Relaciones conceptuales asociadas a la noción de divisibilidad de números enteros en textos escolares del nivel secundario utilizados en colegios de la Ciudad de Corrientes

Tesis elaborada por: César Adrián Garau

Presentada a la Facultad de Humanidades de la
Universidad Nacional de Nordeste
Para aspirar al título de

MAGISTER EN METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

Director: Dr. Ricardo Fabián Espinoza

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

Resistencia, septiembre de 2019

Agradecimientos

- ***A mi director de Tesis****, por su gran aporte de tiempo, dedicación y sabiduría en la realización y conclusión de este trabajo.*

- ***A mi familia****, por el cariño, contención y comprensión recibida a lo largo de la elaboración y concreción de este sueño.*

Resumen

En este trabajo se analizó el contenido divisibilidad de números enteros, en libros de textos de matemática del nivel medio, para determinar la vinculación existente entre la red de relaciones desplegadas en el planteamiento teórico del contenido divisibilidad en números enteros, y la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en los mismos.

El marco teórico y las herramientas metodológicas utilizadas se inscriben en el modelo epistémico y cognitivo del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática (EOS), propuesto por Godino y colaboradores. Específicamente se hizo uso de las nociones de objeto matemático, práctica y sistemas de prácticas, configuración de objetos primarios y función semiótica.

En general se evidencia que las propuestas textualizadas no siempre proporcionan todo el bagaje de conocimientos matemáticos necesarios y suficientes para favorecer la resolución de las situaciones problemáticas que proponen.

Relaciones conceptuales asociadas a la noción de divisibilidad de números enteros en textos escolares del nivel secundario utilizados en colegios de la Ciudad de Corrientes

Tesis elaborada por: César Adrián Garau

Director: Dr. Ricardo Fabián Espinoza

Índice

Introducción

En este trabajo de tesis a partir del estudio didáctico-matemático realizado al contenido divisibilidad de números enteros, se tiene por finalidad determinar la vinculación existente entre la red de relaciones desplegadas en el planteamiento teórico del contenido divisibilidad en números enteros, en libros de texto de matemática que son utilizados en el nivel medio, y la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en los mismos.

En el primer capítulo se detalla la problemática de investigación, siendo ésta determinar la vinculación entre las relaciones conceptuales establecidas en el planteamiento teórico y las resoluciones de las situaciones problemáticas de cada libro. También el objetivo general, los específicos, y en función de éstos las preguntas de investigación por responder.

En el segundo capítulo se presentan los antecedentes de investigación, siendo los más pertinentes los trabajos de Marta Graciela Nardoni, que detalla un análisis bibliográfico de las diversas actividades que proponen los libros escolares de matemática del nivel medio y superior, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales y el de Bodi Samuel, que realiza el análisis de libros, que correspondieron tanto a editoriales de gran difusión como de menor difusión, sobre la Divisibilidad que se presentaban en los mismos.

En el tercer capítulo se plantea el enfoque teórico, destacando los constructos y las herramientas metodológicas relacionadas con el mismo. Utilizando configuraciones epistémicas, tanto para modelizar las prácticas conceptuales de la propuesta teórica textualizada como las correspondientes a las situaciones problemáticas planteadas, tratando de detectar las relaciones conceptuales emergentes de ambas configuraciones. También se detalla la metodología utilizada para alcanzar los objetivos propuestos, dar respuesta a las preguntas de investigación formuladas y las distintas instancias de validación.

En el cuarto capítulo se trabaja con los libros de texto seleccionados. Se describen sus características generales, se realiza una configuración epistémica del desarrollo teórico del contenido y de las resoluciones de las situaciones problemáticas que se proponen. Se establecen las relaciones conceptuales entre los objetos primarios intervinientes en ambas configuraciones y se analizan la vinculación entre ellas. Luego se establece una comparación entre los procedimientos y argumentaciones que se brindan en el desarrollo de los libros y los que se utilizan para la resolución de cada situación problemática, posteriormente se realiza un análisis de dichas comparaciones. Se dan respuestas a preguntas descriptivas, correspondientes a la componente epistémica, realizadas al contenido desarrollado en cada libro y posteriormente se realiza un análisis de lo encontrado.

Las razones que orientaron a la resolución de las situaciones problemáticas de cada libro y la construcción de las configuraciones epistémicas son la relevancia de la investigación expresada en el primer capítulo y los antecedentes que se exponen en el segundo capítulo, que expresan las dificultades que se presentan en el desarrollo del contenido Divisibilidad y que hacen pensar en las siguientes preguntas: ¿Qué vinculación existe entre las relaciones conceptuales del desarrollo teórico y la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en los mismos? ¿Es suficiente el desarrollo teórico que brinda un libro de texto, sobre el contenido divisibilidad de números enteros, para poder resolver las situaciones problemáticas que propone o si por el contrario es necesario introducir nuevos conceptos? ¿Cuáles son las herramientas conceptuales que se utilizan al momento de resolver una situación problemática?

A medida que se fue construyendo el sistema de prácticas indispensable para la resolución de cada situación problemática, fue surgiendo la necesidad de utilizar conceptos matemáticos que no necesariamente se encontraban en los desarrollados en el libro. Siendo la introducción de los mismos a consecuencia de la poca claridad, la poca pertinencia o la no presencia de tales enunciados.

Finalmente, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones a las que se arriban. Donde se determina que, de la vinculación establecida entre las relaciones conceptuales de los objetos primarios del desarrollo teórico del libro y las involucradas o emergentes de las resoluciones de las situaciones problemáticas, se evidencia que en la mayoría de los casos la información conceptual brindada en el libro no es suficiente y en otros casos tampoco pertinente, o clara, para dar con la resolución más adecuada. Siendo que, en mayor profundidad, existen demasiadas diferencias y pocas semejanzas entre los procedimientos y argumentaciones necesarios para resolver las situaciones problemáticas que se proponen y aquellos que se desarrollan en el libro. Evidenciándose a través de preguntas descriptivas de la componente epistémica, que en detalle cada libro tiene diversas carencias, como así también situaciones problemáticas y conceptos muy distintos y variados.

CAPÍTULO 1

Problemática de la Investigación

En este capítulo se plantea la problemática de la investigación, el objetivo general y los específicos por alcanzar, las preguntas de investigación por responder y la relevancia de la investigación.

1.1 Planteamientos del problema de investigación

El libro de texto es un recurso habitual que utilizan los profesores para planificar sus clases, hasta el punto que en diversas ocasiones es el propio libro el que delimita lo que se desarrolla en la misma. Determinar qué es lo que dicen y que omiten aquellos libros con los que entran en contacto los alumnos, cuáles son los estereotipos y distorsiones de la realidad que promueven, de quiénes se habla, etc., son preguntas a las que númerosos investigadores tratan de hallarles respuesta (Torres, 1991)

De manera puntual, Cabero, J., Duarte, A., y Romero, R. (1995) expresan que *los libros de matemática influyen en la enseñanza de un contenido*, lo que nos permite considerar al libro de texto de matemática como una fuente de información sumamente valiosa al momento de desarrollar un contenido en particular. Razón suficiente para considerar de extrema importancia el análisis de los libros de texto de matemática desde una base teórica científica, que permita discernir las características de los contenidos que en el mismo se desarrollan. Características vinculadas directamente con las practicas educativas en el aula, como así también con el conocimiento matemático que la sociedad considera pertinente (Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. 2015)

En esta tesis, se determinará la vinculación existente entre la red de relaciones desplegadas en el planteamiento teórico del contenido divisibilidad en números enteros, en libros de texto de matemática que son utilizados en el nivel medio, y la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en los mismos, además , se analizará si las relaciones conceptuales establecidas en el planteamiento teórico son suficientes para resolver las situaciones problemáticas que proponen o si, por el contrario, aparecen como necesarias otras nuevas relaciones emergentes.

Los libros de texto de matemática seleccionados para dar respuesta a la problemática, corresponden a los impresos y publicados en el período 2010-2012. Se consideró este período por dos razones, cuando se comenzó con la investigación en el año 2015 los libros seleccionados, entre otros, eran los que utilizaban los profesores de matemática para dictar sus clases y que se encontraban en las bibliotecas escolares acorde al relevamiento que se realizó y que consta en el capítulo 3, siendo esta la primera razón. En cuanto a la segunda, en el año 2011 la Nación Argentina difundió los Núcleos de Aprendizajes Prioritario (NAP) destinados a todas las provincias de la República Argentina. Destacándose que en los mismos el contenido divisibilidad estaba orientado al conjunto de números naturales, detallándose de forma ordenada que aspectos tener en cuenta al momento de considerar dicho contenido. No obstante, no se mencionaba su ampliación al conjunto de números enteros. De igual forma en los NAP de la Provincia de Corrientes se pudo evidenciar la misma tendencia, no siendo evidente de forma explícita un direccionamiento hacia el conjunto de números enteros. Razón por lo cual se presentaban como mínimo dos situaciones, una de ellas es que los autores de libros de matemática destinados al nivel secundario no tenían en los NAP una guía explicita sobre qué aspectos considerar al momento de desarrollar la divisibilidad en el conjunto de números enteros, a diferencia de lo detallado sobre que abordar en el conjunto de números naturales. La otra situación, es que los docentes de matemática que debían abordar dicho contenido para desarrollar sus clases, estaban al tanto que en los NAP no existía una guía explicita sobre qué aspectos considerar, resultando necesaria la guía establecida en los libros de matemática que abordaban dicho contenido.

1.2 Objetivo general y específico

A continuación, se plantean los objetivos, general y específicos, que se intentaran alcanzar con esta investigación:

1.2.1 Objetivo general

- Determinar la vinculación entre la red de relaciones establecidas entre los objetos primarios asociados a la propuesta teórica y la red de relaciones, involucradas o emergentes, de los objetos primarios asociados a las prácticas resolutorias de las situaciones problemáticas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Detallar la red de relaciones que se establecen entre los objetos primarios asociados a la propuesta teórica y la red de relaciones, involucradas o emergentes, de los objetos primarios asociados a las resoluciones de las situaciones problemáticas.

- Establecer semejanzas y diferencias entre los procedimientos y argumentaciones planteadas en los libros de textos y aquellos necesarios para resolver las situaciones problemáticas que proponen.

- Analizar si el desarrollo teórico textualizado del contenido Divisibilidad de números enteros en libros de nivel secundario de la ciudad de Corrientes, permite resolver todas las situaciones problemáticas que propone o si, por el contrario, aparecen como necesarias otras nuevas relaciones emergentes.

1.3Preguntas de investigación

En lineamiento con los objetivos propuestos, se plantea las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué vinculación se establece entre la red de relaciones establecidas de la propuesta teórica, respecto a la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas?

- ¿Qué red de relaciones se establecen entre los objetos primarios de la propuesta teórica del contenido Divisibilidad de números enteros y en las resoluciones de las situaciones problemáticas que se proponen en los libros?

- ¿Qué semejanzas y diferencias se establecen entre los procedimientos y argumentaciones propuestas en los libros y aquellos necesarios para resolver las situaciones problemáticas que proponen?

- ¿El desarrollo teórico textualizado del contenido Divisibilidad de números enteros en libros de nivel secundario de la ciudad de Corrientes, permite resolver todas las situaciones problemáticas qué propone?

1.4 Relevancia de la investigación

La divisibilidad en el conjunto de números enteros es una temática inmersa en diversos aspectos de la matemática y de otras ciencias. La misma puede encontrarse en el desarrollo de teorías estrictamente matemáticas como ser en el uso reconocido del algoritmo de Euclides, que permite calcular el máximo común divisor de dos números enteros no nulos de una forma más eficiente que a partir de la factorización en números primos. También puede encontrarse su aplicación en el cálculo del inverso modulo n, en la resolución de sistemas de congruencias a través del algoritmo chino del resto, o el estudio de las soluciones de ecuaciones diofánticas que incluyen soluciones enteras, etc. En relación con otras ciencias, como el caso de la computación, el desarrollo de la teoría de congruencia permite la asignación de posiciones de memoria a ficheros de un ordenador a través de las funciones de dispersión, la generación de números pseudoaleatorios y los sistemas de cifrado basados en la aritmética modular, de entre los que cabe destacar la criptografía de clave pública (Cañada Ordoñez, 2018). Con respecto a la robótica, dependiendo de los números por dividir se obtiene como resultado un número entero u otro llamado de punto flotante (Sergi, 2003).

Naturalmente se sabe que los libros y diseños curriculares orientan en gran medida la enseñanza del profesor, por lo menos lo que respecta a nuestra región. Los textos escolares constituyen una fuente de consulta muy importante de los profesores para el diseño y preparación de sus clases, y por consiguiente, es indiscutible su influencia directa o indirectamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas (Nardoni y Pochulu, 2013). Acorde a lo expresado por Font, V. y Godino, J. D. (2.007) una de las competencias profesionales que debe tener un profesor de Matemática es la de análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita diseño, aplicación, valoración y mejora. Estas tareas son aquellas situaciones que el profesor propone a los alumnos, como: ser problemas, de investigación, de aplicación, ejercicios, etc., las que originan la actividad a desarrollar en la clase, produciendo a la vez algún aprendizaje.

Teniendo presente la experiencia como docente, esta nos indica que existen enseñantes que eligen los libros de texto de matemática sin un criterio de análisis que provenga de la didáctica de la matemática. Esto provoca que la elección sea más que nada desde el sentido común, como ser: cantidad de ejercicios, cantidad de imágenes ilustrativas, cuadros por completar, números por completar, ejercicios de aplicación, cantidad de problemas con un contexto, etc.

Las afirmaciones mencionadas permiten demostrar que es posible realizar un amplio análisis de la divisibilidad de números enteros en los diferentes libros de textos, dada su importancia en matemática y otras ciencias. Es así que de la amplia gama de análisis didácticos que puede realizarse a un libro de texto, esta investigación a través del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), con los constructos de objetos primarios, configuración epistémica, relaciones conceptuales, función semiótica e indicadores de la faceta epistémica (Godino, J. D. (2013), adquiere relevancia porque centra el interés en un aspecto relacional que resulta sumamente importante, que es esta cuestión de determinar la vinculación entre las distintas redes conceptuales y si el abordaje teórico del libro es suficientemente exhaustivo para resolver las situaciones problemáticas que propone. Es decir, aporta al análisis de libros de texto basado en herramientas teóricas provenientes de la didáctica de la matemática y no desde el sentido común. Esto último es fundamental e importante, puesto que le da al profesor ciertos criterios de análisis didáctico de texto para seleccionar diferentes libros de enseñanza, tanto con respecto al contenido mencionado como de otros. Esta cuestión se desarrolla con mayor profundidad en el cuarto capítulo.

Si bien, en esta tesis se determina la vinculación existente entre la red de relaciones del desarrollo teórico y la red de relaciones del sistema de prácticas asociadas a la resolución de los problemas, es necesario destacar que en el caso de existir relaciones ausentes en la teoría, esta puede deberse básicamente a dos aspectos: la primera que tiene que ver con las restricciones de la editorial a través de la cual se publica el libro, como ser número de hojas y su relación con el precio de venta, cantidad de ejemplares, etc. Y en cuanto al segundo aspecto, guarda un nexo con el autor del libro de texto que puede considerar dar solo las herramientas básicas pensando que el profesor diseñe en función de ellas una secuencia de enseñanza; teniendo presente que los libros no necesariamente deben incluir propuestas de enseñanza, porque se supone que eso es una tarea de los diseños curriculares y del profesor.

Capítulo 2

Antecedentes

Este capítulo consiste en la presentación de una breve explicación de la evolución de la divisibilidad a lo largo de la historia, como así también la exposición de distintos trabajos de investigación que han discutido didácticamente sobre dicho contenido.

Cada trabajo desde su propia perspectiva didáctica, da a conocer sobre los diversos aspectos que se van relacionando en el contenido divisibilidad, tanto en el conjunto de números naturales como en el conjunto de números enteros, brindando así distintos aportes didácticos.

2.1 Una breve apreciación de la evolución histórica de la Teoría de Números

Con este estudio tratamos de mostrar la evolución de la Divisibilidad a partir de algunos resultados aislados hallados por Euclides hasta la moderna estructura englobante de Dominio de Integridad con factorización única de Dedekind, la que conserva los campos numéricos anteriores, expande la Aritmética con su teoría de ideales y logra caracterizar al conjunto de los números enteros con sus propiedades determinativas invariantes.

Para la construcción del mismo, en el que fundamentalmente tomamos aportes de la tesis de Etchegaray (1998), prestamos especial atención a los problemas que fueron motores de avances de esta temática, rescatando las diferentes representaciones dadas por los matemáticos y el alcance de los elementos tecnológicos conseguidos, en tanto justificadores de procedimientos y técnicas y elementos sobre los que se han realizado estudios, produciéndose así nuevos conocimientos.

Su estructura queda definida a partir de la sucesión de etapas históricas en las que se produjeron resultados trascendentes:

A. Antigua Grecia (siglo VI – V a. C.): los resultados generales que se limitaron al estudio de algunas relaciones aisladas entre números, no lograron integrarse en una estructura abarcativa ni generar métodos propiamente aritméticos. Así:

- El tratamiento que la **Escuela Pitagórica** dio a los números se limitó a procedimientos con apoyo empírico o concreto. Pese a esto ya se vislumbraban algunas generalizaciones que ponían en escena la presencia implícita de regularidades.

Como para los pitagóricos “todo era número”, establecían relaciones entre números y magnitudes, nociones estas que pertenecían a ámbitos diferentes.

El problema que se presentaba consistía en que las magnitudes eran continuas y los números hasta entonces conocidos discretos, lo que dio origen a una nueva forma de pensar en Matemática.

- **Euclides** retoma muchos de los conocimientos elaborados por los pitagóricos. Debido a la idea de discretitud, por ejemplo, en *Los Elementos* aparecieron otras clasificaciones de los números: par, impar, primos, compuestos, perfectos, abundantes, deficientes, etc

La construcción del Algoritmo de Euclides le permitió encontrar el Máximo Común Divisor entre dos números enteros e importantes teoremas sobre la

Divisibilidad que fueron y son piezas importantes en Teoría de Números: i) *Si un número primo divide a un producto, entonces divide a algunos de los dos*, ii) *Dado cualquier número finito de primos, podemos encontrar otro mayor*, teorema que, por la idea de infinito que hoy se tiene, se lo conoce a partir de la versión *"Existen infinitos primos"*, y iii) *Si un número natural de la forma 2^p-1 es primo entonces 2^{p-1} x (2^p-1) es perfecto*.

B. Aritmética superior: en esta etapa se bosquejaron métodos netamente aritméticos que habían quedado inconclusos con Euclides. Para ello fue necesaria la constitución de una simbología propia, por lo que la génesis se remonta a:

- **Diofanto** (algebrista griego, s.III d. C.): la introducción del concepto de *Arithmo,* génesis de la noción de símbolo algebraico, le permitió prescindir de instrumentos geométricos para resolver problemas numéricos. Además, si bien fue escasa, consiguió determinar una simbología propia del campo aritmético.
- **Fermat:** trabajó intensamente con números primos.

Consiguió formular dos teoremas que influyeron notablemente en el avance de la Aritmética: el pequeño y el último teorema de Fermat, cuyos enunciados son, respectivamente: i) *Si a es un entero positivo no divisible por el número primo p, entoncs a^{p-1}-1 es divisible por p*, y ii) *No existen tres enteros positivos x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$, si n > 2*. Este último teorema da respuesta al problema planeado por Diofanto y el intento de demostrar esta conjetura produjo varios adelantos en el terreno de la Aritmética.

Fermat fue el primer matemático que delimitó explícitamente el dominio de la Aritmética a los enteros y creó métodos propios de ese dominio como por ejemplo el método del descenso infinito.

- **Euler, Lagrange y Legendre:** al tratar de resolver los problemas planteados por Fermat, estos matemáticos obtuvieron resultados que extendieron y completaron sus alcances, fundamentalmente a partir de la introducción de la idea de Congruencia. Aunque algunas nociones de congruencia ya habían aparecido con Euclides, éste nuevo enfoque permitió resolver problemas con números grandes a partir de sus transformaciones en números pequeños, dado que, en tanto relación de equivalencia, origina una partición en el conjunto de los enteros y en las clases respectivas quedan identificados números grandes con pequeños.
- **Gauss:** con su obra Disquisiciones Aritméticas (1.801), apareció una teoría que integró todos los resultados parciales anteriores. Clasifica a los infinitos números enteros a través de un número finito de clases, las clases de restos módulo n. Una

importante consecuencia de esta relación es el método general de clasificación, basado en la noción de homomorfismo.

Concebir a “x es divisible por a” a través de $x \equiv 0_{(a)}$, permitió establecer relaciones importantes entre las Ecuaciones Algebraicas y la Divisibilidad. Las herramientas que provee la noción de congruencia permitieron a Gauss dar la primera prueba rigurosa de la Ley de Reciprocidad Cuadrática, enunciado clave en la constitución de la sistemática Teoría de Números.

Posteriormente, Gauss generalizó esta ley para grados mayores, por lo que tuvo la necesidad de ampliar el conjunto de los enteros al conjunto de los enteros complejos. Esto permitió la redefinición de las operaciones fundamentales sobre el nuevo dominio, así como las unidades y los números primos y se demostró el Teorema Fundamental de la Aritmética en este nuevo dominio.

C. **Generalización de la aritmética** (s. XIX): Este período se caracterizó por la generalización de los Enteos de Gauss a los Enteros Algebraicos. La ampliación fue posible en virtud de dos grandes problemas: el trabajo de Gauss para realizar la demostración de las leyes de reciprocidad y el intento de Kummer por demostrar el último Teorema de Fermat. En efecto, al querer demostrar la imposibilidad de la conjetura $z^p = x^p+y^p$, con x, y, z, p enteros racionales distintos de o, p primo mayor que 2, descompuso x^p+y^p en sus p factores lineales $(x+y) \times (x+wy)...(x+w^{p-1}y)$, donde w es una raíz imaginaria de la unidad de orden p. Este resultado condujo a la ampliación de los enteros de Gauss al campo de los números algebraicos de la forma $\Sigma a_i w^i$, donde $a_i \in Z$ y $0 = i = p-2$.

Las generalizaciones de la idea de número entero condujeron a la dificultad de que el Teorema Fundamental de la Aritmética se cumpliera en algunos de esos conjuntos numéricos mientras que en otros no, por lo que hubo que revisar la hasta entonces no cuestionada afirmación *“La pérdida de la factorización única”,* siendo entonces el nuevo problema ¿cuáles campos numéricos admitían factorización única y cuáles no?

La respuesta a esta cuestión la dio Dedekind a través de la construcción de su estructura englobante llamada dominio de integridad, o sea anillo conmutativo sin divisores de cero, determinando previamente cuáles de las estructuras de dominio de integridad poseen factorización única, por medio de la teoría de Ideales.

El matemático Dedekind respondió a la pregunta planteada a través del siguiente teorema: Un campo k de números enteros algebraicos admite factorización única si y sólo si todos los ideales de k son principales.

2.2 Trabajos de Investigación

A continuación, damos a conocer los aportes de distintos trabajos de investigación sobre el contenido divisibilidad, tanto en el conjunto de números naturales como en el conjunto de números enteros.

Para la elección de las investigaciones realizadas, tuvimos en cuenta no solo el aporte de conocimiento que se desprende del estudio realizado al contenido divisibilidad de números enteros por parte de cada trabajo, sino también la utilización de las herramientas conceptuales que otorga el Enfoque Ontosemiotico (EOS). No obstante, nos encontramos que no todos los trabajos sobre el contenido divisibilidad fueron abordados desde el EOS, siendo así que se desprende que en los trabajos de investigación que presentamos se evidencian diversos marcos teóricos didácticos,

La metodología utilizada en cada investigación fue acorde a los objetivos propuestos y características propias de cada investigador, siendo así que todos se diferencian y se asemejan entre sí en mayor o menor medida, siendo cada trabajo una fuente de información enriquecedora en sí misma.

Con el fin de dar mayor claridad, organizamos los trabajos de investigación de acuerdo a su tema de investigación como así también el marco teórico seleccionado.

Siendo así que en *primer lugar* damos a conocer la Tesis de Maestría *"La comprensión que tienen los alumnos referida a números racionales, como objeto matemático, al terminar la escuela secundaria"* de Marta Graciela Nardoni, donde se vale del Enfoque Ontosemiotico para desarrollar toda su investigación. En *segundo lugar*, damos a conocer la Tesis *"Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales"* de Bodi Samuel, en *tercer lugar* la Tesis *"Análisis Epistemológico y Didáctico de Nociones Elementales de la Teoría de Números"* de Silvia Etchegaray, en *cuarto lugar* la Tesis *"La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria"* de Candy Clara Ordoñez Montañez, donde cada una de dichas tesis analiza el contenido divisibilidad desde una perspectiva teórica diferente. En *quinto y último lugar*, damos a conocer la Tesis *"Divisores; determinación de prácticas asociadas"* de Fabián Espinoza, que valiéndose del constructo teórico del Enfoque Ontosemiotico (EOS), realiza un trabajo de análisis de la divisibilidad en el conjunto de números enteros.

2.3. Trabajo de investigación que involucra el análisis de libros de textos de un contenido en particular desde el marco teórico del Enfoque Ontosemiotico

2.3.1Tesis: *"La comprensión que tienen los alumnos referida a números racionales, como objeto matemático, al terminar la escuela secundaria"*

Obtención de título de: Magister

Marco Teórico: Enfoque Ontosemiótico (EOS)

Autor: Marta Graciela Nardoni

En la Tesis de Maestría "La comprensión que tienen los alumnos referida a números racionales, como objeto matemático, al terminar la escuela secundaria" de Marta Graciela Nardoni, se tuvo como objetivo general: Valorar la comprensión que han alcanzado los estudiantes, sobre números racionales como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria e iniciar estudios terciarios o universitarios y como Objetivos específicos: a) Determinar los conceptos y propiedades, referidos a números racionales, que ponen en práctica los alumnos cuando resuelven problemas, b) Especificar los procedimientos y técnicas que emplean habitualmente los alumnos en contextos de resolución de problemas con números racionales, c) Caracterizar el tipo de argumentaciones y uso de lenguaje que emplean los alumnos cuando brindan explicaciones sobre la resolución de situaciones que involucran números racionales, d) Evaluar la comprensión que han alcanzado los alumnos, sobre números racionales y como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria e ingresar en un nivel superior y e) Detallar los obstáculos y dificultades que genera la comprensión que han alcanzado los alumnos sobre números racionales, como objeto matemático, al realizar actividades matemáticas en el nivel superior.

Como marco teórico, se utilizó los Constructos y Herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que viene desarrollándose en España desde el año 1994 por Juan Díaz Godino. El aspecto ontológico de este enfoque se deriva del análisis de la existencia o inexistencia de entidades u objetos, mientras que el aspecto semiótico se ocupa de descubrir y analizar la significación que se otorga a esos objetos o entidades, su relevancia, vínculos que los interrelacionan, y otras particularidades que los hacen diferenciables entre ellos, incluso donde pareciera que esas diferencias no pudieran o debieran manifestarse. Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Como característica propia de este enfoque, se distinguen dos dimensiones interdependientes: personales e institucionales, y se dan definiciones particulares para conceptos teóricos como el de práctica, objeto (en sus facetas personal e institucional), significado y comprensión, así como el estudio de sus relaciones mutuas

En cuanto a la metodología utilizada, se consideró la naturaleza diagnóstico-descriptiva y cualitativa, de corte etnográfico y hermenéutico, desarrollada desde el marco teórico mencionado. La investigación se organizó en cinco fases diferenciadas que se describen a continuación. Primera fase: Se analizaron las actividades que proponen los libros escolares de Matemática, del nivel medio y superior, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales, centrando la atención en aquellas donde se aborda a los números racionales como objeto de estudio. Segunda fase: Teniendo en cuenta la configuración epistémica elaborada en la primera fase y la revisión bibliográfica llevada a cabo, se diseñó un instrumento que pone en juego la red de relaciones que activa un individuo que ha comprendido el objeto matemático en cuestión (números racionales) y que se manifiesta a través de las prácticas operativas y discursivas que lleva a cabo. Tercera fase: Se administró el instrumento diseñado en la segunda fase, en calidad de evaluación diagnóstica. Posteriormente se seleccionaron las producciones escritas que, habitualmente, se considerarían "aprobadas" por haber logrado resolver correctamente el 50% o más de las consignas planteadas. Se examinaron las producciones enfocándonos en el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes ante las situaciones–problemas planteadas, intentando establecer la relación entre el conglomerado de prácticas que los alumnos son capaces de realizar con este objeto matemático (números racionales) y el significado que pudieron construir acerca del mismo. Cuarta fase: Teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la fase anterior, se armaron las configuraciones cognitivas de cada estudiante. Esto es, el modo en que se articulan los elementos primarios recuperados en la primera fase y que se evidenciaron en las prácticas operativas y discursivas que llevó a cabo el estudiante y la Quinta fase: Se realizaron comparaciones entre las configuraciones cognitivas (obtenidas de la cuarta fase) con la configuración epistémica (construida en la primera fase) a fin de valorar la comprensión global alcanzada por los estudiantes.

En la primera fase de la investigación se analizaron las actividades que proponen los textos escolares de Matemática del nivel medio, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales, centrando la atención en aquellas donde se aborda a los números racionales como objeto de estudio. Se consideró la unidad didáctica referida a los números racionales en 8 (ocho) libros de textos, de los más usados en las escuelas secundarias de la provincia de Santa Fe. Esta información se obtuvo en base a entrevistas informales realizadas con distintos docentes que trabajan en la escuela secundaria, como de las autoridades del Ministerio de Educación de Santa Fe que están a cargo de este nivel educativo.

Algunas de las conclusiones a las cuales arribaron con la investigación son las siguientes. Los conceptos más utilizados, o que ponen en práctica en la resolución de situaciones problemas que involucran a los números racionales, son los de fracción, operaciones con fracciones, expresiones decimales y operaciones. No utilizan de manera apropiada algunos conceptos como: fracción como parte de una cantidad continua o discreta, fracción como razón y fracción como operador., desigualdad en expresiones que contienen números racionales. No relacionan los conceptos de fracción con razón, ni de fracciones equivalentes con proporción. Los procedimientos más utilizados, ya sea en forma correcta o con algunas deficiencias son: representar gráficamente fracciones en cantidades continuas y algoritmos básicos de las operaciones con racionales. Se presentan deficiencias para interpretar problemas verbales, traducción de lenguaje simbólico a natural y viceversa, y aplicación de procedimientos adecuados para hallar la solución. Llevan a cabo procesos de argumentación mediante prácticas discursivas sólo cuando se sienten presionados a realizarlos (en este caso mediante una entrevista). Esto es, no argumentan de manera escrita, aún cuando sea una condición de la consigna de la situación problema. Los estudiantes aspirantes a ingresar en carreras de Formación Docente lograron mejores argumentaciones que involucran procedimientos para justificar lo realizado en las situaciones problemas. Las resoluciones a las situaciones problemas planteadas en el instrumento por los 35 estudiantes, y las entrevistas realizadas luego para indagar con mayor profundidad los conceptos propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje que utilizaron y las relaciones entre estos elementos primarios de los números racionales como objeto matemático. La Configuración Epistémica de referencia que se construyó a partir del análisis y determinación de las Configuraciones Epistémicas de los textos escolares analizados cuyas unidades didácticas referidas a los números racionales se analizaron. Utilizar el concepto de número racional de manera competente en la resolución de situaciones problemas. Identificar las múltiples representaciones que tiene un número racional y cómo se relaciona entre sí las mismas. En particular, no distinguen que a la fracción como una razón, o como la cantidad de veces que está una cantidad en otra, y por consiguiente, para relacionar fracciones equivalentes con proporciones. Todas estas dificultades actúan como un obstáculo para la comprensión de los números racionales como objeto de estudio y por consiguiente de los números reales. Asimismo, esto obstaculizará la comprensión de conceptos básicos del Algebra Lineal y del Cálculo Infinitesimal, que son materias básicas en carreras universitarias o del nivel superior.

2.4 Trabajos de investigación que involucran el análisis de libros de textos con el contenido divisibilidad desde un marco teórico en particular.

2.4.1 Tesis: *"Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales"*

Obtención de título de: Doctor

Marco Teórico: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOS)

Autor: Bodi Samuel

En la Tesis Doctoral "Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales" de Bodi Samuel , el autor tuvo como objetivos de estudio: 1) Estudiar las formas de conocer la divisibilidad en el conjunto de los números naturales y los mecanismos que utilizan los alumnos de 12 y 17 años, usando el marco teórico constructivista y 2) Caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de divisibilidad en el conjunto de los números naturales en alumnos de 12 y 17 años (objetivos). Dichos objetivos los pudo concretar a través del marco teórico APOS, desarrollado por Dubinsky en 1991 y un grupo de investigadores de Research in Undergraduate Mathematics Educaction Community (RUMEC), basado en una interpretación del constructivismo a partir de algunas ideas desarrolladas por Piaget del pensamiento matemático avanzado. Dubinsky y compañía, basaron su trabajo en el análisis teórico de un determinado concepto matemático, el desarrollo de unas determinadas estrategias de enseñanza y aprendizajes y el análisis de datos para probar y perfeccionar el análisis teórico inicial y la instrucción. En dicha perspectiva teórica, se considera que los individuos realizan construcciones mentales que denominan acciones, procesos, objetos y esquemas. Los mecanismos que se utilizan para dichas construcciones son la interiorización, la coordinación, la inversión, encapsulación, la desencapsulación y la tematización, entre otros.

La metodología utilizada en esta tesis consistió en la realización de un cuestionario específico con el fin de evaluar el desarrollo de la comprensión de la divisibilidad en N de los alumnos de enseñanza secundaria en sus diversos ciclos. Para la confección del cuestionario definitivo, realizaron un cuestionario piloto que determinaría que actividades y problemas formarían parte del cuestionario definitivo. Para poder determinar que situaciones se incluiría en el cuestionario, realizaron un análisis de 10 libros diferentes que correspondían tanto a editoriales de gran difusión como de menor difusión, ellas fueron: Mc Graw Hill, Santillana, Bruño, SM, Anaya, Oxford, Almadraba, Ecir, Vicens Vives y Marfil. De esta forma, el estudio sobre divisibilidad que presentaran los libros de textos examinados, el desarrollo curricular que realizan y las actividades planteadas, permitiría fijar los tópicos-múltiplo y divisores de un número natural, criterios de divisibilidad, números primos y compuesto, factorización de un número (Teorema Fundamental de la Aritmética), máximo común divisor y mínimo común múltiplo determinarían que se tendrían en cuenta para el cuestionario.

Del análisis de los libros de textos se extrajo que en nueve de los diez libros de textos se encontró un elevado nivel de coincidencia en los contenidos de divisibilidad y en el desarrollo de los mismos, concretamente: múltiplos de un número natural, divisores de un número natural, criterios de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5), números primos y compuestos, factorización de un número, máximo común divisor y mínimo común múltiplo y cálculo de todos los divisores de un número. Sin embargo, en lo que respecta a propiedades de los múltiplos y divisores solo son estudiadas por dos de los libros de textos examinados. Así también, nueve de los diez libros tienen como característica principal introducir los conceptos y procedimientos y posteriormente proponer ejemplos y actividades de complemento para cada uno de ellos. Los desarrollos curriculares llevados a cabo por las editoriales S.M. y Marfil en 2002, aunque conciben desde perspectivas distintas, establecen explícitamente desde la definición operativa de Divisor-“a es un divisor de b si la división b: a es exacta. Diremos que b es múltiplo de a”- relaciones lógicas entre divisor y múltiplo. El proceso de cálculo de todos los divisores de un número planteado por la editorial S.M. podría favorecer el establecimiento de relaciones entre divisor y factor y el uso de la representación factorial, no ocurriendo los mismo con la editorial Marfil. En cuanto a la editorial Marfil se encontraron que no trataba explícitamente la representación factorial de un número y en la editorial S.M. se presentaba desde el epígrafe “Descomposición de un número en factores primos”. A su vez, la descomposición factorial de un número en dicha editorial, es utilizada como procedimiento de cálculo de máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números. Con respecto a la editorial Marfil define y calcula el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números desde la representación decimal y posteriormente con un carácter procedimental utiliza la descomposición factorial. (pág. 57). En general, la divisibilidad es entendida como una propiedad entre números con representación decimal. A su vez, el Teorema

Fundamental de la Aritmética sigue teniendo un marcado carácter procedimental. Para determinar que cuestiones formarían parte del cuestionario definitivo, realizaron un análisis cuantitativo que resultó en un estudio psicométrico de: índice de dificultad, homogeneidad, índice de discriminación (correlación biserial puntual), coeficiente de fiabilidad (Alpha de Cronbach), validez, análisis factorial y generalizabilidad. Para realizar el análisis estadístico de los datos, utilizaron el programa informático Statistical Package for the Social Sciences (SPSS) 11.5 y completado con la hoja de cálculo Microsoft Excel. El cuestionario definitivo fue realizado a 371 alumnos distribuidos en los tres ciclos de la enseñanza secundaria. Nuevamente, los datos obtenidos de dichos cuestionarios fueron analizados cuantitativamente y con respecto al análisis interpretativo, fue realizado desde la teoría APOS.

Los resultados obtenidos luego del análisis estadístico y cuantitativo de las respuestas al cuestionario y entrevistas realizadas, dieron como resultados que los cursos superiores mostraron mejores resultados en el índice de dificultad. Los alumnos de 1° de Bachillerato manifestaron formas de conocer procesos y objetos de los elementos de divisibilidad, utilizando un mayor número de elementos matemáticos y establecidos más relaciones entre ellos. En este sentido, una alumna de 4° y un alumno de 1° de bachillerato, mostraron indicaciones que han tematizado el esquema de divisibilidad.

2.4.2 Tesis: *“Análisis Epistemológico y Didáctico de Nociones Elementales de la Teoría de Números”*

Obtención de título de: Magister

Marco Teórico: Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Autor: Silvia Etchegaray

En la Tesis de Maestría “Análisis Epistemológico y Didáctico de Nociones Elementales de la Teoría de Números” de Silvia Etchegaray (2001), la autora tuvo como objetivo analizar ciertas organizaciones matemático didácticas concernientes a la Aritmética, determinando tanto significados institucionales como ciertos significados personales, con el fin de conocer relaciones entre ellos y así poder construir criterios para actuar sobre la construcción de los mismos.

El marco teórico elegido para concretar dichos objetivos fue la Teoría Antropológica de lo didáctico, específicamente uno de sus modelos denominado “análisis ecológico de los saberes matemáticos”. Este modelo está basado en la metáfora ecológica propuesta por Chevallard para el análisis didáctico, la que es retomada y extendida por Godino con el fin de convertirse en un recurso de gran utilidad para comprender la génesis, el desarrollo y las funciones de los saberes matemáticos en las distintas instituciones. Estudia la evolución de dichos saberes considerándolos como “objetos” que interaccionan y desempeñan un rol en el interior de las instituciones donde se reconoce su existencia cultural; ya sean estas instituciones de producción o de enseñanza. Dentro de este paradigma se realiza un estudio sobre los cambios de significado de ciertos saberes aritméticos al pasar de una institución a otra. Por otra parte, la aplicación de este modelo permite enfrentarse con un problema didáctico muy frecuente: la falta de compatibilización entre significados institucionales de los “objetos de enseñanza” con los denominados, por el propio Godino, “significados personales” ligados al “objeto enseñado”, tratando así de determinar algunos fenómenos didácticos que condicionan esta situación. La caracterización de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos, así como su interdependencia y desarrollo han sido propuestos por Godino y Batanero como tema de investigación prioritaria para la Didáctica de la Matemática.

La metodología utilizada es desde el enfoque semiótico-antropológico, permitiéndole combinar diversos métodos y técnicas según el momento de la investigación y las características del problema planteado.

En cuanto a la instancia de análisis de libros de textos, el fin fue ponerse en contacto con libros de 8vo año de la E.G.B. donde se presentan los temas de divisibilidad a través de situaciones problemáticas con las prácticas respectivas para su resolución de las cuales emergen los conceptos. Las nociones de Aritmética elemental, aparecen como objetos de enseñanza en la escuela secundaria sólo en los textos de 7º u 8º año de la E.G.B. (las editoriales revisadas han sido Aique, AZ, Santillana,). En primer lugar se analiza el capítulo 5: *Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales del libro Matemática 1* de la Editorial Aique, en segundo lugar, se analiza la Unidad 2: Números amigos, números primos, números perfectos de la Editorial AZ y por último se analiza la Unidad 5: Divisibilidad de la Editorial Santillana. De los análisis realizados se extrajo que los autores de los libros, en general, demuestran la necesidad de poder determinar un saber, dividirlo en unidades elementales que el alumno pueda memorizar y que por lo tanto el profesor pueda rápidamente evaluar. En términos de Chevallard, se produce por un lado la delimitación de los saberes, en “saberes parciales”, de tal manera que cada uno de ellos puede ser desarrollado casi en forma autónoma, y por otro lado la restricción de evaluabilidad de todo objeto de enseñanza. En otras palabras, los elementos actuativos de los alumnos ante los objetos en cuestión deben ser rápidamente evaluados. Razón por la cual se proponen siempre gran cantidad de ejercicios de aplicación directa de los contenidos trabajados. Asimismo, las técnicas ocupan lugares privilegiados en la secuenciación del saber, hasta tal punto que se corre el riesgo de sólo enseñar técnicas normalizadas, debido a su más fácil comunicación y evaluación.

Todos los textos analizados se adaptan a las exigencias de la programabilidad de los saberes organizándolos a éstos en forma lineal y secuenciada. También se puede observar que el modelo metodológico que se aplica es siempre teoría - práctica, aunque algunas definiciones son precedidas por alguna situación o ejemplo de cómo se debe aplicar. Cabe rescatar como característica común a todos los textos analizados que, en primer lugar, las nociones de M.C.D y m.c.m. son presentadas con elementos de significado sumamente restringidos. Ambos hechos –provocadores de avances conceptuales significativos – están totalmente ausentes de todos los libros de textos analizados tal como se demuestra en este parágrafo.

En segundo lugar, que la relación de divisibilidad solamente es reformulada en términos de cociente entero y resto cero, no presentando ninguno de los textos analizados la relación de congruencia.

En resumen, se puede afirmar que las tareas propuestas a los alumnos por los diferentes textos, en torno a las nociones de divisibilidad ya mencionadas, son claramente algoritmizables, estereotipadas, que permiten una forma legítima de actuar y que el profesor siempre espera para evaluar. O sea, se configuran reglas implícitas a respetar entre alumno y profesor en función del saber involucrado, lo que determina indudablemente un contrato didáctico común a todos los libros analizados.

