

## TRANSFERENCIA DE LA SEÑAL ÓPTIMA A UN REGULADOR APLICADO A SERVOSISTEMAS

**Carlos Alvarez Picaza**, Universidad Nacional del Nordeste, cpicaza@gmail.com

**María Inés Pisarello**, Universidad Nacional del Nordeste, mainespisarello@gmail.com

**Julián Ignacio Veglia**, Universidad Nacional del Nordeste, julianv04@gmail.com

**Jorge Emilio Monzón**, Universidad Nacional del Nordeste, jemonzon2@gmail.com

**Resumen**— El objetivo de esta presentación es encontrar los puntos de trabajo deseados para que un servomotor accione los movimientos de un brazo manipulador con la mayor eficiencia posible a partir de la señal de la función transferencia optimizada. Presentamos un modelo básico de regulación de la energía para la alimentación de un motor de cc, que podría ser utilizado en una prótesis de miembro superior o inferior. La ganancia correspondiente utilizando el Regulador Óptimo Cuadrático para cada una de las variables intervinientes fue de  $K = [609,0428 \ 33,3480 \ 3,415 \ -707,1068]$ . Los resultados obtenidos indican que la utilización de esta herramienta mejora el rendimiento del servomotor siempre que los parámetros sean ajustados para cada caso en particular.

**Palabras clave**— *Transferencia, Polos, LQR.*

### 1. Introducción

La Ingeniería en Electrónica contribuye al diseño de dispositivos útiles para automatizar terapias de rehabilitación y dar a los pacientes la autonomía necesaria para un mejor rendimiento en su desenvolvimiento cotidiano. Los dispositivos de ayuda y tecnologías tales como sillas de ruedas, prótesis, auxiliares de movilidad, audífonos, ayudas visuales, programas informáticos especializados y aumento de hardware de movilidad, audición y la capacidad de comunicación, son los más utilizados. Con la ayuda de estas tecnologías, las personas con una pérdida de funcionamiento son más capaces de vivir en forma independiente y participar en sus sociedades.

Los servosistemas son mecanismos muchas veces utilizados en el ámbito de rehabilitación de pacientes que han sufrido la amputación de alguno de sus miembros. Para cubrir tal demanda de necesidades, se hace uso de las prótesis mioeléctricas, las cuales utilizan servomotores de cc destinados a accionar los distintos grados de libertad que posee un miembro articulado.

El diseño de miembros artificiales requiere un conocimiento completo no sólo de la mecánica de los distintos componentes, sino también una comprensión clara de los dispositivos electromecánicos, entre los cuales, los motores de corriente continua juegan un papel clave en el área de las prótesis.

En el campo de la Bioingeniería, velocidad, fuerza y estabilidad son aspectos a considerar en el desarrollo de la extremidad anatómica que funciona con servomotores de cc. Estas características se deben tener en cuenta como restricciones físicas de la tecnología actual para lograr las cualidades que presenta la extremidad natural. Combinar la velocidad y la fuerza muscular con el funcionamiento del actuador tecnológico no es una tarea fácil, principalmente cuando se trata de conseguir un motor de accionamiento con la relación velocidad–par adecuadas [1].

La Teoría de Control Clásico a menudo utiliza las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada–salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. O sea, describe a un sistema dinámico a través de la relación del cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación).

Considerando a este sistema dinámico como una “caja negra”, en la cual se observa que a través de la inyección de diferentes tipos de señales a la entrada se obtiene un conjunto de señales a la salida de la misma, nos permite conocer su comportamiento y así definir sus propiedades [2]. Normalmente los análisis de datos se realizan desde el punto de vista gráfico en el espacio de los tiempos y, en el espacio de las frecuencias, mediante la utilización de la función transferencia correspondiente.

En el campo de la teoría de control, la optimización es fundamental. Dicho proceso da lugar a la investigación de cada sistema motor específico (adaptación, desarrollo, evolución, recuperación). Además, hacen que el sistema funcione cada vez mejor. En el ámbito de las investigaciones teóricas, es natural buscar límites al rendimiento óptimo del control del motor [3].

## 2. Materiales y Métodos

Se considera el servomotor de la Figura 1 que impulsa una carga a través de un eje rígido. Si la corriente de campo es mantenida constante en un valor  $I_f$  o el flujo de campo proviene de un imán permanente [4], esta máquina puede ser controlada únicamente por la tensión  $v_a(t)$  aplicada a la armadura.

