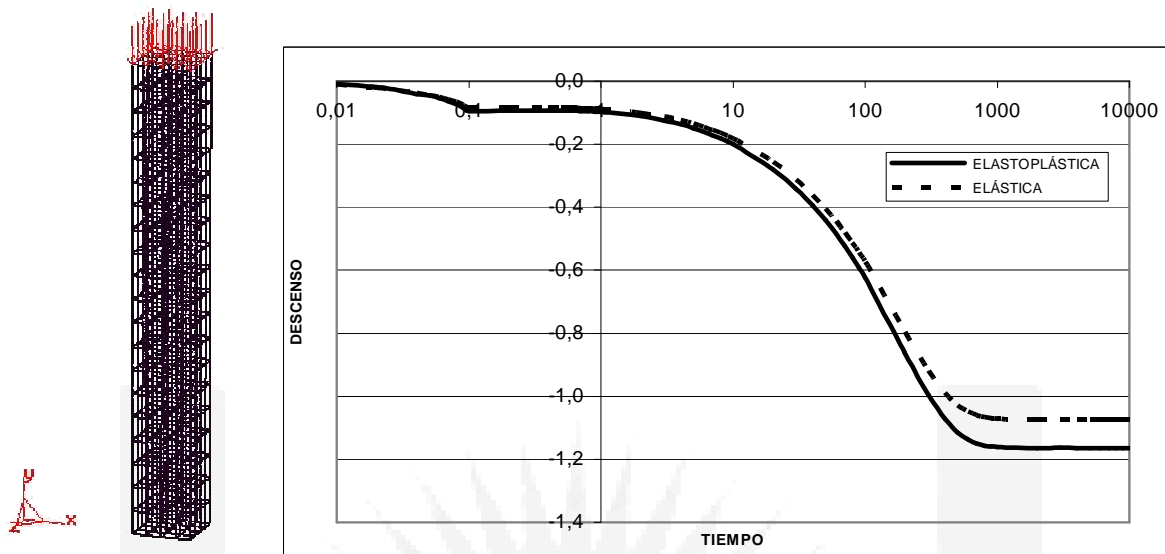


Figura 7-30 Succión en distintos tiempos.

A continuación, se utiliza para el mismo caso unidimensional, una malla tridimensional con un número mucho mayor de elementos, específicamente 320 de tipo serendipity de 20 nodos (8 para las presiones de poro). El objeto de esta simulación es verificar el comportamiento del modelo tridimensional cuando se establecen menos restricciones en los elementos finitos si lo comparamos con la Figura 7-28. La Figura 7-31 muestra la malla de elementos finitos y la curva descenso en diferentes tiempos:



**Figura 7-31: Mallado de la columna y Descenso vs. Tiempo.**

Como puede apreciarse, los resultados coinciden con el caso presentado en la Figura 7-28 en cuanto a descensos y lo mismo ocurre para presiones de poro, aunque no se han incluido los gráficos correspondientes a estos últimos por considerarlos innecesarios.

Hay otra cuestión interesante de ser analizada para este ejemplo: verificar que efectos producen, en la variable desplazamiento, las modificaciones en el modelo plástico presentadas en los apartados 4.5 y 4.7. La Figura 7-32 muestra los descensos en el tiempo que se obtienen variando el modelo plástico de cuatro maneras diferentes:

- 1) Usando solamente endurecimiento cinemático.
- 2) Usando solo isotrópico.
- 3) Una combinación de los dos anteriores.
- 4) Usando el modelo sin influencia de la succión (para suelo saturado).

Para el caso (1), la succión mueve la superficie de fluencia hacia la izquierda (Figura 4-2) cuando, ahora, la trayectoria de tensiones es inclinada hacia la derecha (en el plano  $p'$ - $q$ ). Para esta última situación, el efecto plástico es máximo y esto puede verificarse a través de los descensos calculados. Comparando con los anteriores, en este caso se han dado los mayores valores.