De la investigación realizada, se obtuvo que el análisis epistemológico ha permitido detectar importantes cambios de elementos de significado de las nociones elementales de la Teoría de Números en las instituciones de producción del conocimiento científico. Las variadas situaciones problemáticas planteadas en los distintos períodos históricos, los diferentes elementos tecnológicos que han ido conformando la Teoría y los distintos ostensivos generados a lo largo del tiempo, han permitido describir cinco momentos distintos. El análisis de la transposición didáctica que los objetos en cuestión sufren hasta ser objetos de enseñanza, ha permitido distinguir en libros de texto utilizados actualmente por docentes y alumnos distintos elementos de significado. Este análisis permite afirmar que las situaciones de empleo que promueve la enseñanza a través de estos libros de texto producen rupturas epistemológicas con los problemas a los que estuvieron asociados estas nociones. Plantean sólo técnicas normalizadas a través de ejercicios rutinarios que ponen en funcionamiento objetos de la divisibilidad totalmente fragmentados y generando una ilusión de autonomía entre ellos. Asimismo, los elementos de significados aparecen tan reducidos que no permiten vislumbrar la tan importante conexión de esta temática con el campo de las ecuaciones algebraicas. El análisis de significados generado por la epistemología escolar muestra claramente cómo la enseñanza presenta a las nociones de divisibilidad en correspondencia a dos de sus necesidades vitales, de acuerdo a las imposiciones de los actuales sistemas de enseñanza.

2.4.3 Tesis: *"La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria"*

Obtención de título de: Magister

Marco Teórico: Procesos de la intuición, la identificación de patrones, el razonamiento plausible y las conjeturas

Autor: Candy Clara Ordoñez Montañez

En la Tesis de Maestría "La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria" de Candy Clara Ordoñez Montañez (2014), la autora tuvo por objetivo general: Determinar bajo qué condiciones alumnos del tercer grado de nivel primaria pueden construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales y por objetivos específicos: Identificar los significados de la división de números naturales en documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú, así como también en el libro de texto distribuido por el Estado Peruano, adaptar la propuesta de tal modo que alumnos de tercer grado de primaria puedan construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales, a partir de la noción de repartición equitativa y máxima, Analizar las producciones de los alumnos de tercer grado de primaria en la construcción de su conocimiento de división y divisibilidad de números naturales a través de las justificaciones que estos presenten y Generar una propuesta donde se incluyan las condiciones para que alumnos de tercer grado de primaria construyan sus propios conocimientos sobre división y divisibilidad de números naturales.

El marco teórico considerado, se asentó básicamente en los procesos de la intuición, la identificación de patrones, el razonamiento plausible y las conjeturas. Con respecto a la intuición, Sáenz destaca la importancia de la misma, pues considera que hay que aprender a intuir para luego aprender a probar. Por otro lado, Fischbein presenta la "teoría de la intuición" en el ámbito del razonamiento matemático, en el cual considera el término intuición como "equivalente al conocimiento intuitivo; en otros términos no como una fuente, no como un método, sino, más bien, como un tipo de conocimiento". En cuanto al reconocimiento de patrones, se considera que en alumnos de nivel escolar, es uno de los elementos más importantes en el desarrollo del razonamiento matemático puesto que crear y descubrir patrones proporciona oportunidades importantes para que los alumnos formulen conjeturas y den razones de su validez. Con respecto al razonamiento plausible y formulación de conjeturas, Sáenz señala que el razonamiento plausible es el medio por el cual apoyamos nuestras conjeturas y nuestras intuiciones. Por otro lado, la conjetura “es una afirmación cuya verdad puede estar originada en un convencimiento intuitivo del que la formula; sin embargo, su verdad o falsedad tiene que ser demostrada”

La metodología utilizada en esta tesis consistió en una Investigación – Acción Colaborativa. Este método tiene como foco investigar el interés común de un grupo, investigador y participantes, con la finalidad de realizar un plan (construir y formular alternativas) de acción para lograr un cambio o mejora de una práctica educativa. Existen diversos modelos en la Investigación-Acción; en el estudio se empleó uno de los modelos que fueron presentados en Segal, el que adaptado al estudio presenta las siguientes fases: Identificar el problema, Evaluar el problema, Hacer una recomendación, Practicar la recomendación y Reflexionar sobre la práctica.

Con respecto a la concreción del objetivo que implicaba Identificar los significados de la división de números naturales en documentos oficiales, se analizó el libro “Matemática 3” de la Editorial Santilla, en dicho libro, cada unidad se organiza en 5 secciones: Apertura (para explorar y comentar), inicio (para recordar lo aprendido), proceso (para descubrir y aprender), cierre (para jugar y aprender) y evaluación (para comprobar lo aprendido).

En particular se analizó la unidad número 5 que desarrollaba el tema divisibilidad. Algunos aspectos muy relevantes a mencionar, tienen que ver por ejemplo que con respecto a la definición de división en números naturales que figura en la unidad “la división es la operación que consiste en repartir en partes iguales una cantidad determinada. Para resolverla pueden usarse restas sucesivas”, donde pudieron notar que la definición hablaba de repartir y que dicha repartición estaba dada en partes iguales (reparticiones equitativas), con lo cual surge la duda con respecto a que no queda claro si se trata de una repartición máxima o no, aun así, se asumía que acorde a la situación real planteada antes de la presentación de la concepción de división, daba lugar a pensar que se trataba de una repartición entendida como reparticiones de “la mayor cantidad de objetos” en partes iguales, pero que aun así, ya era solo una interpretación de la situación. Con respecto a la división exacta, el libro esgrime que “una división es exacta cuando el residuo es cero”, con lo cual puede notarse que la definición de la división exacta está en términos del valor del residuo, en este caso nos dicen que el residuo debe ser igual a cero. Se considera que la división exacta podría haber sido definida en términos de repartos iguales siguiendo el trabajo ya empleado, agregando la condición adicional que al finalizar la repartición no deben quedar elementos sin ser repartidos. Observemos que para esto no es necesario aún introducir notaciones y términos que podrían, más allá de ayudar a los estudiantes, podría confundirlos, más aún tomando en cuenta que la definición aparece inmediatamente después de haber presentado un solo ejemplo con esta notación.

En la segunda parte de esta sección se muestran tres esquemas a manera de resumen o ideas principales, siendo el primero de ellos el de nuestro interés. En este primer esquema se explica, sobre la división: ¿qué es?, ¿Cuáles son sus términos? y ¿Cómo se comprueba? En cuanto a la primera de estas tres preguntas, notemos que se presentan tres significados de la división de números naturales. Asimismo, se hace referencia a que se ha observado que dentro de sus definiciones no hacen referencia a la división como restas sucesivas ni como agrupamiento; sin embargo, en el libro presentan ejemplos para trabajar el tema de división exacta por medio de esas dos maneras. Por otro lado, pensamos que se podría hacer la aclaración que el esquema es respecto a la división exacta. Deducimos que es así ya que las definiciones y los ejemplos dados hacen referencia a este tipo de división. Creemos que es importante hacer esta aclaración, puesto que el alumno podría pensar que todas las divisiones (tanto exactas como inexactas) tienen residuo igual a cero.

En cuanto a las conclusiones generales, se determinó que pudieron identificar que en el DCN, en los MP y en las RA se sugiere que la división de los números naturales sea tratada como al menos uno de los significados: reparto en partes iguales, operación inversa a la multiplicación, restas sucesivas y a través de agrupamientos. Además, enfocan estos significados solo para el tratamiento de las divisiones de tipo exacta. También que el libro “Matemática 3” guarda relación con los documentos oficiales estudiados. Esto es, en cuanto a los significados que proponen los tres documentos, dado que el libro aborda todos los significados mencionados anteriormente mediante ejemplos concretos. Además, considera un significado más para la división. Esto es mediante el cálculo de cuántas veces está contenida una cantidad en otra. Sin embargo, de manera explícita señala solo tres significados para la división. Por otro lado, de manera general notamos que el libro presenta imprecisiones en los problemas planteados y propuestos, para los cuales hacemos sugerencias. También observaron que uno de los significados comunes sugeridos por los documentos oficiales del MINEDU, así como por el libro de texto analizado, es el de “reparto en partes iguales”. Este significado es el que se recoge con el fin de evitar posibles ambigüedades al trabajar la división de números naturales (ver Capítulo 2). Nosotros empleamos directamente las nociones dadas por la autora y por último que los MP y las RA presentan elementos a ser destacados ya que no solo sugieren lo que debe ser tratado sobre la división; si no también los orientan planteándoles situaciones. Particularmente, observamos que en estos documentos muestran ejemplos de situaciones para el tema de división desde la perspectiva de los problemas aritméticos de enunciado verbal.

2.5 Trabajo de investigación que involucra el análisis de libros de textos con el contenido divisibilidad de números enteros desde el marco teórico del Enfoque Ontosemiotico

2.5.1 Tesis: "Divisores; determinación de prácticas asociadas",

Obtención de título de: Licenciado En didáctica de la Matemática

Marco Teórico: Enfoque Ontosemiotico (EOS)

Autor: Fabián Espinoza

En la tesis de Licenciatura en Didáctica de la Matemática de 2007 de Espinoza Fabián, sobre "Divisores; determinación de prácticas asociadas", el autor manifestó que, en parciales de los alumnos, en relación con el contenido divisibilidad de números enteros, pudo notar diversas dificultades, como ser: incomprensiones, confusiones, errores, etc., asociadas al tratamiento teórico de la relación divide. En función de esto, buscó los motivos de dichas dificultades en los libros de textos, como así también decidió estudiar sobre las concepciones que promueven en los alumnos dichos libros. En 1ra instancia el autor determinó, a través del análisis de dos libros, que los mismos no se hacen cargo de trabajar las dificultades mencionadas. En una 2da instancia, con respecto a los significados que los alumnos atribuyen a los conceptos que se manejan en el contenido de divisibilidad de números enteros, notaron dificultades al momento de establecer relaciones entre Divisor, División y Fracción e inclusive algunos alumnos no pudieron diferenciar en un principio al objeto "divisor de un número entero" del objeto "divisor como elementos de una división", confundiendo entonces una relación entre números con un número.

2.6 Conclusiones

En este capítulo se abordaron básicamente dos cuestiones. Por un lado, se realizó una breve descripción de la evolución de la divisibilidad a lo largo de la historia, donde dados una serie de problemas específicos, permitieron comprender la complejidad y evolución del desarrollo de la Teoría de Números.

Por otro lado, se exhibió los trabajos de investigación realizados al contenido de divisibilidad desde diversas perspectivas teóricas y metodológicas. Considerando los objetivos plasmados en el capítulo 1, se destacó las partes más sobresalientes de las tesis mencionadas. Siendo así, que en el trabajo de investigación de Marta Graciela Nardoni, se proponen diversas fases a concretar, siendo que en la primera de todas se detalla un análisis bibliográfico de las diversas actividades que proponen los libros escolares de Matemática del nivel medio y superior que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales, donde a través del constructo teórico del Enfoque Ontosemiotico y del análisis realizada a las actividades que proponen los libros, se concretó diversas configuraciones epistémicas de dichos libros y llevando a cabo las demás fases del trabajo, llegaron a diversas conclusiones. Distinguimos así, la importancia de las configuraciones epistémicas de las actividades que proponen los libros, como pieza fundamental para determinar las fases siguientes y llegar a diversas conclusiones con base en dichas configuraciones.

Con respecto a la tesis de Bodi Samuel, se puede destacar que a través del constructo teórico de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOS), se realizó el análisis de 10 diferentes libros que correspondían tanto a editoriales de gran difusión como de menor difusión, ellas fueron: Mc Graw Hill, Santillana, Bruño, SM, Anaya, Oxford, Almadraba, Ecir, Vicens Vives y Marfil. A través de un análisis sobre la divisibilidad que presentaban dichos libros examinados, el desarrollo curricular que realizan y las actividades planteadas, les permitió fijar los tópicos-múltiplo y divisores de un número natural, criterios de divisibilidad, números primos y compuesto, factorización de un número (Teorema Fundamental de la Aritmética), máximo común divisor y mínimo común múltiplo determinarían que se tendrían en cuenta para la elaboración del cuestionario que se desarrolla en la tesis. Siendo así, que resaltamos el análisis de los libros de textos mencionados como base primordial para el desarrollo de un cuestionario en particular.

En cuanto a la tesis de Silvia Etchegaray, a través del constructo teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en la misma se realizó el análisis de libros de textos con el fin de ponerse en contacto con libros de 8vo año de la E.G.B. donde se presentan los temas de divisibilidad a través de situaciones problemáticas con las prácticas respectivas para su resolución de las cuales emergen los conceptos. De los análisis realizados a los libros, la tesista extrajo que los autores de los libros, en general, demuestran la necesidad de poder determinar un saber, dividirlo en unidades elementales que el alumno pueda memorizar y que por lo tanto el profesor pueda rápidamente evaluar. Donde se afirma que, en términos de Chevallard, se produce por un lado la delimitación de los saberes, en “saberes parciales”, de tal manera que cada uno de ellos puede ser desarrollado casi en forma autónoma, y por otro lado la restricción de evaluabilidad de todo objeto de enseñanza. En otras palabras, los elementos actuativos de los alumnos ante los objetos en cuestión deben ser rápidamente evaluados. Razón por la cual se proponen siempre gran cantidad de ejercicios de aplicación directa de los contenidos trabajados

En lo que se refiere a la tesis de Candy Clara Ordoñez Montañez, a través del constructo teórico de los Procesos de la Intuición, la identificación de patrones, el razonamiento plausible y las conjeturas, se realizó el análisis de libros de textos con el fin de determinar bajo qué condiciones alumnos del tercer grado de nivel primaria pueden construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales. Con el fin de alcanzar este objetivo, analizaron el libro “Matemática 3” (2012) de la Editorial Santilla, en dicho libro, cada unidad se organiza en 5 secciones: Apertura (para explorar y comentar), inicio (para recordar lo aprendido), proceso (para descubrir y aprender), cierre (para jugar y aprender) y evaluación (para comprobar lo aprendido). Donde la tesista pudo determinar que, por ejemplo, con respecto a la definición de división en números naturales que figura en la unidad “la división es la operación que consiste en repartir en partes iguales una cantidad determinada. Para resolverla pueden usarse restas sucesivas”, donde pudieron notar que la definición hablaba de repartir y que dicha repartición estaba dada en partes iguales (reparticiones equitativas), con lo cual surge la duda con respecto a que no queda claro si se trata de una repartición máxima o no. Así también, con respecto a la división exacta, el libro esgrime que “una división es exacta cuando el residuo es cero”, con lo cual puede notarse que la definición de la división exacta está en términos del valor del residuo, en este caso nos dicen que el residuo debe ser igual a cero. Se considera que la división exacta podría haber sido definida en términos de repartos iguales siguiendo el trabajo ya empleado, agregando la condición adicional que al finalizar la repartición no deben quedar elementos sin ser repartidos.

Con respecto a la tesis de Fabián Espinoza, donde a través de constructo del Enfoque Ontosemiotico, el autor manifestó que, en parciales de los alumnos, en relación con el contenido divisibilidad de números enteros, pudo notar diversas dificultades, como ser: incomprensiones, confusiones, errores, etc., asociadas al tratamiento teórico de la relación divide. En función de esto, buscó los motivos de dichas dificultades en los libros de textos, como así también decidió estudiar sobre las concepciones que promueven en los alumnos dichos libros. En 1ra instancia el autor determinó, a través del análisis de dos libros, que los mismos no se hacen cargo de trabajar las dificultades mencionadas y en una 2da instancia, con respecto a los significados que los alumnos atribuyen a los conceptos que se manejan en el contenido de divisibilidad de números enteros, notaron dificultades al momento de establecer relaciones entre Divisor, División y Fracción e inclusive algunos alumnos no pudieron diferenciar en un principio al objeto “divisor de un número entero” del objeto “divisor como elementos de una división”, confundiendo entonces una relación entre números con un número.

Considerando lo detallado en párrafos anteriores, estos trabajos de investigación permiten explicar la importancia del análisis de los libros de textos al momento de considerar un contenido, en particular el de la divisibilidad. Radicando la importancia en la realización de una descripción de lo que se desarrolla en el libro de texto, la elaboración de una determinada secuencia didáctica o en su efecto dar con una posible explicación a las diversas situaciones con las que se encuentra un docente en el aula. No obstante, se considera que dichos análisis se verán enriquecidos con el aporte de lo realizado en el capítulo 4.

Capítulo 3

Enfoque Teórico y Metodológico

En este capítulo se expone una sintética caracterización de las ideas teóricas centrales del Enfoque Ontosemiotico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) como línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que viene desarrollándose en España desde el año 1994 por Juan Díaz Godino.

También se exponen los fundamentos metodológicos para las investigaciones científicas. Se detalla el dato, se expone el sistema de matrices de datos, las características de cada nivel. Las relaciones que se establecen entre cada una de ellas. Se da a conocer el tratamiento y análisis de datos acorde al EOS y la metodología utilizada, la explicación del tratamiento de datos centrado en las variables y las relaciones entre las mismas.

3.1 Validación Conceptual

3.1.1 Planteamiento del objeto de estudio de la investigación

El libro de texto es un recurso habitual que utilizan los profesores para planificar sus clases, hasta el punto que en diversas ocasiones es el propio libro el que delimita lo que se desarrolla en la misma. Determinar qué es lo que dicen y qué omiten aquellos libros con los que entran en contacto los alumnos, cuáles son los estereotipos y distorsiones de la realidad que promueven, de quiénes se habla, etc., son preguntas a las que númerosos investigadores tratan de hallarles respuesta (Torres, 1991)

De manera puntual, Cabero, J., Duarte, A., & Romero, R. (1995) expresan que *los libros de matemática influyen en la enseñanza de un contenido*, lo que nos permite considerar al libro de texto de matemática como una fuente de información sumamente valiosa al momento de desarrollar un contenido en particular, razón suficiente para considerar de extrema importancia el análisis de los libros de texto de matemática desde una base teórica científica, que permita discernir las características de los contenidos que en el mismo se desarrollan. Estas características están vinculadas directamente con las prácticas educativas en el aula, como así también con el conocimiento matemático que la sociedad considera pertinente (Conejo, Arce & Ortega, 2015).

La importancia del libro de matemática en el nivel secundario, en particular aquellos con el contenido divisibilidad, radica en su estructura como fuente de información valiosa y específica, que permite ser utilizada para diversos fines. Entre ellos se destaca la tesis doctoral de Bodi Samuel (capitulo 2), que a través del constructo teórico de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOS), realizó el análisis de diferentes libros que correspondían tanto a editoriales de gran difusión como de menor difusión, ellas fueron: Mc Graw Hill, Santillana, Bruño, SM, Anaya, Oxford, Almadraba, Ecir, Vicens Vives y Marfil. A través de un análisis sobre la divisibilidad que presentaban dichos libros examinados, el desarrollo curricular que realizan y las actividades planteadas, le permitieron la elaboración de un cuestionario destinado a comprender y estudiar las formas de conocer la divisibilidad en el conjunto de los números naturales y los mecanismos que utilizan los alumnos de entre 12 y 17 años.

En la tesis de Silvia Etchegaray, a través del constructo teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se realizó el análisis de libros de textos de matemática con el fin de ponerse en contacto con libros de 8vo año de la E.G.B y poder así realizar un análisis de los mismos. De dicho análisis, la tesista extrajo que los autores de los libros, en general demuestran la necesidad de poder determinar un saber, dividirlo en unidades elementales que el alumno pueda memorizar y que por lo tanto el profesor pueda evaluar rápidamente, donde se afirma que en términos de Chevallard, se produce por un lado la delimitación de los saberes, en “saberes parciales”, de tal manera que cada uno de ellos puede ser desarrollado casi en forma autónoma, y por otro lado la restricción de evaluabilidad de todo objeto de enseñanza. Siendo así que los elementos actuativos de los alumnos ante los objetos en cuestión deben ser rápidamente evaluados. Razón por la cual se proponen siempre gran cantidad de ejercicios de aplicación directa de los contenidos trabajados.

La divisibilidad en el conjunto de números enteros es una temática inmersa en diversos aspectos de la matemática y de otras ciencias. La misma puede encontrarse en el desarrollo de teorías estrictamente matemáticas como ser en el uso reconocido del algoritmo de Euclides, que permite calcular el máximo común divisor de dos números enteros no nulos de una forma más eficiente que a partir de la factorización en números primos. También puede encontrarse su aplicación en el cálculo del inverso modulo n, en la resolución de sistemas de congruencias a través del algoritmo chino del resto, o el estudio de las soluciones de ecuaciones diofánticas que incluyen soluciones enteras, etc. En relación con otras ciencias, como el caso de la computación, el desarrollo de la teoría de congruencia permite la asignación de posiciones de memoria a ficheros de un ordenador a través de las funciones de dispersión, la generación de números pseudoaleatorios y los sistemas de cifrado basados en la aritmética modular, de entre los que cabe destacar la criptografía de clave pública (Cañada Ordoñez, 2018). Con respecto a la robótica, dependiendo de los números por dividir se obtiene como resultado un número entero u otro llamado de punto flotante (Sergi, 2003).

Naturalmente se sabe que los libros y diseños curriculares orientan en gran medida la enseñanza del profesor en el nivel secundario, por lo menos lo que respecta a nuestra región. Los textos escolares constituyen una fuente de consulta muy importante de los profesores para el diseño y preparación de sus clases, por consiguiente, es indiscutible su influencia directa o indirecta en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas (Nardoni, Marta Graciela; Pochulu, Marcel David, 2013). De acuerdo con Font, V. planas, N. y Godino, J. D. (2010), una de las competencias profesionales que debe tener un profesor de Matemática es la de análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita diseñar, aplicar, valorar y mejorar sus propias prácticas matemáticas y la de su clase. Estas tareas son aquellas situaciones problemáticas que el profesor propone a los alumnos para su resolución, como ser problemas de investigación, de aplicación, ejercicios, etc., las que originan la actividad a desarrollar en la clase, produciendo a la vez un aprendizaje.

Teniendo presente la experiencia como docente, esta nos indicó dos cuestiones estrechamente relacionadas. La primera es que existen enseñantes que eligen los libros de texto de matemática sin un criterio de análisis que provenga de la didáctica de la matemática. Esto provoca que la elección sea más que nada desde el sentido común, como ser: cantidad de ejercicios, cantidad de imágenes ilustrativas, cuadros por completar, números por completar, ejercicios de aplicación, cantidad de problemas con un contexto, etc. Con respecto a la segunda cuestión, se pudo observar que los alumnos de primer año de la carrera Licenciatura en Sistemas de Información de la FACENA-UNNE, en la cual el tesista es docente, tenían serias dificultades al momento de resolver situaciones problemáticas que involucraran la divisibilidad de números enteros, contenido que se supone ya fue abordado en las clases de matemática del colegio secundario. A raíz de esto último, se motivó en el tesista, con base en las cuestiones mencionadas, la curiosidad de determinar algunas de las posibles razones que generaron en los alumnos dichas dificultades. Es así, que se consideró el análisis de los libros de matemática que son utilizados en el nivel secundario con el contenido divisibilidad de números enteros.

Como se mencionara en párrafos anteriores, diversas investigaciones (capitulo 2) fueron realizadas en libros con el contenido divisibilidad y si bien en estas investigaciones cada teoría didáctica utilizada aporta un saber especializado, se considera que los libros de matemática con el contenido divisibilidad de números enteros son factibles de analizarse desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática. La importancia de este enfoque *radica en que es un marco amplio que organiza, unifica, clarifica nociones y términos usados en múltiples teorías, enfoques y modelos, definiendo una ontología de objetos que permite entender, comunicar e investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, incluyendo toda la praxis relacionada con el proceso de resolver, validar y generar problemas matemáticos como así también comunicar todos estos procesos y la solución, o soluciones, a cada problema planteado.

Con el fin de garantizar todo lo expresado, el EOS propone seis objetos que denomina primarios, que permiten un análisis más *minucioso y detallista* del saber matemático. Dichos objetos son: lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, situaciones problemáticas y argumentos. Estos objetos se relacionan entre sí a través de funciones semióticas que permiten el análisis meticuloso mencionado. Estas funciones generan un proceso cognitivo que lleva a profundizar sobre la naturaleza de los objetos de un modo más dinámico y pragmático, estableciendo vínculos entre ellos y las derivaciones de los mismos.

3.1.2 Formulación del objeto de estudio de la investigación

En esta tesis, se investigó sobre la vinculación entre la red de relaciones desplegadas en el planteamiento teórico del contenido divisibilidad en números enteros, en libros de texto de matemática que son utilizados en el nivel medio, y la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en los mismos, y a su vez se analizó si las relaciones conceptuales establecidas en el planteamiento teórico son suficientes para resolver las situaciones problemáticas que proponen o sí, por el contrario, aparecen como necesarias otras nuevas relaciones emergentes.

Esta investigación tiene por característica principal ser de carácter cualitativa, en la cual el análisis de datos y de la información se contrastan con un marco conceptual para su interpretación, explicación y búsqueda de significados (Tamayo, 1999). El marco conceptual utilizado en esta investigación es el Enfoque Ontosemiotico y de la Instrucción Matemática-EOS, que permite poder cumplir con los objetivos propuestos y responder las preguntas de investigación formuladas.

3.1.2.1 Enfoque teórico- Enfoque Ontosemiótico De La Cognición E Instrucción Matemática

Siguiendo a Godino, J. D. (2003), podemos manifestar que los postulados o supuestos básicos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De las prácticas o sistemas de prácticas realizadas para resolver problemas emergen dos categorías primarias de objetos o entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales), por lo que se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados.

Este enfoque confiere fundamental importancia a las nociones de significados institucionales y personales, y concibe el significado de un ***objeto matemático***, al que Godino, J. D. (2003) define como *todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemática, en términos del sistema de prácticas ligadas a un campo de problemas*. Es decir, concibe que el significado de

<u>objeto matemático</u> es el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona, institución o comunidad de prácticas realiza para resolver una cierta clase de problemas en las que dicho objeto interviene.

También en este ámbito se considera ***práctica matemática*** a *toda actuación o manifestación (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas* (Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. 2008).). Dichas prácticas pueden ser idiosincráticas de una persona o compartidas en el seno de una institución.

En este caso, se considera a una institución como una comunidad de prácticas, donde la misma está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas, el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modelos de funcionamiento.

Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

En las practicas matemáticas intervienen *objetos ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) que son representados en forma textual, oral, gráfico o incluso gestual. De los sistemas de prácticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura.

Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

La noción de sistema de prácticas (operativas y discursivas), constituidas por las prácticas significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución, asume una concepción pragmática – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico) y la actividad de *resolución de problemas* se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

La noción de ***práctica y sistemas de prácticas*** son útiles para determinados análisis de tipo macro didáctico, en especial cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contexto de uso o juegos de lenguajes.

Para un análisis más fino de la actividad matemática, el Enfoque Ontosemiótico incluye seis tipos de entidades primarias u objetos matemáticos primarios, intervinientes o emergentes de sistemas de prácticas, estos son:

- ***Situaciones-Problemas:*** *son las tareas, actividades o ejercicios, tanto* intra-matemáticas como extra-matemáticas.

- ***Lenguaje:*** son los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., los que se presentan, a su vez, en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).

- ***Procedimientos:*** comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.

- ***Proposiciones (propiedades):*** atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

- ***Definiciones (Conceptos):*** definiciones o descripciones (ej: número, punto, recta, divisor, cuadrado perfecto, etc.)

- ***Argumentaciones:*** comprenden enunciados y razonamientos usados para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema, los cuales pueden ser deductivos o de otro tipo.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta, sino que es relativa, puesto que se trata de entidades funcionales, relativas a los marcos institucionales y contextos de uso en los que participan. Además, tienen un carácter recursivo en el sentido que cada objeto, dependiendo del nuevo objeto de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos, (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.).

Relaciones entre objetos primarios: función semiótica (relación conceptual)

Los seis objetos primarios están relacionados entre sí por medio de una ***función semiótica,*** *caracterizada como una correspondencia (ya sea relación de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado, representado) que establece un sujeto, persona o institución de acuerdo con cierto criterio, código o regla de correspondencia que regula la correlación*. Dicha relación conceptual o correspondencia se establece entre dos objetos cuando *uno de ellos se pone en lugar del otro (representacional), un objeto usa a otro u otros como instrumento (instrumental u operatoria) o cuando dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos (componencial o cooperativa).*

Con la noción de función semiótica se evidencia el carácter netamente relacional de la actividad matemática, lo que para nuestra investigación es neural, dada las características de nuestro objeto de estudio y de nuestra investigación.

Los objetos matemáticos primarios, a los que nos referimos recientemente, están relacionados entre sí formando ***configuraciones,*** definidas como *las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos al resolver un problema, una clase o tipo de problema*.

Estas configuraciones (Figura 1) pueden ser epistémicas, si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales. Sea el caso de una o la otra, las *situaciones-problemas* son el origen o razón de ser de la actividad y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El *lenguaje*, por su parte, sirve de instrumento para la acción. Los *argumentos* justifican los *procedimientos* y las *proposiciones* que relacionan los conceptos entre sí, todo lo cual viene a regular el uso del lenguaje, que, por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

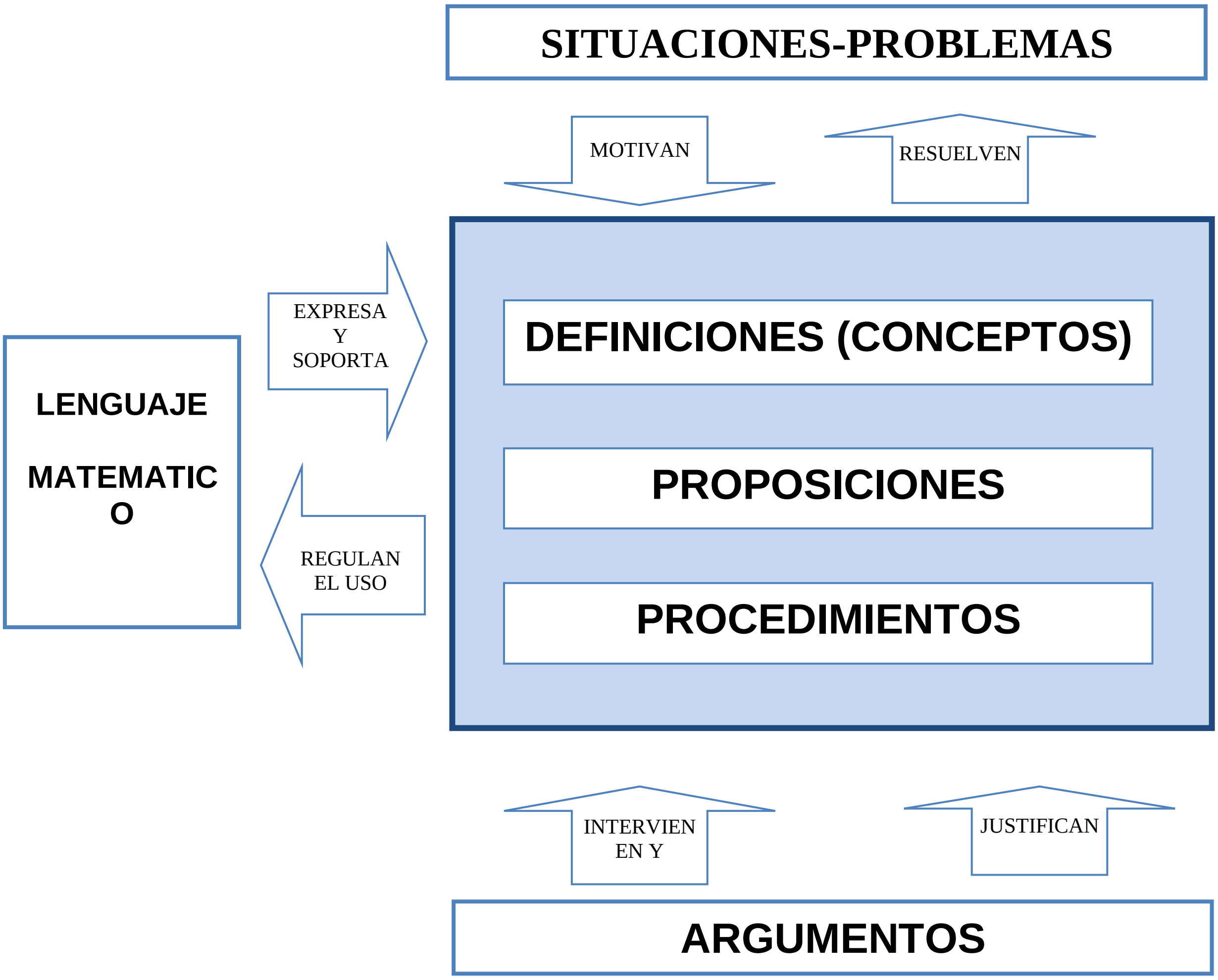


Fig. 1

En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí a través de funciones semióticas que forman la red de relaciones que se denomina configuraciones.

Niveles de análisis didáctico propuesto por el EOS.

Para emprender el análisis de una práctica matemática, el Enfoque Ontosemiotico y de la Instrucción Matemática propone cinco niveles de análisis (Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006):

Nivel 1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas
Nivel 2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos
Nivel 3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas
Nivel 4. Identificación del sistema de normas y meta-normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);
Nivel 5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Esta investigación se focalizará en el nivel 5, en la noción de idoneidad didáctica (Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006)). Esta se define como el grado en que un proceso de instrucción reúne determinadas características que pueden permitir calificarlo como idóneo, óptimo o adecuado. (Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007)).

La idoneidad como criterio de adecuación de un proceso de instrucción puede aplicarse a distintos campos. Como expresa Godino (2013), la noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. *También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar,* respuestas de estudiantes a tareas específicas o incidentes didácticos puntuales.

En esta investigación se considerará la idoneidad didáctica al contenido divisibilidad de números enteros en libros de matemática que son usados en el nivel medio, en colegios de la Ciudad de Corrientes. El análisis de los libros de matemática seleccionados y la valoración de la idoneidad didáctica de cada uno de ellos, forma parte del capítulo 4.

De acuerdo a Godino (2013) la idoneidad didáctica se obtiene a través de la articulación de seis componentes, estas son:

- Idoneidad epistémica
- Idoneidad cognitiva
- Idoneidad interaccional
- Idoneidad mediacional
- Idoneidad emocional
- Idoneidad ecológica

La presente investigación se enfocará en la componente epistémica, en particular en las preguntas que la definen como tal. Estas serán consideradas como preguntas descriptivas de los libros a analizar a largo del capítulo 4. Dicha componente se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia (Godino, 2013).

Como la noción de idoneidad didáctica puede aplicarse a procesos de estudio puntuales o aspectos parciales, como en este caso a un libro escolar, se realizó la pertinente adaptación de aquellas preguntas que permiten describir las distintas partes del contenido divisibilidad de números enteros que se encuentra en cada libro.

Preguntas de la componente epistémica

- **Situaciones-problemas**

  ¿Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación o aplicación respecto al contenido divisibilidad en números enteros? ¿Se proponen situaciones de construcción de problemas relacionadas con el contenido divisibilidad de números enteros?

- **Lenguajes**

  ¿Se realiza el uso de diferentes modos de expresión matemática, como ser gráfica o simbólica, traducciones y conversiones entre los mismas, con respecto al contenido divisibilidad de números enteros? ¿Se proponen situaciones de interpretación acerca del contenido divisibilidad de números enteros?

- **Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)**

¿Las definiciones o procedimientos son claros y correctos respecto al contenido? ¿Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales para resolver las situaciones problemáticas qué propone? ¿Se proponen situaciones donde el lector tenga que generar definiciones proposiciones o procedimientos?

- **Argumentos**

¿Las explicaciones, comprobaciones o demostraciones sobre el contenido divisibilidad de números enteros, son comprensibles? ¿Se promueven situaciones donde el lector tenga que argumentar?

- **Relaciones**

¿Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) con respecto al contenido divisibilidad de números enteros, se relacionan y conectan entre sí?

3.1.2.2 Objetivo general y específico

Retomando lo expresado en el capítulo 1, a continuación, se describe nuevamente el objetivo general y los específicos que se intentará alcanzar en esta investigación.

Objetivo general

- Determinar la vinculación entre la red de relaciones establecidas entre los objetos primarios asociados a la propuesta teórica y la red de relaciones, involucradas o emergentes, de los objetos primarios asociados a las prácticas resolutorias de las situaciones problemáticas.

Objetivos específicos

- Detallar la red de relaciones que se establecen entre los objetos primarios asociados a la propuesta teórica y la red de relaciones, involucradas o emergentes, de los objetos primarios asociados a las resoluciones de las situaciones problemáticas.

- Establecer semejanzas y diferencias entre los procedimientos y argumentaciones planteadas en los libros de textos y aquellos necesarios para resolver las situaciones problemáticas que proponen.

- Analizar si el desarrollo teórico textualizado del contenido Divisibilidad de números enteros en libros de nivel secundario de la ciudad de Corrientes, permite resolver todas las situaciones problemáticas que propone o si, por el contrario, aparecen como necesarias otras nuevas relaciones emergentes.

3.1.2.3 Preguntas de investigación

En lineamiento con los objetivos propuestos y acorde a lo expresado en el capítulo 1, se retoman las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué vinculación se establece entre la red de relaciones establecidas de la propuesta teórica, respecto a la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas?

- ¿Qué red de relaciones se establecen entre los objetos primarios de la propuesta teórica del contenido Divisibilidad de números enteros y en las resoluciones de las situaciones problemáticas que se proponen en los libros?

- ¿Qué semejanzas y diferencias se establecen entre los procedimientos y argumentaciones propuestas en los libros y aquellos necesarios para resolver las situaciones problemáticas que proponen?

- ¿El desarrollo teórico textualizado del contenido Divisibilidad de números enteros en libros de nivel secundario de la ciudad de Corrientes, permite resolver todas las situaciones problemáticas qué propone?

3.2 Validación empírica

3.2.1 Sistema de Matrices de datos de la Investigación

En línea con párrafos anteriores, en esta investigación se persiguió *determinar la vinculación entre la red de relaciones desplegadas en el planteamiento teórico del contenido divisibilidad en números enteros, en libros de texto de matemática que son utilizados en el nivel medio, y la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en los mismos*, permitiendo a su vez analizar si *las relaciones conceptuales establecidas en el planteamiento teórico son suficientes para resolver las situaciones problemáticas* *propuestas o si, por el contrario, aparecen como necesarias otras nuevas relaciones emergentes*.

Esta investigación tuvo como *contexto* la Ciudad de Corrientes y se direccionó a dar respuesta a la problemática planteada. Las *fuentes de datos secundarios directas* consideradas son los *libros de matemática seleccionados* para tal fin. Dichos libros están destinados a su uso en el nivel secundario de todos los colegios de la ciudad, por tal motivo las características del contenido son acorde al nivel señalado. Siendo así que los docentes o futuros docentes de matemática pueden hacer uso de dichos libros para preparar sus clases con base en el contenido mencionado.

Se consideró como *unidad de análisis*, que representa el ***nivel de anclaje-N_a***, el contenido divisibilidad de números enteros que se encuentra en cada uno de los libros de textos de matemática seleccionados y que actualmente figuran en los programas de las asignaturas de Matemática del Nivel Secundario de los colegios de la Ciudad de Corrientes. Como *variables* de esta unidad de análisis se consideró los *objetos primarios* detallados con anterioridad. Estos son: *lenguaje, situaciones problemáticas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentaciones.*

En cuanto al **nivel sub-unitario-N_{a-1}**, la misma está formada por las *relaciones conceptuales* establecidas entre los objetos primarios (variables) que permiten resolver las situaciones problemáticas propuestas. Los Objetos primarios derivados del contenido de cada libro, son aquellos necesarios para la resolución de las situaciones problemáticas.

Con respecto al nivel **supra-unitaria N_{a+1}**, esta se conforma con todos los contenidos desarrollados en los libros de textos seleccionados. Figura 1

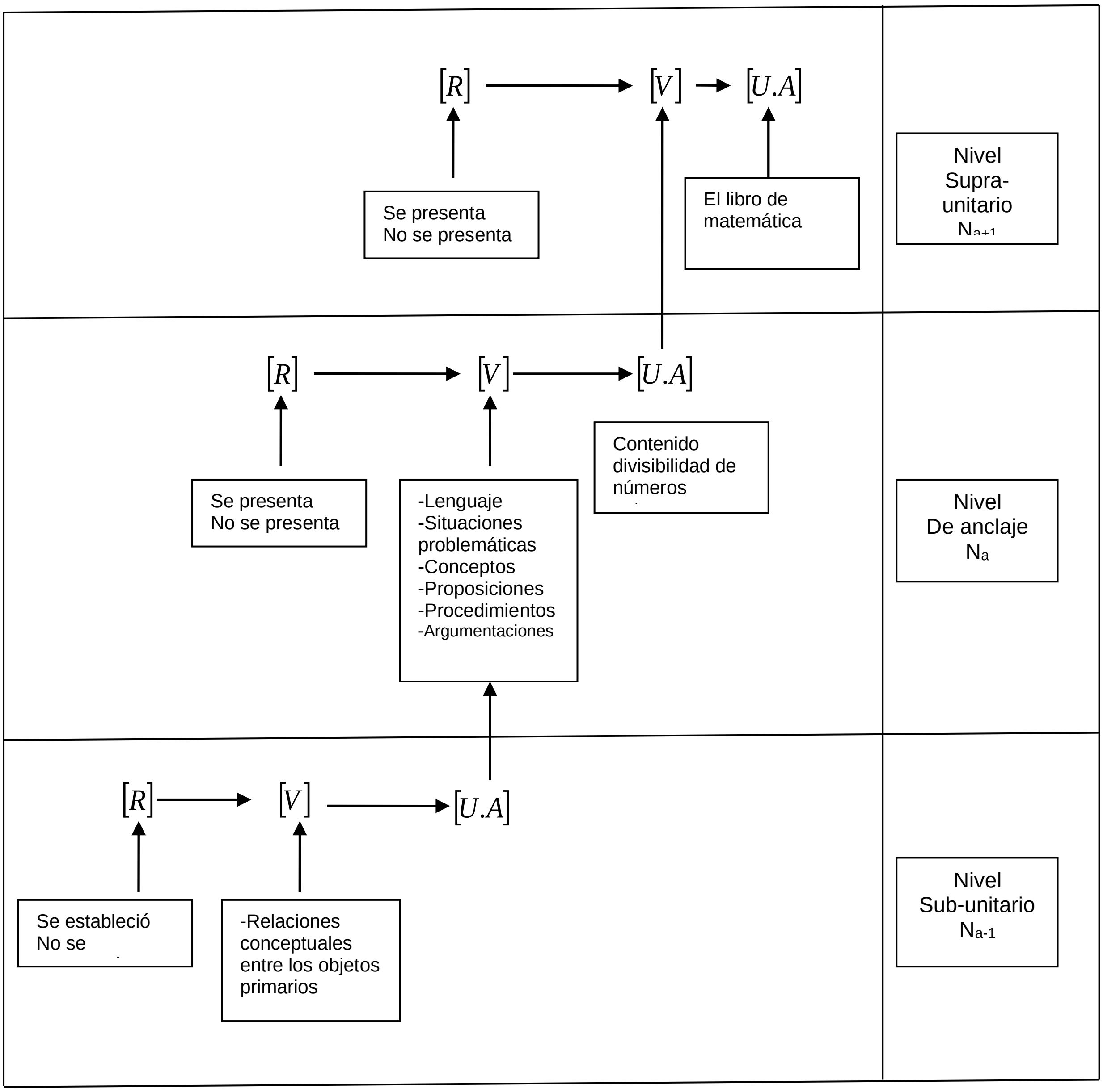


Figura 1

Como cada variable independiente, objeto primario del *nivel de anclaje,* se ve definida de una forma precisa por el EOS, la unidad de análisis se vio descompuesto acorde a tales definiciones. En el caso de observarse dicha variable en el contenido, se la caracterizó como tal y en el caso de no presentarse, no se la caracterizó. Siendo así que la observación del contenido y la correspondencia con la definición de cada variable, adquirió el carácter de *indicador*.