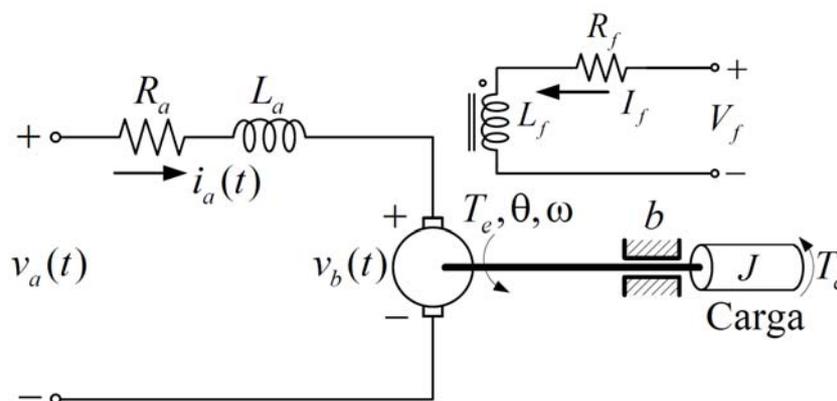


Figura 1. Esquema servomotor.

Como fuera descripto en un trabajo previo [5], la ecuación del par de torsión eléctrico puede ser escrita como:

$$T_e(t) = K_t i_a(t) \quad (1)$$

Donde,  $K_t$  es la constante de torsión y es directamente proporcional a  $I_f$ . Cuando el motor impulsa la carga, se desarrolla una fuerza contraelectromotriz en el circuito de armadura. Esta tensión es proporcional a la velocidad angular desarrollada en el eje, o sea:

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2)$$

Donde  $K_b$  es la correspondiente constante de proporcionalidad.

Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones a la malla del circuito de la armadura, se tiene:

$$v_a(t) = u(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) \quad (3)$$

Sea  $J$  el momento de inercia total de la carga,  $\theta$  el desplazamiento angular de la carga y  $b$  el coeficiente de rozamiento viscoso. El par necesario que el motor debe desarrollar para vencer la inercia, el rozamiento y el par de reacción de la carga están dados por:

$$T_e(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} \quad (4)$$

$$K_t i_a(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

Elegimos como variables de estado de este sistema a

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta(t) \\ x_2 &= \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ x_3 &= i_a(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde

$x_1$ : posición;  $x_2$ : velocidad angular y  $x_3$ : corriente de armadura.

Sea un sistema de control

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \quad (7)$$

Se tiene,

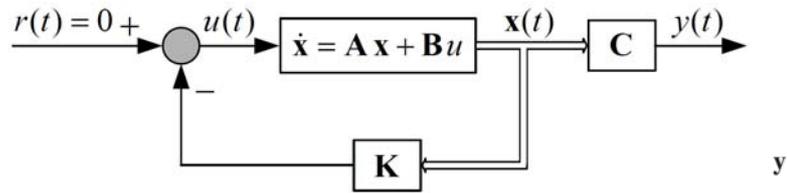


Figura 2. Sistema de control con realimentación de estados y ganancia  $\mathbf{K}$

- $\dot{\mathbf{x}}$  → Vector de Estado
- $\mathbf{y}$  → Vector de Salida
- $\mathbf{A}$  → Matriz de Estado
- $\mathbf{B}$  → Matriz de Entrada
- $\mathbf{C}$  → Matriz de Salida
- $\mathbf{D}$  → Matriz de Transición Directa
- $-\mathbf{K}$  → Ganancia

Este sistema en lazo cerrado no tiene entradas. Su objetivo es mantener la salida a cero. Como pueden existir perturbaciones, la salida se desviará de cero. Esta salida retornará a la entrada de referencia cero debido al esquema de realimentación. Un sistema de esta naturaleza se conoce como *sistema regulador*.

La representación en variables de estado del sistema del servomotor queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u(t) \quad (8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i_a \end{bmatrix}$$

En la vida real se desea de un sistema de control, que la salida de éste siga de forma precisa una entrada o referencia. Esto significa que la señal de referencia en la Figura 2  $r \neq 0$ . Los distintos tipos de sistemas de control se clasifican de acuerdo al número de integradores en la función de transferencia de lazo abierto. Un sistema de este tipo tiene un integrador en el camino directo y por tanto el sistema presenta *error de régimen permanente nulo* ante una perturbación a la entrada en escalón.