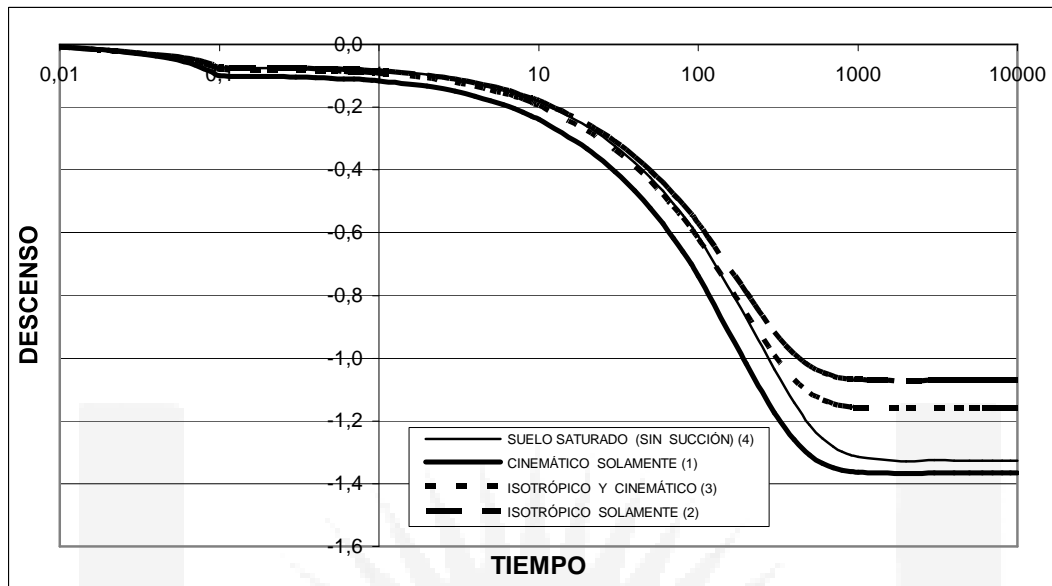


Figura 7-32: Efecto de succión en el modelo plástico.

Para los casos (2) y (4), la interpretación es casi la misma. En ambos, la superficie de fluencia crece según avance el proceso plástico con la diferencia que en el caso (2) la expansión de la superficie es acelerada por la succión (ver Figura 4-3). Como consecuencia los asentamientos son menores en el caso (2) que en el (4).

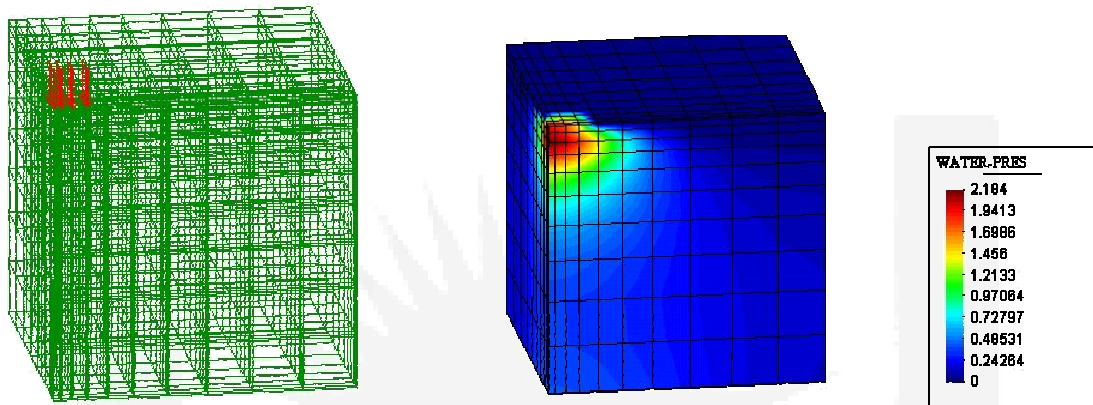
Finalmente, en el caso (3) los efectos del endurecimiento cinemático se compensan con los del isotrópico, arrojando como resultado la curva con un descenso intermedio. Este tipo de compensación fue resaltada en la referencia [17].

### 7.5.2 Ejemplo 2: Problema de consolidación tridimensional.

En el siguiente ejemplo se analiza el problema elastoplástico de una zapata aislada de 0.90m x 0.90m fundada sobre un estrato de 5m de profundidad de suelo saturado en un 85 %. La carga que transmite la zapata al suelo esta uniformemente distribuida y posee un valor de  $q = 200$  kPa. Las propiedades referentes al suelo son: Modulo de Elasticidad  $E = 1000$  kPa, Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , Permeabilidad vertical  $k_y = 8.64 \times 10^{-4}$  m/día, Permeabilidad horizontal  $k_x = k_z = 8.64 \times 10^{-4}$  m/día, Cohesión  $c = 150$  kPa, Angulo de fricción interna  $\phi = 30^\circ$ , Compresibilidad de los granos  $k_s = 1 \times 10^6$  kPa. Por otro lado, los coeficientes de ajuste correspondientes al modelo plástico propuesto son  $m = 0.1$ ,  $k = 1.5$  y la presión inicial de pre-consolidación  $p_{co} = 200$  kPa. Al igual que en el ejemplo 1, para el mallado se utilizaron ele-