Con respecto al **nivel sub-unitario-N**$_{-1}$, es necesario recordar que las relaciones conceptuales, definidas por el EOS, se refieren a la correspondencia que se establecen entre los objetos primaros con el fin de resolver o dar respuestas a las situaciones problemáticas propuestas en el contenido Divisibilidad. Es así, que en el *sistema de prácticas* realizadas para la resolución de cada situación se hace uso de un razonamiento lógico propio de la matemática que articula los distintos objetos primarios que originan una solución o respuesta, razón por la cual dicha articulación adquiere el carácter de *indicador*. Si bien posteriormente se brinda un detalle, a grandes rasgos se tiene que en el caso de establecerse una correspondencia entre los objetos primarios, se describió las características del mismo. En los casos en que no se presentaron, no se realizó ninguna descripción.

3.2.1.1 Indicadores de la investigación

La particularidad principal de la labor matemática es su austeridad en los razonamientos lógicos que la llevan a determinar el mejor camino para dar con la solución de una situación problemática. Pero este camino no es arbitrario, sino que se apoya, justifica y valida en un conjunto de definiciones, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentaciones (propios de la matemática) que posibilitan tal práctica matemática.

Acorde a lo expresado por Samaja (2004), un indicador es algún tipo de procedimiento que se aplica a alguna dimensión de una variable para establecer qué valor de ella le corresponde a una unidad de análisis determinada. Esto último puede relacionarse con el razonamiento propio de la matemática, que incluye los objetos primarios mencionados por el EOS. Es así que mediante la observación y lectura del contenido divisibilidad de números enteros, expresado y detallado en cada libro, cada unidad de análisis es descompuesto en los objetos primarios/variables acordes a las definiciones que brinda el EOS.

Como lo fundamental en esta investigación son las relaciones entre las variables, acorde a lo definido por el EOS en párrafos anteriores, esto es la correspondencia que se establece entre las mismas con el fin de resolver o dar respuesta a las situaciones problemáticas, es así que en el *sistema de prácticas* realizadas para la resolución de cada situación, se hace uso de un razonamiento lógico propio de la matemática que articula los distintos objetos primarios/variables que originan una solución.

En el siguiente cuadro se determinan aquellas variables más relevantes acorde a lo expresado anteriormente, además se brinda las aclaraciones correspondientes a las secciones del cuadro.

Unidades de Análisis	Variables									
	Situaciones Problemáticas		Definición		Relación entre definición y situación problemática		Proposiciones		Relación entre definición y situación problemática	
	Valores		Valores		Valores		Valores		Valores	
Unidad de análisis 1	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Unidad de análisis 2	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Unidad de análisis 3	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Unidad de análisis 4	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No

Aclaraciones respecto al cuadro:

Unidad de análisis: Contenido divisibilidad de números enteros textualizado en cada libro seleccionado.

Con respecto a la Variable: **Situaciones Problemáticas**

- **Dimensión**

  Definición: son las tareas, actividades o ejercicios, tanto intra-matemáticas como extra-matemáticas con respecto a la divisibilidad.

- **Procedimientos**

  -Lectura de todo el contenido divisibilidad en el libro.

  -Identificación de las situaciones problemáticas por resolver.

  -Análisis sobre las características de las situaciones problemáticas y las preguntas por responder acorde a lo solicitado en dicha situación.

  -Si se encuentra presente una situación problemática se la caracteriza como tal y se le asigna un Sí. Se detalla dicha caracterización en la configuración epistémica, Capítulo 4.

  -Si no se encuentra ninguna situación problemática, se le asigna un No.

- **Valores:**

  -Se presenta: Si

  -No se presenta: No

Con respecto a la Variable: **Definición**

- **Dimensión**

  Definición: conceptos teóricos referentes a la divisibilidad.

- **Procedimientos**

  -Lectura de todo el contenido divisibilidad en el libro

  -Análisis sobre la determinación de una expresión como definición o concepto.

  -Si se encuentra presente una definición se la caracteriza como tal y se le asigna un Sí. Se detalla dicha caracterización en la configuración epistémica, Capítulo 4.

  -Si no se encuentra ninguna definición, se le asigna un No.

- **Valores:**

  -Se presenta: Si

  -No se presenta: No

Con respecto a la variable: **Relación entre definición y situación problemática**

- **Dimensión**

En concordancia con lo definido en párrafos anteriores, pág. 44, en el que se detalló el marco teórico del EOS; se sabe que una relación está caracterizada como una correspondencia (ya sea relación de dependencia o función) entre un antecedente y un consecuente, que establece un sujeto de acuerdo con cierto criterio, código o regla de correspondencia que regula la correlación.

En este sentido, una <u>*relación entre la definición y la situación problemática*</u> esta caracteriza como la suficiencia de la definición para resolver o dar respuesta a lo solicitado en la situación problemática. En el caso que la definición no cumpla con poder dar respuesta a lo solicitado, no se podrá establecer dicha relación.

- **Procedimiento:**

  -Lectura de la consigna.

  -Comprensión de la situación problemática. Se realizará una lectura detallada del enunciado y así determinar aquella información que es brindada y aquella que se debe hallar. Buscando una palabra o indicio que permita encontrar una adecuada orientación a la práctica matemática.

  -Análisis del problema. Se realizará un análisis detallado, determinando las relaciones entre las partes del problema. Especificando e interpretando el significado de aquellos elementos dados y lo solicitado.

-Análisis de la factibilidad de utilizar la definición para dar respuesta a lo solicitado en la consigna.

-Respuesta a lo solicitado en el problema. Si la definición es suficiente para dar respuesta a lo solicitado, se utiliza dicha definición y se determina una respuesta solución, asignándole un Sí. Se detalla dicha caracterización en la configuración epistémica, Capítulo 4.

-En el caso que no es suficiente la definición para realizar una correspondencia, no se la utiliza y se la designa con No.

- **Valores:**

  -Se estableció: Si

  -No se estableció: No

Con respecto a la Variable: **Proposición**

- **Dimensión**

  Proposición: atributos de los objetos de la divisibilidad, que suelen darse como enunciados o proposiciones. Incluye propiedades, reglas y teoremas.

- **Procedimientos**

  -Lectura de todo el contenido divisibilidad en el libro.

  -Análisis sobre la determinación de una expresión como proposición, propiedad o teorema.

  -Si se encuentra presente una proposición, propiedad o teorema se la caracteriza como tal y se le asigna un Sí. Se detalla dicha caracterización en la configuración epistémica, Capítulo 4.

  -Si no se encuentra ninguna de ellas, se le asigna un No.

- **Valores:**

  -Se presenta: Si

  -No se presenta: No

Con respecto a la variable: **Relación entre proposición y situación problemática**

- **Dimensión**

  Una *<u>relación entre una proposición y la situación problemática</u>* esta caracteriza como la suficiencia de la proposición para resolver o dar respuesta a lo solicitado en la situación problemática. En el caso que la proposición no cumpla con poder dar respuesta a lo solicitado, no se podrá establecer dicha relación.

- **Procedimiento:**

  -Lectura de la consigna.

  -Comprensión de la situación problemática. Se realizará una lectura detallada del enunciado y así determinar aquella información que es brindada y aquella que se debe hallar. Buscando una palabra o indicio que permita encontrar una adecuada orientación a la práctica matemática.

  -Análisis del problema. Se realizará un análisis detallado, determinando las relaciones entre las partes del problema. Especificando e interpretando el significado de aquellos elementos dados y lo solicitado.

  -Análisis de la factibilidad de utilizar la proposición, propiedad o teorema para dar respuesta a lo solicitado en la consigna.

  -Respuesta a lo solicitado en el problema. Si la proposición, propiedad o teorema es suficiente para dar respuesta a lo solicitado, se utiliza dicho concepto y se determina una respuesta solución, asignándole un Sí. Se detalla dicha caracterización en la configuración epistémica, Capítulo 4.

  -En el caso que no es suficiente la definición para realizar una correspondencia, no se la utiliza y se la designa con No.

- **Valores:**

  -Se estableció: Si

  -No se estableció: No

Con respecto a las *vinculaciones* que se pueden establecer entre la red de relaciones establecidas entre los objetos primarios asociados a la propuesta teórica y la red de relaciones, involucradas o emergentes, de los objetos primarios asociados a las prácticas resolutorias de las situaciones problemáticas, en el siguiente cuadro se determinan aquellas variables más relevantes acorde a lo expresado anteriormente, además se brinda las aclaraciones correspondientes a las secciones del cuadro.

Relaciones de ambas redes	Vinculación	
	Valores	
Relaciones 1	Si	No
Relaciones 2	Si	No
Relaciones 3	Si	No
Relaciones 4	Si	No
………..	…	…
Relaciones n	Si	No

Aclaraciones respecto al cuadro:

Con respecto a la **vinculación entre las relaciones de ambas redes**.

- **Dimensión**

  Una vinculación entre las redes de relaciones se caracteriza por la relación que se establece entre la propuesta teórica y las relaciones involucradas o emergentes de los objetos primarios. En el caso que no se puede establecer una relación entre ambas redes, no se podrá realizar una vinculación

- **Procedimiento:**

  -Lectura de las relaciones de ambas redes.

  -Comprensión de los objetos primarios que se relacionan: se realizará una lectura detallada de los objetos primarios que interviene en las relaciones. Buscando los objetos que guardan similitud entre ambas redes de relaciones.

  -Análisis de la factibilidad de establecer una vinculación entre las relaciones de ambas redes acorde a los objetos primarios que intervienen.

  -Si los objetos primarios que intervienen son los mismos en ambas relaciones, se determinará que existe una vinculación entre ambas relaciones de cada red.

  -En el caso que no intervengan los mismos objetos primarios de cada relación y no pueda establecerse una correspondencia, se determinará que no existe una vinculación y se la designara con No.

- **Valores:**

  -Se estableció una vinculación: Si

  -No se estableció una vinculación: No

En el siguiente cuadro se determinan las características de *las vinculaciones que se pueden establecer*, además se brinda las aclaraciones correspondientes a las secciones del cuadro.

Vinculación	Tipos					
	Directa		**Fuerte**		**Débil**	
	Valores		Valores		Valores	
Vinculación 1	Si	No	Si	No	Si	No
Vinculación 2	Si	No	Si	No	Si	No
Vinculación 3	Si	No	Si	No	Si	No
Vinculación 4	Si	No	Si	No	Si	No
………..	…	…	…	…	…	…
Vinculación n	Si	No	Si	No	Si	No

Aclaraciones respecto al cuadro:

Con respecto al tipo de **vinculación entre las relaciones de ambas redes**.

- **Dimensión**

  Una vinculación entre las redes de relaciones se caracteriza por la relación que se establece entre la propuesta teórica y las relaciones involucradas o emergentes de los objetos primarios.

- **Procedimiento:**

  -Lectura de la vinculación entre las relaciones de ambas redes.

  -Comprensión de cómo se relacionan los objetos primarios en ambas redes de relaciones: se realizará una lectura detallada de los objetos primarios que intervienen en las vinculaciones. Buscando y determinando como se vinculan.

  -Si en la vinculación intervienen los mismos objetos primarios y se observa que las situaciones problemáticas en las cuales la propuesta teórica del libro brinda un enunciado que permite resolver la situación problemática, se le asignará el nombre de "*vinculación directa*".

  -Si en la vinculación intervienen los mismos objetos primarios, pero además se observa que las situaciones problemáticas en las cuales el desarrollo conceptual del libro brindaba un enunciado que en relación con otro introducido permitió la resolución del problema, se le asignara el nombre de "*vinculación fuerte*".

  - Si en la vinculación interviene un mismo objeto primario que solamente guarda relación con un concepto introducido mas no directamente con la resolución de la situación problemática, se le asignara el nombre de "*vinculación débil*".

- **Valores:**

  -Se estableció una vinculación directa: Si

  -No se estableció una vinculación directa: No

  -Se estableció una vinculación fuerte: Si

  -No se estableció una vinculación fuerte: No

  -Se estableció una vinculación débil: Si

  -No se estableció una vinculación débil: No

3.2.2 Diseño de procedimientos para la recolección de datos

Para lograr responder a la problemática de investigación esgrimida en párrafos anteriores, es necesario contar con datos que propicien dar una respuesta a tal interrogante. Es así que Quintana, A. y Montgomery, W. (Eds.) (2006) proponen una serie de acciones que favorecen la recolección de datos y posterior análisis. Dicho autor considera que los documentos, fuentes *de datos secundarias directas*, son fuentes de información valiosa, dando una revelación de los intereses y perspectivas de comprensión de la realidad.

Las acciones realizadas fueron:

Rastreo e inventariado*:** los libros que se rastrearon y se recopilaron fueron aquellos libros de matemática con el contenido divisibilidad de números enteros que son utilizados por los profesores o futuros profesores de matemática para dar sus clases con el contenido mencionado. ***Clasificación: De la lista de libros de matemática, se organizó acorde a la editorial, año de impresión y publicación. ***Selección:*** los libros de textos más pertinentes para cumplir con los objetivos y responder a las preguntas de investigación fueron seleccionados de forma *No aleatoria*. Los mismos se ajustaron a lo siguiente:

Muestra de estudio

De la población de libros de textos de matemática que utilizan actualmente los docentes para desarrollar sus clases, se seleccionó aquellos libros de texto que tuvieran el contenido divisibilidad de números enteros y también los que fueron impresos y publicados en el período 2010-2012.

Con respecto a los libros que tuvieran el contenido divisibilidad de números enteros, se seleccionó como muestra un grupo formado por cuatro libros correspondientes a los utilizados por los docentes y que se encontraban en las bibliotecas de los colegios visitados de la Ciudad de Corrientes, cuadro 1. Dichos libros son de editoriales conocidas y acordes al nivel educativo al cual están dirigidos.

En diálogo con los docentes de matemática que trabajaban y dictaban sus clases en los colegios explicitados en el cuadro N° 1, manifestaron que pudieron notar que el contenido divisibilidad de números enteros no se encontraba de forma explícita en la última edición de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) de Matemática del año 2011 de la Provincia de Corrientes como así tampoco en los NAP del Ministerio de Educación de la Nación del mismo año. Encontrando a lo sumo una mención de la divisibilidad solo a grandes rasgos y más que nada en el conjunto de Números Naturales. Consideraban esta carencia de contenido como algo grave, puesto que argumentaban que era de suma importancia y característica principal de la Teoría de Números (capitulo 2) y del conjunto de Números Enteros.

Cuadro 1

COLEGIOS ESTATALES DE LA CIUDAD DE CORRIENTES
Colegio educación general básica EGB 3 escuela nº 599
Colegio e Instituto San José
Colegio Informático San Juan De Vera
Colegio José Hernández
Colegio Manuel Vicente Figueredo
Colegio Nocturno Fray José De La Quintana Y Comercial Anexo
Colegio Nocturno General Bartolomé Mitre
Colegio Nocturno Islas Argentinas Del Atlantico Sur
Colegio Polimodal Barrio Pirayui
Colegio Polimodal Brig. General Pedro Ferre
Colegio Polimodal Dr. Eloy Miguel Ortega
Colegio Polimodal Dr. René Favaloro
Colegio Polimodal Edgar Romero Maciel
Colegio Polimodal Fray José De La Quintana
Colegio Polimodal Ibera
Colegio Polimodal Olga Cossettini
Colegio Polimodal Pedro B. Serrano
Colegio Polimodal Presidente Dr. Arturo Frondizi Y Anexo
Colegio Polimodal Presidente Hipólito Irigoyen
Colegio Polimodal Presidente Juan Domingo Perón
Escuela Comercial Agob Seferian

Escuela Comercial Dr. Luis Federico Leloir
Escuela Comercial General Manuel Belgrano
Escuela Comercial Nocturna Del Bicentenario
Escuela Comercial Nocturna José G.Perugorria
Escuela Comercial Presidente Dr. Arturo Umberto Illia
Escuela Nº 10 Remedios Escalada De San Martin
Escuela De EGB 3 Maestro C. Telechea
Escuela Normal Dr. Juan Pujol
Escuela Normal José Manuel Estrada
Escuela Portuaria
Escuela Técnica Brig. General Pedro Ferre
Escuela Técnica Fray Luis Beltrán
Escuela Técnica Nº 1 Juana Manso
Escuela Técnica Nº 2 Bernardino Rivadavia
Instituto Superior Carmen Molina de Llano Y Anexo Taller San Vicente De Paul
Instituto Superior De Formación Técnica-U.O.C.R.A. Islas Malvinas

Núcleos de Aprendizajes Prioritarios - NAP

Con respecto a los NAP, se destaca que, en el año 2011, el Ministro de Educación de la Nación Argentina Prof. Alberto E. Sileoni manifestó que desde el año 2004, el Ministerio de Educación Nacional y las veinticuatro jurisdicciones iniciaron un proceso de construcción federal de acuerdos curriculares para la Educación Inicial, Primaria y Secundaria. En un contexto de profunda desigualdad educativa, con un sistema educativo nacional fragmentado y heterogéneo, se asumió el compromiso de "desarrollar una política orientada a dar unidad al sistema" mediante la identificación de Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) de Matemática. Un núcleo de aprendizaje prioritario en la escuela refiere a un conjunto de saberes centrales, relevantes y significativos, que incorporados como objetos de enseñanza, contribuyan a desarrollar, construir y ampliar las posibilidades cognitivas, expresivas y sociales que los niños ponen en juego y recrean cotidianamente en su encuentro con la cultura, enriqueciendo de ese modo la experiencia personal y social en sentido amplio (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, 2011).

Desde entonces se sostuvo un trabajo cuyo objetivo fue garantizar condiciones de igualdad educativa "construyendo unidad sin uniformidad y rescatando la función pública de la escuela" de manera que "todos los habitantes alcancen competencias, capacidades y saberes equivalentes con independencia de su ubicación social y territorial". Renovando estas apuestas y en un nuevo escenario histórico, social y político, en el que se han planteado la universalización de los servicios educativos para los niños y niñas desde los cuatro años de edad y la obligatoriedad hasta la Educación Secundaria, el Estado nacional repone el valor de los NAP como referencia sustantiva para la enseñanza en las escuelas de todo el país. A sabiendas de esto, manifiesta que el currículo de nuestro país se fortalece con estos acuerdos federales, pero que estas definiciones no bastan. En la cotidianidad de cada escuela y con el aporte constructivo y creativo de maestras, maestros, profesoras y profesores, este conjunto de saberes podrá transmitirse con sentido y aportar un valor significativo a la trayectoria escolar de cada estudiante singular haciendo posible la plena vigencia del derecho de todos a una educación igualitaria. Siendo así, en el año 2011 se proponen los nuevos NAP que servirían como guía integradora de saberes para todos los colegios primarios y secundarios del país.

Con respecto a los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios-NAP del *Ministerio de Educación de la Nación Arge*ntina que fueron promulgados en el año 2011 y que fueron destinados a todas las provincias de la República Argentina, se destaca que en cuanto al contenido divisibilidad se explicita lo siguiente:

- **PRIMERO / SEGUNDO AÑO**

En relación con los números y las operaciones

Explorar y enunciar propiedades ligadas a la divisibilidad en N (suma de dos múltiplos, si un número es múltiplo de otro y éste de un tercero, el primero es múltiplo del tercero, etc.)

En relación con el Algebra y las operaciones

El uso de ecuaciones y otras expresiones algebraicas en situaciones problemáticas que requieran:

producir y analizar afirmaciones sobre propiedades de las operaciones o criterios de divisibilidad avanzando desde su expresión oral a su expresión simbólica, y argumentar sobre su validez.

- **SEGUNDO / TERCER AÑO**

En relación con los números y las operaciones

El reconocimiento y uso de números racionales y de las operaciones y sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran:

-Producir argumentos que permitan validar propiedades ligadas a la divisibilidad en N.

Con respecto a los NAP de la jurisdicción de la *Provincia de Corrientes*, se explicitan los siguientes ítems:

En relación con el Número y las Operaciones

-Reconocimiento y uso en deferentes contextos de los números naturales (N): La recta y los números naturales. Operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Divisibilidad, múltiplos y divisores. Potencias y raíces cuadradas exactas de números naturales.

-Explorar y enunciar propiedades ligadas a la divisibilidad en N (suma de dos múltiplos, si un número es múltiplo de otro y éste de un tercero, el primero es múltiplo del tercero).

En relación con el Álgebra y las Funciones

-Determinación de conjuntos de racionales a partir del lenguaje simbólico: Ecuaciones e inecuaciones lineales sencillas. Expresiones simbólicas de las propiedades de las operaciones con números racionales: conmutativa, distributiva, otras (comparación con las propiedades de naturales). Exploración y enunciado de propiedades vinculadas con la divisibilidad (coloquial y simbólica).

-Enunciar y analizar afirmaciones sobre propiedades de las operaciones o criterios de divisibilidad, avanzando desde su expresión oral a su expresión simbólica, y argumentar sobre su validez.

-Aplicación de los elementos matemáticos en el proceso de cálculo: operaciones, propiedades de las operaciones en diversos conjuntos, divisibilidad, entre otros.

Puede observarse que en concordancia con lo expresado por los distintos docentes de matemáticas de los diversos colegios de la Ciudad de Corrientes; no se exhibe de forma precisa y concisa la divisibilidad en el conjunto de números enteros, implicando que en caso de tener que abordar dicho contenido no se explicite que partes del mismo se deben desarrollar. Esto apoya la elección de libros realizada en la investigación, puesto que cuando los docentes o futuros docentes de matemática deban realizar sus planificaciones de clase podrán contar con una investigación que exprese si el desarrollo teórico del contenido divisibilidad de números enteros en el libro seleccionado permite resolver todas las situaciones problemáticas o, si por el contrario es necesaria la introducción de nuevos conceptos.

Lectura en profundidad**:** de los libros seleccionados se examinó en detalle el desarrollo textualizado del contenido analizado en esta investigación. En el capítulo 4 se detalla las características del contenido desarrollado en cada libro. ***Lectura en forma cruzada y comparativa:*** en el capítulo 4 y a través del marco teórico del EOS, se establecieron las relaciones entre los objetos primarios, se realizaron las configuraciones epistémicas de cada libro, las redes de relaciones, y se describió el contenido acorde a las preguntas de idoneidad epistémica

3.3 Validación operativa y expositiva

3.3.1 Resolución de las situaciones problemáticas, configuraciones epistémicas, preguntas de la componente epistémica y análisis.

El marco teórico utilizado en esta tesis, es decir el EOS, provee de herramientas metodológicas para recolectar, organizar y analizar datos (Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007)).

Las herramientas metodológicas utilizadas para realizar un análisis didáctico a los libros seleccionados fueron los siguientes:

Configuración epistémica: Esta herramienta, Constructo Teórico Del Enfoque Ontosemiotico, permite dejar al descubierto la red de relaciones establecidas entre los objetos primarios que dan respuesta a las preguntas de investigación planteadas (capítulo 1).

Como lo señalan Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007), la noción de configuración epistémica permite hacer un análisis microscópico de los objetos matemáticos involucrados en una práctica o sistema de prácticas, caracterizar su complejidad ontosemiótica y las relaciones que se establecen entre dichos objetos.

Es así, que en primera instancia se utilizó los constructos del marco teórico del EOS y se determinó de cada libro seleccionado, las relaciones conceptuales que se establecen entre los objetos primarios del desarrollo teórico del contenido divisibilidad de números enteros, dando a conocer la red de relaciones conceptuales que se pueden construir. Luego, de las prácticas matemáticas realizadas para la resolución de cada situación problemática propuesta en cada libro sobre el contenido analizado, se determinó los objetos primarios y las relaciones involucradas o emergentes, dando así a conocer la red de redes establecidas con dichas relaciones. Posteriormente se realizó un análisis de la comparación de las redes de relaciones de cada libro.

Preguntas de la componente epistémica: Esta herramienta, enmarcada también en el EOS y que ayuda a complementar la configuración epistémica a través de preguntas de idoneidad epistémica, plantea la posibilidad de realizar un análisis que determina si un libro escolar o contenido desarrollado en el mismo, cumple con determinadas características que permiten calificarlo como idóneo, óptimo, adecuado o dar un análisis en detalle del contenido analizado (Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006)). En las preguntas descriptivas de la componente epistémica, se contempla todo lo relativo a las situaciones problemáticas como papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados tipos de problemas.

Es así que al contenido divisibilidad de números enteros desarrollado en cada libro seleccionado se le aplicaron las preguntas, en carácter de preguntas descriptivas, de la componente epistémica. Posteriormente, se realizó una comparación entre las respuestas encontradas en cada libro y se elaboró una conclusión de lo observado.

En el capítulo 4, con el fin de alcanzar los objetivos propuestos y dar respuesta a las preguntas de investigación, se determinaron las redes de relaciones del desarrollo teórico del contenido divisibilidad de números enteros que se encontraba escrito en cada libro seleccionado, dando así a conocer la *configuración epistémica* asociada. A su vez se expusieron las relaciones más pertinentes. Luego se resolvieron las situaciones problemáticas propuestas por dicho contenido en cada libro. Estas resoluciones se realizaron teniendo presente el desarrollo conceptual del propio libro y aquellos necesarios para tales resoluciones. Posteriormente se determinaron las *relaciones conceptuales involucradas y emergentes* de las resoluciones realizadas, dando a conocer la *configuración epistémica* asociada. A su vez se expusieron las relaciones más pertinentes.

Las *configuraciones epistémicas* desarrolladas permitieron vislumbrar las relaciones que se establecían entre los distintos objetos primarios, dando así a conocer la red de relaciones que se establecían, permitiendo alcanzar uno de los objetivos específicos propuestos. Posteriormente se estableció la *vinculación entre las relaciones conceptuales* de cada configuración, alcanzando uno de los objetivos propuestos, luego se esgrimió un *cuadro* donde se expusieron los argumentos y procedimientos propuestos por el desarrollo conceptual del libro y otro cuadro donde se expuso los procedimientos y argumentaciones necesarios para resolver las situaciones problemáticas, dando a conocer las diferencias y semejanzas entre ambos objetos primarios, alcanzando así otro de los objetivos específicos.

Seguidamente al desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros que se encontraba en cada libro se le aplicó las preguntas descriptivas de la componente epistémica, dando así a conocer en detalle las características del contenido desarrollado en dichos libros.

Como *conclusión general*, en el capítulo 5, se sintetizó lo desarrollado a lo largo del capítulo anterior. Siendo así que, a través de la red de relaciones establecidas entre los objetos primarios, las configuraciones epistémicas construidas, las similitudes y semejanzas realizadas entre los procedimientos y argumentos, y la aplicación de las preguntas de la componente epistémica, se retomaron los objetivos propuestos y se respondieron las preguntas de investigación realizadas.

3.6 Conclusiones

En este capítulo se trabajó los aspectos teóricos y metodológicos necesarios para responder, desde una base científica, las preguntas de investigación realizadas y alcanzar los objetivos propuestos en el capítulo 1.

Con relación al constructo teórico del Enfoque Ontesemiotico de la Instrucción Matemática, el mismo da conocer los objetos primarios (llamados variables), las relaciones conceptuales que las relacionaban y la red de relaciones que se pueden establecer con respecto al contenido divisibilidad de números enteros, permitiendo establecer una vinculación, o no, entre las redes.

Con relación a lo metodológico, se manifestó la influencia directa de lo expresado y desarrollado por Samaja (2004). Dándose a conocer las distintas instancias de validación, como ser: Conceptual, Empírica, Operativa y Expositiva. Detallando la unidad de análisis, las variables consideradas, los valores que tienen asignado cada variable y haciéndose hincapié en la presencia de indicadores en la resolución matemática de las situaciones problemáticas. También se dio a conocer el sistema de matrices de datos. Dándose las características de cada nivel.

Lo antes expuesto manifiesta que esta investigación es de carácter “sistemática”, puesto que implica que hay una disciplina para realizar la investigación científica y que no se dejan los hechos a la casualidad. A su vez es “empírica”, puesto que denota que se recolectan y analizan datos. Como así también “crítica”, pues se realiza un análisis de lo elaborado.

Capítulo 4

Análisis de Textos Escolares

En este capítulo se dará a conocer el desarrollo teórico del contenido divisibilidad de números enteros que se encuentra en cada libro seleccionado, como así también la resolución de las situaciones problemáticas propuestas en los mismos. Posteriormente se realizará una configuración epistémica, tanto para el desarrollo del contenido como para las resoluciones hechas.

Se explicitarán los procedimientos y argumentaciones utilizados y se responderán preguntas descriptivas de la faceta epistémica. Esto permitirá contestar las preguntas de investigación y alcanzar los objetivos propuestos en el capítulo 1.

4.1 Acciones realizadas a cada libro seleccionado

Del contenido divisibilidad de números enteros que se desarrolla en cada libro seleccionado, se da a conocer su aporte teórico y las situaciones problemáticas propuestas al lector. Luego a través del aporte del Marco Teórico desarrollado en el capítulo 3, se elabora una configuración epistémica del desarrollo teórico del contenido y se exponen las relaciones conceptuales más relevantes y pertinentes entre los objetos primarios intervinientes.

En cuanto a las situaciones problemáticas se confeccionó el sistema de prácticas referente a las resoluciones de cada una de ellas, utilizando tanto el aporte teórico que se desarrolla en el libro como así también aquellos conceptos teóricos que fueron necesarios introducir para realizar tales resoluciones. Al igual que lo expresado en el párrafo anterior, a través del Marco Teórico desarrollado en el capítulo 3 se elaboró una configuración epistémica del sistema de prácticas matemáticas de las resoluciones realizadas y se exponen las relaciones conceptuales involucradas y emergentes más relevantes y pertinentes entre los objetos primarios intervinientes en la configuración.

Con respecto al contenido teórico utilizado para la resolución de cada situación problemática, específicamente se utilizan las definiciones, proposiciones/propiedades, teoremas y procedimientos que se encuentran desarrollados en cada libro seleccionado. No obstante, en los casos donde es necesario un concepto que permita resolver la situación problemática y el desarrollo conceptual del libro no lo brinde o no sea el más pertinente para tal fin, se utiliza también el abordaje teórico desarrollado en el libro Aritmética, de la Editorial Red Olímpica e impreso en el año 2001, cuyos autores son María Elena Becker, Norma Pietracola y Carlos Sánchez.

En cuanto a las resoluciones de las situaciones problemáticas y en concordancia con el párrafo anterior, se explicitan los procedimientos y argumentaciones necesarias y suficientes para resolver cada situación problemática propuesta por el libro para resolver por parte del lector posibilitando responder las preguntas de investigación realizadas en el capítulo 1.

Posteriormente se responden las preguntas descriptivas de la componente epistémica, explicitados en el capítulo 3, al desarrollo del contenido en cada libro seleccionado.

4.2 Desarrollo

A continuación, se exponen las características generales de cada libro seleccionado y se esgrime el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros impreso en cada uno de ellos. Se da a conocer la configuración epistémica del desarrollo del contenido teórico de cada libro y las relaciones conceptuales que se establecen entre los objetos primarios. Con respecto a las situaciones problemáticas que cada libro propone al lector se efectúan las resoluciones de cada una de ellas, se realiza una configuración epistémica de los objetos primarios involucrados y emergentes de tales prácticas matemáticas y se determinan las relaciones conceptuales más sobresalientes y pertinentes. Luego se realiza el análisis de la red de relaciones conceptuales establecidas entre los objetos primarios del desarrollo teórico del libro y su vinculación con la red de relaciones involucradas y emergentes del sistema de prácticas de la resolución de las situaciones propuestas al lector

Posteriormente se realiza el análisis de las semejanzas y diferencias entre los procedimientos y argumentaciones que se brinda en el desarrollo teórico de cada libro y aquellos que se utilizan para las resoluciones de cada situación problemática. Finalizando con una aplicación de indicadores de la faceta epistémica al desarrollo conceptual de cada libro.

4.2.1 Primer libro

- ✓ **4.2.1.1 Descripción**

Con respecto a las características generales de este primer libro, denotamos la siguiente información:

Libro:	Navegantes del Conocimiento Logonautas Matemática 2. Equivalente a 1°, E. S/2 ° E.S.B.
Editorial:	Puerto de Palos.
Edición:	Primera
Reimpresión:	Primera
Año:	2011
Autores del libro:	Pablo Amster Leonardo Moledo Irene Zapico

Adentrándonos en el contenido específico que nos compete, tenemos que en el índice del libro se encuentra escrito lo siguiente:

- ✓ **ÍNDICE**

CAPÍTULO 1. NÚMEROS ENTEROS

Con respecto a las características específicas que tiene que ver con el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros, se puede denotar lo siguiente:

En el desarrollo teórico que se brinda, podemos observar una definición de cuando dos números enteros son divisibles entre sí, esto es "un número entero *a* es ***divisible*** por otro *b* (distinto de cero), cuando la división entera entre sus valores absolutos tiene resto 0. También se dice que *a* es un múltiplo de *b*. Posteriormente se brinda un enunciado relacionado con el divisor común mayor de dos números, esto es "el **divisor común mayor** (dcm) entre dos o más números es el mayor divisor positivo que tiene en común esos números", a su vez un ejemplo de dicha definición: Ej: dcm (-30;12) =6. Así también se brinda un enunciado sobre lo que es un mínimo común múltiplo de dos números enteros, esto es"el **múltiplo común menor** (mcm) entre dos o más números es el menor múltiplo positivo que tienen en común esos números", seguido de un ejemplo: Ej. Mcm (-10;15) = 30.

Con respecto a las situaciones problemáticas que se exponen para resolver por parte del lector, nos encontramos con las siguientes:

75.

a) Completen la tabla

NÚMERO	DIVISORES
-3	
3	
-5	
5	
-20	

NÚMERO	DIVISORES
-35	
-212	
125	
28	
-69	

b) Escriba algunos pares de números coprimos.

76. Escriban V (Verdadero) o F (Falso)

a) -5 es un divisor de -415…….
b) -415 es divisible por -5…….
c) 121 es múltiplo de 11 …….
d) -126 es un múltiplo de 36…….
e) -81 es un múltiplo de 27…….
f) -81 es divisible por -27 …….

78. Completen la tabla.

a	b	dcm(a,b)	mcm(a,b)
15	3		
-80	16		
-14	-20		
30	40		

79) Escriban, en cada caso, un par de números enteros que verifiquen las siguientes condiciones.

a) *mcm (r,s)=60 y dcm (r,s)= 1*

b) *mcm (a,b)=10 y dcm (a,b)= 5*

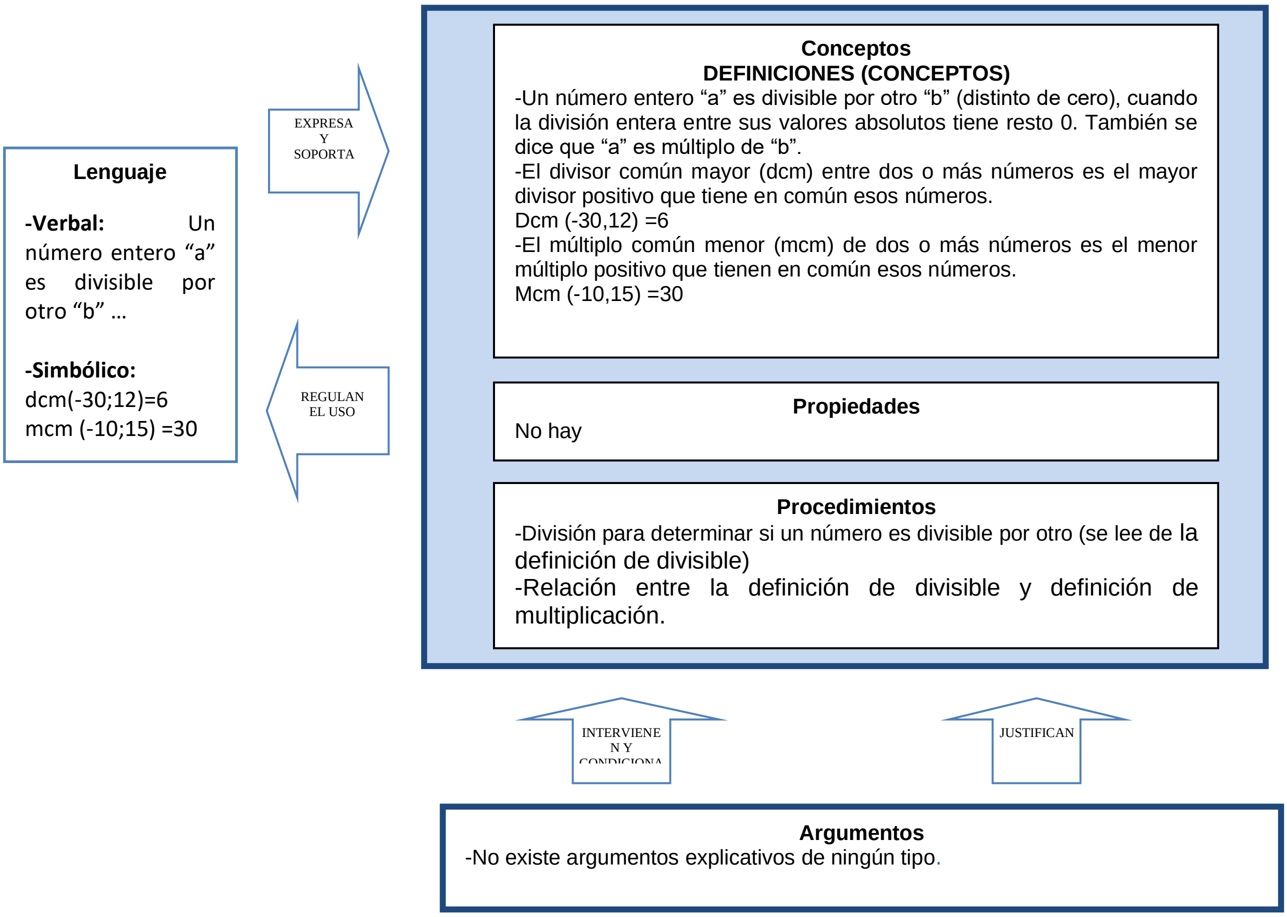
c) *mcm (u,x)=60 y dcm (u,x)= 20*

4.2.1.2 Configuración epistémica del desarrollo teórico del contenido

A continuación, se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que intervienen en el desarrollo del contenido.

Situación Problemática

Se presentan los siguientes tipos de problemas:
P1: ¿Cuáles son los divisores de números relativamente pequeños?
P2: ¿Qué números son coprimos?
P3: ¿Un número entero, es divisor de otro?
P4: ¿Un número entero es divisible por otro?
P5: ¿Un número entero es múltiplo de otro?
P6: ¿Cuál es el dcm de dos números enteros relativamente pequeños?
P7: ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños?
P8: Dados el mcm y el dcm de dos números enteros, ¿Cuáles son dichos números?



4.2.1.3 Relaciones conceptuales más sobresalientes

Si bien es posible establecer un número significativo de relaciones entre los objetos primarios de la configuración epistémica planteada, en particular nos quedaremos con aquellas que consideramos más pertinentes. Cabe aclarar que la misma consideración tendrá vigencia para las configuraciones epistémicas que se encuentran más adelante.

A las relaciones conceptuales las simbolizaremos con la letra R_m, donde m es un número que pertenece al conjunto de números naturales y expresa el orden de las mismas. Las relaciones conceptuales más pertinentes de la configuración epistémica son las siguientes:

R_1: Entre la situación problemática P3 y la definición de divisible que involucra la multiplicación.

R_2: Entre la situación problemática P3 y el procedimiento para determinar si un número es divisible por otro

R_3: Entre la situación problemática P4 y la definición de divisible que involucra la multiplicación.

R_4: Entre la situación problemática P4 y el procedimiento para determinar si un número es divisible por otro.

- R_5: Entre la definición de divisible que involucra la multiplicación y la definición del múltiplo común menor.

4.3.1.4 Resolución de las situaciones problemáticas propuestas

A continuación, se realizan las resoluciones de cada situación problemática propuestas para el lector.

- **Situación Problemática 75**

75.

a) Completen la tabla

NÚMERO	DIVISORES
-3	
3	
-5	
5	
-20	

NÚMERO	DIVISORES
-35	
-212	
125	
28	
-69	

b) Escriba algunos pares de números coprimos.

El problema que se encuentra en el ítem a) consiste básicamente en determinar todos o algunos divisores (no especifica) de los números enteros que se encuentran en la primer columna de cada una de las tablas.

En cuanto al ítem b), se deben dar ejemplos de números primos entre sí, no especificando la cantidad de pares.