El diagrama del sistema a considerar es [6]:

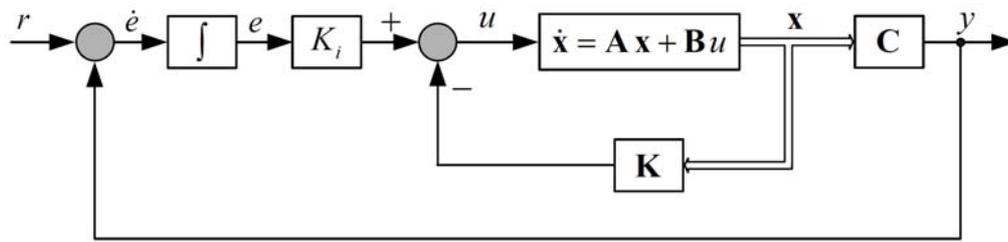


Figura 3. Sistema Servomotor con un integrador

Y su expresión matemática

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - K_i r(t) \quad (9)$$

Por tanto, en régimen permanente se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}K_i r(\infty) \quad (10)$$

Podemos obtener la ecuación de error de este sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)] \quad (11)$$

Donde

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \quad (12)$$

Por lo tanto

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}(t) \quad (13)$$

Cuya solución es

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})t} \mathbf{e}(0) \quad (14)$$

La ecuación anterior describe la dinámica del error del sistema de la Figura 3, y nos dice que este error  $\mathbf{e}(t)$  tiende a cero para una condición inicial dada  $\mathbf{e}(0)$  si los autovalores de la matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  se encuentran ubicados en el semiplano izquierdo del plano  $s$  de forma que el sistema en lazo cerrado resulte asintóticamente estable.

Para el régimen permanente tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) &= \mathbf{x}_e(t) \\ e(t) - e(\infty) &= e_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Reescribiendo en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{e}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ e_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (16)$$

Y finalmente,

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + K_i e_e(t) \quad (17)$$

Se define entonces un nuevo vector de estado de orden  $(n + 1)$  denominado vector de error. Esta nueva representación de estado surge de la ecuación de error del sistema.

### Función de Costo

Uno de los métodos sistemáticos y muy utilizados para determinar los valores de  $\mathbf{K}$  es mediante la utilización de técnicas de control óptimas, a través de la minimización de índices de desempeño cuadrático mediante la siguiente función escalar:

$$S = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (18)$$

Esta es una función cuadrática comúnmente denominada *función costo*, y está directamente relacionada con la energía envuelta en el proceso de control. En la función cuadrática la matriz  $\mathbf{Q}$  es una matriz hermitiana o simétrica real definida (o semidefinida) positiva, la matriz  $\mathbf{R}$  es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva,  $\mathbf{x}$  es el vector de estado y  $\mathbf{u}$  es el vector de entrada. El supraíndice  $T$  indica transposición. Si la ecuación de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  es controlable entonces la matriz de ganancias de realimentación de estados es dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (19)$$

donde  $\mathbf{P}$  es una matriz simétrica y definida positiva que satisface la siguiente ecuación:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (20)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación algebraica de Riccati*, y debe ser solucionada numéricamente. Esta ecuación puede tener una o mas soluciones pero solamente una solución es simétrica y definida positiva, la que resulta en una matriz de ganancias óptima. Una ventaja de usar el esquema de control óptimo cuadrático es que el sistema diseñado resulta asintóticamente estable, excepto en el caso en que el sistema no es controlable.  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  se eligen como matrices diagonales de la forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & q_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & r_{rr} \end{bmatrix}$$

Donde los elementos  $q_{ii}$  de la matriz  $\mathbf{Q}$  están asociados a la energía de los estados y los elementos  $r_{ii}$  de la matriz  $\mathbf{R}$  están asociados a la energía de la acción de control.

Tal lo expresado en [7] se busca minimizar la función de costo, determinando la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$  del vector de control óptimo ( $\mathbf{9}$ ) mediante el LQR (Regulador Óptimo Cuadrático).