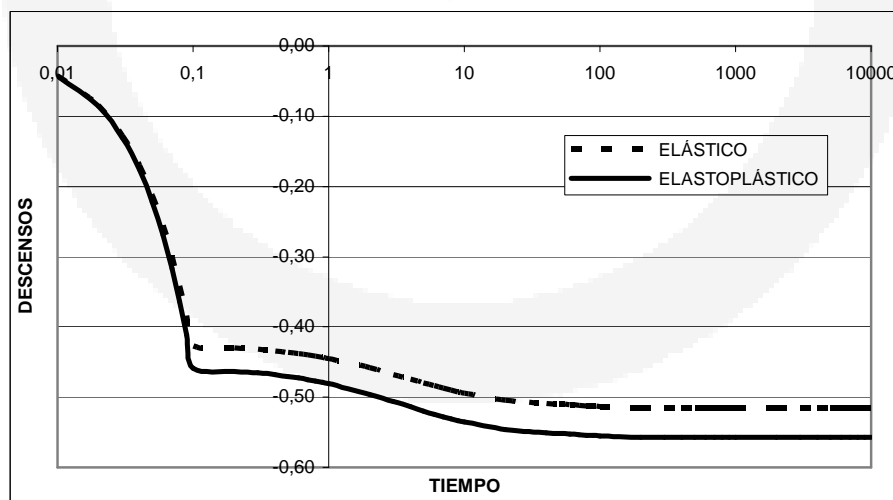
mentos de tipo serendipity, de 20 nodos para los desplazamientos y de 8 nodos para las presiones de poro. Por otro lado, debido a la doble simetría que presenta la geometría del problema solo se requiere modelar un cuarto de la masa de suelo (ver Figura 7-33).

(Nota: ver acotación con relación a los datos en sección 8.7.)



**Figura 7-33. Mallado y presión de poros (Num. Elementos 1000; Num. Nodos 4961)**

En la Figura 7-34 se muestra el grado de descenso en diferentes tiempos. En cuanto a las presiones de poro de agua y la succión, presentan diagramas semejantes a los mostrados para la columna unidimensional.



**Figura 7-34. Descensos en diferentes tiempos.**



**CAPÍTULO****8****CONSIDERACIONES FINALES.  
FUTUROS DESARROLLOS.****8.1 OBJETIVOS.**

Este capítulo está destinado a establecer conclusiones muy generales, ya que las particulares se han indicado a continuación de cada uno de los ejemplos que han servido para extraerlas.

También esta breve sección se ha dejado para dar los lineamientos generales de las tareas que podrían desprenderse de esta tesis y que deberían cumplimentarse en un futuro cercano. Algunas de ellas ya están siendo ejecutadas por personal del Departamento de Mecánica Aplicada de la UNNE como parte de tesis de Maestría o como parte de proyectos de investigación financiados por diferentes entes.

**8.2 SOBRE EL MODELO DE CONSOLIDACIÓN DE SUELOS NO SATURADOS.**

Los objetivos planteados al comienzo de esta tesis en cuanto a la obtención de un modelo elato plástico con no linealidad geométrica con énfasis en consolidación para suelos no saturados han sido llevados a cabo con éxito así como también se ha logrado el programa que resuelve el problema aplicando MEF.

El modelo se ha diseñado y presentado en el Capítulo 2, ecuación (2.3-15), a partir de un análisis intuitivo de los estados de tensión de una masa de suelo y se ha considerado la influencia

del contenido de aire a través de la succión (diferencia entre las presiones del poro de aire y de agua) con el resto de los elementos que intervienen en el proceso. Se ha concluido que es la variación de la saturación con la succión la que imprime una marcada característica no lineal al proceso. También se ha dado valor a aquellos coeficientes que han aparecido sin definir en la literatura, como por ejemplo la rigidez de la estructura con respecto a la succión  $K_m$  (ecuación (2.3-7)).

Cabe destacar que este trabajo es la continuación del que se iniciara en el año 1997 con la referencia [23] y que fuera continuado en las referencias [10] y [53], todos desarrollados en el ámbito del Departamento de Mecánica Aplicada de la UNNE.

Se considera que este logro hará posible resolver algunos de los problemas más comunes en la región de influencia de esta Universidad (y de otras regiones) como lo es el la consolidación y asentamiento de los suelos arcillosos no saturados compresibles de cimentación para fundaciones de obras de ingeniería y estudio de estabilidad de presas de gravedad de material suelto, además de servir de base para la incorporación de futuras ampliaciones de capacidades al contar con un código abierto.