<u>Resolución:</u>

a) Consideremos primero los números positivos 3 y 5 de la primera tabla, primera columna y la siguiente definición:

“Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*

Considerando la definición anterior y teniendo presente la propiedad de divisibilidad que expresa que todo número “b es múltiplo de 1 *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*), podemos escribir que 3=3.1 (en el cual b=3, a=3 y c=1) y 5=5.1 (en el cual b=5, a=5 y c=1), siendo los divisores de 3 y 5, el número 1 y ellos mismos. A su vez, como en ambas definiciones se utiliza la operación multiplicación y considerando la regla de los signos para la misma, podemos escribir $3 = (-3).(-1)$ y $5 = (-5).(-1)$ (Procedimientos). Siendo así los divisores del 3, los números 1, 3, -1, -3 y los divisores de 5, los números 1, 5, -1 y -5.

Como en dicha tabla y columna, también aparecen números negativos, en particular -3 y -5, podemos recurrir a la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b*” (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), Resultando esta propiedad una herramienta importante para determinar, entre números enteros positivos y negativos o ambos negativos, si uno de ellos es divisor del otro, sin tener que recurrir nuevamente a la división. Es así como siendo los números 1, 3, -1 y -3 divisores de 3, lo son también de -3 y siendo los números 1, 5, -1 y -5 divisores de 5, lo son también de -5.

Considerando la siguiente definición, que expresa que *un número natural p mayor que 1, se dice primo si 1 y p son sus únicos divisores positivos, generando que p solo se factoriza en la forma trivial p=1.p (**). Si un número natural p mayor que 1 no es primo, diremos que es compuesto (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* Tenemos que los números 3 y 5, al pertenecer ambos al conjunto de los números naturales y considerando lo expresado en el párrafo anterior, los podemos considerar números primos. Pero si a la vez consideramos que estamos trabajando con números que pertenecen al conjunto de número enteros y la definición que expresa que “*un número entero a es primo si y solo si –a también lo es resultando los divisores de a los números 1, a, -1 y -a” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, podemos afirmar que -3 y -5 también son números primos, y considerando la propiedad (*), *los números* 3, 5, -3 y -5 tienen cuatro divisores cada uno, dos números enteros positivos y dos negativos.

Como en las tablas del ítem a) existen números que no son primos (es decir compuestos) y relativamente grandes, resulta necesario considerar el *Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y*

-1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales, donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es, resultando los divisores de a los números 1, a, -1 y -a" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, valiéndonos de este teorema y la propiedad que expresa que si *un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c (Propiedad del libro aritmética de M. Becker),* de esta forma, conocida la factorización de un número, contamos con una herramienta que nos permite hallar fácilmente todos los divisores de un número.

Consideremos ahora los números 20, 28, 35, 69, 125 y 212. Como algunos de ellos no se encuentran en las tablas de multiplicar que se aprenden a lo largo de la secundaria y al ser algunos de ellos relativamente números grandes, es conveniente utilizar otro procedimiento para encontrar sus divisores, es así que los escribimos y ordenarlos de la siguiente forma (Procedimientos):

20	2	28	2	35	5	212	2	125	5	69	3
10	2	14	2	7	7	106	2	25	5	23	23
5	5	7	7	1		53	53	5	5	1	
1		1				1		1			

$$20 = 2^2.5^1 \qquad 28 = 2^2.7^1 \qquad 35 = 5^1.7^1 \qquad 212 = 2^2.53^1$$
$$125 = 5^3 \qquad 69 = 3^1.23^1$$

Para el cálculo tuvimos en cuenta las siguientes definiciones, propiedades y criterios de divisibilidad:

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n un números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

-Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).

-Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. (Propiedad)

- Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

Es así que a los números 20, 28 y 35, los podemos escribirlos de la forma: 20 = 20.1 = 10.2.1 = 5.2.2.1 = 5.4.1, a la vez 28 = 28.1 = 14.2.1= 7.2.2.1=7.4.1 y 35 = 35.1 = 5.7.1 (Procedimientos). Considerando además la propiedad que expresa que la cantidad de divisores de un número entero cumple d(n)=2.(m+1).(m+1).(m+1)…(m+1) , $\mathrm{d(n)} = 2.(\mathrm{m}_1 + 1).(\mathrm{m}_2 + 1).(\mathrm{m}_3 + 1) \ldots (\mathrm{m}_\mathrm{h} + 1)$, siendo los números m_1, m_2, m_3, hasta m_h los exponentes de los números primos de la factorización y la propiedad(*), tenemos que la cantidad de divisores del número 20 es $\mathrm{d}(20) = 2.(2+1).(1+1) = 2.3.2 = 12$, siendo sus divisores los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, -1, -2, -4, -5, -10 y -20, siendo a la vez por la propiedad(*), divisores del número -20. Los divisores del 28 son los números 1, 2, 4, 7, 14, 28,-1, -2, -4,-7,-14 y -28, siendo la cantidad de divisores $\mathrm{d}(28) = 2.(2+1).(1+1) = 2.3.2 = 12$. Para el caso del 35, sus divisores son los números 1, 5, 7, 35, -1, -5, -7 y -35. Valiéndonos de la propiedad (*), dichos divisores lo son también del número -35, siendo que la cantidad de divisores del números -35 son $\mathrm{d}(-35) = 2.(1+1).(1+1) = 2.2.2 = 8$

De forma similar a lo realizado en el párrafo anterior, determinamos que los divisores de 69 son los números 1, 3, 23, 69, -1, -3, -23 y -69. Considerando la propiedad (*), resulta que también son divisores del número -69, siendo la cantidad de divisores $\mathrm{d}(-69) = 2.(1+1).(1+1) = 2.2.2 = 8$. Para el caso del número 125, tenemos que sus divisores son los números 1, 5, 25, 125, -1, -5, -25 y -125, siendo la cantidad de divisores $\mathrm{d}(125) = 2.(3+1) = 2.4 = 8$. Con respecto al número 212, sus divisores son los números 1, 2, 4, 53, 106, 212, -1, -2, -4, -53, -106 y -212, y por (*), resulta así que tales divisores lo son también del número -212, siendo la cantidad de divisores $\mathrm{d}(-212) = 2.(2+1).(1+1) = 2.3.2 = 12$.

Completando la tabla del ítem a), tenemos que:

NÚMERO	DIVISORES
-3	1,3,-1,-3
3	1,3,-1,-3
-5	1,5,-1,-5
5	1,5,-1,-5
-20	1,2,4,5,10,20,-1 -2-4-5-10-20

NÚMERO	DIVISORES
-35	1,5,7,35,-1,-5, -7,-35
-212	1,2,4,53,106,212, -1, -2, -4, -53, -106, -212
125	1,5, 25, 125, -1,-5.-25
28	1,2,4,7,28, -1, -2,-4,-7,-28
-69	1,3,23,69,-1, -3,-23,-69

Con respecto al segundo apartado, ítem b), debemos considerar primero la siguiente definición que expresa que, si se tiene dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivos comunes será llamado el máximo común divisor de a y b, donde la notación a utilizar sea (a; b) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker pág. 28.)* De esta forma, estamos en condiciones de explicitar que si el máximo común divisor de dos números, a y b, es 1, dichos números se denominan coprimos *(Concepto del libro aritmética de M. Becker pág. 32.)*. Con lo antes expuesto y por *(**)*, podemos pensar a los números 2 y 3 de la siguiente forma, 2=2.1 y 3=3.1 *(procedimiento)*, siendo así el máximo común divisor entre los dos números es el 1. También podemos considerar a los números 5 y 7 y expresarlos de la siguiente forma, 5=5.1 y 7=7.1, siendo el divisor común mayor entre ambos el 1. Es así, que con estos dos ejemplos se cumple con lo solicitado por el ítem.

- **Situación Problemática 76**

76. Escriban V (Verdadero) o F (Falso)

a) -5 es un divisor de -415…….	d) -126 es un múltiplo de 36…….
b) -415 es divisible por -5…….	e) -81 es un múltiplo de 27…….
c) 121 es múltiplo de 11 …….	f) -81 es divisible por -27 …….

Si observamos los ítems del punto a) hasta el f), podemos notar que básicamente solicita determinar si un número entero es divisor, es divisible o múltiplo de otro número entero y dependiendo de los resultados en las operaciones a realizar, consignar con V (Verdadero) o F (Falso).

<u>Resolución:</u>

Para poder determinarlo solicitado en el ejercicio, hacemos uso del siguiente concepto:

"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*

Considerando la definición anterior, podemos denotar que -5 es divisor de -415 y a su vez -415 es divisible por -5, dado que al número -415 lo podemos escribir como $-415 = -5.83$ (procedimiento). También afirmamos que 121 es múltiplo de 11, dado que existe el número 11 que pertenece al conjunto de número enteros y que cumple que 121=11.11. A su vez -81 es múltiplo de 27 y -27 es divisor de -81 pues se cumple que $-81 = 27.(-3) = (-27).3$, con lo que podemos afirmar que los ítems a, b, c, e y f con *Verdaderos.*

Sin embargo, con respecto al número -126, nos encontramos que en este caso no existe ningún número entero "c" que cumpla que 36 por c, de cómo resultado -126. Afirmamos esto porque si consideramos los productos: 36 por -3, obtenemos -108 y 36 por -4 obtenemos -144 y siendo el número -126 mayor que -144 y a la vez menor que -108, podemos suponer que el número entero c del producto $-126 = 36.c$ debe ser uno comprendido entre -4 y -3, pero el mismo no puede pertenecer al conjunto de los números enteros (argumentación). Con lo cual la afirmación de que -126 es un múltiplo de 36, es *Falsa*.

Valiéndonos en lo antes expuesto y escribiendo V (verdadero) o F (falso) según corresponda, tenemos que:

a) -5 es un divisor de -415…V….
b) -415 es divisible por -5…..V….
c) 121 es múltiplo de 11...…V….
d) -126 es un múltiplo de 36…F….
e) -81 es un múltiplo de 27…V….
f) -81 es divisible por -27 .V.

- **Situación Problemática 78**

78. Completen la tabla.

a	b	dcm(a,b)	mcm(a,b)
15	3		
-80	16		
-14	-20		
30	40		

En esta situación problemática, se da una lista de números y se solicita determinar el divisor común mayor y el mínimo común múltiplo de dichos números.

Resolución:

Para resolver la situación problemática recurrimos a la definición de máximo común divisor y mínimo común múltiplo:

"Dados dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivo será llamado el máximo común divisor (mcd) de a y b y lo denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker). Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y

que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural (procedimiento)".

"Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como [a;b] (Concepto del libro aritmética de M. Becker). Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente".

Lo detallado anteriormente, nos brinda una definición de lo que representa un mcd y mcm y otorga un procedimiento para poder determinar ambos números. No obstante, observando la tabla de la situación problemática, nos encontramos que existen números negativos, con lo cual es necesario considerar la propiedad que expresa que dados *dos números enteros a y b se cumple que* $\mathrm{dcm}(a,b) = \mathrm{dcm}(|a|,|b|)$ y $\mathrm{mcm}[a,b] = \mathrm{mcm}[|a|,|b|]$ *(Concepto del libro aritmética de M. Becker pág. 31.)* Donde las barras $|\ |$ Simbolizan el valor absoluto de un número. Razón por la cual la definición que ocuparemos es: el valor absoluto de un número, $|x|$, es el mismo número x, siempre y cuando x sea mayor o igual a cero y es –x siempre y cuando el número x sea menor estricto que cero. Ahora, valiéndonos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es, resultando los divisores de a los números 1, a, -1 y -a" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, escribimos a los números de la tabla de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización: $15 = 3^1.5^1$ $\qquad$ $80 = 2^1.2^1 2^1 2^1.5^1 = 2^4.5^1$

$3 = 3^1.1^1$ $\qquad$ $16 = 2^1.2^1.2^1.2^1 = 2^4$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización: $14 = 2^1.7^1$ $\qquad$ $30 = 2^1.3^1.5^1$

$20 = 2^1.2^1.5^1 = 2^2.5^1$ $\qquad$ $40 = 2^1.2^1.2^1.5 = 2^3.5$

Para el cálculo tuvimos en cuenta las siguientes definiciones, propiedades y criterios de divisibilidad:

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

-*Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. (Propiedad)*

- *Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).*

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

-*el producto de potencias de igual base se suman los exponentes*

-*todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)*

Consideremos los números 15 y 3. Podemos observar que los factores primos comunes con el menor exponente es el número 3 y en cuanto a los factores primos de ambos números con el mayor exponente, son precisamente el 3 y 5. De esta forma podemos afirmar que él $\mathrm{dcm}(15,3) = 3$ y el $\mathrm{mcm}[15,3] = 3.5 = 15$. Con respecto a los números 80 y 16, tenemos que los factores primos comunes con el menor exponente es el número $2^4 = 16$ y en cuanto a los factores primos de ambos números con el mayor exponente, son precisamente 2^4 y 5^1, es así como él $\mathrm{dcm}(-80,16) =$

$\mathrm{dcm}(|-80|,|16|) = dcm(80,16) = 2^4 = 16$ y el $\mathrm{mcm}[-80,16] = \mathrm{mcm}[|-80|,|16|] = \mathrm{mcm}[80,16] = 2^4.5 = 80$

Con respecto a los números 14 y 20, los factores primos comunes con el menor exponente es el número 2^1 y en cuanto a los factores primos de ambos números con el mayor exponente, son precisamente los números 2^2, 7^1 y 5^1, resultando de esta forma que él $\mathrm{dcm}(-14,-20) = \mathrm{dcm}(|-14|,|-20|) = \mathrm{dcm}(14,20) = 2$ y el $\mathrm{mcm}[-14,-20] = \mathrm{mcm}[|-14|,|-20|] = \mathrm{mcm}[14,20] = 2^2.5^1.7^1 = 140$

En cuanto a los números 30 y 40, tenemos que los factores primos comunes con el menor exponente son los números 2^1 y 5^1, y en cuanto a los factores primos de ambos números con el mayor exponente, son precisamente los números 2^3, 3^1 y 5^1, resultando de esta forma que él $\mathrm{dcm}(30,40) = 2^1.5^1 = 10$ y el $\mathrm{mcm}[30,40] = 2^3.3^1.5^1 = 120$

Con base en todo lo expuesto, tenemos que:

a	**b**	**dcm(a,b)**	**mcm(a,b)**
15	3	3	15
-80	16	16	80
-14	-20	2	140
30	40	10	120

- **Situación Problemática 79**

Ejercicios:

79) Escriban, en cada caso, un par de números enteros que verifiquen las siguientes condiciones.

a) *mcm (r,s)=60 y dcm (r,s)= 1*

b) *mcm (a,b)=10 y dcm (a,b)= 5*

c) *mcm (u,x)=60 y dcm (u,x)= 20*

En este ejercicio se solicita que se determinen los números enteros r, s, a, b, u y x que verifican un determinado mcm y dcm para dichos números en particular.

<u>Resolución:</u>

Consideramos que el razonamiento a realizar para concretar dichos ejercicios es el caso contrario a los ejercicios resueltos anteriormente, donde dados dos números enteros cualesquiera a y b, se solicitaba determinar su dcm y mcm. Para escribir lo solicitado en el ejercicio, utilizamos las definiciones de dcm, mcm, propiedades y criterios de divisibilidad que utilizáramos en el ejercicio 78.

En el caso del ítem a), para determinar los números r y s que generan al número 60 como su mcm y al número 1 como su dcm, podemos razonar de la siguiente forma. Como el dcm de los números r y s es 1, significa que no tienen ningún divisor común distinto de 1, siendo así, utilizando la definición de divisor, el Teorema Fundamental de la Aritmética definida en el problema 78, tenemos que factorizando al número 60 obtenemos $60 = 2^1.2^1.3.5$. Ahora considerando que $60 = 2^1.2^1.3.5 = 2^2.3.5 = 4.15$, tenemos que 4 y 15 no son múltiplos entre sí, eso implica que ninguno de los dos números es divisor del otro, por lo cual se cumple que $\mathrm{mcm}(4,15) = 60$ y $\mathrm{dcm}(4,15) = 1$, (procedimiento). Teniendo presente los opuestos de cada número y la propiedad del dcm que expresa que *dados dos números enteros a y b se cumple que* $\mathrm{dcm}(a,b) = \mathrm{dcm}(|a|,|b|)$ *y* $\mathrm{mcm}[a,b] = \mathrm{mcm}[|a|,|b|]$ (*) (propiedad) donde las barras indican el valor absoluto de dichos números (propiedad), es así que debemos considerar las siguientes posibilidades:

a) $\mathrm{mcm}(4,15) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(4,15) = 1$

b) $\mathrm{mcm}(-4,-15) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(-4,-15) = 1$

c) $\mathrm{mcm}(-4,15) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(-4,15) = 1$

d) $\mathrm{mcm}(4,-15) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(4,-15) = 1$

Con respecto al ítem b), podemos notar que el dcm de a y b es 5, con lo cual teniendo presente el criterio de divisibilidad por 5, que expresa que un número es divisible por 5 si su última cifra es cero cinco (propiedad), implicaría que tanto a como b, son múltiplos de 5. Además considerando la propiedad del dcm que dice que *dado dos números a y b, si a es divisor de b entonces se cumple que a es el dcm de los dos* (propiedad *del libro aritmética de M. Becker pág. 29*) anexando además que el mcm de a y b es 10, esto nos hace razonar que el número a=5 y el número b=10, cumpliendo de esta forma que $\mathrm{mcm}(5,10) = 10$ y que el $\mathrm{dcm}(5,10) = 5$

Teniendo presente los opuestos de cada número y la propiedad (*), debemos considerar las siguientes posibilidades:

a) $\mathrm{mcm}(5,10) = 10$ y que el $\mathrm{dcm}(5,10) = 5$

b) $\mathrm{mcm}(-5,-10) = 10$ y que el $\mathrm{dcm}(-5,-10) = 5$

c) $\mathrm{mcm}(5,-10) = 10$ y que el $\mathrm{dcm}(5,-10) = 5$

d) $\mathrm{mcm}(-5,10) = 10$ y que el $\mathrm{dcm}(-5,10) = 5$

En cuanto al ítem c), podemos considerar lo siguiente. Si factorizamos a los números 60 y al 20, obtenemos $60 = 2^1.2^1.3.5 = 2^2.3.5$ y $20 = 2^1.2^1.5^1 = 2^2.5$. Con esto podemos notar que $60 = 2^2.5.3 = 20.3$ (procedimientos), de donde obtenemos que el dcm (60,20) = 20 y el mcm (60,20)=60.

Teniendo presente los opuestos de cada número y la propiedad (*), podemos considerar las siguientes posibilidades:

a) $\mathrm{mcm}(60,20) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(60,20) = 20$

b) $\mathrm{mcm}(-60,-20) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(-60,-20) = 20$

c) $\mathrm{mcm}(-60,20) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(-60,20) = 20$

d) $\mathrm{mcm}(60,-20) = 60$ y que el $\mathrm{dcm}(60,-20) = 20$

4.2.1.5 Configuración epistémica del sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas

A continuación, se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que intervienen en el sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas.

• **Lenguaje** -Expresión verbal: número natural, número entero, divisible, división entera, valores absolutos, múltiplo, divisor común mayor, dcm, divisor positivo, múltiplo común menor, mcm, menores a cero, exponentes, cifra, factorizarce, rimo, compuesto -Expresión simbólica: dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, los signos de las operaciones básicas, como ser la “+” (suma), “-“(resta), “.” (Multiplicación) y “/” (división), el signo “=”, los paréntesis (,), corchetes [,], un número x, $\lvert x \rvert$. -Expresión tabular: tablas compuestas por números.
• **Situaciones-Problemáticas** Se presentan los siguientes tipos de problemas: P1: ¿Cuáles son los divisores de números relativamente pequeños? P2: ¿Qué números son coprimos? P3: ¿Un número entero, es divisor de otro? P4: ¿Un número entero es divisible por otro? P5: ¿Un número entero es múltiplo de otro? P6: ¿Cuál es el dcm de dos números enteros relativamente pequeños?

P7: ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños? P8: Dados el mcm y el dcm de dos números enteros, ¿Cuáles son dichos números?
• **Conceptos** -Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c. -Un número natural mayor que 1, se dice primo si 1 y p son sus únicos divisores positivos. -p solo se factoriza en la forma trivial p=1.p. Si un número natural p mayor que 1 no es primo, diremos que es compuesto -Un número entero a es primo si y solo si –a también lo es -Dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivos comunes será llamado el máximo común divisor de a y b, donde la notación a utilizar sea (a; b) -Si el máximo común divisor de dos números, a y b, es 1, dichos números se denominan coprimos -Un número entero a es **divisible** por otro b (distinto de cero), cuando la división entera entre sus valores absolutos tiene resto 0. También se dice que a es un múltiplo de b. -Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b, también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural -Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como [a;b]. -Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente. -El valor absoluto de un número x, $\lvert x \rvert$, es el mismo número x, siempre y cuando x sea mayor o igual a cero y es –x siempre y cuando el número x sea menor estricto que cero. -a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)
• **Proposiciones** -Todo número “b” es múltiplo de 1 -Si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a

divide a b” y que “-a divide a –b” -Teorema Fundamental de la Aritmética: expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales. -Un número entero d divide a otro número entero c si y solo si la factorización del número d divide a c. -Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par. -Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. -Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5. -El producto de potencias de igual base se suman los exponentes -Todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1 -Dado dos números enteros a y b, sé que cumple que $\mathrm{dcm}\,(a, b) = \mathrm{dcm}\,(\lvert a\rvert, \lvert b\rvert)$ y $\mathrm{mcm}[a, b] = \mathrm{mcm}[\lvert a\rvert, \lvert b\rvert]$ -Dado dos números a y b, si a es divisor de b entonces se cumple que a es el dcm de los dos $d(n) = 2.(m+1).(m+1).(m+1)\ldots(m+1)$,$\mathrm{d(n)} = 2.(\mathrm{m}_1 + 1).(\mathrm{m}_2 + 1).(\mathrm{m}_3 1)\ldots(\mathrm{m}_\mathrm{h} + 1)$, siendo los números m_1, m_2, m_3, hasta m_h los exponentes de los números primos de la factorización
• **Procedimientos** Divisiones de números por factores primos. Cálculo de operaciones mediante suma y resta de números. Cálculo de operaciones mediante producto de números. Cálculo de divisores. Cálculo de potencias Cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
• **Argumentos** Argumentación de los resultados a través de los procedimientos utilizados. -El resultado de las operaciones se justifica por medio de la utilización de las operaciones básicas. -El cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo se justifica a través de la definición y utilización de las propiedades de potencia. -El cálculo de las potencias se justifica a través de la aplicación de las propiedades de potencia se justifican a través de la definición de potencia.

4.3.1.6 Relaciones conceptuales más sobresalientes

A continuación, exponemos las relaciones conceptuales más pertinentes entre los objetos primarios

P1: ¿Cuáles son los divisores de números relativamente pequeños?

P2: ¿Qué números son coprimos?

Situación problemática 75

$R_{1,\ 75}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, múltiplo o divisible.

$R_{2,\ 75}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”.

$R_{3,\ 75}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1.

$R_{4,\ 75}$: Entre la situación problemática y la definición de número primo

$R_{5,\ 75}$: Entre la situación problemática y el Teorema fundamental de la Aritmética.

$R_{6,\ 75}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que si un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c.

$R_{7,\ 75}$: Entre la situación problemática y la definición de máximo común divisor.

$R_{8,\ 75}$: Entre la situación problemática y la definición de números coprimos.

$R_{9,\ 75}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{10,\ 75:}$ Entre la situación problemática y los argumentos de la definición de divide, divisor o múltiplo.

$R_{11,\ 75}$: Entre la situación problemática y los argumentos dado por las propiedades utilizadas

$R_{12,\ 75}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para calcular los múltiplos y divisores de un número.

$R_{13,\ 75}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar los números

$R_{14,\ 75}$: Entre la definición de divide, divisor o múltiplo y propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1.

$R_{15,\ 75}$: Entre la definición de divide, divisor o múltiplo y la propiedad que indica que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”.

$R_{16,\ 75}$: Entre el procedimiento para determinar divisores y la propiedad que determina la cantidad de divisores de un número

$R_{17,\ 75}$: Entre las propiedades de potencia y la propiedad que determina la cantidad de divisores de un número

$R_{18,\ 75}$: Entre la situación problemática y los argumentos dados por la definición de máximo común divisor. $R_{19,\ 75}$: Entre la definición de divide, divisor o múltiplo y la definición de número primo. $R_{20,\ 75}$: Entre la definición de divide, divisor o múltiplo y la definición de números coprimos. $R_{21,\ 75}$: Entre la definición de divide, divisor o múltiplo y la definición de máximo común divisor.
P2: ¿Un número entero, es divisor de otro? **P3: ¿Un número entero es divisible por otro?** **P4: ¿Un número entero es múltiplo de otro?** **Situación problemática 76** $R_{1,\ 76}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, múltiplo o divisible. $R_{2,\ 76}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisor, divisible o múltiplo de otro número. $R_{3,\ 76}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar que un número no es múltiplo de otro
P5: ¿Cuál es el dcm de dos números enteros relativamente pequeños? **P6: ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños?** **Situación problemática 78** $R_{1,\ 78}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, múltiplo o divisible $R_{2,\ 78}$: Entre la situación problemática y la definición de máximo común divisor $R_{3,\ 78}$: Entre la situación problemática el procedimiento para determinar el máximo común divisor $R_{4,\ 78}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo $R_{5,\ 78}$: Entre la situación problemática el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo $R_{6,\ 78}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcm}[a,b]=\mathrm{mcm}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$y $\mathrm{mcd}[a,b]=\mathrm{mcd}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$ y el procedimiento para el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo $R_{7,\ 78}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcm}[a,b]=\mathrm{mcm}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$y $\mathrm{mcd}[a,b]=\mathrm{mcd}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$ y la definición de valor absoluto $R_{8,\ 78}$: Entre la situación problemática y la definición de número primo $R_{9,\ 78}$: Entre la situación problemática y el Teorema fundamental de la Aritmética $R_{10,\ 78}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números.

$R_{11,\ 78}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{12,\ 78}$: Entre la situación problemática y la definición de potencia $R_{13,\ 78}$: Entre el procedimiento para determinar el máximo común divisor y las propiedades de potencia. $R_{14,\ 78}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia.
P7: Dados el mcm y el dcm de dos números enteros, ¿Cuáles son dichos números? **Situación problemática 79** $R_{1,\ 79}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, múltiplo o divisible $R_{2,\ 79}$: Entre la situación problemática y la definición de máximo común divisor $R_{3,\ 79}$: Entre la situación problemática el procedimiento para determinar el máximo común divisor $R_{4,\ 79}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo $R_{5,\ 79}$: Entre la situación problemática el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo $R_{6,\ 79}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcm}[a,b]=\mathrm{mcm}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$y $\mathrm{mcd}[a,b]=\mathrm{mcd}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$ y el procedimiento para el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo $R_{7,\ 79}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcm}[a,b]=\mathrm{mcm}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$y $\mathrm{mcd}[a,b]=\mathrm{mcd}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$ y la definición de valor absoluto $R_{8,\ 79}$: Entre la situación problemática y la definición de número primo $R_{9,\ 79}$: Entre la situación problemática y el Teorema fundamental de la Aritmética $R_{10,\ 79}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{11,\ 79}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{12,\ 79}$: Entre la situación problemática y la definición de potencia $R_{13,\ 79}$: Entre el máximo común divisor de dos números y el procedimiento para determinar esos dos números. $R_{14,\ 79}$: Entre el mínimo común múltiplo de dos números y el procedimiento para determinar esos dos números. $R_{15,\ 79}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcm}[a,b]=\mathrm{mcm}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$y $\mathrm{mcd}[a,b]=\mathrm{mcd}[\lvert a\rvert,\lvert b\rvert]$ y el procedimiento para determinar esos dos números. $R_{16,\ 79}$: Entre el procedimiento para determinar el máximo común divisor y las propiedades de potencia.

$R_{17,\ 79}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia.

4.3.1.7 Análisis de las relaciones conceptuales de ambas configuraciones epistémicas

Teniendo en cuenta la configuración epistémica construida con el desarrollo conceptual del contenido divisibilidad de números enteros y las relaciones conceptuales más pertinente que se establecen entre los objetos primarios de dicha configuración, como así también la configuración epistémica de las practicas matemáticas realizadas en las resoluciones de las situaciones problemáticas y las relaciones conceptuales establecidas entre los objetos primarios intervinientes y emergentes de tales resoluciones, encontramos que:

Con respecto a la *situación problemática 75*, que es un representante de los tipos de problemas P_1: ¿Cuáles son los divisores de números relativamente pequeños? Y P_2: ¿Qué números son coprimos?, se puede observar establecimos una amplia gama de relaciones conceptuales que se desprenden de las resoluciones de dicha situación problemática. Como observamos, fue necesario introducir una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para saber cuándo un número es divisor de otro número entero y así poder establecer las relaciones $\mathbf{R_{1,\ 75}}$ y $\mathbf{R_{10,\ 75}}$.La introducción de esta definición fue necesaria porque en el desarrollo conceptual del contenido, en el libro, no se evidencia ningún enunciado de lo que representa un divisor, siendo así imposible resolver dicha situación, ocasionando no poder establecer la relación $\mathbf{R_{12,\ 75}}$.

Además, en la situación problemática se solicita determinar los divisores de dos números positivos y a la vez de sus opuestos, podemos observar que no se evidencia ninguna propiedad que simplifique encontrar dichos divisores, siendo así que fue necesario introducir la propiedad que expresa que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b” (*) y así establecer la relación $\mathbf{R_{2,\ 75}}$. A la vez esta propiedad se corresponde con la definición de divisor dada y así forma la relación $\mathbf{R_{15,\ 75}}$ .La introducción de esta propiedad fue necesaria con el fin de simplificar los procedimientos para determinar los divisores de un número, puesto que al determinar los divisores de números positivos, a la vez ya se determinan los de sus opuestos. A su vez, fue necesaria la introducción de la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1 y así establecer la relación $\mathbf{R_{3,\ 75}}$ y poder expresar así a los tanto números primos como a los números compuestos como un producto de sí mismo y el uno, determinando así sus divisores. A la vez, esta propiedad guarda una correspondencia con la definición de divisor, generando la relación $\mathbf{R}_{14,\ 75}$ Tal introducción fue necesaria debido a que el desarrollo conceptual del libro no lo esgrime. También podemos observar que fue necesario introducir la definición de número primo, el Teorema Fundamental de la Aritmética y la propiedad que expresa que si un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c para hallar los divisores solicitados, de esta forma se determinan las relaciones $\mathbf{R}_{4,\ 75}$**,** $\mathbf{R}_{5,\ 75}$ y $\mathbf{R}_{6,\ 75}$ respectivamente. También fue necesaria la utilización de criterios de divisibilidad que permitieran factorizar los números, generando así la relación $\mathbf{R}_{9,\ 75}$

Podemos notar que en la situación problemática aparecen números relativamente grandes, siendo así que también fue necesario introducir la propiedad que expresa la cantidad de divisores que tiene un número entero y encontrar así todos sus divisores, resultando así la relación $\mathbf{R}_{16,\ 75}$ .Permitiendo esta última propiedad la correspondencia $\mathbf{R}_{17,\ 75}$. Como se solicita determinar números coprimos, fue necesario introducir una definición de máximo común divisor y las condiciones que cumplen dos números para ser llamados coprimos y así determinar las relaciones $\mathbf{R}_{8,\ 75}$ $\mathbf{R}_{7,\ 75}$ $\mathbf{R}_{18,\ 75}$**,** $\mathbf{R}_{19,\ 75}$**,** $\mathbf{R}_{20,\ 75}$ y $\mathbf{R}_{21,\ 75}$ .Como fueron diversas las propiedades utilizadas para hallar los divisores solicitados, esto genero la relación $\mathbf{R}_{11,\ 75}$

Con respecto a la *situación problemática 76* que es un representante de los tipos de problemas P2: ¿Un número entero, es divisor de otro?, P3: ¿Un número entero es divisible por otro? Y P4: ¿Un número entero es múltiplo de otro? Podemos observar que si bien en lo que respecta a los tipos de problema P3 y P4 es posible establecer relaciones con la definición que brinda el desarrollo conceptual del libro, estas son $\mathbf{R}_{1}$, $\mathbf{R}_{2}$**,** $\mathbf{R}_{3}$ **y** $\mathbf{R}_{4}$, surge de dicha definición que solamente se podría resolver esos tipos de problemas y nada más. No aportando un concepto para el caso de la solicitud de divisores, quedando inconclusa la resolución total del problema 76. Ocasionando que la definición de divisible que esgrime el desarrollo conceptual del libro no sea la más adecuada o pertinente. Razón por la cual fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\ 76}$**.** A su vez, la incorporación de esta definición permitió contar con un procedimiento para determinar si un número es divisor, múltiplo o divisible por otro número entero, generando la relación $\mathbf{R}_{2,\ 76}$ y así contar con una argumentación para determinar la verdad o falsedad que se solicita en el problema, construyendo la relación $\mathbf{R}_{3,\ 76}$.

En cuanto a la *situación problemática 78*, que es un representante de los tipos de problema P5: ¿Cuál es el dcm de dos números enteros relativamente pequeños? Y

P6: ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños? Y *situación problemática 79* que es un representante del tipo de problema el mcm y el dcm de dos números enteros, ¿Cuáles son dichos números? Podemos observar que en ambos casos fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer las relaciones **R**$_{1,\ 78}$ y **R**$_{1,\ 79}$. Como podemos observar, en el desarrollo teórico que se esgrime en el libro no se evidencia alguna definición de lo que representa el máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros y el procedimiento para calcularlos, siendo así que fue necesario introducir tales definiciones, propiciando así la construcción de las relaciones **R**$_{2,\ 78}$, **R**$_{3,\ 78}$, **R**$_{4,\ 78}$, **R**$_{5,\ 78}$, **R**$_{2,\ 79}$, **R**$_{3,\ 79}$, **R**$_{4,\ 79}$ y **R**$_{5,\ 79}$. En la lista de números de los cuales se debe determinar su mcd y mcm, podemos observar que existen números positivos y negativos, siendo así que fue necesario introducir la propiedad que expresa que dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcm}[a,b] = \mathrm{mcm}[|a|,|b|]$y $\mathrm{mcd}[a,b] = \mathrm{mcd}[|a|,|b|]$ (*), generando así la relación **R**$_{6,\ 78}$ y **R**$_{6,\ 79}$ y su vinculación con la definición de valor absoluto, conformando las relaciones **R**$_{7,\ 78}$ **y R**$_{7,\ 79}$. Para la utilización de la definición que dimos de mcd, mcm y la propiedad (*), fue necesaria la introducción de lo que representa un número primo y el Teorema Fundamental de la Aritmética, pudiendo construir la correspondencia **R**$_{8,\ 78}$, **R**$_{9,\ 78}$, **R**$_{8,\ 79}$ y **R**$_{9,\ 79}$, donde ambas definiciones se vinculan con el procedimiento para factorizar lo números en un producto de factores primos, propiciando a la vez la construcción de las relaciones **R**$_{10,\ 78}$ y **R**$_{10,\ 78}$. También fue necesaria la utilización de criterios de divisibilidad y propiedades de potencia para posteriormente determinar el mcd y mcm, construyendo así las relaciones **R**$_{11,\ 78}$, **R**$_{12,\ 78}$, **R**$_{13,\ 78}$, **R**$_{78,\ 14}$, **R**$_{11,\ 78}$, **R**$_{12,\ 78}$, **R**$_{16,\ 79}$ y **R**$_{17,\ 79}$.

En cuanto a la situación problemática 79 se observa que dado el mcd y mcm de dos números, es necesario determinar los números que cumplen tal condición, es así que fue necesario establecer las relaciones **R**$_{13,\ 79}$, **R**$_{14,\ 79}$, y **R**$_{15,\ 79}$ para determinar los números que cumplían con tales condiciones.

Como podemos observar en el desarrollo conceptual del libro, se esgrime una definición de múltiplo y una de mínimo común múltiplo (mcm) propiciando el establecimiento de la relación **R**$_5$. No obstante dicha relación no es posible establecerla para las situaciones problemáticas donde se deba calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números. Esto es así porque en primera instancia, no brinda una explicación del porque el mcm puede determinarse tanto para el caso de números enteros positivos, números negativos o el caso en donde se tenga de signos opuestos y en segunda instancia nos encontramos que en las diversas situaciones problemáticas se presentan números relativamente grandes, resultando la relación **R**$_5$

poco práctica para resolver tales problemas. Razón por la cual en el caso de las situaciones problemáticas en las cuales se solicitaba el cálculo del mcm de números enteros relativamente grandes, se introdujo la definición y procedimiento utilizados.

4.2.2 Segundo libro

- ✓ **4.2.2.1 Descripción**

Con respecto a las características generales de este primer libro, denotamos la siguiente información:

Libro:	Matemática II para resolver problemas
Editorial:	Ediciones Santillana Practicas S. A.
Año:	2011
Autores del libro:	María Dolores Álvarez

Adentrándonos en el contenido específico que nos compete, tenemos que en el índice del libro se encuentra escrito lo siguiente:

- ✓ **ÍNDICE**

CAPÍTULO 2. NÚMEROS ENTEROS II

Con respecto a las características específicas que tiene que ver con el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros, se puede denotar lo siguiente:

En el desarrollo teórico que se brinda podemos observar un título que dice múltiplos y divisibilidad y el enunciando “un número es múltiplo de otro si este último es uno de sus factores”, posteriormente se brinda un ejemplo y su explicación, esto es 20 es un múltiplo de 5 y de 4 porque 20= 5.4. Luego se observa un enunciado sobre las reglas de divisibilidad que afirma que estas permiten anticipar si un número es divisible por otro sin hacer la división entera, esgrimiendo la regla de divisibilidad por 11 que expresa que un número es divisible por once si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares da 0, 11 o

-11, dando los ejemplos2574 es múltiplo de 11 porque (2+7)-(5+4)=0 73469 es múltiplo de 11 porque (3+6)-(7+4+9)= -11 8030 es múltiplo de 11 porque (8+3)-0= 11. También podemos observar un título que dice números primos y compuestos y el enunciado Un número es primo si tiene solo 4 divisores enteros: el mismo, su opuesto, 1 y -1. Si tiene más de 4 divisores enteros, es compuesto, siendo el ejemplo, el 11 es primo porque sus divisores son 1, -1, 11 y -1, siendo 6 compuesto, porque sus divisores son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6, expresando que los números 0, 1 y -1 no son primos ni compuestos. A su vez otro título que dice factorización de enteros y el enunciado "La hacemos de igual forma que al buscar los factores primos de un número natural, pero tenemos en cuenta el signo del entero: si es negativo, su descomposición en factores primos aparecerá multiplicada por -1", siendo el ejemplo -12 = (-1). 12 = (-1). 3.4= (-1). 2^2.3. Posteriormente se enuncia como hallar el mcm y mcd de los números 42, -27 y -36, siendo que tomamos el valor absoluto de cada número y lo escribimos como el producto de sus factores primos, 42=2.7.3, 27=3^3 y 36=2^2.3^2, formamos el m.c.m multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente: m.c.m. (42; -27; -36)= 2^2.7.3^3=756, siendo que para hallar el m.c.d. multiplicamos solo los factores comunes con su menor exponente, en este caso hay uno solo: m.c.d. (42; -27; -36)= 3,y se observa una exclamación, ¡Atención! Aunque haya número negativos, el m.c.m. y el m.c.d. siempre son positivos.

Con respecto a las situaciones problemáticas que se exponen para resolver por parte del lector, nos encontramos con las siguientes:

24

Mariana dice que para averiguar todos los divisores de un número trabaja como con los naturales, pero ahora tiene en cuenta que cada divisor puede ser positivo o negativo. Así, resulta que:

24=1.24=(-1).(-24)
=2.12=(2-).(-12)
=3.8=(-3).(-8)
=4.6=(-4).(-6) ¡y ya esa!

No hay otros pares de factores

Escribí todos los divisores de 42, 63 y 90:

De 42: ±1; ±2;_____;_____;_____; ±14;_____Y ±42

De 63: ____________________________________

De 90:____________________________________

28.

Usando las reglas de divisibilidad, determiná si estos números son divisibles por 2, 3, 4, 5, 6, 9, y 10

a. 145____

b. -2.120____

c. 12.624____

30.

a. Completa los espacios con las cifras apropiadas para que cada número sea divisible por 11.

3_6 4.3_8 8_.1_5

b. ¿Cuántas respuestas posibles hay para cada número?

31.

Indica cuales de estos números son primos y cuales, compuestos. Justifica tu respuesta.

a. 21 b. 1921 c. 43 d. 39

32.

a. Escribí múltiplos naturales de 9, 12 y 18 hasta hallar los primeros tres que tengan en común, distinto de cero. ¿Cuál es el menor?

b. Escribí la descomposición en factores primos de 9, 12 y 18 y de su múltiplo común menor. Comproba que al asociar convenientemente los factores primos de este múltiplo menor se puede “ver” 9, 12 o 18 en su descomposición.

33.

Hallá el mcm entre 21 y 24, y entre 7, 9 y 10

34.

Alejandro tiene más de 100 fotografías, pero menos de 150. Puede pegarlas en un álbum a razón de 8, 9 o 12 fotos por página, sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas fotos tiene?

35.

Por un paso a nivel de un ferrocarril pasa un tren rápido con dirección a Tigre cada 30 minutos y otro común, en sentido contrario, cada 18 minutos. Si se cruzaron los dos trenes a las 10:00 de la mañana, hallá a qué hora volverán a cruzarse.

36.

a. Factorizá 28, 70 y 130 y buscá el mayor divisor que tienen en común.

b. Escribí la descomposición de 28, 70 y 130 como la multiplicación del mayor divisor común por el producto de los demás factores primos que componen cada número.

37.

Hallá el máximo común divisor en cada caso

a. 6, -8 y 12   b. 16, -28 y 20   c. 40, -10 y 25

38.

Se quiere cortar en trozos iguales tres cuerdas de 40, 60 y 90m, respectivamente. ¿Cuál es la longitud de los mayores trozos que se pueden hacer y cuantos se obtienen de cada cuerda?

39.

Factorizá los números 700 y 1287 y halla el mcm y el mcd entre ellos. ¿Por qué crees que las respuestas te dan así?

4.2.2.2 Configuración epistémica del desarrollo teórico del contenido

A continuación se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que intervienen en el desarrollo del contenido.