### 3. Resultados y Discusión

Los parámetros de la planta motora son los siguientes [8]:

$R_a$  = Resistencia de armadura =  $1 \Omega$

$L_a$  = Inductancia de la armadura =  $5 \text{ mH}$

$K_t$  = Constante del par motor =  $1 \text{ Nm/A}$

$K_b$  = Constante de la f.c.e.m =  $3 \text{ Vs/rad}$

$b$  = Coeficiente de rozamiento de los cojinetes =  $0,1 \text{ Nms/rad}$

$J$  = Momento de inercia del motor y la carga =  $0,2 \text{ Nm/rad/s}^2$

Los casos simulados a continuación corresponden a una persona con una amputación de miembro superior, para la cual se utilizó una prótesis marca EMO modelo Utah Arm 3 con rango de movimiento de  $135^\circ$  y  $15,9 \text{ Kg.}$  de carga límite con extensor de antebrazo y cuyo servosistema asociado a la misma es un motor de cc Maxon RE 40  $\varnothing$  40mm de  $150 \text{ Watts}$ .

Función Transferencia del Sistema Servomotor:

$$\frac{1,328}{s^3 + 3,548 s^2 + 209,9 s} \quad (21)$$

Polos del sistema servomotor, de la figura 2:

[ 0   -1.77 +14.38i   -1.78 -14.38i]

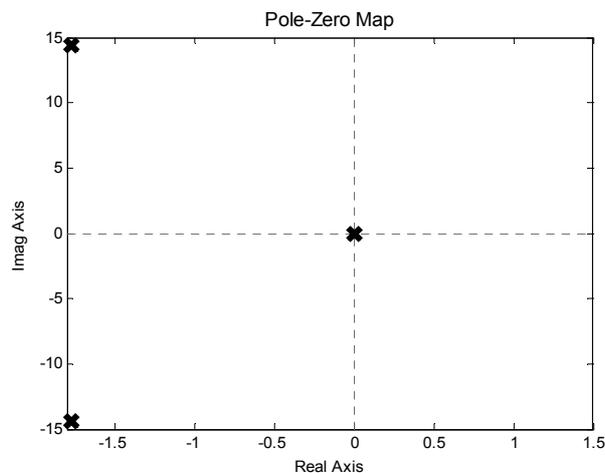


Figura 4. Polos sistema servomotor

En la Figura 4 se puede observar los polos del sistema original a partir de su respectiva Función Transferencia y de las ecuaciones de estado (7).

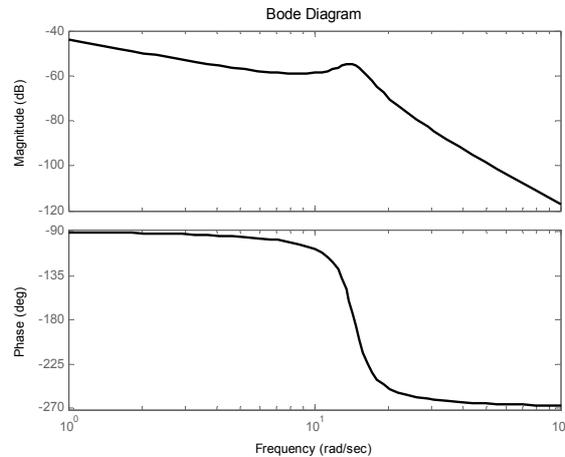


Figura 5. Diagrama de Bode del sistema servomotor

En la Figura 5 se observa las dimensiones de magnitud y fase de la Función Transferencia para el servomotor. Cabe destacar que la magnitud se encuentra muy atenuada debido a la entrada cero (sin excitación).

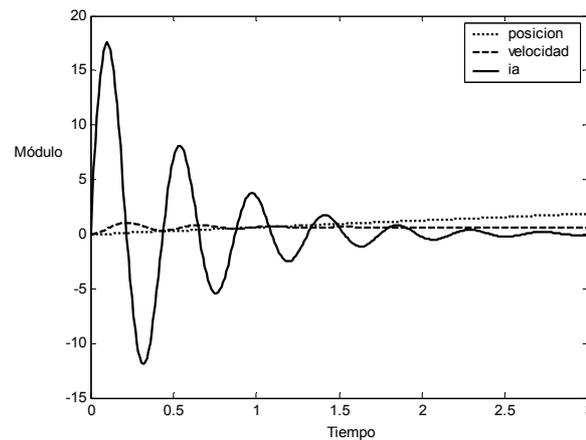


Figura 6. Evolución del sistema servomotor

La Figura 6 muestra la evolución en el tiempo de las variables de estado del servomotor.