### **8.3 SOBRE EL MODELO NO LINEAL PARA MATERIALES EN GENERAL.**

También ha sido motivo de hipótesis para esta tesis la presunción de poder lograr una formulación del problema no lineal para materiales en general y para materiales tipo suelo en particular. Esta formulación debía abarcar tanto la no linealidad geométrica como la debida a plasticidad. Se ha logrado verificar la hipótesis generando el modelo matemático y su posterior implementación en computador.

En lo que se refiere al modelo no lineal geométrico, en el Capítulo 3, ecuaciones (3.11-6) a n (3.11-9), se ha propuesto una alternativa para formular el problema en forma hipoeelástica que evita lidiar con matrices constitutivas no simétricas además de no quedar limitado a condiciones de isotropía por estar formulado sobre tensiones y deformaciones co-rotadas. Obviamente esto último ha forzado a la realización de un numero de operaciones considerablemente mayor que en el caso de magnitudes no co-rotadas pero con un beneficio adicional que las justifica. Al propio modelo plástico, en el capítulo 4 a través de las ecuaciones ecuaciones (4.6-1) y (4.6-2), basado en trabajos previos<sup>24</sup> realizados sobre un modelo de estado crítico para condición saturada, se lo ha reformulado para incluir la no linealidad geométrica y modificado para



contemplar los efectos de la succión producida en un suelo no saturado. En la modificación mencionada, se ha evitado caer en plasticidad no asociada aunque sin embargo, en un futuro, esto puede ser una opción. Por otra parte, algunos trabajos muestran que el efecto cinemático e isotrópico de la succión debería ir disminuyendo para valores altos de la misma. Este efecto no ha sido tenido en cuenta aquí y quizás merite un ajuste en las modificaciones propuestas.

#### **8.4 SOBRE EL MODELO NO LINEAL PARA CONSOLIDACIÓN.**

Juntando el modelo no lineal para materiales en general con el modelo de consolidación para suelos no saturados, se ha conseguido a lo largo de este trabajo un modelo que es capaz de resolver el problema geotécnico mencionado cuando intervienen grandes desplazamientos de la masa de suelo. En el capítulo 4, apartado 4.2, se ha detallado el modelo general con varias opciones devolviendo, todas ellas, buenos resultados. Quizás deba trabajarse un poco más este tema y verificar ventajas relativas entre las diferentes propuestas, si las hubiere.

#### **8.5 SOBRE EL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL.**

Otra de las hipótesis propuestas es la de desarrollar un código tridimensional para la resolución de los problemas planteados. Esto también se ha logrado y demostrado en los ejemplos desarrollados en el apartado 6.4. Cabe aclarar que el tipo de elementos elegido, paralelepípedo de 20 nodos y 8 puntos de integración, consume considerables recursos computacionales por lo que se puede probar a futuro con elementos de 8 nodos y un punto de integración.

#### **8.6 SOBRE EL PROGRAMA FECCUND.**

En el apartado 5.2 se ha hecho una descripción breve del programa FECCUND (Finite Element Consolidation Code Using a Nonlinear Development) desarrollado en el Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la UNNE.

Además de lo ya dicho sobre el mismo, se quiere indicar el estado en el que se encuentra actualmente con lo agregados de esta tesis: se pueden resolver problemas de consolidación de suelos considerando la variación de la saturación (entre otras variables) con la succión, con no linealidad física (plasticidad con endurecimiento en función de la succión) y geométrica (hipoelástica, teniendo en cuenta tensores constitutivos simétricos o no) en tres dimensiones. También se pueden resolver problemas estructurales tridimensionales no lineales con el crite-

rio de Von Mises y en cuanto a suelos saturados, se ha mejorado el algoritmo para modelar grandes deformaciones. Finalmente y por ahora restringido a elasticidad con no linealidad geométrica, cuestiones relativas a materiales ortotrópos también pueden ser atacadas.

Como se dijera, el lenguaje utilizado es el Fortran, y se han elaborado interfaces con el programa GID<sup>33</sup> para la generación de mallas y para la interpretación de resultados. Sobre esto último, se ha agregado una rutina para llevar las variables secundarias a los nodos según la formulación indicada en la referencia [23] habida cuenta que el mencionado pos procesador no lo realiza.

## **8.7 SOBRE LOS EJEMPLOS PRÁCTICOS RESUELTOS.**

Los ejemplos prácticos utilizados para la comparación de resultados fueron tomados, en muchos casos, de reconocidas publicaciones (que resolvieron los problemas, muchas veces, con otros enfoques) por lo que la coincidencia de las soluciones numéricas de esta Tesis con las de dichas publicaciones, autoriza a decir que el modelo matemático aquí desarrollado es adecuado para la simulación de los problemas abordados.