Situación Problemática

$P_{1, 24}$ ¿Cuáles son todos los divisores de números relativamente pequeños?
$P_{2, 28}$ ¿Por cuál número es divisible otro número entero?
$P_{3, 30}$ ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro?
$P_{4, 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es primo?
$P_{5, 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es compuesto?
$P_{5, 32}$ ¿Cuáles son los múltiplos comunes de números relativamente pequeños?
$P_{6, 32}$ ¿Cuál es la factorización de un número?
$P_{7, 33}$ ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños?
$P_{8, 35}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?
$P_{9, 36}$ ¿Cuál es el mcd de tres números enteros positivos relativamente pequeños?
$P_{10, 37}$ ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños?
$P_{11, 38}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el máximo común divisor?
$P_{12, 39}$ Dado dos números relativamente grandes, ¿Cuál es su mínimo común múltiplo, máximo común divisor y la vinculación entre ambos?

MOTIVAN

RESUELVEN

Lenguaje

-Verbal: Un número es múltiplo de otro si este último es uno de sus factores.

-Simbólico:
m.c.m.(42; -27; -36)= $2^2.7.3^3$=756

m.c.d. (42; -27; -36)= 3.

EXPRESA Y SOPORTA

REGULAN EL USO

DEFINICIONES (CONCEPTOS)
Un número es múltiplo de otro si este último es uno de sus factores.
-Número primo y compuesto: Un número es primo si tiene solo 4 divisores enteros: el mismo, su opuesto, 1 y -1. Si tiene más de 4 divisores enteros, es compuesto.
-Los números 0, 1 y -1 no son primos ni compuestos.

Propiedades
Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares da 0, 11 o -11.

Procedimientos
Factorización de Enteros: La hacemos de igual forma que al buscar los factores primos de un número natural, pero tenemos en cuenta el signo del entero: si es negativo, su descomposición en factores primos aparecerá multiplicada por -1.

Para la determinación del M.c.m y m.c.d entre dos o más enteros
Dados los números 42, -27 y -36
-Tomamos el valor absoluto de cada número y lo escribimos como el producto de sus factores primos. 42=2.7.3 27=3^3 36=$2^2.3^2$
-Formamos el m.c.m multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente: m.c.m.(42; -27; -36)= $2^2.7.3^3$=756
-Para hallar el m.c.d. multiplicamos solo los factores comunes con su meno exponente, en este caso hay uno solo: m.c.d. (42; -27; -36)= 3.

INTERVIENEN Y CONDICIONA

JUSTIFICAN

Argumentos
-No existe argumentos explicativos de ningún tipo.

4.2.2.3 Relaciones conceptuales más sobresalientes

A continuación, exponemos las relaciones conceptuales más pertinentes entre los objetos primarios

R_1: Entre la situación problemática P3 y el criterio de divisibilidad por 11

R_2: Entre la situación problemática P4 y la definición de número primo y compuesto.

R_3: Entre la situación problemática P5 y la definición de número primo y compuesto.

R_4: Entre la situación problemática P6 y el procedimiento para factorizar un número

R_5: Entre la situación problemática P7 y el procedimiento para hallar el mínimo común múltiplo

R_6: Entre la situación problemática P8 y el procedimiento para hallar el mínimo común múltiplo

R_7: Entre la situación problemática P9 y el procedimiento para hallar el máximo común divisor

R_8: Entre la situación problemática P10 y el procedimiento para hallar el máximo común divisor

R_9: Entre la situación problemática P11 y el procedimiento para hallar el máximo común divisor

R_{10}: Entre la situación problemática P12 y el procedimiento para hallar el mínimo común múltiplo

R_{11}: Entre la situación problemática P12 y el procedimiento para hallar el máximo común divisor

4.2.2.4 Resolución de las situaciones problemáticas propuestas

- **Situación Problemática 24**

24

Mariana dice que para averiguar todos los divisores de un número trabaja como con los naturales, pero ahora tiene en cuenta que cada divisor puede ser positivo o negativo. Así, resulta que:

24=1.24=(-1).(-24)

=2.12=(2-).(-12)

=3.8=(-3).(-8)

=4.6=(-4).(-6) ¡y ya esa!

No hay otros pares de factores

Escribí todos los divisores de 42, 63 y 90:

De 42: ±1; ±2;_____;_____;_____; ±14;_____Y ±42

De 63: ____________________________________

De 90:____________________________________

El problema consiste básicamente en determinar todos los divisores de los números 42, 63 y 90, partiendo del ejemplo brindado al comienzo de la situación problemática.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, debemos recurrir a la definición de divisor que brindáramos en la resolución de los ejercicios de libros anteriores, como ser: *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*

Dados los números 43, 62, 10 y considerando el Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker), siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (Concepto del libro) y utilizando la definición de divisible, escribimos los números mencionados de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización:

$42 = 2^1.3^1.7^1$ $\qquad$ $63 = 3^2.7^1$ $\qquad$ $90 = 2^1.3^2.5^1$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad, definiciones y propiedades:

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

-*Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. (Propiedad)*

- *Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).*

- *Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).*

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-*el producto de potencias de igual base se suman los exponentes*

-*todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)*

De esta forma, utilizando la propiedad de divisibilidad que expresa que todo número "b" es múltiplo de 1, esto es b=b.1 y conociendo los factores de la descomposición, *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*) al número 42 lo podemos escribir de la siguiente forma: $42 = 42.1 = 2.21 = 2.3.7 = 3.7.2 = 3.14 = 2.3.7 = 6.7$ (procedimiento). Considerando además la propiedad que expresa que la cantidad de divisores d(n) de un número entero cumple, $\mathrm{d(n)} = 2.(\mathrm{m}_1 + 1).(\mathrm{m}_2 + 1).(\mathrm{m}_3 + 1) \ldots (\mathrm{m_h} + 1)$, siendo los números m_1, m_2, m_3, hasta m_h los exponentes de los números primos de la factorización, tenemos que la cantidad de divisores del número 42 es $\mathrm{d}(42) = 2.(1 + 1).(1 + 1).(1 + 1) = 2.2.2.2 = 16$. Es así que utilizando la propiedad que expresa que si *un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c,* los divisores positivos del número 42 son los números 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42, pero además utilizando la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*" (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), resultando esta propiedad una herramienta importante para determinar, entre números enteros positivos y negativos o ambos negativos, si uno de ellos es divisor del otro, sin tener que recurrir a la división. Tenemos que los divisores del número 42, también son los números -1, -2, -3, -6, -7, -14, -21 y -42. Resultando de esta forma que los divisores del número 42 son los números 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, -1, -2, -3, -6, -7, -14, -21 y -42, obteniendo así el total de 16 divisores.

Así mismo, podemos escribir al número 63 de la siguiente forma, 63=63.1=3.21=3.3.7=9.7. Siendo la cantidad de divisores del número 63, $\mathrm{d}(63) = (3 + 1).(2 + 1) = 4.3 = 12$ y aplicando la propiedad (*), tenemos que sus divisores son los números, 1, 3, 7, 9, 21, 63, -1, -3, -7, -9, -21 y-63, obteniendo así un total de 12 divisores. A su vez, al número 90 lo escribimos de la siguiente forma, 90=90.1=2.45=2.3.3.5=6.15=9.10=18.5=30.3. Siendo sus divisores un total de $\mathrm{d}(90) = 2.(1 + 1).(2 + 1).(1 + 1) = 2.2.3.2 = 24$ y aplicando la propiedad (*), resulta así que sus divisores son los números 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90, -1, -2, -3, -5, -6, -9, -10, -15, -18, -30, -45 y -90, obteniendo el total de 24 divisores.

- **Situación Problemática 28**

28.

Usando las reglas de divisibilidad, determiná si estos números son divisibles por 2, 3, 4, 5, 6, 9, y 10

a. 145____

b. -2.120____

c. 12.624____

El problema consiste en determinar si los números 145, -2120 y 12624, son divisibles por la lista de números brindada.

Resolución:

Si leemos la situación problema, se tiene tres números de los cuales se debe determinar si son divisibles por la siguiente lista de números, 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10. Para evitar estar dividiendo cada uno de los tres números por cada número de la lista, recurrimos a la siguiente definición y criterios de divisibilidad que facilitaran nuestra labor:

-*"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

- *"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)*

-Un número es divisible por 4 si las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o termina en doble cero.

-*Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).*

-Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3 a la vez (propiedad).

-Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9*(propiedad).*

-Un número es divisible por 10 si su última cifra es 0*(propiedad).*

Consideremos primero al número 145. Siguiendo el orden de la lista de criterios que dimos en el párrafo anterior, podemos afirmar que el número 145 no es divisible por 2, puesto que su última cifra, el 5, no es un número par (argumentación). Sumando todas las cifras del número, 1+4+5 (Procedimiento), nos encontramos que dicha suma da como resultado 9 y como 9 es un número múltiplo de 3, dado que 9=3.3 (Procedimiento), estamos en condiciones de afirmar que el número 145 es divisible por 3 (argumentación). Como las dos últimas cifras son el 4 y 5, que sumados 4+5 (Procedimiento) dan 9 y 9 no es múltiplo de 4, afirmamos que el número 145 no es divisible por 4 (argumentación). Como la última cifra es el 5, decimos que dicho número es divisible por el número 5 (argumentación). Como el 145 no es divisible por 2, entonces afirmamos que tampoco va a ser divisible por 6, porque para que esto suceda, debe ser divisible por 2 y 3 a la vez (argumentación). Como mencionáramos, la suma de todas sus cifras da como resultado 9 (Procedimiento), afirmamos que 145 es divisible por 9 (argumentación). Como sucede que la última cifra es distinta de 0, entonces no es aplicable el criterio de divisibilidad por 10 (argumentación). Es así, como 145 es divisible por 3, 5 y 9

Consideremos ahora al número -2.120. Como la última cifra es el número 0 y este es un número par, eso significa que es divisible por 2(argumentación). Si sumamos todas sus cifras, 2+1+2+0 (Procedimiento) da como resultado 5 y como 5 no es múltiplo de 3(argumentación), afirmamos que no es divisible por 3. Consideremos las dos últimas cifras, como podemos escribir al 20 de la siguiente forma 20=4.5 (Procedimiento), quiere decir que es un múltiplo de 4(argumentación), con lo cual es -2120 es divisible por 4. Como mencionáramos, la última cifra es 0, con lo cual también es divisible por 5 y al no ser divisible por 2 ni por 3 (argumentación), significa que tampoco es divisible por 6. Como calculáramos anteriormente, la suma de sus cifras es 5 (Procedimiento) y 5 no es múltiplo de 9 (argumentación), con lo cual tampoco es divisible por 9. Al ser su última cifra 0 (argumentación), si es divisible por 10. En conclusión, el número -2120, es divisible por 2, 4, 5 y 10.

Por último, tenemos al número 12.624. Al ser su última cifra el 4, al que podemos escribir de la forma 4=2.2, es divisible por 2 (Procedimiento). Sumando todas sus cifras, 1+2+6+2+4 (Procedimiento), obtenemos como resultado 15 y como dicho número podemos escribirlo de la forma 15=3.5 (Procedimiento), afirmamos que 12.624 es divisible por 3. Como las dos últimas cifras la podemos escribir como un múltiplo de 4, siendo 24=6.4 (Procedimiento), concluimos que también es divisible por 4. Como su última cifra es distinta del 0 o el 5, dicho número no es divisible por 5. Como mencionáramos, tanto el 2 como el número 3 son divisores del número 12624, con ello podemos afirmar que también es divisable por 6. Al sumar todas sus cifras, obtuvimos como resultado 15 (Procedimiento) y como el 15 no es posible expresarlo como un múltiplo de 9 (argumentación), afirmamos que el número 12624 no es divisible por 9. Como la condición para que sea divisible por 10 es que su última cifra sea 0, como en este caso la última cifra es 4(argumentación), concluimos que tampoco es divisible por 10. En conclusión, el número 12624 es divisible por 2, 3, 4 y 6.

- **Situación Problemática 30**

30.

a. Completa los espacios con las cifras apropiadas para que cada número sea divisible por 11.

3_6 4.3_8 8_.1_5

b. ¿Cuántas respuestas posibles hay para cada número?

En el ítem a, tenemos una lista de tres números a los cuales les hace falta un digito, en una determinada posición y solicita completarla con un digito para que dicho número sea divisible por 11.

En cuanto al ítem b, es una pregunta relacionada con el ítem anterior, donde da a entender que existen varias soluciones para cada uno de los números de la lista.

<u>Resolución:</u>

Si leemos el problema, se tiene tres números de los cuales una o más de las cifras de cada número es desconocida, pero la condición para completar el espacio en blanco con una cifra en particular es que debe cumplir que dicho número tiene que ser divisible por 11. Para empezar a resolver dicha situación problemática, recurrimos a la siguiente definición de divisible y al criterio de divisibilidad por 11, que expresan:

> *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker).*
>
> *"Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares es un múltiplo de 11 (*) (propiedad)*

Valiéndonos de lo definido anteriormente, tenemos que el primer número a completar es 3_6. Como se observa es un solo espacio en blanco a completar, siendo así que tenemos 10 posibles números que pueden ocupar ese lugar, ellos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 (**). Pero como la condición es que sea divisible por 11, usando el criterio mencionado (*) (argumentación) tenemos que la suma de las cifras de lugar impar 6+3 da como resultado 9 (procedimiento), y como solo tenemos un lugar que representa una cifra par y coincide con la cifra a determinar, llamando convenientemente a dicha cifra como X, se debe cumplir que 6+3-X=9-X sea un múltiplo de 11. Planteando la situación como una igualdad tenemos la siguiente posibilidad, 9-X=11.c, con c un número entero.

Como tenemos que X solamente puede valer uno de los dados en (**), es así que tenemos:

Si X=0, tenemos que 9-0=9

Si X=1 tenemos que 9-1=8

Si X=2, tenemos que 9-2=7

Si X=3, tenemos que 9-3=6

Si X=4, tenemos que 9-4=5

Si X=5, tenemos que 9-5=4

Si X=6, tenemos que 9-6=3

Si X=7, tenemos que 9-7=2

Si X=8, tenemos que 9-8=1

Si X=9, tenemos que 9-9=0

Considerando todas las posibilidades que escribimos y analizando las igualdades, notamos que en los casos donde X=0, X=1, X=2, X=3, X=4, X=5, X=6, X=7 y X=8, los resultados de la diferencia dan un número positivo, variando entre 9 y 1 (argumentación), siendo estos no múltiplos de 11. Cuestión que cambia cuando X=9, en este caso al dar como resultado 0 y aplicando el criterio de divisibilidad por 11 (*) (propiedad) tenemos que se verifica la igualdad 9-9=0=11.0. Con esto afirmamos que la cifra buscada es X= 9 y que el número en cuestión es 396. Es así que aplicando el criterio (*) al número que planteamos, esto es 6+3-9=0, cumple con lo solicitado por el ejercicio.

Con respecto al número 4.3_8, podemos razonar de la misma forma que en el caso anterior. Llamando X a la cifra buscada, siendo el mismo un valor de la lista (**) y utilizando el criterio de divisibilidad por 11, tenemos que la diferencia entre la suma de cifras de lugar impar 8+3 y la suma de las cifras lugar par X+4, origina la cuenta 8+3-(X+4), teniendo como resultado un múltiplo de 11. Planteando la situación como una igualdad tenemos la siguiente posibilidad, 7-X=11.c, con c un número entero

Es así que considerando los valores que puede asumir X de la lista (*) y realizando la diferencia entre las cifras ubicadas en los lugares pares e impares, tenemos que:

Si X=0, tenemos que 7-0=7

Si X=1, tenemos que 7-1=6

Si X=2, tenemos que 7-2=5

Si X=3, tenemos que 7-3=4

Si X=4, tenemos que 7-4=3

Si X=5, tenemos que 7-5=2

Si X=6, tenemos que 7-6=1

Si X=7, tenemos que 7-7=0

Si X=8, tenemos que 7-8=-1

Si X=9, tenemos que 7-9=-2

Considerando todas las posibilidades que escribimos y analizando las igualdades, notamos que en los casos donde X=0, X=1, X=2, X=3, X=4, X=5, X=6, X=8 y X=9, todos los resultados de la diferencia dan números positivos y negativos, pero ninguno de ellos es múltiplo de 11. Cuestión que cambia cuando X=7, porque en este caso la diferencia da como resultado 0 y cumple con el criterio de divisibilidad por

11 (*) (propiedad). Con esto afirmamos que la cifra buscada es el 7 y que el número en cuestión es 4.378. Es así que aplicando el criterio (*) al número que planteamos, tenemos que 8+3-(7+4) =0=11.0, cumpliendo con lo solicitado por el ejercicio.

En cuanto al número 8_.1_5, la cuestión cambia con respecto a los párrafos anteriores, porque ahora tenemos dos espacios en blanco donde se deben completar con una cifra de la lista (*). Para este caso, llamamos X al lugar de la unidad de mil e Y al lugar de la decena, siendo ambos un valor de la lista (*), donde ahora obtenemos el número 8X.1Y5. Utilizando el criterio de divisibilidad por 11, tenemos que la diferencia entre la suma de cifras impares, 5+1+8, y la suma de cifras pares, X+Y, origina que tengamos 5+1+8-(X+Y), donde dichas operaciones den como resultado un múltiplo de 11 5+1+8-(X+Y)=11.c, con c entero. Retomando la igualdad que planteáramos y resolviendo la suma y diferencia obtenemos 14-(X+Y)=11.c, con c entero (procedimiento). A diferencia de los casos anteriores, ahora tenemos dos números, X e Y que asumen cualquier valor de la lista (*) y que pueden verificar que el número 8X.1Y5 cumpla que de cómo resultado un número múltiplo de 11.

Consideremos la siguiente tabla donde anotamos todas las posibilidades que se dan al sumar X e Y:

+		**Y**									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
X	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Observando la tabla, notamos que existen números que se van repitiendo a lo largo de toda la misma, es así que usando la propiedad conmutativa de la suma en números naturales (argumentación), tenemos que 14-(X+Y) =14-(Y+X), demostrando que solo es necesario analizar uno de los dos miembros de la igualdad. Observando la tabla, podemos denotar que la suma de los números X e Y da como resultado un número que es mayor o igual a 0 y menor o igual a 18. Esto nos conduce a razonar que la diferencia 14-0 da como resultado 14 y la diferencia 14-18 da como resultado -4, llevándonos a pensar que la diferencia 14-(X+Y) es un número mayor o igual a -4 y menor o igual a 14. Si a esto añadimos que para que un número sea divisible por once la diferencia de la suma de las cifras pares y las impares puede dar como resultado 0 y 11, siendo estos números mayores a -4 y menores a 14, entre los números mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 18, se encontraran ambos números. Esto genera que solamente debamos considerar los casos donde la diferencia 14-(X+Y) de cómo resultado 0 u 11. Siendo las posibilidades: 14-14=0 y X+Y=14 y el caso donde 14-3=11 y X+Y=3.

Retomando la suma X+Y igual a 14, tenemos las siguientes combinaciones, X=9, Y=5 X=8, Y=6; X=7, Y=7; X=6, Y=8; X=5, Y=9. Teniendo presente cada una de esas combinaciones y considerando el criterio dado en (*), tenemos que se gestan varias posibilidades para el número 8X.1Y5, siendo estas (procedimiento):

Si X=9, Y=5, tenemos el número 89.155. En el cual por (*), 5+1+8-(9+5)=0

Si X=8, Y=6, tenemos el número 88.165. En el cual por (*), 5+1+8-(8+6)=0

Si X=7, Y=7, tenemos el número 87.175. En el cual por (*), 5+1+8-(7+7)=0

Si X=6, Y=8, tenemos el número 86.185. En el cual por (*), 5+1+8-(6+8)=0.

Si X=5, Y=9, tenemos el número 85.195. En el cual por (*), 5+1+8-(5+9)=0.

Si ahora tenemos que la suma X+Y es igual a 3. Observando la tabla tenemos las siguientes combinaciones, X=0, Y=3; X=1, Y=2; X=2, Y=1; X=3, Y=0. Considerando estas combinaciones y el criterio de divisibilidad por 11, tenemos varias posibilidades para el número 8X.1Y5, siendo estas:

Si X=0, Y=3, tenemos el número 80.135 Donde por (*), 5+1+8-(0+3)=11.

Si X=1, Y=2, tenemos el número 81.125 Donde por (*), 5+1+8-(1+2)=11.

Si X=2, Y=1, tenemos el número 82.115 Donde por (*), 5+1+8-(2+1)=11.

Si X=3, Y=0, tenemos el número 83.105 Utilizando Donde por (*), 5+1+8-(3+0)=11.

Es así que completando convenientemente la cifra de mil y la decena del número 8_.1_5, los números que verifican que son divisibles por 11 son 80.135, 81.125, 82.115, 83.105, 89.155, 88.165, 87.175, 86.185 y 85.195

Con respecto a la pregunta del ítem b), tenemos que para los números 3_6 y 4.3_8, solamente es una cifra a determinar para que sea divisible por 11, con lo cual existe una respuesta posible para cada uno. Pero en cuanto al número 8_.1_5, nos encontramos que son dos las cifras a determinar, originando que tuviéramos varios números que cumplan con la condición de ser divisibles por 11, en este caso un total de 9 números.

- **Situación Problemática 31**

31.
Indica cuales de estos números son primos y cuales, compuestos. Justifica tu respuesta.
a. 21 b. 1921 c. 43 d. 39

La situación problemática solicita determinar las características de diversos números, teniendo que afirmando si son primos o compuesto y solicitando una justificación ara cada afirmación

Resolución:

Para decidir si un número es primo o compuesto, debemos recurrir a las siguientes definiciones:

Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker).*

Un número es primo si tiene solo 4 divisores enteros: el mismo, su opuesto, 1 y -1. Si tiene más de 4 divisores enteros, es compuesto (definición del libro) (*).

Si bien, con las definiciones anteriores nos permite saber cuándo un número divide a otro y cuando un número es primo o compuesto, utilizando el Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker) y la siguiente propiedad que expresa que si *un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c*. *(Propiedad del libro aritmética de M. Becker), nos permite a través de conocida la factorización de un número, determinar sus divisores*. Es así, que ahora contamos con una herramienta que nos permite hallar fácilmente todos los divisores de un número.

Consideremos los números 21, 1921, 43 y 39. Para determinar sus divisores los escribimos y ordenamos de la siguiente forma (Procedimiento):

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1921 & 17 \\ 113 & 113 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 43 & 43 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización:

$21 = 3^1.7^1$ $1921 = 17^1.113^1$ $43 = 43^1$ 39= $3^1.13^1$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

-*"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)*

- *Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).*

- Un número es divisible por 13 cuando separando la cifra de la unidad, multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 13 (propiedad).

- Un número es divisible por 17 cuando separando la primera cifra de la unidad, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17(propiedad).

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

De esta forma, conociendo todos sus factores y sus exponente, utilizamos la propiedad que expresa que la cantidad de divisores de un número entero cumple que d(n)=2.(m+1).(m+1).(m+1)…(m+1),$\mathrm{d(n)} = 2.(\mathrm{m}_1 + 1).(\mathrm{m}_2 + 1).(\mathrm{m}_3 + 1) \dots (\mathrm{m}_\mathrm{h} + 1)$, siendo los números m_1, m_2, m_3, hasta m_h los exponentes de los números primos de la factorización. Por lo cual, la cantidad de divisores del número 21 es $\mathrm{d}(21) = 2.(1 + 1).(1 + 1) = 2.2.2 = 8$, los del número 1921 es $\mathrm{d}(1921) = 2.(1 + 1).(1 + 1) = 2.2.2 = 8$, lo del número $\mathrm{d}(43) = 2.(1 + 1) = 2.2 = 4$ y los del número 39 es $\mathrm{d}(39) = 2.(1 + 1).(1 + 1) = 2.2.2 = 8$. Teniendo presente la definición dada en (*) (argumentación), como los números 21, 1921 y 39 tienen más de cuatro divisores, todos ellos son números compuesto. Sin embargo, el número 43 al tener solo cuatro divisores, es un número primo.

- **Situación Problemática 32**

32.
a. Escribí múltiplos naturales de 9, 12 y 18 hasta hallar los primeros tres que tengan en

común, distinto de cero. ¿Cuál es el menor?

b. Escribí la descomposición en factores primos de 9, 12 y 18 y de su múltiplo común menor. Comproba que al asociar convenientemente los factores primos de este múltiplo menor se puede "ver" 9, 12 o 18 en su descomposición.

En el ítem a, tenemos tres número positivos y menores de 20, de los cuales se solicita dar a conocer sus múltiplos y determinar en cuales múltiplos coindicen. Con respecto al ítem b, solicita determinar el mínimo común múltiplo luego de factorizar los números que propone el problema.

<u>Resolución:</u>

Para el caso del ítem a, nos encontramos que se solicita determinar los múltiplos de tres números hasta que coincidan en tres múltiplos. Como sucede que los múltiplos de un número pueden ser muchos y al solicitar que coincidan los múltiplos de tres números en particular puede suceder que se deba dar muchos múltiplos hasta cumplir con lo solicitado, sería conveniente determinar el primer múltiplo común y los demás en los cuales coincida. Teniendo presente esto y para no realizar cuentas innecesarias, consideramos el siguiente concepto:

> *Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker). Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente.*

Ahora, consideramos la definición que expresa que s*i a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también* el *Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)* y siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (*Concepto del libro*) , escribimos a los números 9, 12 y 18 de la siguiente forma:

9	3		12	2		18	2
3	3		6	2		9	3
1			3	3		3	3
			1			1	

Factorización:

$9 = 3.3 = 3^2$ $\quad\quad 12 = 2.2.3 = 2^2.3^1$ $\quad\quad 18 = 2.3.3 = 2^1.3^2$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad, propiedades y definiciones:

- Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).

-Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. (Propiedad)

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes (propiedades)

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como ya contamos con la descomposición en factores primos de cada uno de los números del problema, determinamos su mcm realizando el producto de los factores primos elevados al mayor exponente (procedimiento), esto es: $\text{mcm}[9{,}12{,}18] = 2^2.3^2 = 4.9 = 36$

Este último cálculo nos permite responder a lo solicitado en el ítem a del ejercicio, porque al ser 36 el mcm de los números 9, 12 y 18, solo nos resta determinar los múltiplos del 36 y así dar con lo solicitado (procedimiento), esto es:

36.1=36 $\quad\quad$ 36.2=72 $\quad\quad$ 36.3=108

Es así como considerando la definición de múltiplo que diéramos al comienzo, tenemos que los tres primeros múltiplos en común de los números 9, del 12 y del 18 van a ser los hallados anteriormente. Porque al considerar sus múltiplos tenemos que (argumentación):

Múltiplos del 9	Múltiplos del 12	Múltiplos del 18
9.2= 18	12.2= 24	**<u>18.1= 36</u>**
9.3=27	**<u>12.3= 36</u>**	18.2= 54
<u>9.4=36</u>	12.4= 48	**<u>18.3= 72</u>**
9.5= 45	12.5= 60	18.2= 90
9.6= 54	**<u>12.6= 72</u>**	**<u>18.2= 108</u>**
9.7= 63	12.7= 84	18.2= 126

<u>9.8= 72</u>	12.8= 96	18.2= 144
9.9= 81	**<u>12.9= 108</u>**	18.2= 162
9.10= 90	12.10= 120	18.2= 180
9.11=99	12.11= 132	18.2= 198
<u>9.12= 108</u>	12.12= 144	18.2= 216

Con respecto al ítem b, la descomposición solicitada es $9=3.3=3^2$, $12=2.2.3=2^2.3$ y $18=2.3.3=2.3^2$, siendo su mcm el número 36, como calculáramos con anterioridad. Como el número 36 puede escribirse de la forma $36=2^2.3^2=2.2.3.3$, podemos asociar convenientemente y conmutando los factores (procedimiento), expresar al mcm como múltiplo de los números 9, 12 y 18, siendo:

$36=2^2.3^2=2.2.3.3=4.\mathbf{9}$ $36=2^2.3^2=2.2.3.3=3.\mathbf{12}$ $36=2^2.3^2=2.2.3.3=2.\mathbf{18}$

- **Situación Problemática 33**

33. Hallá el mcm entre 21 y 24, y entre 7, 9 y 10

En este problema, básicamente solicita el mcm de dos y tres números enteros positivos en particular.

<u>Resolución:</u>

Como debemos calcular el mínimo común múltiplo-mcm, consideremos la siguiente definición:

Dada la factorización de cada número, consideramos que *dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como [a;b] (Concepto del libro aritmética de M. Becker). Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente (*).*

Ahora, valiendo de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (*Concepto del libro*), escribimos a los números 21, 24, 7, 9 y 10 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización:

$21 = 3.7 = 3^1.7^1$ $\qquad$ $24 = 2.2.2.3 = 2^3.3^1$

$7 = 7^1$ $\qquad$ $9 = 3.3 = 3^2$ $\qquad$ $10 = 2.5 = 2^1.5^1$

Para esto tuvimos en cuenta que:

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

-*"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)*

- Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

- Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como ya contamos con la factorización de cada número, valiéndonos de lo definido en (*), tenemos que

-Considerando primero los números 21 y 24 tenemos que $21 = 3.7 = 3^1.7^1$ y $24 = 2.2.2.3 = 2^3.3^1$, siendo el $\mathrm{mcm}[21,24] = 2^3.3^1.7^1 = 8.3.7 = 168$

Y el mcm de 7, 9 y 10 es:

-Considerando ahora los números 7, 9 y 10, tenemos que 7=7.1, 9=3.3=3^2 y 10=2.5, siendo su mcm [7,9, 10] =2.3^2.5.7= 630

De esta forma, afirmamos que el mínimo común múltiplo de los números 21 y 24 es el número 168 y el mínimo común múltiplo de los números 7,9 y 10 es el número 630.

- **Situación Problemática 34**

34.

Alejandro tiene más de 100 fotografías, pero menos de 150. Puede pegarlas en un álbum a razón de 8, 9 o 12 fotos por página, sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas fotos tiene?

La situación problemática tiene un contexto en particular donde dado una cantidad determinada de fotografías, cumple con las condiciones que dicha cantidad es mayor a 100 pero menor a 150, y que se puede distribuirse a razón de 8, 9 o 12 fotos en una página sin que sobre ninguna. Siendo que es necesario determinar la cantidad de fotografías que cumple con esas condiciones.

<u>Resolución:</u>

Consideremos como X al número de fotografías a determinar, cumpliendo que es mayor que 100 y menor a 150 y que a la vez puede distribuirse o dividirse entre 8, 9 y 12 elementos. De esta forma, valiéndonos de la definición de divisible que expresa que *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, con lo cual si X puede distribuirse entre los números mencionados entonces X es un número múltiplo de 8, 9 y 12. Al ser el número de fotografías múltiplo de los números mencionados, puede ocurrir una de dos cosas, o es el mínimo común múltiplo o es mayor al mínimo común múltiplo. De esta forma, ya sabemos que primeramente debemos determinar el mcm de 8,9 y 12.

Utilizando el *Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (*Concepto del libro*), hacemos lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización:

$8 = 2.2.2 = 2^3$ 9$= 2.2.2 = 2^3$ $12 = 2.2.3 = 2^2.3^1$

Para esto tuvimos en cuenta que:

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

-"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Es así que, teniendo la descomposición en factores primos de cada uno de los números, determinamos su mínimo común múltiplo, para ello tenemos en cuenta que

> *"Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". "Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente.*

Valiéndonos de lo definido, tenemos que el mcm de los números $8=2^3$, $9=3^2$ y $12=2^2.3$ es mcm [8, 9, 12] = $2^3.3^2$=72

Como podemos observar, el mcm de 8,9 y 12 es 72 y no cumple con la condición de ser mayor a 100 y menor a 150, lo cual nos conduce a pensar que X es un múltiplo mayor al mcm. Partiendo de lo expresado, que consideramos algunos múltiplos positivos de 72, siendo estos 72.1=72, 72.2=144 y 72.3=216 (procedimiento), donde nos detenemos al ver que el número 216 ya excede al número 150. Es así que el número 144 es mayor a 100 y menor a 150 y que además podemos escribirlo de la forma 144=8.18, 144=9.16 y 144=12.12 (argumento), denotando que es múltiplo de los números 8, 9 y 12. A partir de esto, afirmamos que la cantidad de fotografías que tiene Juan y que cumple que puede distribuirse entre 8,9 o 12 fotos por páginas, siendo además esa cantidad mayor que 100 y menor a 150, es de 144 fotos.

- **Situación Problemática 35**

35.

Por un paso a nivel de un ferrocarril pasa un tren rápido con dirección a Tigre cada 30 minutos y otro común, en sentido contrario, cada 18 minutos. Si se cruzaron los dos trenes a las 10:00 de la mañana, hallá a qué hora volverán a cruzarse.

La situación problemática tiene un contexto donde intervienen dos trenes que circulan en sentidos opuestos y que cada cierto tiempo se cruzan. Como lo hacen a intervalos de tiempo regulares, solicita determinar en qué momento del día vuelven a cruzarse.

<u>Resolución:</u>

El enunciado de la situación del problema manifiesta que dos trenes circulan cada 18 y 30 minutos por un paso nivel. Como sucedió que se cruzaron a las 10 de la mañana, es de esperar que en un determinado momento se vuelvan a cruzar. Como cada cierto tiempo en minutos cada tren cruza el paso de nivel, es necesario determinar el momento siguiente en minutos que lo volverán a hacer. Es así, que debemos determinar el mínimo común múltiplo de 18 y 30 para saber en qué momento volverán a cruzarse a partir de la última vez que se cruzaron. Para ello definimos lo siguiente:

> *"Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". "Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente"* (*)

Ahora, valiendo de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (*Concepto del libro*), escribimos a los 18 y 30 de la siguiente forma:

18	2	30	2
9	3	15	3
3	3	5	5
1		1	

Factorización: $18 = 2.3.3 = 2^1.3^2$ $30 = 2.3.5 = 2^1.3^1.5^1$

Para esto tuvimos en cuenta que:

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

-*"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)*

- *Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).*

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como a los números 18 y 30 los podemos escribir de la forma $18=2.3^2$ y 30=2.3.5, utilizando el definido en (*), tenemos que el mcm de dichos números es $mcm[18{,}30] = 2.3^2.5 = 90$

Como los números 18 y 30 están expresados en minutos, esto implica que el mcm también lo está. Con lo cual, si a las 10:00 de la mañana se cruzaron, eso significa que 90 minutos después se vuelven a cruzar. Como 90 minutos es equivalente a 1hora y 30 minutos, eso significa que los trenes se volverán a cruzar a las 11:30 de la mañana del mismo día, respondiendo de esta forma a lo solicitado.

- **Situación Problemática 36**

36.

a. Factorizá 28, 70 y 130 y buscá el mayor divisor que tienen en común.

b. Escribí la descomposición de 28, 70 y 130 como la multiplicación del mayor divisor común por el producto de los demás factores primos que componen cada número.

La situación consta básicamente de dos ítems, en el cual en el ítem a se tiene que formado por dos partes; una es factorizar tres números distintos y la otra es determinar el mayor divisor común de dichos números.

Con respecto al ítem b, tenemos una vinculación con el ítem anterior, pues solicita que se utilice todo lo calculado en pasos anteriores.

<u>Resolución:</u>

Resolvemos primero el ítem a. En el mismo se solicita determinar dos cuestiones, una de ellas es dar la factorización de los números y la segunda es dar a conocer el máximo divisor que tienen en común. Para la primer cuestión, nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (*Concepto del libro*), escribimos a los números 28, 70 y 130 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización:

$28 = 2.2.7 = 2^2.7^1$ $\qquad 70 = 2.5.7 = 2^1.5^1.7^1$ $\qquad 130 = 2.5.13 = 2^1.5^1.13^1$

Para esto tuvimos en cuenta que:

-Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).

- Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

- Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Siendo los factores del número 28 lo números 2,2 y 7, los del 70 los números 2,5, 7 y los del 130 los números 2,5 y 13.

Con respecto a la segunda parte del ítem a, esto es determinar el mayor divisor en común y dado que se tiene la descomposición en factores primos de cada uno de los números, determinamos su máximo común divisor. Para ello tenemos en cuenta la siguiente definición:

"Dados dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivo será llamado el máximo común divisor (mcd) de a y b y lo denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". "Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural".

Es así, que considerando la descomposición de los números 28, 70 y 130, esto es $28=2^2.7$, 70=2.5.7, 130=2.5.13 y observando que el divisor común entre los tres números es el dos, resulta que el $\mathrm{mcd}(28{,}70{,}130) = 2^1 = 2$. Cumpliendo con lo solicitado por el ítem a.

Con respecto al ítem b, como tenemos que la descomposición del número 28 es 28=2.2.7, la de 70 es 70=2.5.7 y la de 130 es 130=2.5.13 y el máximo común divisor de todos ellos es el 2. Escribimos cada uno de los números como un producto del máximo común divisor por el producto de los demás factores primos que componen cada número (procedimiento), esto es: al número 28 lo escribimos como $28 = 2.2.7 = = \mathrm{mcd}(28{,}70{,}130).\mathrm{mcd}(28{,}70{,}130).7$, al número 70 lo escribimos como $70 = 2.5.7 = \mathrm{mcd}(28{,}70{,}130).5.7$ y al número 130 lo escribimos como $130 = 2.5.13 = = \mathrm{mcd}(28{,}70{,}130).5.13$. Cumpliendo con lo solicitado.

- **Situación Problemática 37**

37.
Hallá el máximo común divisor en cada caso
a. 6, -8 y 12   b. 16, -28 y 20   c. 40, -10 y 25

El enunciado del ejercicio solicita determinar el máximo común divisor de tres grupos de tres números cada uno. Sin embargo, a diferencia de los ítems anteriores, ahora algunos números son menores a cero.

Resolución:

Como el enunciado solicita determinar el máximo común divisor de diversos grupos de números enteros, consideramos lo siguiente:

"Dados dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivo será llamado el máximo común divisor (mcd) de a y b y lo denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". "Como el máximo común divisor

(mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural (*)*".*

Para poder utilizar lo definido anteriormente debemos determinar los factores primos de cada número, para ello nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (*Concepto del libro*), es así que considerando todos los números propuesto por el ejercicio y hacemos lo siguiente:

a.	b.	c.
$\begin{array}{r\|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} -8 & 2 \\ -4 & 2 \\ -2 & 2 \\ -1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} -28 & 2 \\ -14 & 2 \\ -7 & 7 \\ -1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} -10 & 2 \\ -5 & 5 \\ -1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
Factorización: $6 = 2.3 = 2^1.3^1$ $-8 = -1.2.2.2 = -1.2^3$ $12 = 2.2.3 = 2^2.3^1$	Factorización: $16 = 2.2.2.2 = 2^4$ $-28 = 2.2.7 = 2^2.7^1$ $20 = 2.2.5 = 2^2.5^1$	Factorización: $40 = 2.2.2.5 = 2^3.5^1$ $-10 = 2.5 = 2^1.5^1$ $20 = 5.5 = 5^2$

Para esto tuvimos en cuenta que:

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

-"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)

- *Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).*

- *Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).*

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como ya contamos con la factorización de cada número de cada ítem, ahora nos resta determinar el máximo común divisor de cada grupo. Pero en este caso, a diferencia de problemas anteriores donde calculamos el mcd de dos o más números positivos, ahora nos encontramos con números enteros que son menores a cero. Para resolver esta situación, recurrimos a la propiedad que expresa que dados *dos números enteros a y b se cumple que* $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(|a|, |b|)$, (**)) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker pág. 31.)*. Donde las barras | | Simbolizan el valor absoluto de un número. Razón por la cual la definición que ocuparemos es: el valor absoluto de un número, $|x|$, es el mismo número x, siempre y cuando x sea mayor o igual a cero y es –x siempre y cuando el número x sea menor estricto que cero.

Es así que con respecto al ítem a, la factorización de los números 6, -8 y 12 son 6=2.3, -8=-1.2^3 y 12=2^2.3, valiéndonos de la definición de mcd que diéramos al comienzo del ejercicio (*) y la propiedad (argumento) anterior (**), tenemos que $|6|$=6 y $|2.3|$=2.3 teniendo ahora que 6=2.3, a su vez $|-8|$=8 y $|-1.2^3|$=2^3 teniendo ahora que 8=2^3 y $|12|$=12 y $|2^2.3|$= 2^2.3, teniendo que 12=2^2.3 y el $\mathrm{mcd}(|6|, |-8|, |12|) = \mathrm{mcd}(6,8,12) = 2$ (procedimiento). Siendo el máximo común divisor de 6, -8 y 12, el número 2.

En cuanto al ítem b, aplicando el mismo procedimiento que en el caso anterior, tenemos que a los números 16, -28 y 20, los podemos escribir como 16=2^4, -28=-1.2^2.7 y 20=2^2.5, usando la definición de mcd (*) y la propiedad (**) (argumento) , tenemos que $\mathrm{mcd}(|16|, |-28|, |20|) = \mathrm{mcd}(16,28,20) = 2^2 = 4$ (procedimiento). Siendo el máximo común divisor de 16, -28 y 20, el número 4.

En cuanto al ítem c, recurrimos al mismo procedimiento que en los casos anteriores, donde ahora tenemos que a los números 40, -10 y 25, los podemos escribir como 40=2^3.5, -10=-1.2.5 y 25=5^2, usando la definición de mcd (*) y la propiedad (**) (argumento), tenemos que el $\mathrm{mcd}(|40|, |-10|, |25|) = \mathrm{mcd}(40,10,25) = 5$ (Procedimiento). Siendo el máximo común divisor de 40, -10 y 25, el número 5.

- **Situación Problemática 38**

38. Se quiere cortar en trozos iguales tres cuerdas de 40, 60 y 90m, respectivamente. ¿Cuál es la longitud de los mayores trozos que se pueden hacer y cuantos se obtienen de cada cuerda?

La situación problemática cuenta con un contexto determinado donde se tiene tres cuerdas de distintas longitudes expresadas en metros y se quiere realizar una división de cada cuerda, asumimos en partes iguales todas las cuerdas, de tal forma que se pueda obtener trozos de la mayor longitud posible y a la vez determinar cuántos trozos se obtienen. De esta forma, razonamos que, para resolver la situación problemática, debemos calcular el máximo común divisor y asi determinar las longitudes de cada cuerda.

<u>Resolución:</u>

Como se debe cortar las cuerdas en partes iguales, inicialmente tenemos muchas opciones como, por ejemplo, cortarlas en trozos de 1m, 1,5m ,2m, etc., pues el problema no establece condición alguna para ello. No obstante, asumiremos que serán cortadas en trozos que resulte una longitud entera y como debemos encontrar la mayor longitud posible que sea en común, recurriremos al cálculo del máximo común divisor.