Función Transferencia del sistema con un integrador aplicando LQR:

$$\frac{939,1335}{s^4 + 13.93s^3 + 254.4s^2 + 808.9s + 939.1} \quad (22)$$

Polos del sistema con un integrador (LQR), de la figura 4:

$$[-5.17+13.65i \quad -5.17-13.65i \quad -1.79+1.09i \quad -1.79-1.09i]$$

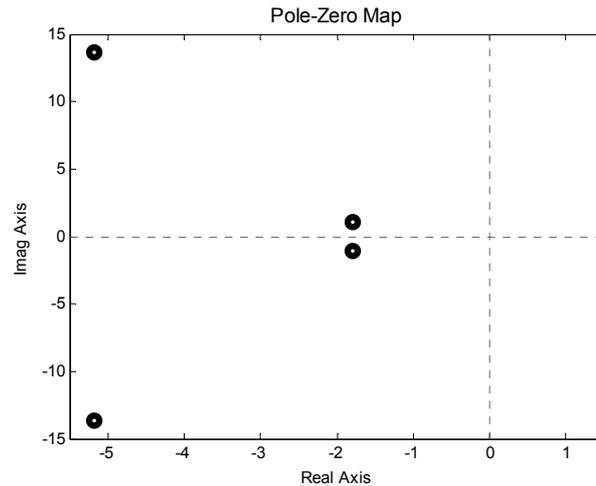


Figura 7. Polos sistema servomotor con integrador

Se encuentran los componentes de la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$ , utilizando la sentencia “lqr” de Matlab® [9].

Ganancias obtenidas con el regulador óptimo cuadrático:

$$\mathbf{K} (\text{lqr}) = [609,0428 \quad 33,3480 \quad 3,4153 \quad -707,1068]$$

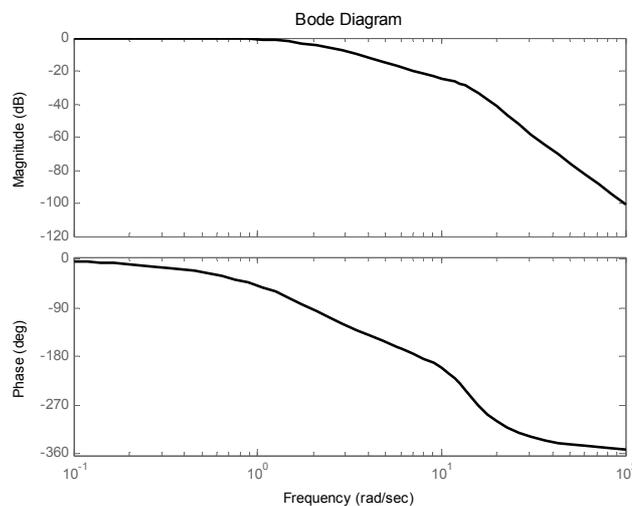


Figura 8. Diagrama de Bode del sistema servomotor (LQR)

En la Figura 8 puede observarse un destacado crecimiento de la magnitud de la “nueva” Función Transferencia de trabajo, como así también un menor valor del error de estado estacionario (para cualquier señal de entrada variable en el tiempo).

La inserción del integrador para encontrar la señal óptima produce un cambio en el funcionamiento del sistema cuyas curvas de evolución en el tiempo de las distintas variables de estado pueden observarse en la figura siguiente.

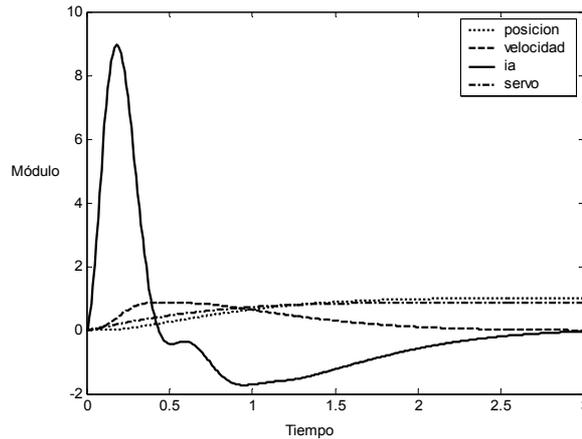


Figura 9. Evolución del sistema optimizado LQR

En la Figura 9 se observa que la energía invertida en los estados es bastante menor que lo observable en la Figura 4, esto debido a la acción del LQR al servomotor con integrador (servo).