Las características de los materiales utilizados en algunos ejemplos no responden a valores correspondientes a materiales reales. Sin embargo, estos permiten visualizar las diferentes respuestas que brindan los análisis, por ejemplo, de pequeñas (linealidad geométrica) y grandes deformaciones (no linealidad geométrica), forzando al programa computacional desarrollado en esta Tesis a resolver problemas altamente no lineales. Sirva como muestra, los casos resueltos en la sección 7.2.6 para materiales ortotrópicos y el caso de la sección 7.2.4 o la 7.5.2 correspondiente a consolidación. Para ellos, se ha buscado materiales que, aunque no sean reales, permitan remarcar la capacidad del código con relación a ese tema. No son estos los únicos casos, pero sí los más paradigmáticos.

## **8.8 RECOMENDACIONES PARA DESARROLLOS POSTERIORES.**

Son muchas las posibles ampliaciones al trabajo realizado aquí. Como se indicara al inicio, muchas de ellas están actualmente siendo enfrentadas por el personal del Departamento en diferentes ámbitos y con resultados iniciales promisorios.

Se tratará de mencionar sin un orden determinado, cuales serían algunos de estos futuros desarrollos:

- Plasticidad para materiales ortotrópicos: Se deja la posibilidad de deducir y aplicar funciones de fluencia no isotrópicas, para el tipo de suelo que se desee estudiar, en términos de las tensiones co-rotadas de Kirchhoff, de manera de poder extender la representación de la respuesta no isotrópica del material también al campo plástico. El criterio de plastificación utilizado en este trabajo, de Estados Críticos Modificado, establece una función isotrópica de fluencia
- Plasticidad no asociada para suelos: En el capítulo 4 se ha indicado una modificación del criterio de plasticidad para suelos saturados por inclusión de la succión pero evitando caer en plasticidad no asociada para evitar módulos elastoplásticos no simétricos y cumplir con el principio de máxima disipación plástica. Una alternativa a desarrollar en el futuro, sería trabajar con una función potencial plástico diferente de la función de tensiones y que no dependa de la succión<sup>41</sup>. Se deberá cotejar si este tipo de modelado se justifica en relación a los costos computacionales y resultados.
- Modelo Plástico: Es conveniente seguir revisando el modelo propuesto en función de nuevos resultados de laboratorio y de la estabilidad de resultados del modelo numérico. Se ha podido notar una influencia muy notoria en el valor de cálculo de variables como la presión de aire y la succión misma para algunos cambios en la expresión de la función de fluencia con lo que, por lo menos a priori, merita un análisis mas profundo del problema. Además y como se ha indicado en el párrafo 4.8, se debe desarrollar el modelo para espacios co-rotados.
- Consolidación de suelos no saturados no lineal: El modelo presentado en el capítulo 4 apartado 4.2, debe seguir probándose a los efectos de decidir cual alternativa de formulación de tensiones es más adecuada.
- Estabilidad de taludes: El modelo no lineal de consolidación de suelos no saturados puede emplearse para realizar verificaciones de estabilidad de taludes por medio de Elementos Finitos. Este tema es de gran importancia para las regiones nordeste y noroeste de la Argentina.

- Problemas de polución: Es factible extender el modelo aquí logrado para cubrir problemas de propagación de contaminantes a través de la masa de suelo. Para esto, habrá que considerar variaciones térmicas y agregar a los vacíos o poros de suelo además de los ya considerados agua y aire, los contaminantes que generalmente se consideran miscibles en agua. Así, el sistema de ecuaciones verá aparecer nuevas variables como la temperatura y las concentraciones de contaminantes en agua y aire (cuando son solubles)<sup>63</sup>.
- Ablandamiento del suelo: Si se desea estudiar el problema plástico en el terreno del ablandamiento, deberá tenerse en cuenta que el método de solución propuesto aquí (apartado 5.5) debe ser reemplazado por algún otro, pudiendo ser, por ejemplo, control de desplazamientos<sup>6</sup>, etc.
- Elementos tridimensionales de 8 nodos: Para disminuir el requerimiento computacional que significa usar elementos de 20 nodos, puede en un futuro probarse elementos de 8 nodos con un punto de integración. Pero deberá tenerse en cuenta que al resolverse un problema mixto (recuérdese que las presiones de poros son tensiones) debe atenderse el cumplimiento de la condición de Babuska-Brezzi<sup>5</sup>.