Para realizar el cálculo mencionado, recurrimos a la siguiente definición:

> *"Dados dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivo será llamado el máximo común divisor (mcd) de a y b y lo denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural.*

Para poder utilizar lo definido anteriormente debemos determinar los factores primos de cada número, para ello nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de* *números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (*Concepto del libro*), es así que expresamos a los números 40, 60y 90 como:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$40 = 2.2.2.5 = 2^3.5^1 \qquad 60 = 2.2.3.5 = 2^2.3^1.5^1 \qquad 90 = 2.3.3.5 = 2^1.3^2.5^1$$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

- *Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).*

-*"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)*

- *Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).*

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedades de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Con lo cual, realizando el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural, tenemos que el $\text{mcd}(40{,}60{,}90) = 2^1.5^1 = 2.5 = 10$ (procedimiento).

Consideremos la cuerda de longitud 40m. Al observar las diferentes divisiones que hicimos para obtener su descomposición en factores primos, podemos notar que los números que dividen al número 40 son diversos, estos son el 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 y el 40. Donde cada divisor positivo, acorde al contexto del problema, generaría que la cuerda pueda ser dividida en 1m, 2m, 4m, 5m, 8m, 10m, 20m y el 40m. Estas medidas surgen, de aplicar un principio de conteo (procedimiento) entre los divisores positivos de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número a, también son divisores de a (propiedad)

Bajo la misma idea del caso anterior, al considerar la cuerda de longitud 60m, tenemos que los divisores positivos del número 60 son el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60. Donde cada divisor, acorde al contexto del enunciado del problema, generaría que la cuerda pueda ser dividida en trozos que tengan 1m, 2m, 3m, 4m, 5m, 6m, 10m, 12m, 15m, 20m, 30m y 60m.

Al igual que los casos anteriores, al considerar la cuerda de 90m, tenemos que los divisores positivos del número 90 son el 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90. Siendo de esta forma, acorde al contexto del problema, que la cuerda puede dividirse en trozos de 1m, 2m, 3m, 5m, 6m, 9m, 10m, 15m, 18m, 30m, 45m y 90m.

Partiendo de todos los casos mencionados, podemos notar que las distintas cuerdas pueden ser divididas en diversos trozos de diversas longitudes cada una. Pero ahora, acorde al máximo común divisor de los números 40, 60 y 90, tenemos que las cuerdas pueden ser divididas en 10 trozos cada una, siendo esta la mayor cantidad en trozos iguales en que puede ser dividida cada una de las cuerdas. Para el caso de la cuerda de 40m, al realizar una división en 10 partes iguales tenemos que cada trozo tendrá una longitud de 4m. En el caso de la cuerda de 60 metros, tenemos que al dividirla en 10 partes iguales cada trozo tendrá una longitud de 6m y por último para la cuerda de 90m, tenemos que, al dividirla en 10 trozos iguales, cada tramo tendrá una longitud de 9m.

Respondiendo a la pregunta de la situación problemática, tenemos que las cuerdas de 40m, 60m y 90m pueden dividirse en diez trozos iguales cada una, donde cada trozo tendrá 4m, 6m y 9m respectivamente.

- **Situación Problemática 39**

39.
Factorizá los números 700 y 1287 y halla el mcm y el mcd entre ellos. ¿Por qué crees que las respuestas te dan así?

La situación problemática solicita factorizar dos números relativamente grandes, hallar su mcm y el mcd. Acorde a los números hallados, se debe formular un análisis y conclusión para responder una pregunta.

<u>Resolución:</u>

En el enunciado de la situación problemática, se solicita determinar tres cuestiones, una de ellas es dar la factorización de los números, la segunda es dar a conocer el máximo común divisor y mínimo común múltiplo y la tercera es determinar una vinculación de lo hallado. Para la primer cuestión, nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo* *número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (Concepto del libro), escribimos a los números 700 y 1287 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l}
700 & 2 \\
350 & 2 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1287 & 3 \\
429 & 3 \\
143 & 11 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}$$

$700 = 2.2.5.5.7 = 2^2.5^2.7^1$ $\quad$ $1287 = 3.3.11.13 = 3^2.11^1.13^1$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

- Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).

-"Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3". (Propiedad)

- Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

- Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).

- Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11 (propiedad).

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes (propiedades)

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como ya contamos con la descomposición en factores primos de cada uno de los números, para alcanzar la segunda cuestión del enunciado de la situación problemática, encontramos su mínimo común múltiplo y máximo común divisor valiéndonos de las siguientes definiciones:

> *"Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como [a;b] (Concepto del libro aritmética de M. Becker). Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la*

vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente".

"Dados dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivo será llamado el máximo común divisor (mcd) de a y b y lo denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker). Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural".

Como el número 700 tiene la forma $700=2^2.5^2.7$ y el 1287 como 1287 $=3^2.11.13$, determinamos que su mínimo común múltiplo es mcm [700, 1287]= $2^2.5^2.7.$ $3^2.11.13=700.1287=900900$ (*).

Para determinar el máximo común divisor, debemos considerar el producto de los factores comunes elevados al menor exponente natural, pero sin embargo al observar la descomposición en factores primos del número 700 y 1287, nos encontramos que a primera vista no tienen factores comunes, porque para el caso del número 700 se puede escribir de la forma $2^2.5^2.7$ y para el caso del número 1287, lo podemos escribir de la forma $3^2.11.13$, notando que no poseen factores comunes. Para esta situación, recurrimos a la propiedad que expresa que todo número "b" es múltiplo de 1 *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*), de esta forma, podemos escribir al número 700 de la forma 700=1. $2^2.5^2.7$ y al número 1287 de la forma 1287=1. $3^2.11.13$, resultando en este caso el factor común el 1. Es así que el máximo común divisor es mcd (700, 1287) =1.

Para responder a la tercera cuestión del enunciado del problema, es necesario considerar los cálculos realizados hasta el momento, estos son:

mcm [700, 1287]= 900900 mcd(700, 1287)=1

De acuerdo a esto, podemos destacar dos cuestiones. Una de ella es que al realizar el cálculo del mínimo común múltiplo nos encontramos que no es otra cosa que el producto de los números 700 y 1287 (*) y la otra cuestión es que, si tenemos presente la propiedad que expresa que si el máximo común divisor de dos números es uno, dichos números se denominan coprimos *(Concepto del libro aritmética de M. Becker pág. 32.),* entonces estamos en condiciones de afirmar que los números 700 y 1287 son coprimos. Este último enunciado es muy relevante para el caso de la propiedad que vincula al máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números, porque la propiedad en cuestión expone que el producto entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de dichos números, esto es que dado dos números enteros a y b, se cumple que (a,b).[a,b]=a.b (propiedad del gentile). De donde, reemplazando por los cálculos realizados, tenemos que mcd(700, 1287). mcm [700, 1287]=1. 900900= 700.1287

Es así que con respecto a la pregunta en general realizada en el ejercicio, era de esperarse que el mínimo común múltiplo de 700 y 1287 fuera el producto de ellos mismos, puesto que su máximo común divisor es uno.

4.2.2.5 Configuración epistémica del sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas

A continuación, se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que intervienen en el sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas.

• **Lenguaje** -Expresión verbal: número natural, número entero, divisible, valores absolutos, múltiplo, divisor común mayor, dcm, divisor positivo, múltiplo común menor, mcm, menores a cero, potencia, exponentes, cifra, factorizarce, primo, compuesto -Expresión simbólica: dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, los signos de las operaciones básicas, como ser la "+" (suma), "-"(resta), "." (Multiplicación) y "/" (división), el signo "=", los paréntesis (,), corchetes [,], un número x, $\|x\|$. -Expresión tabular: tablas compuestas por números.
• **Situaciones-Problemáticas** Se presentan los siguientes tipos de problemas: $P_{1, 24}$ ¿Cuáles son todos los divisores de números relativamente pequeños? $P_{2, 28}$ ¿Por cuál número es divisible otro número entero? $P_{3, 30}$ ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro? $P_{4, 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es primo? $P_{5, 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es compuesto? $P_{6, 32}$ ¿Cuáles son los múltiplos comunes de números relativamente pequeños? $P_{7, 32}$ ¿Cuál es la factorización de un número? $P_{8, 32, 33}$ ¿Cuál es el mcm de números enteros positivos relativamente pequeños? $P_{9, 34,35}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo? $P_{10, 36}$ ¿Cuál es el mcd de tres números enteros positivos relativamente pequeños?

$P_{11, 37}$ ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños? $P_{12, 38}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el máximo común divisor? $P_{13, 39}$ Dado dos números relativamente grandes, ¿Cuál es su mínimo común múltiplo, máximo común divisor y la vinculación entre ambos?
• **Conceptos** -Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c. -Dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivos comunes será llamado el máximo común divisor de a y b, donde la notación a utilizar sea (a; b) -Si el máximo común divisor de dos números, a y b, es 1, dichos números se denominan coprimos. -Un número es primo si tiene solo 4 divisores enteros: el mismo, su opuesto, 1 y -1. Si tiene más de 4 divisores enteros, es compuesto -Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b, también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural. -Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como [a;b]. -Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente. -El valor absoluto de un número x, $\lvert x \rvert$, es el mismo número x, siempre y cuando x sea mayor o igual a cero y es –x siempre y cuando el número x sea menor estricto que cero. -a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)
• **Proposiciones** -Todo número “b” es múltiplo de 1 -Si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b” -Teorema Fundamental de la Aritmética: expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de

números primos positivos con exponentes naturales. -Un número entero d divide a otro número entero c si y solo si la factorización del número d divide a c. -Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par. -Un número es divisible por 3, si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. -Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5. -Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3 a la vez - Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7. -Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9. -Un número es divisible por 10 si su última cifra es 0. -Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares es un múltiplo de 11. - Un número es divisible por 13 cuando separando la cifra de la unidad, multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 13. - Un número es divisible por 17 cuando separando la primera cifra de la unidad, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17. -El producto de potencias de igual base se suman los exponentes -Todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1 -Dado dos números enteros a y b, se que cumple que $\mathrm{dcm}\,(a,b) = \mathrm{dcm}\,(\lvert a\rvert, \lvert b\rvert)$ y $\mathrm{mcm}[a,b] = \mathrm{mcm}[\lvert a\rvert, \lvert b\rvert]$ d(n)=2.(m+1).(m+1).(m+1)…(m+1), $d(n) = 2.(m_1+1).(m_2+1).(m_3+1)\ldots(m_h+1)$, siendo los números m_1, m_2, m_3, hasta m_h los exponentes de los números primos de la factorización Dado dos números enteros a y b, se cumple que (a,b).[a,b]=a.b
• **Procedimientos** Divisiones de números por factores primos. Cálculo de operaciones mediante suma y resta de números. Cálculo de operaciones mediante producto de números. Cálculo de divisores. Cálculo de múltiplos. Cálculo de potencias Cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

- **Argumentos**

Argumentación de los resultados a través de los procedimientos utilizados.

-El resultado de las operaciones se justifica por medio de la utilización de las operaciones básicas.

-El cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo se justifica a través de la definición y utilización de las propiedades de potencia.

-El cálculo de las potencias se justifica a través de la aplicación de las propiedades de potencia se justifican a través de la definición de potencia

4.2.2.6 Relaciones conceptuales más sobresalientes

A continuación, exponemos las relaciones conceptuales más pertinentes entre los objetos primarios

$P_{1, 24}$ ¿Cuáles son todos los divisores de números relativamente pequeños? Situación problemática 24

$R_{1, 24}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2, 24}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”.

$R_{3, 24}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1

$R_{4, 24}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo

$R_{5, 24}$: Entre la situación problemática y el Teorema fundamental de la Aritmética.

$R_{6, 24}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que si un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c.

$R_{7, 24}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{8, 24}$: Entre la situación problemática y los argumentos de la definición de divide, divisor o múltiplo.

$R_{9, 24}$: Entre la situación problemática y los argumentos dado por las propiedades

$R_{10, 24}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para calcular los múltiplos y divisores de un número.

$R_{11, 24}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y el procedimiento para factorizar los números

$R_{12, 24}$: Entre la definición de divide, divisor o múltiplo y propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1.

$R_{13, 24:}$ Entre la definición de divide, divisor o múltiplo y la propiedad que indica que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”.

$R_{14, 24:}$ Entre el procedimiento para determinar divisores y la propiedad que determina la cantidad de divisores de un número

$R_{15, 24:}$ Entre las propiedades de potencia y la propiedad que determina la cantidad de divisores de un número

$P_{2, 28}$ ¿Por cuál número es divisible otro número entero?

Situación problemática 28

$R_{1, 28}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible

$R_{2, 28}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{3, 28}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisible por otro número.

$R_{4, 28}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es divisible por otro.

$R_{5, 28}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y los criterios de divisibilidad.

$P_{3, 30}$ ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro?

Situación problemática 30

$R_{1, 30}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2, 30}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y el criterio de divisibilidad por 11.

$R_{3, 30}$: Entre la situación problemática y el criterio de divisibilidad por 11

$R_{4, 30}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el digito faltante.

$R_{5, 30}$: Entre las operaciones de suma y resta y el procedimiento para determinar el digito faltante.

$R_{6, 30}$: Entre la situación problemática y las operaciones de suma y resta.

$R_{7, 30}$: Entre el criterio de divisibilidad por 11 y el procedimiento para determinar el o los dígitos faltantes.

$P_{4, 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es primo?

$P_{5, 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es compuesto?

Situación problemática 31

$R_{1, 31}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 31}$: Entre la situación problemática y la definición de número primo o compuesto $R_{3, 31}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{4, 31}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{5, 31}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{6, 31}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad $R_{7, 31}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que si un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c. $R_{8, 31}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia $R_{9, 31}$: Entre la situación problemática y la propiedad que determina la cantidad de divisores de un número. $R_{10, 31}$: Entre la definición de número primo o compuesto y la propiedad que determina la cantidad de divisores de un número.
$P_{6, 32}$ ¿Cuáles son los múltiplos comunes de números relativamente pequeños? **$P_{7, 32}$ ¿Cuál es la factorización de un número?** **$P_{8, 32, 33}$ ¿Cuál es el mcm de números enteros positivos relativamente pequeños?** **Situación problemática 32** $R_{1, 32}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 32}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo. $R_{3, 32}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo de números enteros. $R_{4, 32}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{5, 32}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia $R_{6, 32}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{7, 32}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{8, 32}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{9, 32}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia. $R_{10, 32}$: Entre la descomposición factorial de un número entero y el procedimiento para el cálculo del mínimo común múltiplo
$P_{8, 32, 33}$ ¿Cuál es el mcm de números enteros positivos relativamente pequeños? **Situación problemática 33**

$R_{1, 33}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 33}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo $R_{3, 33}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo de números enteros. $R_{4, 33}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{5, 33}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia $R_{6, 33}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{7, 33}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{8, 33}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{9, 33}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia. $R_{10, 32}$: Entre la descomposición factorial de un número entero y el procedimiento para el cálculo del mínimo común múltiplo
$P_{9, 34}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo? **Situación problemática 34** $R_{1, 34}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 34}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo. $R_{3, 34}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo de números enteros. $R_{4, 34}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{5, 34}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia $R_{6, 34}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{7, 34}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{8, 34}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{9, 34}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia. $R_{10, 34}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar múltiplos comunes mayores al mínimo común múltiplo $R_{11, 34}$: Entre el procedimiento para determinar múltiplos comunes mayores al mínimo común múltiplo y el argumento para determinar que el múltiplo encontrado es respuesta a la situación problemática.
$P_{9, 35}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?

Situación problemática 35 $R_{1, 35}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 35}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo. $R_{3, 35}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo de números enteros. $R_{4, 35}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{5, 35}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia $R_{6, 35}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{7, 35}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{8, 35}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{9, 35}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia. $R_{10, 35}$: Entre el procedimiento para calcular el mcm y el argumento para expresar al mcm como tiempo en que vuelven a cruzarse los trenes.
$P_{6, 32,36}$ ¿Cuál es la factorización de un número? **$P_{10, 36}$ ¿Cuál es el mcd de tres números enteros positivos relativamente pequeños?** **Situación problemática 36** $R_{1, 36}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2, 36}$: Entre la situación problemática y la definición máximo común divisor $R_{3, 36}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el máximo común divisor de números enteros. $R_{4, 36}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{5, 36}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia $R_{6, 36}$: Entre Teorema Fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{7, 36}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{8, 36}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{9, 36}$: Entre el procedimiento para determinar el máximo común y las propiedades de potencia. $R_{10, 36}$: Entre la descomposición factorial de un número entero y el procedimiento para el cálculo del máximo común divisor
$P_{11, 37}$ ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente

pequeños?

Situación problemática 37

$R_{1,\,37}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2,\,37}$: Entre la situación problemática y la definición máximo común divisor

$R_{3,\,37}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el máximo común divisor números enteros

$R_{4,\,37}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética

$R_{5,\,37}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia

$R_{6,\,37}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo

$R_{7,\,37}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{8,\,37}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números.

$R_{9,\,37}$: Entre el procedimiento para determinar el máximo común divisor y las propiedades de potencia.

$R_{10,\,37}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcd}[a,b] = \mathrm{mcd}[|a|,|b|]$ y el procedimiento para el cálculo del máximo común divisor

$R_{11,\,37}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcd}[a,b] = \mathrm{mcd}[|a|,|b|]$ y la definición de valor absoluto

---

$P_{12,\,38}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el máximo común divisor?

Situación problemática 38

$R_{1,\,38}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2,\,38}$: Entre la situación problemática y la definición máximo común divisor

$R_{3,\,38}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el máximo común divisor

$R_{4,\,38}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética

$R_{5,\,38}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia

$R_{6,\,38}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo

$R_{7,\,38}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{8,\,38}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números.

$R_{9,\,38}$: Entre el procedimiento para determinar el máximo común divisor y las propiedades de potencia.

$R_{10,\,38}$: Entre el máximo común divisor y el argumento para determinar al mcd como respuesta a la situación problemática

$R_{11, 35}$: Entre el procedimiento para calcular el mcd y el argumento para expresar al mcd como la longitud de los mayores trozos que se pueden hacer.

$P_{13, 39}$ Dado dos números relativamente grandes, ¿Cuál es su mínimo común múltiplo, máximo común divisor y la vinculación entre ambos?

Situación problemática 39

$R_{1, 39}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2, 39}$: Entre la situación problemática y la definición máximo común divisor

$R_{3, 39}$: Entre la situación problemática el procedimiento para determinar el máximo común divisor

$R_{4, 39}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo.

$R_{5, 39}$: Entre la situación problemática el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo

$R_{6, 39}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia

$R_{7, 39}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética

$R_{8, 39}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia

$R_{9, 39}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo

$R_{10, 39}$: Entre el procedimiento para factorizar números y los criterios de divisibilidad.

$R_{11, 39}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{12, 39}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el máximo común divisor

$R_{13, 39}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo

$R_{14, 39}$: Entre el procedimiento para determinar el máximo común divisor y las propiedades de potencia.

$R_{15, 39}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia.

$R_{16, 39}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que, si el máximo común divisor de dos números es uno, dichos números se denominan coprimos

$R_{17, 39}$: Entre la propiedad que expresa que, si el máximo común divisor de dos números es uno, dichos números se denominan coprimos y el argumento para determinar que los números dados en el problema son coprimos

4.2.2.7 Análisis de las relaciones conceptuales de ambas configuraciones epistémicas

Teniendo en cuenta la configuración epistémica construida con el desarrollo conceptual del contenido divisibilidad de números enteros y las relaciones conceptuales más pertinente que se establecen entre los objetos primarios de dicha configuración, como así también la configuración epistémica de las practicas matemáticas realizadas en las resoluciones de las situaciones problemáticas y las relaciones conceptuales establecidas entre los objetos primarios intervinientes y emergentes de tales resoluciones, encontramos que:

-Con respecto a la *situación problemática 24*, que es un representante del tipo de problema $P_{1:}$ ¿Cuáles son todos los divisores de números relativamente pequeños? Se puede observar que establecimos una amplia gama de relaciones, siendo vital introducir una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para determinar cuándo un número entero es divisor de otro número entero y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{1,\,24}}$ La introducción de esta definición fue necesaria porque en el desarrollo conceptual del contenido, en el libro, no se evidencia ninguna definición de lo que representa un divisor, siendo así imposible resolver dicha situación y establecer alguna relación con el problema. Como se debían determinar todos los divisores de un número, también fue necesario considerar divisores negativos. Siendo necesario introducir las propiedades que expresan que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b" (*), generando así la relación $\mathbf{R_{2,\,24}}$ y la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1, generando así las relaciones $\mathbf{R_{3,\,24}}$ **y** $\mathbf{R_{12,\,24}}$**.** Esta propiedad (*) se corresponde con la definición de divisor dada y así formar la relación $\mathbf{R_{13,\,24}}$.

Considerando que se debían encontrar todos los divisores de un número, fue necesario introducir el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA) para que junto con la propiedad que expresa que si un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c, se pudiera determinar todos los divisores de un número. Esta introducción genero las relaciones $\mathbf{R_{5,\,24}}$, $\mathbf{R_{6,\,24}}$ y $\mathbf{R_{10,\,24}}$ Como en la introducción del TFA incluye trabajar con números primos, gracias a la definición que esboza el desarrollo conceptual del libro, este esto un número es primo si tiene solo 4 divisores enteros: el mismo, su opuesto, 1 y -1, fue posible establecer la relación $\mathbf{R_{4,\,24}}$, como se observa en la figura 1. A su vez, este teorema genero la relación $\mathbf{R_{11,\,24}}$ que permitía factorizar a los números del problema. Siendo que esta factorización pudo realizar de una forma práctica utilizando los criterios de divisibilidad y así generar la relación $\mathbf{R_{7,\,24}}$

Con respecto a los números de los cuales se debían calcular los divisores, nos encontramos que algunos de ellos eran relativamente grandes. Esto generaba la posibilidad de que tuvieran muchos divisores. Siendo esta última posibilidad probable, fue necesaria la introducción de la propiedad que determina la cantidad de divisores que tiene un número. Esta introducción genero la relación $\mathbf{R}_{14,\ 24}$. Como dicha propiedad incluye trabajar con propiedades de potencia, fue necesaria la introducción de estas últimas y así generar la relación $\mathbf{R}_{15,\ 24}$.

Como la inserción de las diversas definiciones y propiedades posibilitaron encontrar los divisores solicitados, todo ello generó las relaciones $\mathbf{R}_{8,\ 24}$ y $\mathbf{R}_{9,\ 24}$.

Como puede observarse en la figura 1, en los rectángulos se representan los objetos primarios y con una flecha de doble sentido el objeto primario introducido y el brindado por el libro más no con el problema, como puede observarse en gráficos posteriores. Con respecto a las otras flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe resaltar que en los demás gráficos se mantiene la misma regla de resaltar con rectángulos los objetos primarios y con flechas las relaciones entre los mismo.

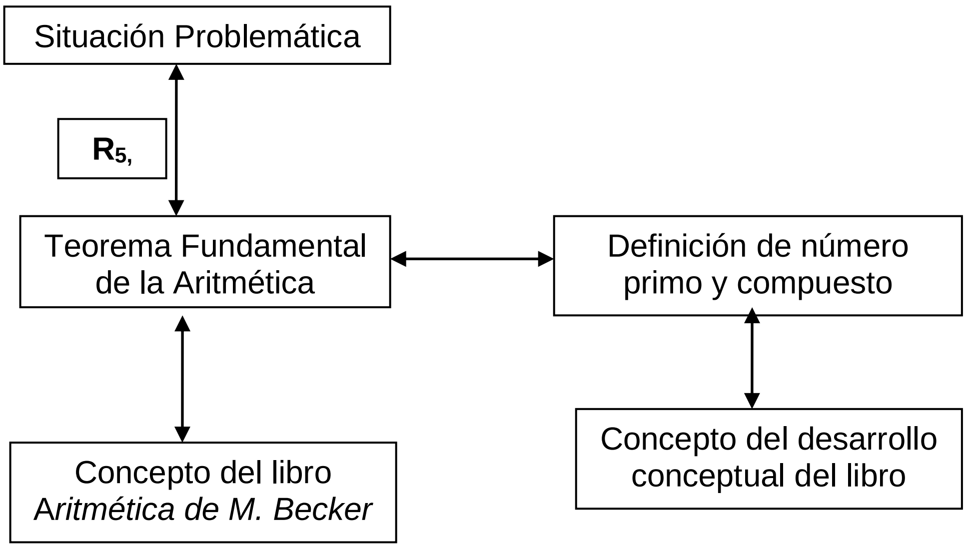


Figura 1

-Con respecto a la *situación problemática 28*, que es un representante del tipo de problema P2: ¿Por cuál número es divisible otro número entero? Podemos observar que fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\ 28}$. La introducción de esta definición fue necesaria porque en el desarrollo conceptual del contenido, en el libro, no se evidencia ningún enunciado respecto a las condiciones que cumple un número para ser divisible por otro. Además esta definición posibilito usar un procedimiento para determinar si un número era divisible por otro, generando la relación $\mathbf{R}_{3,\,28}$. A su vez, esta definición posibilito la relación $\mathbf{R}_{4,\,28}$. Así mismo en el desarrollo conceptual del contenido, del libro, no se esgrimen los criterios o reglas de divisibilidad que se puedan utilizar. Razón por la cual se introdujeron los criterios necesarios para tal fin, posibilitando la correspondencia $\mathbf{R}_{2,\,28}$ y $\mathbf{R}_{5,\,28}$.

-En cuanto a la *situación problemática 30*, que es un representante del los tipos de problema P_3: ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro? Podemos observar que nuevamente fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\,30}$. Esta definición permitió introducir regla de divisibilidad por 11, permitiendo construir la elación $\mathbf{R}_{2,\,30}$. Si bien el desarrollo teórico del libro brinda una regla de divisibilidad por 11, el mismo solo vale para una determinada cantidad de números, siendo que para el caso 81.818 ya no es posible aplicarlo. Además, dicha regla permite a la vez las relaciones $\mathbf{R}_{3,\,30}$ y $\mathbf{R}_{7,\,30}$, siendo esta última relación importante para determinar los dígitos faltantes que se solicita hallar. Si bien se debió utilizar un criterio de divisibilidad, también fue necesaria la utilización de las operaciones de suma y resta, propiciando las relaciones $R_{4,\,30}$, $\mathbf{R}_{5,\,30}$ y $\mathbf{R}_{6,\,30}$.

-Con respecto a la *situación problemática 31*, que es un representante de los tipos de problema P_4: Dado un número, ¿Dicho número es primo? Y P_5: Dado un número, ¿Dicho número es compuesto? Podemos notar que se introdujo la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\,31}$.

Considerando que se debía determinar si un número era primo o compuesto, fue necesaria la utilización no solo del concepto de número primo o compuesto, sino además la introducción del Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA), como se observa en la figura 3, y determinar la factorización de los números utilizando la propiedad que expresa que si un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c, generando así las relaciones $\mathbf{R}_{2,\,31}$, $\mathbf{R}_{3,\,31}$, $\mathbf{R}_{4,\,31}$ y $\mathbf{R}_{7,\,31}$. A su vez dicha factorización fue posible gracias a la utilización de criterios de divisibilidad que simplificaron tal procedimiento, generando así las relaciones $\mathbf{R}_{6,\,31}$. Con respecto a las relaciones $\mathbf{R}_{2,\,31}$, $\mathbf{R}_{3,\,31}$ y $\mathbf{R}_{4,\,31}$, estas se vinculan con las relaciones **R2 y R3** del desarrollo conceptual del libro.

Como se debían calcular los divisores de los números del problema, para determinar si eran primos o compuestos, nos encontramos que algunos de ellos eran relativamente grandes. Esto generaba la posibilidad de que tuvieran muchos divisores. Siendo esta última posibilidad probable, fue necesaria la introducción de la propiedad que determina la cantidad de divisores que tiene un número. Esta introducción genero las relaciones $\mathbf{R}_{9,\,31}$ y $\mathbf{R}_{10,\,31}$. Como dicha propiedad incluye trabajar con propiedades de potencia, fue necesaria la introducción de estas últimas y así generar la relación $\mathbf{R}_{8,\,31}$.

De forma gráfica, en la figura 3 puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

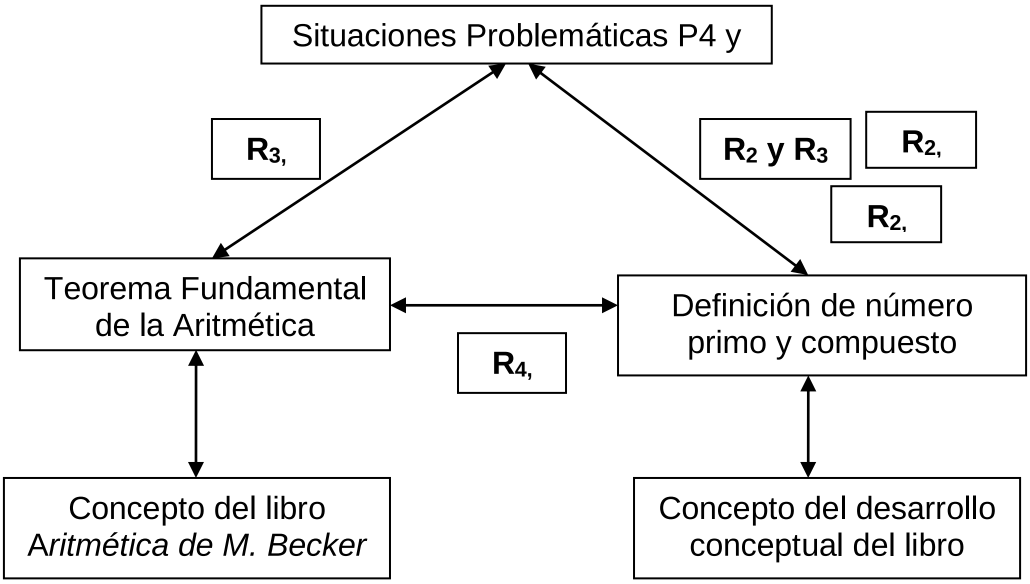


Figura 3

-Con respecto a las situaciones problemáticas *32 y 33*, que son representantes de los tipos de problema P_6: ¿Cuáles son los múltiplos comunes de números relativamente pequeños?, P_7: ¿Cuál es la factorización de un número? P_8: ¿Cuál es el mcm de números relativamente pequeños? Podemos observar que algunas relaciones resultan similares, siendo que nuevamente fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\,32}$ y $\mathbf{R}_{1,\,33}$ En el desarrollo teórico del libro se esgrime un procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros, no obstante, no brinda un concepto de lo que es un mcm. Como así tampoco un argumento del porque realiza determinadas acciones al realizar el cálculo del mcm de números enteros positivos y negativos, razón por la cual la relación **R5** nos resulta una correspondencia muy forzada. Es así, que fue conveniente introducir una definición de lo que representa el mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros y el procedimiento para calcularlos, propiciando las relaciones $\mathbf{R}_{2,32}$, $\mathbf{R}_{3,32}$, $\mathbf{R}_{2,33}$ **y** $\mathbf{R}_{3,33}$

Para la utilización de la definición que dimos de mcm, fue necesaria la introducción de lo que representa un número primo, el Teorema Fundamental de la Aritmética (*), como se observa en la figura 4, las propiedades de potencia y criterios de divisibilidad. Permitiendo construir las siguientes correspondencias, con respecto al problema 32: $\mathbf{R}_{4,32}$, $\mathbf{R}_{5,32}$, $\mathbf{R}_{6,32}$, $\mathbf{R}_{7,32}$, $\mathbf{R}_{8,32}$, $\mathbf{R}_{9,32}$, $\mathbf{R}_{10,32}$, y con respecto al problema 33: $\mathbf{R}_{4,33}$, $\mathbf{R}_{5,33}$, $\mathbf{R}_{6,33}$, $\mathbf{R}_{7,33}$, $\mathbf{R}_{8,33}$, $\mathbf{R}_{9,33}$, $\mathbf{R}_{10,33}$. Si bien el desarrollo conceptual del libro esboza un enunciado para la factorización de un número, nos encontramos que hace alusión a un procedimiento que se realiza en el conjunto de números naturales. No obstante, no fue posible dar con dicho procedimiento, razón que produjo la introducción dada en (*), siendo muy forzada el establecimiento de la relación **R4**.

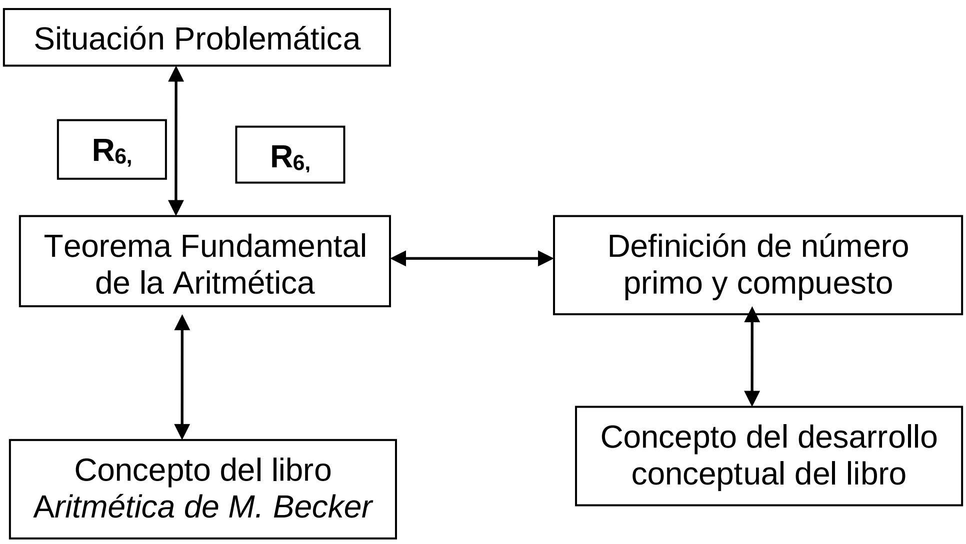


Figura 4

-En cuanto a las situaciones problemáticas 34 y 35, ambos son representantes del tipo de problema P_9: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo? Para resolver estas situaciones, las consideraciones realizadas para establecer las relaciones entre los objetos primarios fueron similares a las realizadas en el problema anterior. Cabe destacar que en el desarrollo teórico del libro se esgrime un procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros, no obstante, no brinda un concepto de lo que es un mcm. Como así tampoco un argumento del porque realiza determinadas acciones al realizar el cálculo del mcm de números enteros positivos y negativos, razón por la cual la relación **R6** nos resulta una correspondencia muy forzada. Con respecto al problema 34, tuvimos que determinar un número mayor al mínimo común múltiplo y que a la vez sea múltiplo de los números dados en el problema, generando así la relación $\mathbf{R}_{10,\,34}$ y $\mathbf{R}_{11,\,34}$. En cuanto al problema 35, con el mcm hallado, lo tuvimos que expresar en horas y minutos para dar respuesta a la pregunta formulada en el problema, generando así las relaciones $\mathbf{R}_{10,\,35}$.

-Por lo que se refiere a *situación problemática 36*, siendo este un representante de los tipos de problemas P_6: ¿Cuál es la factorización de un número? Y P_{10}: ¿Cuál es el mcd de tres números enteros positivos relativamente pequeños? Podemos notar que una vez más fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\,36}$. En el desarrollo teórico del libro se esgrime un procedimiento para determinar el máximo común divisor (mcd) de números enteros, no obstante, no brinda un concepto de lo que es un mcd. Como así tampoco un argumento del porque realiza determinadas acciones al realizar el cálculo del mcd de números enteros positivos y negativos, razón por la cual la relación **R7** nos resulta una correspondencia muy forzada. Es así, que fue conveniente introducir una definición de lo que representa el mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros y el procedimiento para calcularlos, propiciando las relaciones $\mathbf{R}_{2,\,36}$ **y** $\mathbf{R}_{3,\,36}$.

Para la utilización de la definición que dimos de mcd, fue necesaria la introducción de lo que representa un número primo, el Teorema Fundamental de la Aritmética, como se observa en la figura 5, las propiedades de potencia y criterios de divisibilidad. Permitiendo construir las siguientes correspondencias, $\mathbf{R}_{4,\,36}$, $\mathbf{R}_{5,\,36}$, $\mathbf{R}_{6,\,36}$, $\mathbf{R}_{7,\,36}$, $\mathbf{R}_{8,\,36}$, $\mathbf{R}_{9,\,36}$ y $\mathbf{R}_{10,\,36}$,

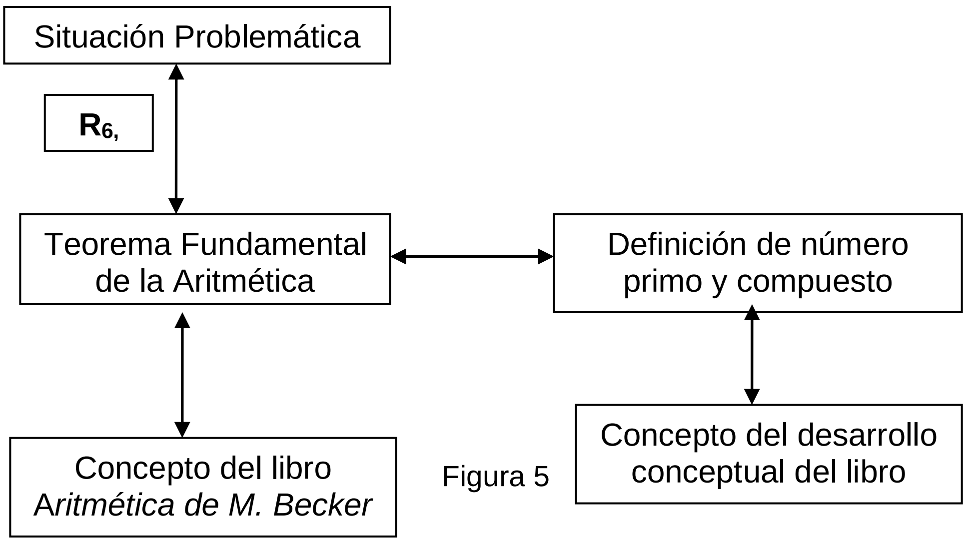


Figura 5

-En cuanto a la *situación problemática 37*, que es un representante del tipo de problemas P_{11}: ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños? Podemos observar que se solicita el cálculo del máximo común divisor de un grupo de números lográndose formar relaciones similares a las del problema 36. Sin embargo, es en las relaciones $\mathbf{R_{9,36}}$ y $\mathbf{R_{10,36}}$ donde se difiere del problema anterior, porque en este caso fue necesario introducir la propiedad que determina el cálculo del mcd de números tanto positivos como negativos. Si bien en el desarrollo conceptual que brinda el libro se observar un procedimiento para el cálculo del mcd de números enteros, no se esgrime un argumento del porque realiza determinadas acciones al realizar el cálculo del mcd de números enteros cualesquiera, por la cual la relación **R8** nos resulta una correspondencia muy forzada.

-En lo que se refiere a la *situación problemática 38*, siendo este un representa del tipo de problema P_{12}: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el máximo común divisor? Podemos observar que, con respecto al cálculo del máximo común de números enteros, las relaciones que se establecen son similares a las establecidas en el problema 36. No obstante es en las relaciones $\mathbf{R_{10,38}}$ y $\mathbf{R_{11,38}}$ en las cuales se diferencia, porque en este caso la formulación de estas se debe a la respuesta de pregunta que se realiza en el problema. Si bien en el desarrollo conceptual que brinda el libro se observar un procedimiento para el cálculo del mcd de números enteros, no obstante, no se esgrime un argumento del porque realiza determinadas acciones al realizar el cálculo del mcd de números enteros cualesquiera, por la cual la relación **R9** nos resulta una correspondencia muy forzada.

-Con respecto a la situación problemática 39, siendo este un representante del tipo de problema P_{13}: Dado dos números relativamente grandes, ¿Cuál es su mínimo común múltiplo, máximo común divisor y la vinculación entre ambos? Podemos observar que las relaciones que se establecieron son similares a las establecidas en los problemas donde se debían calcular el máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo de un grupo de números, resultando las relaciones **R10** y **R11** de carácter forzadas. No obstante, en este problema a diferencia de los demás, se introdujo una propiedad que asegura que, si el mcd de dos números es uno, ambos números son coprimos entre sí, generando así las relaciones $\mathbf{R_{16,39}}$ y $\mathbf{R_{17,39}}$.

4.2.3 Tercer libro

- ✓ **4.2.3.1 Descripción**

Con respecto a las características generales de este primer libro, denotamos la siguiente información:

Libro:	Matemática II
Editorial:	Santillana.
Edición:	Primera
Reimpresión:	Cuarta
Año:	2011
Autores del libro:	Andrea Berman
	Daniel Dacunti
	Martin M. Perez
	Ana Veronica Veltri

Adentrándonos en el contenido específico que nos compete, tenemos que en el índice del libro se encuentra escrito lo siguiente:

- ✓ **ÍNDICE**

Con respecto a las características específicas que tiene que ver con el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros, se puede denotar lo siguiente:

En el desarrollo teórico que se brinda, podemos observar un título que dice múltiplos y divisores y un enunciado que dice que un número es múltiplo de otro si este último es uno de sus factores, ejemplo: 12 es múltiplo de 3 porque 12 se puede escribir como 3.4. También se dice que 12 es divisible por 3. También se brinda las reglas de divisibilidad por 2, e, 4, 5, 6, 9 y 10. También se observa un título que dice primos y compuestos y un enunciado que dice un número es primo si tiene únicamente dos divisores naturales, el mismo y 1, ejemplo, 13 es primo, ya que solo es divisible por 13 y 1, un número es compuesto si tiene más de dos divisores naturales, ejemplo, 9 es compuesto, ya que es divisible por 9 y por 1, pero también por 3 y que los números 0 y 1 no son primos ni compuestos. A la vez un enunciado que dice que, si un número a es divisor de un número b, entonces su opuesto también lo es. También podemos observar un texto que dice que un número natural es primo si tiene solo dos divisores, esto es el 1 y el mismo, pero que, al trabajar con números enteros, el concepto se extiende y ahora un número entero es primo si tiene solo cuatro divisores, el 1, el -1 el mismo y su opuesto, por ejemplo: -7 es primo ya que tiene solo estos cuatro divisores: 1, -1, 7 y -7. En cambio, -9 no es primo, ya que tiene seis divisores. 1, -1, 3, -3, 9 y -9.

Con respecto a las situaciones problemáticas que se exponen para resolver por parte del lector, nos encontramos con las siguientes:

22.

Sin hacer ninguna cuenta, rodeada los cálculos cuyos resultados tienen resto cero al dividirlos por 7.

28.9 123.7+7 439.7+2 19.3-7

23.