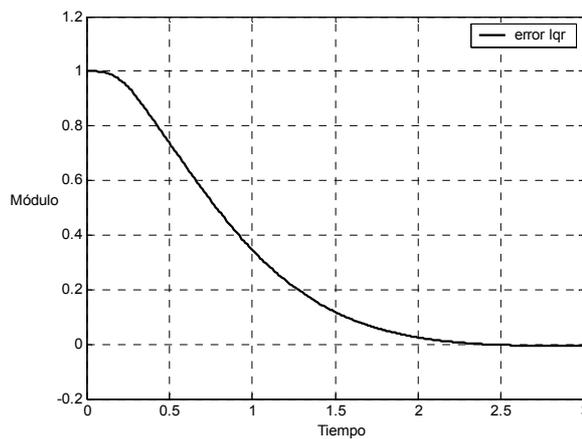


Figura 10. Señal de error de la realimentación del LQR

#### 4. Conclusiones y recomendaciones

La utilización del Regulador Óptimo Cuadrático con su respectiva acción de control y el cálculo de su error de realimentación produce una atenuación en la oscilación del sistema incrementando la estabilidad del mismo. Para obtener un controlador LQR (Linear Quadratic Regulator), es necesario definir las matrices de función de costo  $[Q]$  y  $[R]$ . Desafortunadamente no existen métodos analíticos simples que permitan al diseñador definir los valores que configuran dichas matrices [10], del control que se desee realizar y de los esfuerzos de las variables de control. No existe más opción que proponer unas matrices  $[Q]$  y  $[R]$ , calcular el controlador y comprobar el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Es importante señalar que la matriz  $K$  no es única para un sistema determinado, sino que depende de las posiciones deseadas de los polos en lazo cerrado (los cuales determinan la velocidad y el amortiguamiento de la respuesta). La incorporación del Regulador Óptimo Cuadrático permite que la transferencia de la señal de trabajo del servomotor sea la adecuada para mejorar el

rendimiento de la prótesis mioeléctrica. Se debe tener en cuenta que la selección de los polos en lazo cerrado obtenidos, o de la ecuación característica deseada, es un compromiso entre la rapidez de la respuesta y la sensibilidad ante perturbaciones y ruido en la acción del manipulador biomecánico. La incorporación de un integrador y la implementación del LQR hacen posible que sea el mismo motor elegido con anterioridad en el ítem 3, para ser utilizado en el accionamiento óptimo del miembro protésico superior.

## **5. Referencias**

- [1] WEIR R.F. ff, (2003). “Design of Artificial Arms and Hands for Pros-thetic Applications” in “*Standard Handbook of Biomedical Engineering and Design*”. Myer K. Editor, Mc Graw-Hill Publisher. NY. OGATA K., “*Ingeniería de Control Moderna*”. 4ta Edición. Ed. Pearson. ISBN: 82-205-3678-4.
- [2] OGATA K., “*Ingeniería de Control Moderna*”. 4ta Edición. Ed. Pearson. ISBN: 82-205-3678-4.
- [3] TODOROV E., LI W., (2003). “*Optimal Control Methods Suitable for Biomechanical Systems*”. EMBS- IEEE Proceedings of the 25th Annual International Conference. Vol 2. Pp 1758 – 1761.
- [4] CORTES REYES F. (2011). *Robótica, control de robots manipuladores*. (México: Alfaomega).
- [5] ALVAREZ PICAZA C., PISARELLO M.I., MONZÓN J.E., (2014). “*Model of optimal energy regulation for the articulation of a robotic manipulator*”. VI Latin American Congress on Biomedical Engineering CLAIB (Berlin: Springer Berlin Heidelberg) Pp 908-911.
- [6] PHILLIPS CL. and HARBOR RD., (2000). *Feedback Control Systems*, Fourth Edition, Prentice Hall.
- [7] ALVAREZ PICAZA C., PISARELLO M.I., MONZÓN J.E., (2015) “*Análisis teórico de la regulación de energía de servomotores utilizados en manipuladores biomecánicos*”. Annals of the XX Congreso Argentino de Bioingeniería. IX Jornadas de Ingeniería Clínica.
- [8] Maxon Motor RE 40 Ø 40mm, (On line 6/2018). Graphite Brushes, 150 Watt. Data Sheet.
- [9] Matlab®, Toolbox User’s Guide, (2006). Natick Massachusetts: The Math Works Inc.
- [10] VINODH KUMAR E., JOVITHA J., (2016). “*Algebraic Riccati equation based Q and R matrices selection algorithm for optimal LQR applied to tracking control of 3rd order magnetic levitation system*”. ARCHIVES OF ELECTRICAL ENGINEERING VOL. 65(1), pp. 151-168.