## REFERENCIAS

1. ALONSO E. E., GENS A., AND JOSA A. (1999). *A constitutive model for partially saturated soils*. *Geotechnique*, **40**(3), 405–430.
2. ATKINSON, J. H. and BRANSBY, P. L. (1978). *The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics*. University Series in Civil Engineering. McGraw Hill, New York, USA.
3. AWRUCH, A. M. y DI RADO, H. A. (1997) *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. Pp. 413. E.U.D.E.N.E. Argentina.
4. BARBOUR, S. L. (1998). *Nineteen Canadian Geotechnical Colloquium: The soil-Water characteristic curve: a historical perspective*. *Can. J. Geotech. J.* 35:873-894. Canada.
5. BARDET (1996). *Finite Element Analysis of two - phase Instabilities for Saturated Porous Hypoelastic Solids under Plane Strain Loading*. Engineering Computations, LA, USA.
6. BATHE K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice – Hall.
7. BATHE K. J and CIMENTO, A. P. (1984). *Some Practical Procedures for the solution of Nonlinear Finite Element Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
8. BATHE K. J and OZDEMIR, H. (1976). *Elastic-Plastic Large Deformation Static and Dynamic Analysis*. Computers & Structures. Pergamon Press.
9. BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K. and MORAN, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons. England.
10. BENEYTO PABLO A. (Director: DI RADO, H. ARIEL) (2003). *Análisis de consolidación de suelos regionales en estados de saturación parcial mediante simulación numérica utilizando el MEF*. Tesis de Magíster en Ingeniería. Carrera de Maestría en Ciencias de la Ingeniería. Universidad Nacional del Nordeste Resistencia. Argentina.
11. BENEYTO P. A., DI RADO H. A., MANZOLILLO J. E., AWRUCH A. M. (2003) *Simetría en la formulación del modelado numérico en suelos no saturados: beneficios y desventaja*. *Mecánica Computacional (AMCA-IACM)*, v. XXII, pp. 258-271 (ISSN 1666-6070).
12. BENEYTO P. A.; DI RADO H. A.; MANZOLILLO J. E.; AWRUCH, A. M. (2002) *Some Topics on Regional Soil Consolidation. Unsaturated Analysis*. Ed: J. Geer, D.

- Kittl & D. Mook. American Academy of Mechanics (Philadelphia USA). ISSN: Vol. 9. pp 401-405
13. BENEYTO P. A., DI RADO H. A., MROGINSKI J. L., AWRUCH A.M. (2005). *Un modelo Basado en la Combinación de estados para el Análisis de la Consolidación de suelos no Saturados*. Mecánica Computacional (AMCA-IACM), v. XXIV, pp. 515-529 (ISSN 1666-6070).
  14. BIOT, M. A. (1941). *General Theory of three - dimensional consolidation*. Journal of Applied Physics.
  15. BIOT, M. A. (1956) *Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid*. Journal of Applied Physics.
  16. BLIGHT G. E. (1971) *Flow of air through solids*. ASCE J. Soil Mech. Found. Eng. Div. Vol. 97. SM4. pp. 607-624.
  17. BOLZON G, SCHREFLER B.A., AND ZIENKIEWICZ O. C. (1996). *Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states*. Geotechnique, 46 (2), 279–289.
  18. BORJA, R. I.; TAMAGNINI, C.; ALARCÓN, E. (1995). *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier Science.
  19. BORJA, R. I.; TAMAGNINI, C.; ALARCÓN, E. (1998). *Elasto-Plastic Consolidation at Finite Strain. Part 2: Finite Element Implementation and Numerical Examples*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier Science.
  20. BRAUDEL H.J., ABOUAF J. L., CHENOT J. L. (1986). *An Implicit Incrementally Objective Formulation for the Solution of Elastoplastic Problems at Finite Strain by the FEM*. Computers and Structures. 24(6):825–843.
  21. BROOKS R. H. and COREY A. T. (1964). *Hydraulic properties of porous media*. Colorado State University. Hydrol. pp. 3-27.
  22. CARTER, P.; BOOKER, J. R. and SMALL, J. C. (1979). *The analysis of finite elastoplastic consolidation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.
  23. DI RADO, H. A. (Director: AWRUCH, A. M.) (1997) *Simulación Numérica de Procesos de Consolidación de Suelos Usando el Método de los Elementos Finitos*. Tesis de Magíster en Mecánica Aplicada al Análisis y Proyecto de Estructuras. Universidad Nacional del Nordeste.
  24. DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M. & BENEYTO, P. A. (1998) *Consolidation in Saturated Porous Media. Implementation and Numerical Problems*. Computational Mechanics. New Trends and Applications. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) and Fourth World Congress on Computational Mechanics. Buenos Aires. Argentina.
  25. DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M.; BENEYTO P. A. & MANZOLILLO, J. E. (1999) *Tópicos en el Análisis no Lineal Físico y Geométrico. Aplicaciones a Consoli-*