Con los dígitos 4, 0, 5 y 9 formá, si es posible, un número de cuatro cifras que cumpla la condición.

a) Es múltiplo de 5, pero no de 2.

b) Es múltiplo de 10 y es divisible por 4.

c) No es divisible por 5 ni por 2.

d) Es múltiplo de 6, pero no de 10.

e) No es múltiplo de 9

25.

En la siguiente división:

$24.m \,|\, \underline{3}$

a) Encontra, si es posible, un valor para el número natural m de manera tal que el resto de la división sea 0.

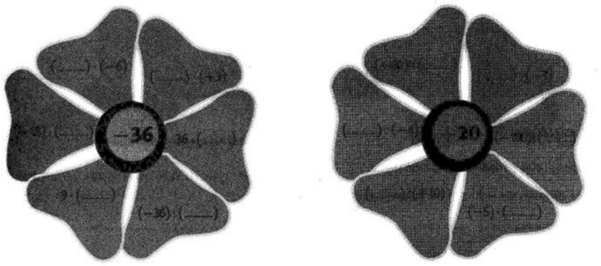
b) Encontra, si es posible, algún valor del número natural m para el cual el resto no sea cero.

26.

Buscá un número que multiplicado por 4 dé por resultado -12. Podes usar la calculadora.

28.

Completa el cálculo de cada pétalo para que todos den el resulto del centro de la flor



32.

Encontrá, si es posible, números enteros a y b tales que a.b=24. ¿Cuántos pares de números cumplen con la condición pedida?

33.

Encontrá, si es posible, números enteros a y b tales que a.b=-24. ¿Cuántos pares e números cumplen con la condición pedida?

34. En equipo

Completen con verdadero (V) o falso (F)

a) Los divisores de -20 son los mismos que los de su opuesto……

b) El 1 es el único número entero que es divisor de cualquier número entero……

c) Si un número es primo, su opuesto también lo es……

d) Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores……

35.

Rodeá los números primos

-35	17	-29	-14
+51	-33	-39	+19

36.

Uní cada número verde con aquellos números anaranjados que sean divisores de él.

-21	+18	25	-10	-16

-4	+2	-5	-3	+7

37.

Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si se multiplican dos múltiplos de 3 el resultado es un múltiplo de 6.

b) Todos los números primos son impares.

c) Si un número es divisible por 4, entonces también es divisible por 8

d) Si un múltiplo de 3 se lo divide por 2 y se obtiene cero de resto, entonces ese número es múltiplo de 6.

4.2.3.2 Configuración epistémica del desarrollo teórico del contenido

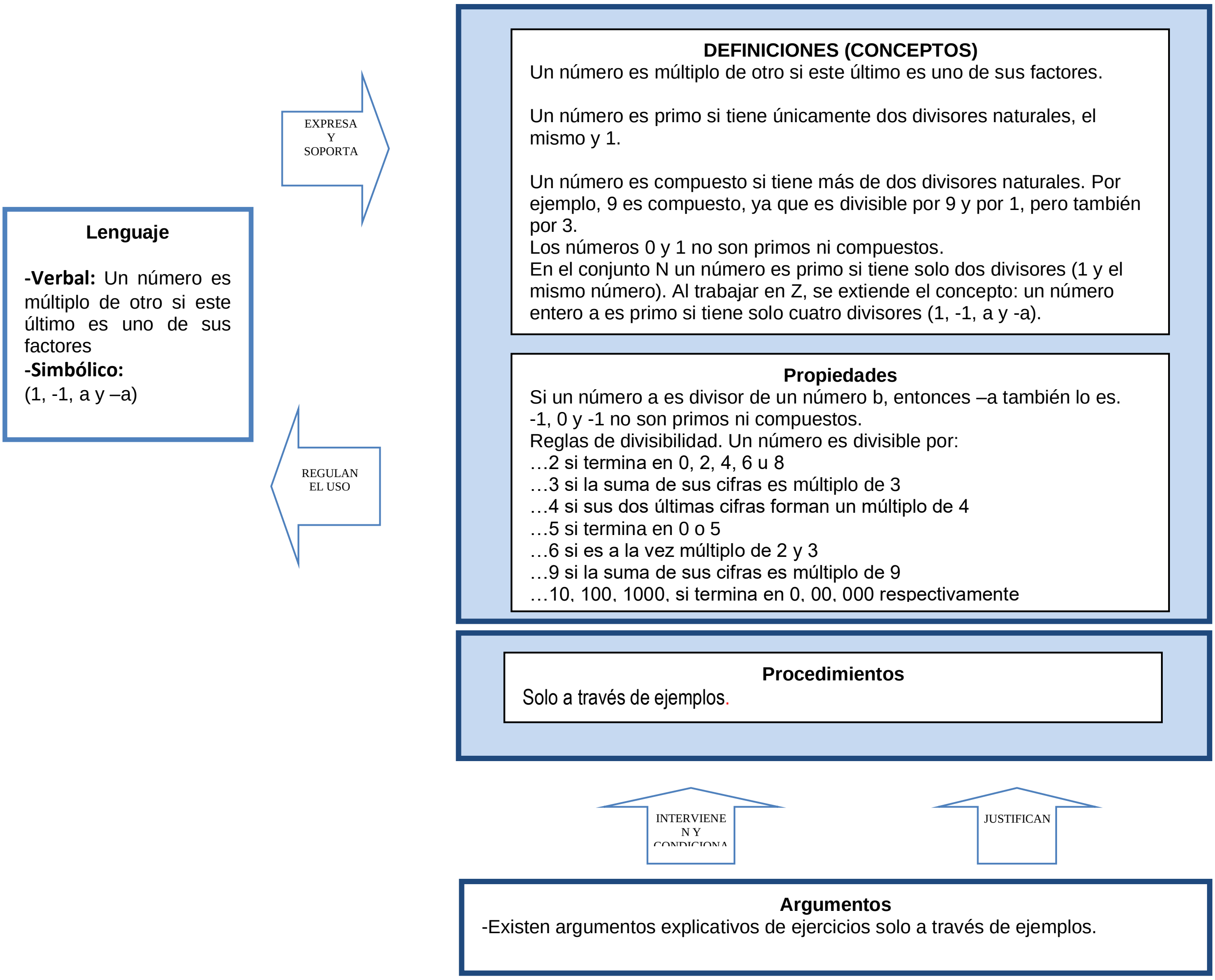
A continuación, se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que intervienen en el desarrollo del contenido.

Situación Problemática

$P_{1, 22}$: ¿Cuáles números son divisibles por 7?
$P_{2, 23}$: ¿Cuándo un número entero es múltiplo o no de otro número entero?
$P_{3, 23}$: ¿Cuándo un número entero es divisible o no por otro número entero?
$P_{4, 25}$: ¿Cuándo el producto de dos números es divisible por otro?
$P_{5, 26, 28}$: ¿Qué número multiplicado por otro, da un número en particular?
$P_{6, 28}$: ¿Qué número que divide a otro da un resultado en particular?
$P_{7, 32, 33}$: ¿Qué pares de números cumplen que multiplicados dan otro número?
$P_{8, 34}$: ¿Los divisores de un número, lo son también de su opuesto? Ítem a)
$P_{9, 34}$: ¿Existe un número que divide a todos los demás números? Ítem b)
$P_{10, 34}$: ¿Existen números primos que sean opuestos? Ítem c)
$P_{11, 34}$: ¿Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores? ítem d)
$P_{12, 35}$: ¿Cuándo un número entero es primo?
$P_{13, 36}$: ¿Qué número es divisor de otro número?
$P_{14, 37}$: ¿Si dos números enteros que son múltiplo de otro se multiplican entre sí, dicho producto es múltiplo de otro número? Ítem a)
$P_{15, 37}$: ¿Todos los números primos son impares? Ítem b)
$P_{16, 37}$: ¿Si un número es divisible por otro, también es divisible por otro número distinto a los anteriores? Ítem c)
$P_{17, 37}$: ¿Si un número es múltiplo de un número y divisible por otro número, es también múltiplo de otro número distintos a los anteriores?

MOTIVAN

RESUELVEN



4.2.3.3 Relaciones conceptuales más sobresalientes

A continuación, exponemos las relaciones conceptuales más pertinentes entre los objetos primarios

R_1: Entre la situación problemática P2 y la definición de múltiplo

R_2: Entre la situación problemática P3 y los criterios de divisibilidad

R_3: Entre la situación problemática P5 y la definición de múltiplo

R_4: Entre la situación problemática P7 y la definición de múltiplo

R_5: Entre la situación problemática P7 y los criterios de divisibilidad

R_6: Entre la situación problemática P10 y la definición de número primo en el conjunto de números enteros

R_7: Entre la situación problemática P12 y la definición de número primo.

R_8: Entre la situación problemática P13 y los criterios de divisibilidad

R_9: Entre la situación problemática P14 y la definición de múltiplo
R_{10}: Entre la situación problemática P14 y los criterios de divisibilidad
R_{11}: Entre la situación problemática P15 y la definición de número primo
R_{12}: Entre la situación problemática P15 y los criterios de divisibilidad
R_{13}: Entre la situación problemática P16 y los criterios de divisibilidad.
R_{14}: Entre la situación problemática P17 y la definición de múltiplo.
R_{15}: Entre la situación problemática P17 y los criterios de divisibilidad

4.2.3.4 Resolución de las situaciones problemáticas propuestas

A continuación, se realizan las resoluciones de cada situación problemática propuesta para el lector.

- **Situación Problemática 22**

22.
Sin hacer ninguna cuenta, rodeada los cálculos cuyos resultados tienen resto cero al dividirlos por 7.
28.9   123.7+7   439.7+2   19.3-7

El problema consiste básicamente en señalar de una lista de números vinculados por medio de operaciones básicas, aquellos que son divisibles por 7, con la condición de no realizar las cuentas.

<u>Resolución:</u>

Para el caso de la operación 28.9 y siguiendo las condiciones que enuncia el problema en cuanto a no realizar la cuenta de las operaciones que vincula a los números de dicho problema, podemos observar que el número 28 puede encontrarse en las tablas de multiplicar que se aprenden a lo largo de la secundaria (argumentación), en particular en la tabla del 4 y 7, es así que al número 28 lo podemos pensar y escribir de la forma 28=7.4 (procedimiento). Utilizando la última igualdad, tenemos que a la operación 28.9 lo podemos escribir como 28.9=7.4.9 (*). Consideremos ahora que dados dos números enteros a y b donde b es distinto de cero, *diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* (**) *y además que un número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero (propiedad pág. 5)* (argumento). Valiéndonos de lo definido en (**), podemos pensar a la operación 28.9 como el número *"b"*, o sea b=28.9, al número *"a"* como a=7 y al número "*c"* como c=4.9, por (*) (procedimiento), siendo ahora que a la igualdad 28.9=7.4.9 podemos escribirla de la forma b=7.c, resultando b divisible por 7 y el resto es igual a cero. Cumpliendo que la operación 28.9 tiene resto 0 al dividirlo por 7.

Para el caso de la operación 123.7+7, podemos escribirlo de la forma 123.7+7=7.(123+1) (procedimiento) de donde, utilizando la definición (*) y partiendo del hecho que las operaciones que vinculan a los números son operaciones definidas en el conjunto de números enteros (argumentación), es así que podemos considerar las siguientes igualdades, sea b=123.7+7, sea a=7 y sea c=(123+1). Utilizando la propiedad distributiva de la suma con respecto a la multiplicación definida en el conjunto de números naturales tenemos que la operación 123.7+7=7.(123+1), siendo que podemos escribirla de la forma b=7.c resulta b divisible por 7. Siendo así que el resto de la división es cero. Cumpliendo que la operación 123.7+7 tiene resto 0 al dividirlo por 7.

Con respecto a las operaciones 439.7+2 y 19.3-7, podemos afirmar que en ninguno de los casos la división por 7 da como resto 0. Afirmamos esto, porque para el caso de la operación 439.7+2 y utilizando la definición que diéramos en (*) (argumento), tenemos que si bien el número 439.7 es divisible por 7, puesto que tiene al 7 como factor, el número 2 no es divisible por 7 puesto que no existe ningún número enteros positivo que cumpla que dicho número por 7 de cómo resultado 2, es así que no podemos realizar un procedimiento similar al que hiciéramos para el caso de la operación 123.7+7, que también incluía la operación suma. Con respecto a la operación 19.3-7, tenemos una situación similar al caso anterior. Si bien el número 7 es divisible por 7, puesto que de la tabla de multiplicar que se enseña en la secundaria en particular la tabla del 7, podemos escribir al 7 de la forma 7=7.1, el número 19.3 no es divisible por 7. Esto resulta así porque tanto al número 19 como al número 3 no los podemos escribir como un múltiplo de 7.

- **Situación Problemática 23**

23.
Con los dígitos 4, 0, 5 y 9 forma, si es posible, un número de cuatro cifras que cumpla la condición.
a) Es múltiplo de 5, pero no de 2.
b) Es múltiplo de 10 y es divisible por 4.
c) No es divisible por 5 ni por 2.
d) Es múltiplo de 6, pero no de 10.
e) No es múltiplo de 9

El problema consiste en dado una lista de cuatro números, formar un nuevo número de cuatro cifras que cumpla con diversas condiciones, como ser múltiplo o divisible por un número determinado.

<u>Resolución:</u>

Consideremos el ítem a. En este ítem se solicita que el número de cuatro cifras que formemos con los números 4, 0, 5 y 9, sea múltiplo de 5 pero no de 2. Para resolver esta situación, recurrimos a la siguiente definición (que utilizaremos en los demás ítems) que expresa que *"si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*) (Concepto del libro aritmética de M. Becker) y a las reglas de divisibilidad que expresan que un número es divisible por* 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8 y divisible por 5 si termina en 0 o 5. Es así que atendiendo a la primera condición del ítem donde solicita que el número de cuatro cifras que se proponga sea múltiplo de 5, el número que formemos tiene que terminar en 0 o 5, donde podemos considerar que el número que formemos debe ser de la forma abc0 o abc5, siendo los números a, b y c uno de los números de la lista de 4, 0, 5 y 9, exceptuando el 0 o el 5 según corresponda y en el caso del número abc5, siendo el 0 uno de los números b o c, porque de ser cero el número "a" se tendría solamente un número de tres cifras. Como el ítem también solicita que no sea múltiplo de 2, significa que de los dos casos brindados, debemos descartar el caso donde tenemos el número abc0, porque al ser su última cifra el 0, dicho número, acorde a las reglas de divisibilidad que diéramos anteriormente, será divisible por 2 o en su efecto acorde a la definición de divisible que dimos, múltiplo de 2. Considerando esto último, el número que debemos considerar debe ser de la forma abc5, donde si bien la situación problemática solo solicita que se brinde un solo número, pueden darse uno de los siguientes casos: 4095, 4905, 9045 y 9405.

Para el ítem b, se solicita que el número de cuatro cifras que se forme con los números 4, 0, 5 y 9, sea múltiplo de 10 y divisible por 4. Para este caso, consideramos la definición de divisibilidad (*) y las reglas de divisibilidad que expresan que un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 y un número es divisible por 10, 100, 1000, si termina en 0, 00, 000 respectivamente. Considerando esto último, la primera condición del ítem donde solicita que el número de cuatro cifras que se proponga sea múltiplo de 10, el número que formemos debe terminar en 0, siendo el número de cuatro cifras de la forma abc0, con a, b y c uno de los números 4, 5 y 9. Con respecto a la condición de que sea divisible por 4, además debe cumplir que los dos últimos números sean un múltiplo de 4. Partiendo del número abc0, tenemos que el número c, puede ser cualquiera de los números 4, 5 o 9, siendo así que tenemos los casos: ab40, ab50 y ab90. Como los dos últimos números de los que propusimos deben ser múltiplos de 4, tenemos los números 40, 50 y 90. De donde, teniendo presente las tablas de multiplicar (argumento) que se aprenden a lo largo de la secundaria, tenemos que al número 40 lo podemos escribir de la forma 40=4.10 (procedimiento), siendo el número 40 un múltiplo de 4. Con respecto al número 50, al mismo podemos escribirlo de la forma 50= 40 +10, de donde ya probamos que el número 40 es múltiplo de 4, pero en este caso, el número 10 no lo es, puesto que utilizando la regla de divisibilidad por 2 (argumento), lo podemos escribir de la forma 10=2.5 (procedimiento), donde podemos observar que no es posible escribirlo como un número múltiplo de 4. Bajo la misma idea, si consideramos ahora al número 90, al mismo lo podemos escribir de la forma 90= 40 +50 (procedimiento), de donde ya vimos que, si bien el número 40 es múltiplo de 4, el número 50 no lo es. Con lo cual, afirmamos que el número de cuatro cifras que consideremos, debe tener la forma de ab40. Siendo así, que los números que cumplen con la condición de que sea múltiplo de 10 y divisible por 4 son los números: 5940 y 9540.

En cuanto al ítem c, en el mismo se solita que el número de cuatro cifras que se proponga con los números 4, 0, 5 y 9, no sea divisible por 5 ni por 2. Considerando las reglas de divisibilidad por 2 y por 5 que diéramos en los ítems anteriores (argumento), solo sería necesario que dicho número no termine en 0, 2, 4, 6 u 8, como así tampoco en 5. Siendo que tenemos al número 9 en la lista de números que brinda el problema, podemos formar el número abc9 (procedimiento), siendo a, b y c los números 4, 0, 5 y con a distinto al número 0 o solamente se tendría un número de tres cifras en vez de uno de cuatro como solicita el problema. Con lo cual los números que cumplen con la condición que solicita el ítem son: 4059, 4509, 5049 y 5409.

Con respecto al ítem d, el problema solicita que el número de cuatro cifras que se proponga con los números 4, 0, 5 y 9, sea múltiplo de 6, pero no de 10. Con los cual, de las dos condiciones que solicita para el número a proponer, considerando la definición de divisibilidad (*) y la regla de divisibilidad por 10 que diéramos en ítems anteriores, es suficiente que el número que propongamos termine en un número distinto de cero para que no sea múltiplo de 10. Es así que tenemos las siguientes posibilidades:

- abc4, donde a, b y c son números de la lista 0, 5 y 9, con a distinto de cero o solamente tendríamos un número de tres cifras.
- abc5, donde a, b y c son números de la lista 4, 0 y 9, con a distinto de cero o solamente tendríamos un número de tres cifras.

- abc9, donde a, b y c son números de la lista 4, 0 y 5, con a distinto de cero o solamente tendríamos un número de tres cifras.

De los casos mencionados, como la segunda condición que impone el ítem d es que el número de cuatro cifras que propongamos sea múltiplo de 6, si recurrimos a la regla de divisibilidad por 6 que expresa que para que un número sea divisible por 6, debe ser múltiplo de 2 y de 3 (argumento), podemos descartar los casos abc5 y abc9, porque en el caso del número abc5, al terminar dicho número en 5, no cumple con la regla de divisibilidad por 2 que manifiesta que para que un número sea divisible por 2, debe terminar en 0, 2, 4, 6 u 8 (argumento), bajo la misma idea, el número abc9 tampoco cumple con la regla de divisibilidad por 2, con lo cual los números abc5 y abc9 no cumplen con lo solicitado por el ítem. Siendo así, que de los casos propuestos solo nos queda por analizar el número abc4, que al ser su última cifra el número 4, este es múltiplo de 2. Como el número en cuestión también debe ser divisible por 3, debe cumplir que la suma de sus cifras sean un múltiplo de 3, siendo así que los números que podemos formar con los números de la lista 4, 0, 5 y 9 donde el último número es el 4, son: 9054, 9504, 5904 y 5094. Consideremos al número 9054, si sumamos sus cifras obtenemos 9+0+5+4=18 (procedimiento), como al número 18 lo podemos escribir de la forma 18=3.6 (procedimiento), tenemos que el número 9054 cumple con la regla de divisibilidad por tres, siendo así que el número es múltiplo de 3 y de 2 (argumento). Como los demás números que propusimos también tienen las mismas cifras y al sumarlas obtendremos el mismo resultado (argumento), podemos afirmar que los números 9054, 9504, 5904 y 5094 son múltiplos de 6 pero no de 10.

Para el caso del ítem e, donde debemos proponer un número de cuatro cifras que no sea múltiplo de nueve, recurrimos a la definición de divisibilidad (*) y a la relga de divisibilidad que expresa que u*n número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.* De esta forma, al realizar la suma 4+0+5+9 nos encontramos que es igual a 18 y al número 18 lo podemos escribir de la forma 18=9.2 (procedimiento), es así que valiéndonos del criterio anterior (argumento) nos lleva a razonar que el número de cuatro cifras que propongamos siempre va a ser un número múltiplo de 9 debido a que se utilizarían las cifras 4, 0, 5 y 9

- **Situación Problemática 25**

25.

En la siguiente división:

24.m | 3
a) Encontra, si es posible, un valor para el número natural m de manera tal que el resto de la división sea 0. b) Encontra, si es posible, algún valor de el número natural m para el cual el resto no sea cero.

El problema consiste básicamente en determinar un número natural m, que cumpla que el producto 24xm, sea divisible o no por 3.

Resolución:

Consideremos el ítem a. En el mismo se solicita que dado un número de la forma 24.m, donde m sea un número natural, pueda dividirse por 3 y que el resto sea cero, es decir que el número 24.m sea divisible por el número tres dado un natural m. Si observamos el número 24.m, tenemos que 24 es un número que se enseña y aparece en las tablas de multiplicar, en particular las tabla del 3 y del 8, siendo el número 24=3.8. Esto implica que podemos escribir 24.m=3.8.m, donde utilizando la definición que expresa que *"si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker) y además considerando que un número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero (propiedad pág. 5)* (argumento), tenemos que considerando convenientemente como *b* al número 24.m, es decir *b*=24.m, como *a* al número 3, es decir *a*=3 y al número *c* como 8.m, es decir *c*=8.m, podemos escribir todo como b=3.c, denotando de esta forma que el número 24.m es divisible por 3, independiente del número natural m (procedimiento). Siendo así que el número m puede ser cualquier número natural.

Con respecto al ítem b, no es posible encontrar un número natural m, que reemplazado en la expresión 24.m no sea divisible por 3, dado que en el ítem anterior probamos que sin importar que número sea m, el número 24.m será siempre divisible por 3.

- **Situación Problemática 26**

26.
Busca un número que multiplicado por 4 dé por resultado -12. Podes usar la calculadora.

El problema consiste básicamente en dar un número, con la condición de que el producto del mismo por 4, de como resultado -12.

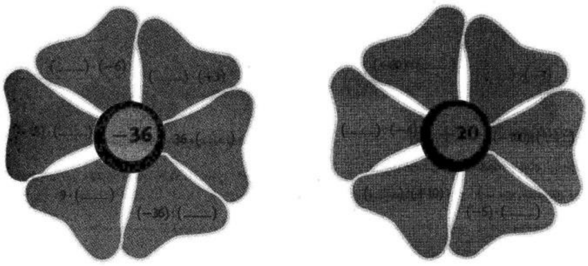
<u>Resolución:</u>

Para encontrar el número que multiplicado por 4, de cómo resultado -12, recurrimos a la definición que expresa que *“si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker), e*s así, que llamando “c” al número que se desconoce, podemos escribir simbólicamente lo que expresa el enunciado del problema, siendo 4.c=-12. Como el número -12 es igual al producto de 4 por un número entero, eso significa que -12 es un múltiplo de 4, razón por la cual aplicando el criterio de divisibilidad por 4 que expresa que un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 (argumento), podemos escribir al número -12 como $-12 = -3.4$ (procedimiento). Retomando la expresión $-12 = 4.c$ y sabiendo que $-12 = 4.(-3)$, tenemos que $-12 = 4.c = 4.(-3)$ (procedimiento), siendo -3 el número que multiplicado por 4, da como resultado 12.

- **Situación Problemática 28**

28.

Completa el cálculo de cada pétalo para que todos den el resulto del centro de la flor



El problema consiste en determinar un número en particular que, de acuerdo a la multiplicación o división, según corresponda, por otro número de cómo resultado -36. Si bien el problema no aclara las características del número a determinar, asumimos que es un número entero.

<u>Resolución:</u>

Miremos el primer pétalo y cada una de las cuentas a realizar. Como podemos notar, se debe determinar un número que cumpla que de acuerdo a la operación de multiplicación o división por otro número de cómo resultado -36.

Considerando cada número entero a determinar cómo r, s, t, u, v, w según corresponda, tenemos que:

$(r).(-6) = -36$ $(s).(+3) = -36$ $(36).(t) = -36$ $(-36):(u) = -36$

$9.(v) = -36$ $(-18).(w) = -36$

Para dar con cada número desconocido en particular, recurrimos a la definición que expresa que *"si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*)(Concepto del libro aritmética de M. Becker),* siendo así que considerando la operación $(r).(-6) = -36$, tenemos que llamando convenientemente *b* al número -36, es decir *b*=-36, llamando *a* al número -6, esto es *a*=-6 y llamando *c* al número r, esto es *c*=r, tenemos que el número a=-6 es divisor del número -36 y teniendo presente la propiedad que expresa que número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero, tenemos que -36 dividido -6 es igual a 6 con resto cero (argumentación). Escribiendo la operación original tenemos que $(6).(-6) = -36$.

Considerando el mismo procedimiento para los demás casos, siendo b=-36 y "a" como divisor de b, tenemos que:

- $(s).(+3) = -36$, siendo a=3 y c=s, tenemos que s=-12

- $(36).(t) = -36$, siendo a=36 y c=t, tenemos que t=-1.

- $9.(v) = -36$ siendo a=9 y c=u, tenemos que v=-4.

- $(-36):(u) = -36$. En este caso particular y recurriendo a la definición de divisible dada en (*), podemos escribir todo de la forma $-36.u = -36$, donde considerando a=-36 y c=u, tenemos que u=1

- $(-18).(w) = -36$ siendo a=-18 y c=w, tenemos que w=2.

Conociendo el valor de r, s, t, u, v, w para cada caso en particular, escribimos a continuación cada cuenta:

$(6).(-6) = -36$ $(12).(+3) = -36$ $(36).(-1) = -36$ $(-36):(1) = -36$

$9.(-4) = -36$ $(-18).(2) = -36$

Para los distintos casos utilizamos la regla de los signos para la multiplicación en números enteros y las siguientes divisiones:

$-36 \;\big|\; 3 \qquad -36 \;\big|\; 36 \qquad -36 \;\big|\; 9 \qquad -36 \;\big|\; -18 \qquad -36 \;\big|\; -36$

-6	-1	-4	2	1

Consideremos ahora el segundo pétalo y las cuentas a realizar. Llamando a cada número entero a determinar cómo r, s, t, u, v, w según corresponda, escribimos:

$(-60):(r)=+20$ $(s):(-1)=+20$ $(-100):(t)=+20$ $(-5).(u)=+20$ $(v).(10)=+20$ $(w):(-4)=+20$

Ahora, recurriendo al mismo procedimiento que hiciéramos para el caso del primer pétalo, esto es, utilizando la definición de divisible que diéramos (*) (argumento), donde *b* es divisible por *a* y la regla de los signos para la multiplicación en número enteros, tenemos que:

- $(-60):(r)=+20$, escribiendo de la forma -60=20.(r), tenemos que b=-60, a=20 y c=r, siendo así que r=-3

- $(s):(-1)=+20$, escribiendo de la forma s=20.(-1), tenemos que b=s, a=20 y c=-1, siendo así que s=-20

- $(-100):(t)=+20$, escribiendo de la forma (-100)=20.(t), tenemos que b=-100, a=20 y c=t, siendo así que X=-5

- $(-5).(u)=+20$, sea b=20, a=-5 y c=u, siendo así que u=-4

- $(v).(10)=+20$, sea b=20, a=10 y c=v, siendo así que v=2

- $(w):(-4)=+20$, escribiendo de la forma (w)=20.(-4), tenemos que b=w, a=20 y c=-4, siendo así que w=-80.

Conociendo el valor de r, s, t, u, v, w para cada caso en particular, escribimos a continuación cada cuenta:

$(-60):(-3)=+20$ $(-20):(-1)=+20$ $(-100):(-5)=+20$ $(-5).(-4)=+20$ $(2).(10)=+20$ $(-80):(-4)=+20$

Para cada una de las divisiones, tuvimos en cuenta las siguientes operaciones:

-60	20	-100	20	20	-5	20	10
-3		-5		-4		2	

- **Situación Problemática 32**

32. Encontrá, si es posible, números enteros a y b tales que a.b=24. ¿Cuántos pares de números cumplen con la condición pedida?

El problema consiste en determinar dos números enteros que cumplan con la condición que su multiplicación de cómo resultado el número 24. Como son dos números que se deben determinar, posiblemente se tenga varios valores de a y b que cumplan con lo solicitado.

<u>Resolución:</u>

Como el número 24 es el resultado de un producto entre dos números enteros, para resolver dicha situación nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)(*), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (Concepto del libro), escribimos

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Siendo $24 = 1.2.2.2.3$

Para el cálculo tuvimos en cuenta las siguientes reglas de divisibilidad:

-2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8 (propiedades del libro)

-3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3(propiedades del libro)

Considerando los distintos divisores del número 24, siendo estos 1, 2 ,3 y utilizando la definición (*), asociando convenientemente los divisores de 24 y multiplicándolos, tenemos los siguientes casos:

- $24 = 2.(2.2.3) = 2.12$, siendo que llamando a=2 y b=12, resulta a.$b = 2.12 = 24$ (procedimiento)

- $24 = (2.2).(2.3) = 4.6$, siendo que llamando a=4 y b=6, resulta $a.b = 4.6 = 24$ (procedimiento)

- $24 = (2.2.2).3 = 8.3$, siendo que llamando a=8 y b=3, resulta $a.b = 8.3 = 24$ (procedimiento)

- $24 = (2.2.2.3).1 = 24.1$, siendo que llamando a=24 y b=1, resulta $a.b = 24.1 = 24$ (procedimiento).

Considerando que los distintos números a y b son divisores del número 24 y aplicando la propiedad que expresa que si un número divide a otro, también su opuesto lo divide (propiedad del libro), resulta que tanto –a cómo –b también son divisores del número 24, es así que utilizando la definición de divisibilidad dada en (*), tenemos que:

- Si 24 es igual al producto 2.12, siendo a=2 y b=12 divisores de 24, tenemos que también -a=-2 y -b=12 son divisores de 24, siendo así que $24 = (-2).(-12)$ (procedimiento)

- Si 24 es igual al producto 4.6, siendo a=4 y b=6 divisores de 24, tenemos que también -a=-4 y -b=-6 son divisores de 24, siendo así que $24 = (-4).(-6)$ (procedimiento)

- Si 24 es igual al producto 8.3, siendo a=8 y b=3 divisores de 24, tenemos que también -a=-8 y -b=-3 son divisores de 24, siendo así que $24 = (-8).(-3)$ (procedimiento)

- Si 24 es igual al producto de 24.1, siendo a=24 y b=1 divisores de 24, tenemos que también -a=-24 y -b=-1 son divisores de 24, siendo asi que $24 = (-24).(-1)$ (procedimiento)

De esta forma, tenemos que los pares de números a y b que cumplen que su producto es 24 son: a=2 y b=12, a=4 y b=6, a=8 y b=3, a=24 y b=1, -a=-2 y -b=12, -a=-4 y -b=-6, -a=-8 y -b=-3, -a=-24 y -b=-1. Siendo así un total de 8 pares de números que cumplen con lo solicitado, respondiendo así a la pregunta del problema.

- **Situación Problemática 33**

33. Encontrá, si es posible, números enteros a y b tales que a.b=-24. ¿Cuántos pares e números cumplen con la condición pedida?

El problema consiste en determinar dos números enteros que cumplan con la condición que su multiplicación de cómo resultado el número 24. Como son dos números que se deben determinar, posiblemente se tenga varios valores de a y b que cumplan con lo solicitado. Este problema guarda relación con el problema 32, con la diferencia que los números deberán ser de signos opuestos.

<u>Resolución:</u>

Como el número 24 es el resultado de un producto entre dos números enteros, para resolver dicha situación nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)(*), también del Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales (Propiedad del libro aritmética de M. Becker)*, siendo un número primo aquel número entero que tiene solo cuatro divisores, el mismo, su opuesto, el 1 y -1 (Concepto del libro), escribimos

:

-24	2
-12	2
-6	2
-3	3
-1	

Siendo $-24 = -1.2.2.2.3$

Para el cálculo tuvimos en cuenta las siguientes reglas de divisibilidad:

-2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8 (propiedades)

-3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3(propiedades)

Considerando los distintos divisores del número -24, siendo estos 1, 2 ,3 y utilizando la definición (*), asociando convenientemente los divisores de -24, multiplicándolos entre si y teniendo presente la regla de los signos para la multiplicación, tenemos los siguientes casos:

- $24 = 2.(-2.2.3) = 2.(-12)$ de donde tenemos que llamando a=2 y b=-12, resulta a.b=2.(-12)=24. Utilizando a la vez la regla de los signos (argumento) para la multiplicación tenemos que también se da el caso que a=-2 y b=12. Siendo $24 = (-2).(12)$

- $24 = (2.2).(-2.3) = 4.(-6)$, de donde tenemos que llamando a=4 y b=-6, resulta $a.b = 4.(-6) = 24$. Utilizando a la vez la regla de los signos (argumento) para la multiplicación tenemos que también se da el caso que a=-4 y b=6. Siendo $24 = (-4).6$

- $24 = (2.2.2).(-3) = 8.(-3)$, de donde tenemos que llamando a=8 y b=-3, resulta a.$b = 8.(-3) = 24$. Utilizando a la vez la regla de los signos (argumento) para la multiplicación tenemos que también se da el caso que a=-8 y b=3. Siendo $24 = (-8).3$

- $24 = (2.2.2.3).(-1) = 24.(-1)$, de donde tenemos que llamando a=24 y b=-1, resulta a.$b = 24.(-1) = 24$ (procedimiento). Utilizando a la vez la regla de los signos (argumento) para la multiplicación tenemos que también se da el caso que a=-24 y b=1. Siendo $24 = (-24).1$.

De esta forma, tenemos que los pares de números a y b que cumplen que su producto es igual a -24 son: a=2 y b=-12, a=4 y b=-6, a=8 y b=-3, a=24 y b=-1, a=-2 y b=12, a=-4 y b=6, a=-8 y b=3, a=-24 y b=1, siendo así un total de 8 pares de números. Respondiendo así a la pregunta del problema.

- **Situación Problemática 34**

34. En equipo

Completen con verdadero (V) o falso (F)

a) Los divisores de -20 son los mismos que los de su opuesto……

b) El 1 es el único número entero que es divisor de cualquier número entero……

c) Si un número es primo, su opuesto también lo es……

d) Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores……

La situación problemática consiste en determinar si diversas afirmaciones son verdaderas o falsas dependiendo de lo que expresen. Si bien, la situación no determina si se debe o no argumentar las respuestas que se brinde, a continuación, argumentaremos nuestras afirmaciones.

<u>Resolución:</u>

Consideremos el ítem a. El enunciado afirma que “los divisores de -20 son los mismos que los de su opuesto”. Para este enunciado nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker) y ademas* recurrimos a la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b*” *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), Resultando esta propiedad una herramienta importante para determinar, entre números enteros positivos y negativos o ambos negativos, si uno de ellos es divisor del otro, sin tener que recurrir a la división. Esto quiere decir que dado un divisor de -20, implica que dicho número también es divisor de su opuesto (argumento), en este caso del número 20. Siendo así, que esta afirmación resulta VERDADERA.

Para el caso del ítem b, el enunciado afirma que “el 1 es el único número entero que es divisor de cualquier número entero”. Para determinar la verdad o falsedad de este enunciado, recurrimos a la propiedad que expresa que todo número “b” es múltiplo de 1 *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*). Siendo b un número entero cualquiera podemos escribirlo de la forma b=1.b y recurriendo a la definición que expresa que *“si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, esto nos permite afirmar que 1 es divisor de b, siendo así divisor de cualquier número entero. Resultando la afirmación del ítem b VERDADERA.

En el caso del ítem c, se afirma que “si un número es primo, su opuesto también lo es”. Para determinar la verdad o falsedad de esta afirmación, teniendo presente la definición de número primo que esboza el libro y utilizando el enunciado que expresa que dado un número entero a, se tiene que “*a es primo si y solo si –a también lo es, resultando los divisores de a los números 1, a, -1 y -a” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*. Siendo así, que la afirmación del ítem c, es VERDADERA.

Con respecto al ítem d, se afirma que “un número entero puede tener una cantidad impar de divisores”. Para esta afirmación, utilizamos la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que “a divide a*

–b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b” *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*). Esta propiedad afirma, que siempre que un número entero “a” sea un divisor de otro entero b, su opuesto también lo será, eso quiere decir que siempre se tendrá un número par de divisores (argumentación). Siendo así, que la afirmación del ítem d es FALSA.

- **Situación Problemática 35**

35.

Rodeá los números primos

-35	17	-29	-14
+51	-33	-39	+19

La situación problemática consiste en determinar si de una lista de números dados, estos son números primos o no. Si bien el ejercicio no solicita dar una argumentación de cuando un número es primo o no, nosotros lo haremos.

Resolución:

Para determinar cuáles números de la lista que brinda el problema son números primos, consideramos las siguientes definiciones: un número entero a es primo si tiene solo cuatro divisores (1, -1, a y -a) (*) (definición del libro) y dados dos números enteros a y b, con *a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* De esta forma, realizamos las siguientes divisiones:

-35	5	17	17	-29	29	-14	2	51	3	-33	3	-39	3	19	19
-7	7	1		-1		-7	7	17	17	-11	11	-13	13	1	
-1						-1		1		-1		1			

Para estas divisiones, utilizamos los siguientes criterios que expresan que un número es divisible por:

-2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8 (propiedad)

-3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3 (propiedad)

-5 si termina en 0 o 5 (propiedad)

- Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7(propiedad.

Considerando la propiedad que expresa que, si un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es (propiedad del libro) y que todo número “b” es múltiplo de 1 (propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5), planteamos algunos de los divisores de cada número de la lista del problema que se observa de las divisiones realizadas:

- Los divisores del -35 son: 1, 5, 7, 35, -1, -5 y -35
- Los divisores del 17 son: 1, 17, -1 y -17
- Los divisores del -29 son: 1, 29, -1 y -29
- Los divisores del -14 son: 1, 2, 7, 14, -1, -2, -7 y -14
- Los divisores del 51 son: 1, 3, 17, 51, -1, -3, -17 y -51
- Los divisores del -33 son: 1, 3, 11, 33, -1, -3, -11 y -33
- Los divisores del -39 son: 1, 3, 13, 39, -1, -3, -13 y -39
- Los divisores del 19 son: 1, 19, -1 y -19

Conociendo los divisores de cada número y teniendo en cuenta la definición de número primo (*), tenemos que los números que cumplen que son primo son los números, -29, 17 y 19. Afirmamos esto, porque dichos números tienen solamente cuatro divisores cada uno (argumentación), siendo que los demás números, -35, -14, 51, -33 y -39, tienen más de cuatro divisores.

- **Situación Problemática 36**

36.

Uní cada número verde con aquellos números anaranjados que sean divisores de él.

-21	+18	25	-10	-16
-4	+2	-5	-3	+7

La situación problemática consiste en unir los números en color verde de una lista, con los números en color anaranjado de otra lista que resulten divisores de la lista en verde.

<u>Resolución:</u>

Para poder determinar cuál número entero es divisor de otro número entero, primero recurrimos a la definición que expresa que dados dos números enteros a y b, con *a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (*) (Concepto del libro aritmética de M. Becker).* Siendo así, a cada número de la lista en verde le aplicamos las reglas de divisibilidad que brinda el libro:

- El número -21 tiene por divisores los números -3 y +7. Afirmamos esto, porque la suma de los dígitos del número -21, esto es 2+1 es igual a 3 (procedimiento), siendo este número múltiplo de tres, y aplicando el criterio de divisibilidad por 3 tenemos que -21 es divisible por 3. Resultando así que al número -21 lo podemos escribir de la forma $-21 = 3.(-7)$ (por lo definido en *(*)*). Esto significa que, aplicando la propiedad que expresa que si un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es (**) (argumentación), tenemos que no solo los números +3 y -7 son divisores del número -21, sino que también los números -3 y +7 son también divisores del número -21.
- El número +18 tiene por divisores a los números 2 y -3. Afirmamos esto porque al ser el último digito el número 8, podemos aplicar el criterio de divisibilidad por 2(argumento). También afirmamos que +18 es divisible por 3, porque al sumar sus dígitos 1+8 es igual a 9, siendo este número un múltiplo de 3. Con lo cual, aplicando lo definido en (**) (argumentación), significa que el número -3 también es divisor de +18.
- El número 25 tiene por divisor al número -5. Afirmamos esto, porque al ser el último digito el número 5, aplicamos el criterio de divisibilidad por 5. A su vez, aplicando lo definido en (**) (argumentación), significa que el número -5 también es divisor de 25.
- El número -10 tiene por divisores a los números +2 y -5. Afirmamos esto porque al ser el último digito el número 0, podemos aplicar tanto el criterio por divisibilidad por 2 y por 5. Siendo así, que aplicando lo definido en (**) (argumentación), eso significa que el número -5 también es divisor del número -10
- El número -16 tiene por divisores a los números +2 y -4. Afirmamos esto porque al ser el último digito el número 6, podemos aplicar el criterio de divisibilidad por 2 (argumento). Como el número tiene por dígitos al número 16 y recurriendo a las tablas de multiplicar que se aprende a lo largo de la secundaria, al número 16 lo podemos escribir de la forma $16 = 4.4$ (por lo definido en *(*)*). Siendo así que aplicando el criterio de divisibilidad por 4, afirmamos que también es divisible por 4. A su vez, recurriendo a lo definido en (**) (argumentación), tenemos que el número -4 también es divisor de -16.

Las reglas de divisibilidad que utilizamos fueron las siguientes:

Un número es divisible por:

-2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8 (propiedad)

-3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3 (propiedad)

-4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 (propiedad)

-5 si termina en 0 o 5 (propiedad)

- **Situación Problemática 37**

37. Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. a) Si se multiplican dos múltiplos de 3 el resultado es un múltiplo de 6. b) Todos los números primos sin impares. c) Si un número es divisible por 4, entonces también es divisible por 8 d) Si un múltiplo de 3 se lo divide por 2 y se obtiene cero de resto, entonces ese número es múltiplo de 6.

La situación problemática consiste en determinar si dada una lista de afirmaciones, las mismas resultan verdaderas o falsas acorde a lo que afirman. Si bien no solicita argumentar la verdad o falsedad de las afirmaciones, nosotros lo haremos.