- dación de Suelos*. Sexto Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM 99). Mendoza. Argentina.
26. DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M.; BENEYTO P. A.; MANZOLILLO, J. E. (1999) *Análisis de Fundaciones Directas Usando el Método de Los Elementos Finitos*. Centro de Información Tecnológica (CIT). Revista Internacional Indexada. ISSN: 0716-8756 Volumen 10 N° 6 pp.165-175. Chile.
  27. FREDLUND, D. G., MORGENSTERN N. R. (1977). *Stress state variables for unsaturated soils*. ASCE J. Geotech. Eng. Div. **103**, 447-466.
  28. FREDLUND, D. G., MORGENSTERN N. R. & WIDGER R. A. (1978). *The shear strength of unsaturated soils*. Canadian Geotechnical Journal, **15**, 313-321.
  29. FREDLUND, D. G., RAHARDJO H. (1993). *Soils Mechanics for unsaturated soils*. Wiley & Sons Inc.
  30. FREDLUND, D. G. & XING, A. (1994). *Equations for the soil-water characteristic curve*, Canadian Geotechnical Journal. 31. 521-532
  31. GHABOUSSI, J. & KIM K. (1984). *Quasi-static and Dynamic Analysis of Saturated and Partially Saturated Soils*. Mechanics of Engineering Materials, 14, 277-296, John Wiley.
  32. GAWIN, D.; BAGGIO, P. Y SCHREFLER, B. A. (1995). *Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media*, Int. Journal for numerical methods in fluids, vol 20, 969-987. John Wiley & Sons, London, U.K.
  33. GID<sup>®</sup> Version 7.2 *The personal pre and pos processor*. International Center for Numerical Methods (CIMNE). UPC. España.
  34. GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F. (1984). *Matrix Compretatiars*. John Hopkins University Press, Baltimore, USA.
  35. HASSANIZADEH S., GRAY W. (1979). *General conservation equation for multi-phase systems: 1. Averaging procedure*. Advances in water resources. 2, 131-144
  36. HASSANIZADEH S., GRAY W. (1979). *General conservation equation for multi-phase systems: 2. Mass, Momenta, Energy and Entropy equations*. 2, 191-203
  37. HASSANIZADEH S., GRAY W. (1980). *General conservation equation for multi-phase systems: 3. Constitutive theory for porous media flow*. 3, 25-40
  38. HILL, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford U. Press, U. K.
  39. HUGHES, T. J. R. & WINGET, J. M. (1980). *Finite rotations effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
  40. KHALILI, N. & KHABBAZ, M. H. (1995). *On the theory of three-dimensional consolidation in unsaturated soils*. Unsaturated soils. Alonso & Delage.
  41. KHALILI, N. & LORET, B. (2001). *An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation*. International Journal of solid and structures. Pergamon.

42. KANCHI, M. B.; ZIENKIEWICZ, O. C. and OWEN, D. J. (1978). *The visco-plastic approach to problems of plasticity and creep involving geometrical non-linear effects*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. John Wiley & Sons.
43. KIM, C. S.; LEE, T. S.; ADVANI, S. H. and LEE, J. K. (1993). *Hygrothermomechanical evaluation of porous media under finite deformations: Part I - finite element formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
44. KIM, C. S.; LEE, T. S.; ADVANI, S. H. and LEE, J. K. (1993). *Hygrothermomechanical evaluation of porous media under finite deformation; Part II: Model validation and field simulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
45. LAMBE, T. W. (1958). *The engineering behavior of compacted clays*. ASCE J. Soil Mech. Div. **84**, 1655, 1-35.
46. LAMBE, T. W. & WHITMAN, R. V. (1979). *Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, USA.
47. LEWIS, R. W. and SCHREFLER, B. A. (1987). *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. J. Wiley & Sons, New York.
48. LEWIS, R. W., SCHREFLER, B. A. AND RAHMAN, N. A. (1998). *A Finite Element Analysis of Multiphase Immiscible Flow in Deforming Porous Media for Subsurface Systems*. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 135-149. J. Wiley & Sons, New York.
49. LU NING, WAYLLACE A., CARRERA J. & LIKOS W. J. (2006). *Constant Flow Method for Concurrently Measuring Soil-Water Characteristic Curve and Hydraulic Conductivity Function*. Geotechnical Testing Journal, Vol. 29, No. 3 .West Conshohocken, PA.
50. MALVERN, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
51. MAHNKEN, ROLPH (2005) *Anisotropy in Geometrically non linear Elasticity with Generalized Seth-Hill Strain Tensor Projected to Invariant Subspace*. Commun. Numer. Meth. Engng. (in press) Online in Wiley Interscience.
52. MANOHARAN & DASPGUTA (1995). *Consolidation Analysis of Elastoplastic Soil*. Computers & Structures.
53. MANZOLILLO, J. E. (Director: DI RADO, H. ARIEL) (2003). *Mecánica No Lineal Aplicada a Problemas Geotécnicos Regionales*. Tesis de Magíster en Ingeniería. Carrera de Maestría en Ciencias de la Ingeniería. Universidad Nacional del Nordeste Resistencia. Argentina.
54. MANZOLILLO, J. E.; DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M. & BENEYTO, P. A. (2000) *Análisis No Lineal en Problemas de Alta Compresibilidad. Simulación por el M.E.F.* 9º Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica - IV Congreso Nacional de Energía (COCIM – CONAE 2000). Valparaiso, Chile.
55. MAOSONG HUANG and ZIENKIEWICZ, O. C. (1998) *New Unconditionally Stable Staggered Solution Procedures For Coupled Soil – Pore Fluid Dynamic Problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. John Wiley & Sons.



56. MASTERS I., PAO W. K. S. AND LEWIS R (2000). *Coupling temperature to a double porosity model of deformable porous media*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 49, 421-438
57. NAYAK, G. C. and ZIENKIEWICZ, O. C. (1972) *Elasto Plastic stress analysis. A generation of various constitutive relations including strain softening*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
58. OWEN, D. R. J. and HINTON, E. (1980) *Finite Elements in Plasticity; Theory and Practice*. Pineridge Press Limited, Swansea, U. K.
59. PRAGHER, W. (1961) *Introduction to Mechanics of Continua*. Ginn and Company.
60. PUPPALA A. J., PUNTHUTAECHEA K. & VANAPALLI S. K. (2006). *Soil-Water Characteristic Curves of Stabilized Expansive Soils*. Journal Of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. ASCE.
61. SIMO, J. C. and HUGHES, T. J. R. (1998) *Computational Inelasticity*. Springer – Verlag. New York, Inc.
62. SMITH & GRIFFITHS (1988) *Programming the Finite Element Method*. John Wiley & Sons, U.K.
63. SCHREFLER B.A. (2001). *Computer modeling in environmental geomechanics*. Computers and structures, 79, 2209-2223
64. SUN D. A., MATSOUKA H., CUI H. B. AND XU Y. F. (2003). *A three dimensional elastoplastic model for unsaturated compacted soils with different initial densities*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 27, 1079-1098
65. TERZAGHI, K. & PECK, R. B. (1986). *Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica*. Edit. El ateneo.
66. VILADKAR, M. N.; NOORZAEI, J. and GODBOLE, P. N. (1995) *Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials*. Computer & Structures. Pergamon.
67. XIKUI LI, R.H. THOMAS, AND YIQUN FAN (1999) *Finite element method and constitutive modeling and computation for unsaturated soils*. Computational. Methods Applied Mech. Engrg., 169, 135–159.
68. YANG D. Q., RAHARDJO H., LEONG E. C. AND CHOA V. *Coupled model for heat, Moisture, Air Flow and deformation Problems in Unsaturated Soils*. Journal of engineering mechanics vol 124, n12, 1331-1338 (1998)
69. ZIENKIEWICZ, O. C. and CORMEAU, I. C. (1974) *Visco-Plasticity and creep in elastic solids. A unified numerical solution approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
70. ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C. & LEWIS, R. W. (1975) *Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics*. Geotechnique.
71. ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C. & LEWIS, R. W. (1977) *A unified approach to soil mechanics problems (including plasticity and viscoplasticity)*. In: Finite Elements in Geomechanics (Edited by Gudehus). John Wiley & Sons, London, U.K.

72. ZIENKIEWICZ, O. C. and SHIOMI, T. (1984) *Dynamic behavior of saturated porous media; the generalized BIOT formulation and its numerical simulation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.
73. ZIENKIEWICZ, O. C. y TAYLOR, R. L. (1994). *El Método de los Elementos Finitos*. McGraw – Hill.

--- \*\*\* ---