Resolución:

Consideremos la afirmación del ítem a) que dice que "si se multiplican dos múltiplos de 3 el resultado es un múltiplo de 6". Esta afirmación resulta ser Falsa. Afirmamos esto, porque si consideramos dos números múltiplos de tres, en este caso los números 3 y -3, al multiplicarlos entre sí esto es 3.(-3) obtenemos por resultado -9 y este número al no ser divisible por 2, puesto que su última cifra no es 0, 2, 4, 6 u 8 (argumentación) , tampoco lo será por 6. Esto último se debe a que para que un número sea divisible por 6, tiene que ser divisible por 2 y por 3 a la vez. Aquí utilizamos la definición que expresa que dado dos números cualesquiera a y b, *"con a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* y las reglas de divisibilidad por 2, por 3 y por 6. Dichas reglas expresan que un número es 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8 (propiedad), un número 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3 (propiedad) y un número es divisible por 6 si es múltiplo de 2 y 3 a la vez (propiedad).

Para el caso del ítem b, se afirma que "todos los números primos son impares", esto significa que no son divisibles por 2. Esta afirmación resulta ser Falsa. Afirmamos esto, porque si consideramos el número 2 y la definición que expresa que dados dos números enteros a y b, *con a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* y el criterio de divisibilidad por 2, que expresa que un número es divisible por 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8 , tenemos que 2 es divisible por 2. Ahora nos resta determinar si el número 2 es un número primo, para ello considerando convenientemente como b=2 y a=2, resulta 2=2.1 y aplicando la propiedad que expresa que si un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es, resulta ser que los divisores del número 2 son los números 1, 2, -1 y -2. Teniendo presente la definición de número primo que expresa que *un número entero a es primo si tiene solo cuatro divisores (1, -1, a y –a) (concepto)*, llegamos a la conclusión de que al tener el número 2 cuatro divisores, el número 2 es un número primo y además es divisible por dos.

Con respecto al ítem c, se afirma que “si un número es divisible por 4, entonces también es divisible por 8”, Esta afirmación resulta ser Falsa. Afirmamos esto porque al considerar la definición que expresa que dados dos números enteros a y b, *con a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (*)(Concepto del libro aritmética de M. Becker)* y el criterio de divisibilidad por 4 que expresa que un números es divisible por 4 si dicho número es múltiplo de 4 (propiedad), tenemos que para el caso particular del número 12 el mismo es divisible por 4, pudiendo escribirse el número 12 de la forma $12 = 3.4$ (*). Siendo así que podemos observar que los números que dividen al 12 son los números 3 y 4, siendo ambos distintos de un número múltiplo de 8, resultando así que 12 no es divisible por 8.

Con respecto al ítem d, se afirma que “si a un número múltiplo de 3 se lo divide por 2 y se obtiene cero de resto, entonces ese número es múltiplo de 6”. Esta afirmación resulta Verdadera. Afirmamos esto, porque utilizando la regla de divisibilidad por 6, que expresa que un número es divisible por 6 si dicho número es múltiplo de tres y de dos a la vez, la definición que expresa que dados dos números enteros a y b, *con a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* y la propiedad que expresa que *un número b es múltiplo o divisible por a si y solo si su resto es cero (Concepto)*, tenemos que si b es un número múltiplo de 3 y que dividido por 2 tiene resto cero (o sea múltiplo de 2), podemos escribir al número b de la forma $b = 2.3.c$, de donde surge que $b = 2.3.c = 6.c$, siendo así que b resulta un número múltiplo de 6.

4.2.3.5 Configuración epistémica del sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas

A continuación, se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones

- **Lenguaje**

-Expresión verbal: múltiplo, divisible, número natural, resto, dígitos, reglas, cifras, primos, compuesto, opuesto.

-Expresión simbólica: dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y los signos de las operaciones básicas, como ser la “+” (suma), “-“(resta), “.” “x” (Multiplicación) y “/” (división), 24xm, a, -a, axb, =.

-Expresión gráfica: representación gráfica de la operación división.

- **Situaciones-Problemáticas**

Se presentan los siguientes tipos de problemas:

$P_{1, 22:}$ ¿Cuáles números son divisibles por 7?

$P_{2, 23:}$ ¿Cuándo un número entero es múltiplo o no de otro número entero?

$P_{3, 23:}$ ¿Cuándo un número entero es divisible o no por otro número entero?

$P_{4, 25:}$ ¿Cuándo el producto de dos números es divisible por otro?

$P_{5, 26, 28:}$ ¿Qué número multiplicado por otro, da un número en particular?

$P_{6, 28:}$ ¿Qué número que divide a otro da un resultado en particular?

$P_{7, 32, 33:}$ ¿Qué pares de números cumplen que multiplicados dan otro número?

$P_{8, 34:}$ ¿Los divisores de un número, lo son también de su opuesto? Ítem a)

$P_{9, 34:}$ ¿Existe un número que divide a todos los demás números? Ítem b)

$P_{10, 34:}$ ¿Existen números primos que sean opuestos? Ítem c)

$P_{11, 34:}$ ¿Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores? ítem d)

$P_{12, 35:}$ ¿Cuándo un número entero es primo?

$P_{13, 36:}$ ¿Qué número es divisor de otro número?

$P_{14, 37:}$ ¿Si dos números enteros que son múltiplo de otro se multiplican entre sí, dicho producto es múltiplo de otro número? Ítem a)

$P_{15, 37:}$ ¿Todos los números primos son impares? Ítem b)

$P_{16, 37:}$ ¿Si un número es divisible por otro, también es divisible por otro número distinto a los anteriores? Ítem c)

$P_{17, 37:}$ ¿Si un número es múltiplo de un número y divisible por otro número, es también múltiplo de otro número distintos a los anteriores?

- **Conceptos**

-Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c.

-Un número es primo si tiene solo 4 divisores enteros: el mismo, su opuesto, 1 y -1. Si tiene más de 4 divisores enteros, es compuesto

- Dado un número entero a, se tiene que "a es primo si y solo si –a también lo es"
• **Proposiciones** -Todo número "b" es múltiplo de 1 -Si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b" -Teorema Fundamental de la Aritmética: expresa que todo número entero c, distinto de 0, 1 y -1, puede factorizarce unívocamente como el producto positivo o negativo de números primos positivos con exponentes naturales. -Si un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es -Número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero -Un número es divisible por 2 cuando termina 0,2,4,6 u 8 -Un número es divisible por 3, si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4. -Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5. *-Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3 a la vez* *- Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7.* -Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9. -Un número es divisible por 10 si su última cifra es 0.
• **Procedimientos** Divisiones de números por factores primos. Cálculo de operaciones mediante suma y resta de números. Cálculo de operaciones mediante producto de números. Cálculo de divisores. Cálculo de múltiplos.
• **Argumentos** Argumentación de los resultados a través de los procedimientos utilizados. -El resultado de las operaciones se justifica por medio de la utilización de las operaciones básicas. -A través de la utilización de las definiciones, teorema y propiedades utilizadas.

4.2.3.6 Relaciones conceptuales más sobresalientes

A continuación, exponemos las relaciones conceptuales más pertinentes entre los objetos primarios

$P_{1,22}$: ¿Cuáles números son divisibles por 7? **Situación problemática 22** $R_{1,22}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2,22}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa un número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero $R_{3,22}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si una expresión es divisible por 7 $R_{4,22}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si una expresión numérica es divisible por 7. $R_{5,22}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y el procedimiento para determinar si una expresión numérica es divisible por 7
$P_{2,23}$: ¿Cuándo un número entero es múltiplo o no de otro número entero? **$P_{3,23}$: ¿Cuándo un número entero es divisible o no por otro número entero**? **Situación problemática 23** $R_{1,23}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2,23}$: Entre la situación problemática y las reglas de divisibilidad. $R_{3,23}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y las reglas de divisibilidad $R_{4,23}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisible por otro número. $R_{5,23}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es múltiplo de otro número. $R_{6,23}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es divisible por otro.
$P_{4,25}$: ¿Cuándo el producto de dos números es divisible por otro? **Situación problemática 25** $R_{1,25}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2,25}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que un número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero $R_{3,25}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisible por otro número. $R_{4,25}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es divisible por otro o no.

$P_{5, 26, 28}$: ¿Qué número multiplicado por otro, da un número en particular? **Situaciones problemáticas 26, 28** $R_{1, 26, 28}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2, 26, 28}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar un número que es factor en una multiplicación. $R_{3, 26, 28}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar un número que es factor en una multiplicación.
$P_{6, 28}$: ¿Qué número divisible por otro da un resultado en particular? **Situación problemática 28** $R_{1, 28}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2, 28}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisible por otro número. $R_{3, 28}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es divisible por otro o no.
$P_{7, 32, 33}$: ¿Qué pares de números cumplen que multiplicados dan otro número? **Situaciones problemáticas 32, 33** $R_{1, 32, 33}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 32, 33}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{3, 32, 33}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{4, 32, 33}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{5, 32, 33}$: Entre las reglas de divisibilidad y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{6, 32, 33}$: Entre los criterios de divisibilidad y el procedimiento para factorizar números $R_{7, 32, 33}$: Entre la situación problemática y los números que multiplicados dan otro número. $R_{8, 32, 33}$: Entre el procedimiento para determinar los números que multiplicados dan otro número y el argumento para determinar dichos números**.** $R_{9, 32, 33}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números.
$P_{8, 34}$: ¿Los divisores de un número, lo son también de su opuesto? Ítem a) **Situación problemática 34** $R_{1, 34}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{34, 2}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y

que “-a divide a –b”.

$R_{34, 3}$: Entre la situación problemática y el argumento para determinar los divisores de un número y su opuesto

$P_{9, 34}$: ¿Existe un número que divide a todos los demás números? Ítem b)

Situación problemática 34

$R_{1, 34}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible

$R_{2, 34}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que todo número “b” es múltiplo de 1

$R_{34, 3}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y la propiedad que expresa que todo número “b” es múltiplo de 1

$R_{34, 4}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y la propiedad que expresa que todo número “b” es múltiplo de 1

$P_{10, 34}$: ¿Existen números primos que sean opuestos? Ítem c)

Situación problemática 34

$R_{1, 34}$: Entre la situación problemática y la definición que expresa que sí “*a es primo si y solo si –a también lo es”*

$R_{2, 34}$: Entre la definición de número primo y la definición que expresa que sí “*a es primo si y solo si –a también lo es”*

$R_{3, 34}$: Entre la situación problemática y la definición de número primo

$R_{4, 34}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar que si un número es primo su opuesto también lo es

$P_{11, 34}$: ¿Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores? ítem d)

Ejercicio 34

$R_{1, 34}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que, si un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es

$R_{2, 34}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar que un número entero tiene una cantidad par de divisores.

$P_{12, 35}$: ¿Cuándo un número entero es primo?

Ejercicio 35

$R_{1, 35}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible

$R_{2, 35}$: Entre la situación problemática y la definición número primo.

$R_{3, 35}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar divisores

$R_{4, 35}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad

$R_{5, 35}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y la propiedad que

indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”. $R_{6,\ 35}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”. $R_{7,\ 35}$: Entre la definición de número primo y la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”. $R_{8,\ 35}$: Entre la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b” y el procedimiento para determinar los divisores de un número $R_{9,\ 35}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es primo
$P_{13,\ 36}$: ¿Qué número es divisor de otro número? **Situación problemática 36** $R_{1,\ 36}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2,\ 36}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”. $R_{3,\ 36}$: Entre la situación problemática y las reglas de divisibilidad $R_{4,\ 36}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar los divisores de un número $R_{5,\ 36}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y las reglas de divisibilidad. $R_{6,\ 36}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar cuál número es divisor de otro.
$P_{14,\ 37}$: ¿Si dos números enteros que son múltiplos de otro se multiplican entre sí, dicho producto es múltiplo de otro número? Ítem a) **Situación problemática 37** $R_{1,\ 37}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2,\ 37}$: Entre la situación problemática y las reglas de divisibilidad $R_{3,\ 37}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y las reglas de divisibilidad. $R_{4,\ 37}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número

es múltiplo de otro.
$P_{15, 37}$: ¿Todos los números primos son impares? Ítem b) **Situación problemática 37** $R_{1, 37}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 37}$: Entre la situación problemática y las reglas de divisibilidad por 2 $R_{3, 37}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y las reglas de divisibilidad. $R_{4, 37}$: Entre la situación problemática y la definición de número primo $R_{5, 37}$: Entre la definición de número primo y la regla de divisibilidad por 2 $R_{6, 37}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número primo es par
$P_{16, 37}$: ¿Si un número es divisible por otro, también es divisible por otro número distinto a los anteriores? Ítem c) **Situación problemática 37** $R_{1, 37}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 37}$: Entre la situación problemática y las reglas de divisibilidad por 4 $R_{3, 37}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y las reglas de divisibilidad. $R_{4, 37}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y el argumento de cuando un número no es múltiplo de otro. $R_{5, 37}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es divisible por otro
$P_{17, 37}$: ¿Si un número es múltiplo de un número y divisible por otro número, es también múltiplo de otro número distintos a los anteriores? ítem d) **Situación problemática 37** $R_{1, 37}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 37}$: Entre la situación problemática y las reglas de divisibilidad por 2, 3 y 6 $R_{3, 37}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y las reglas de divisibilidad. $R_{4, 37}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y el argumento de cuando un número es múltiplo de otro. $R_{5, 37}$: Entre las reglas de divisibilidad y el procedimiento para determinar cuando un número es múltiplo o divisible por otro.

$R_{6, 37}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es múltiplo de otro.

4.2.3.7 Análisis de las relaciones conceptuales de ambas configuraciones epistémicas

Teniendo en cuenta la configuración epistémica construida con el desarrollo conceptual del contenido divisibilidad de números enteros y las relaciones conceptuales más pertinente que se establecen entre los objetos primarios de dicha configuración, como así también la configuración epistémica de las practicas matemáticas realizadas en las resoluciones de las situaciones problemáticas y las relaciones conceptuales establecidas entre los objetos primarios intervinientes y emergentes de tales resoluciones, encontramos que:

Con respecto a la *situación problemática 22*, que es un representante del tipo de problema $P_{1:}$ ¿Cuáles números son divisibles por 7? Se puede observar que fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para determinar cuándo un número entero divide, es divisor, es factor, múltiplo o divisible por otro número entero (*) y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{1, 22}}$. En conjunto con esta definición, fue necesaria la propiedad (**) que expresa que un número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero, estableciendo la correspondencia $\mathbf{R_{2, 22}}$. La definición (*) y la propiedad (**) permitieron determinar si las expresiones dadas eran divisibles por 7, pudiendo formarse de esta forma las relaciones $\mathbf{R_{3, 22}}$, $\mathbf{R_{4, 22}}$ y $\mathbf{R_{5, 22}}$. La razón que motivo la introducción de la definición (*) se debe al hecho que en el desarrollo conceptual que esgrime el libro no se observa ninguna definición de cuando dos números enteros son divisible entre sí, siendo necesaria para poder realizar lo solicitado en el problema.

En cuanto a la *situación problemática 23*, que es un representante de los tipos de problemas P_2: ¿Cuándo un número entero es múltiplo o no de otro número entero? $P_{3:}$ ¿Cuándo un número entero es divisible o no por otro número entero? Nos encontramos que dada una lista de números, era necesario relacionarlos para que sean o no divisibles o múltiplos de otros números, razón por la cual fue necesaria la introducción de la definición que expresa cuando un número entero divide, es divisor, es factor, múltiplo o divisible por otro número entero (*) y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{1, 23}}$. A su vez, la introducción de la definición (*) permitió establecer una vinculación con las reglas de divisibilidad y formar la relaciones $\mathbf{R_{2, 22}}$ y $\mathbf{R_{3, 22}}$, como se observa en la figura 1. La definición (*) permitió determinar los números que eran o no divisibles y múltiplos de otros números, propiciando las relaciones $\mathbf{R_{4, 23}}$, $\mathbf{R_{5, 23}}$ y $\mathbf{R_{6, 23}}$.

Si bien en desarrollo conceptual que se desarrolla en el libro se esgrime una definición de cuando dos números son múltiplos, nos encontramos que dicha definición es confusa cuando utiliza el término factor sin hacer mención en ningún lugar del contenido sobre lo que significa dicha palabra, dejando además de lado el lenguaje simbólico, siendo así que la relación **R1** resulta forzada. No obstante, la introducción de la definición (*) y utilización de los criterios de divisibilidad establece una vinculación con la situación problemática, en particular con la relación **R2** del desarrollo conceptual del libro.

En cuanto a la gráfica, figura 1, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

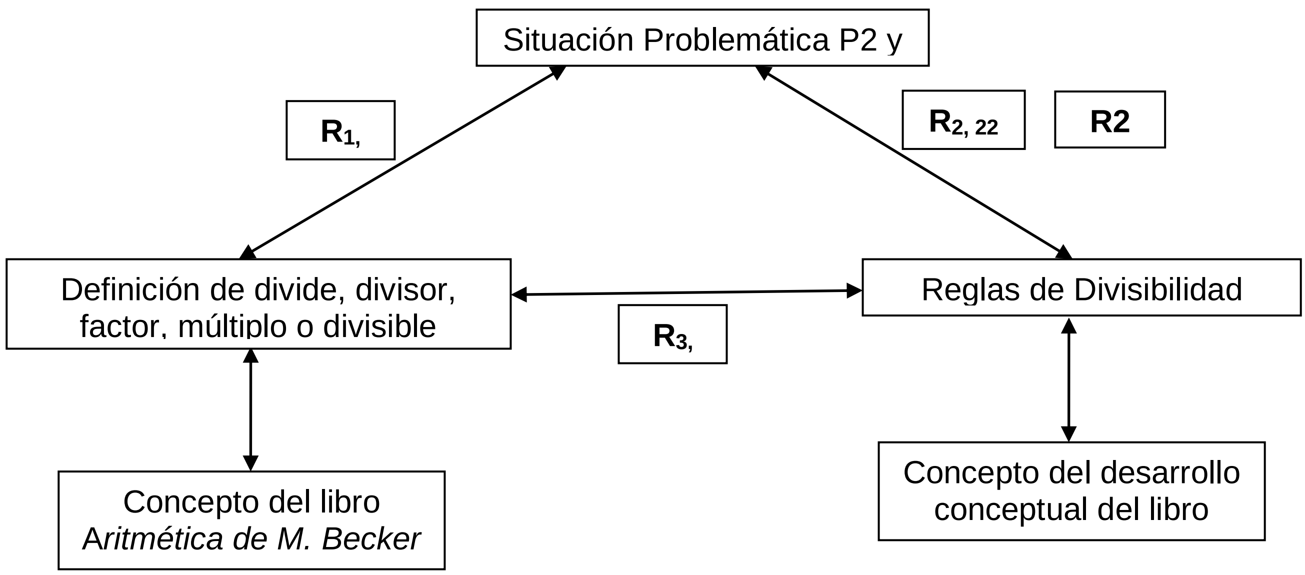


Figura 1

En relación a la *situación problemática 25*, que es un representante del tipo de problema P_4: ¿Cuándo el producto de dos números es divisible por otro? Podemos observar que nuevamente estuvimos en la necesidad de introducir la definición que expresa cuando un número entero divide, es divisor, es factor, múltiplo o divisible por otro número entero (*) y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{1,\,23}}$. Al igual que en casos anteriores, esta introducción se realizó debido a que en el desarrollo conceptual que brinda el libro, no se observa ninguna definición de las condiciones que cumplen dos números para ser divisibles entre sí. En conjunto con esta definición, fue necesaria la propiedad (**) que expresa que un número entero b es múltiplo de a si y solo si el resto de dividir b por a es cero, estableciendo la correspondencia $\mathbf{R}_{2,\,25}$. La incorporación de la definición (*) y propiedad (**) permitieron determinar el valor de m para que sea divisible por 3, pudiendo formarse de esta forma las relaciones $\mathbf{R}_{3,\,25}$ y $\mathbf{R}_{4,\,25}$.

En cuanto a las *situaciones problemáticas 26 y 28*, siendo ambos representantes del tipo de problema P_5: ¿Qué número multiplicado por otro, da un número en particular? Podemos observar que en ambas situaciones se tiene un producto de los cuales se desconoce uno de los multiplicandos. Si bien en el desarrollo conceptual del libro se brinda una definición de múltiplo, el mismo es poco claro debido a que utiliza la palabra factor sin hacer mención sobre lo que significa. Fue así que nos vimos en la necesidad de introducir la definición que expresa cuando un número entero divide, es divisor, es factor, múltiplo o divisible por otro número entero (*) y así poder establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\,26,28}$. A su vez, la introducción de la misma permitió establecer las relaciones $\mathbf{R}_{2,\,26,28}$ y $\mathbf{R}_{3,\,26,28}$ y poder determinar el número desconocido.

En lo que respecta a la situación problemática 28, siendo este también un representante del tipo de problema P_6: ¿Qué número divisible por otro da un resultado en particular? Como observamos, al igual que en los problemas anteriores nos vimos en la necesidad de introducir la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisible por otro número entero y así establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\,28}$. La introducción de dicha definición, permitió determinar los números que eran divisibles por otro número, permitiendo formar las relaciones $\mathbf{R}_{2,\,28}$ y $\mathbf{R}_{3,\,28}$.

En relación a las situaciones problemáticas 32 y 33, siendo ambos representantes del tipo de problema P_7: ¿Qué pares de números cumplen que multiplicados dan otro número? Podemos observar que fue necesaria nuevamente la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número entero que divide, es divisor, es factor, múltiplo o divisible por otro número entero y así poder establecer la relación $\mathbf{R}_{1,\,32}$. Considerando que se debían encontrar todos los números que multiplicados daban un resultado en particular, fue necesario introducir el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA) y así establecer las relaciones $\mathbf{R}_{2,\,32,\,33}$ y $\mathbf{R}_{5,\,32,\,33}$. Como en la introducción del TFA incluye trabajar con números primos, gracias a la definición que esboza el desarrollo conceptual del libro, este es un número entero a es primo si tiene solo cuatro divisores (1, -1, a y -a), fue posible establecer una vinculación y así determinar la relación $\mathbf{R}_{3,\,32,\,33}$, como se observa en la figura 2. Como se factorizó un número en particular, se utilizó las reglas de divisibilidad que esgrime el desarrollo conceptual del libro, generando así las relaciones **R**$_{4, 32, 33}$, **R**$_{5, 32, 33}$, y **R**$_{6, 32, 33}$. Si bien en desarrollo conceptual que se desarrolla en el libro se esgrime una definición de cuando dos números son múltiplos, nos encontramos que dicha definición es confusa cuando utiliza el término factor sin hacer mención en ningún lugar del contenido sobre lo que significa dicha palabra, dejando además de lado el lenguaje simbólico, siendo así que la relación **R4** resulta forzada. No obstante, la relación **R5**.

En cuanto a la gráfica, figura 2, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

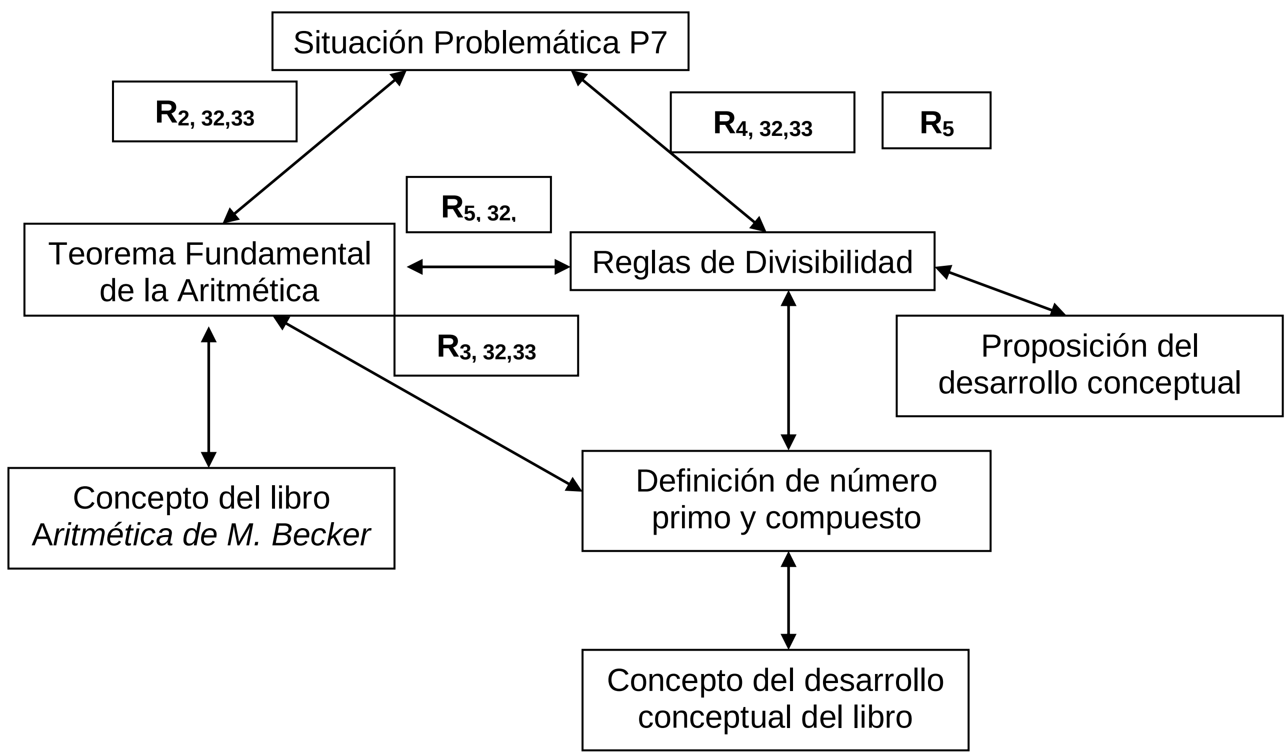


Figura 2

En relación a la situación problemática 34, el mismo tiene varios ítems que son representantes de un determinado tipo de problema, ellos son:

Ítem a: $P_{8:}$ ¿Los divisores de un número, lo son también de su opuesto? Donde fue necesaria la introducción de la definición (*) de las condiciones que cumple un número entero que divide, es divisor, es factor, múltiplo o divisible por otro número entero y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{1,\ 34}}$. En conjunto con este último, se introdujo la propiedad que expresa que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b", permitiendo construir las relaciones $\mathbf{R_{2,\ 34}}$ y $\mathbf{R_{3,\ 34}}$. Determinando así la veracidad de la afirmación del ítem

Ítem b: $P_{9:}$ ¿Existe un número que divide a todos los demás números? Nuevamente introdujimos la definición dada en (*) y la propiedad que expresa que cualquier número entero b puede escribirse de la forma b=1.b, generando así las relaciones $R_{1,\ 34}$ y $R_{2,\ 34}$. Permitiendo ambos enunciados la veracidad del ítem b y construcción de las correspondencias $R_{3,\ 34}$ y $R_{4,\ 34}$

Ítem c: $P_{10:}$ ¿Existen números primos que sean opuestos? Para este ítem podemos observar que, partiendo de la definición de lo que es un número primo y la introducción de la propiedad que expresa que un número "*a es primo si y solo si –a también lo es"* para determinar la veracidad del ítem. Permitiendo la construcción de las relaciones $\mathbf{R_{1,\ 34}}$, $\mathbf{R_{2,\ 34}}$, $\mathbf{R_{3,\ 34}}$ y $\mathbf{R_{4,\ 34}}$. Podemos observar que estas relaciones guardan vinculación con la relación **R6** del desarrollo conceptual del libro, como se observa en la figura 3.

En cuanto a la gráfica, figura 3, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que, en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

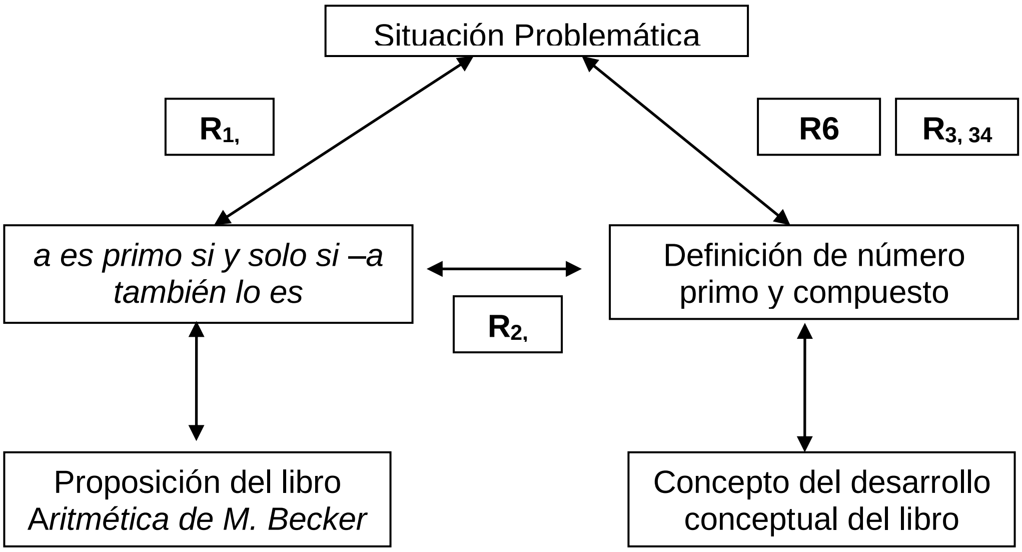


Figura 3

- Ítem d: $P_{11:}$ ¿Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores? En este ítem fue necesario utilizar la propiedad dada en el ítem b, propiciando así las relaciones $R_{1, 34}$ y $R_{2, 34}$.

En lo que respecta a la situación problemática 35, siendo este un representante del tipo de problema P_{12}: ¿Cuándo un número entero es primo? Podemos notar que fue necesaria la introducción de la definición de divisible utilizada en problemas anteriores en conjunto con la propiedad que expresa que indica que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b", permitiendo la construcción de las relaciones $\mathbf{R_{1, 35}}$, $\mathbf{R_{6, 35}}$ y $\mathbf{R_{8, 35}}$. Como se debía determinar de una lista de números aquellos que eran primos se utilizó la definición de número primo que brinda el desarrollo conceptual del libro en conjunto con las reglas de divisibilidad, dando origen a las relaciones $\mathbf{R_{2, 35}}$, $\mathbf{R_{4, 35}}$, $\mathbf{R_{7, 35}}$ **y** $\mathbf{R_{9, 35}}$. Siendo que estas últimas relaciones guardan vinculación con la relación **R7** del desarrollo conceptual del libro. Como se observa en la figura 4.

En cuanto a la gráfica, figura 4, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

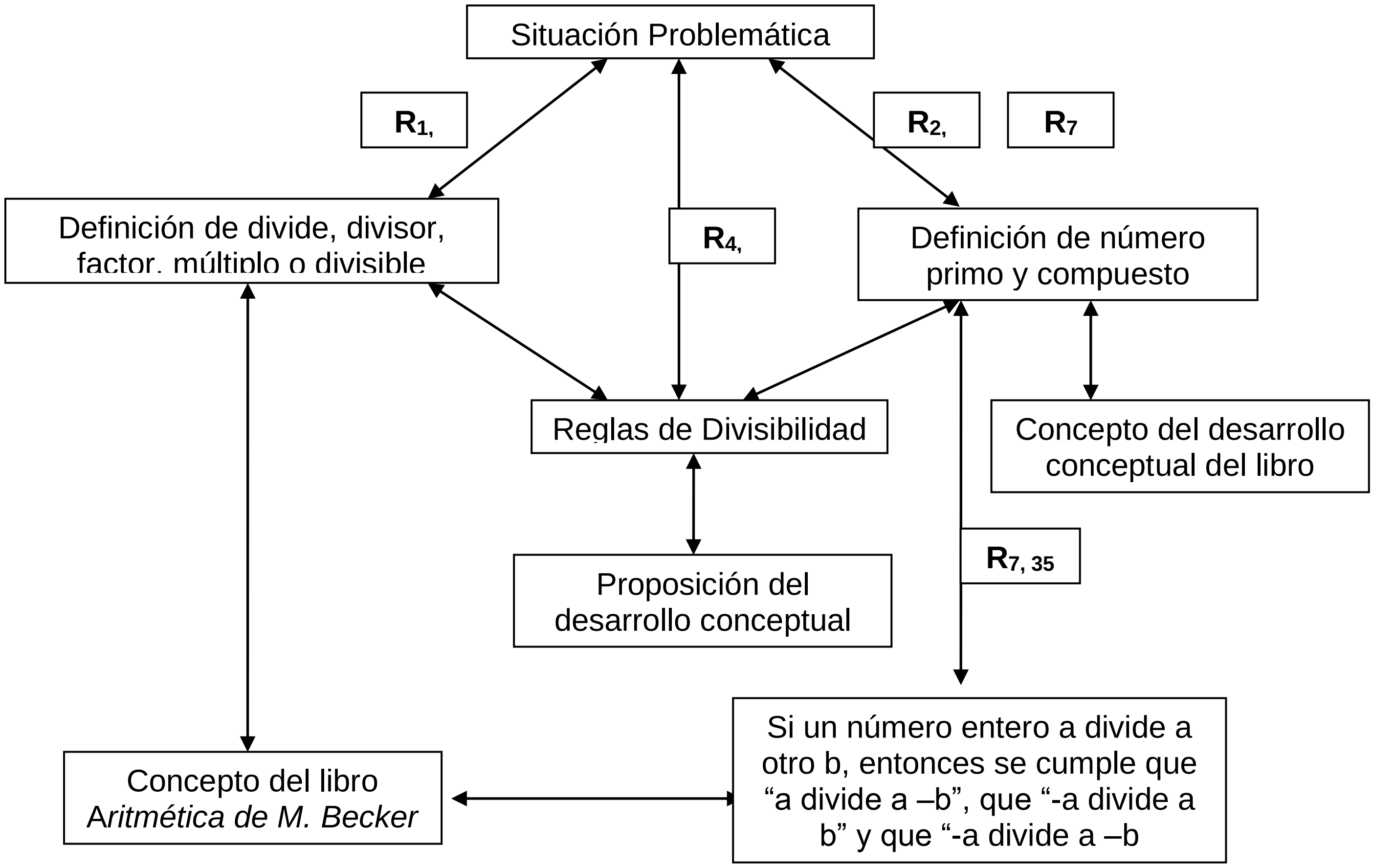


Figura 4

En relación a la situación problemática 36, siendo este un representante del tipo de problema $P_{13:}$ ¿Qué número es divisor de otro número? Podemos observar que se introdujo la definición de divisible utilizada en problemas anteriores y en conjunto con la propiedad que expresa que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b" y las reglas de divisibilidad que brinda el desarrollo conceptual del libro, como se observa en la figura 5, se pudo conformar las relaciones $\mathbf{R_{1,\ 36}}$, $\mathbf{R_{2,\ 36}}$ **y** $\mathbf{R_{3,\ 36}}$. Estableciendo esta última relación una vinculación con la relación **R8**. Estas introducciones permitieron determinar los divisores y así construir las relaciones $\mathbf{R_{4,\,36}}$, $\mathbf{R_{5,\,36}}$ **y** $\mathbf{R_{5,\,36}}$.

En cuanto a la gráfica, figura 5, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

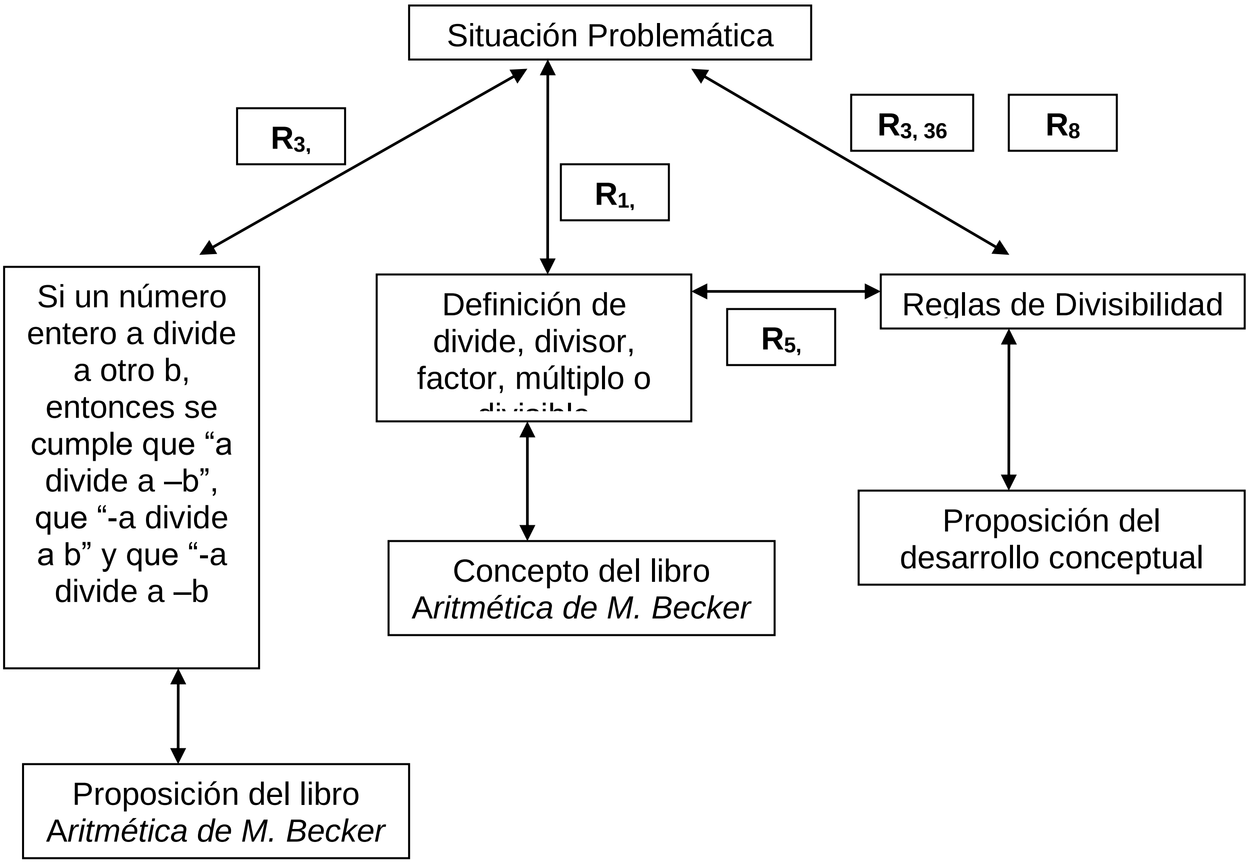


Figura 5

En cuanto a la situación problemática 37, el mismo tiene varios ítems que son representantes de un determinado tipo de problema, ellos son:

Ítem a: $P_{14:}$ ¿Si dos números enteros que son múltiplo de otro se multiplican entre sí, dicho producto es múltiplo de otro número? Podemos observar que fue necesaria nuevamente la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número entero que divide, es divisor, es factor, múltiplo o divisible por otro número entero y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{1,\ 37}}$. La incorporación de esta definición permitió establecer una vinculación con las reglas de divisibilidad que esgrime el libro, permitiendo formar las relaciones $\mathbf{R_{2,\ 37}}$, $\mathbf{R_{3,\ 37}}$ **y** $\mathbf{R_{4,\ 37}}$, como se observa en la figura 6. Si bien en desarrollo conceptual que se desarrolla en el libro se esgrime una definición de cuando dos números son múltiplos, nos encontramos que dicha definición es confusa cuando utiliza el término factor sin hacer mención en ningún lugar del contenido sobre lo que significa dicha palabra, dejando además de lado el lenguaje simbólico, siendo así que la relación R**9** resulta forzada. No obstante, se presenta una vinculación con la relación R10.

En cuanto a la gráfica, figura 6, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

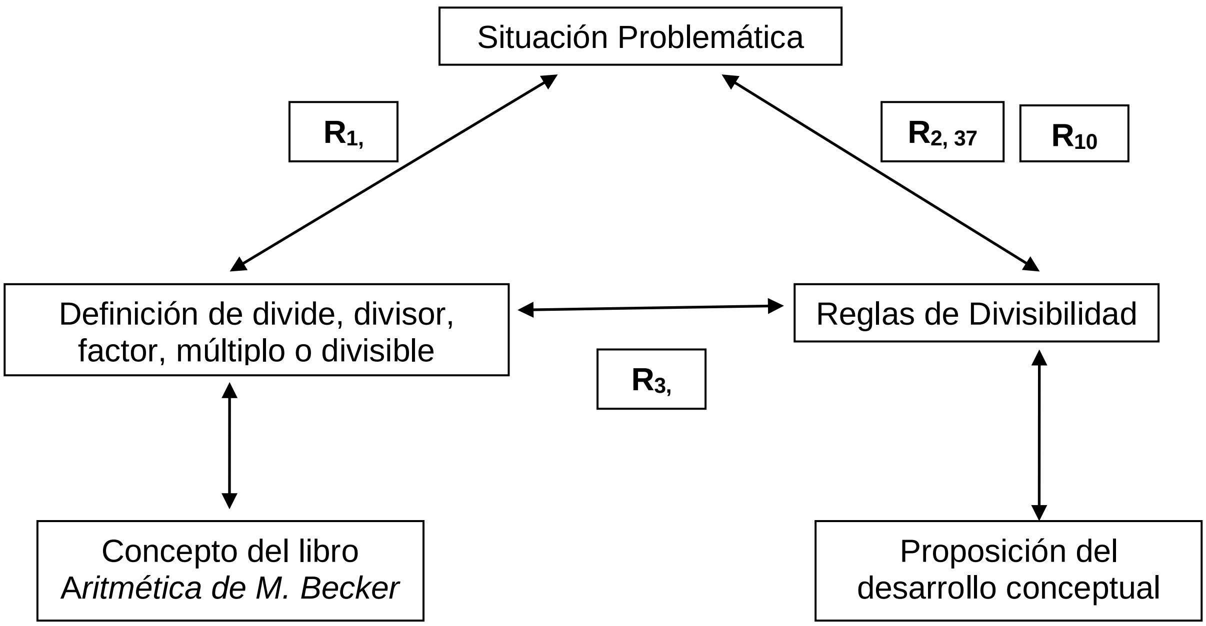


Figura 6

Ítem b: P_{15}: ¿Todos los números primos son impares? Podemos observar que introdujimos la definición de divisible utilizada en el ítem a y en conjunto con la regla de divisibilidad por 2 y la definición de número primo, pudimos establecer las relaciones **$R_{1,\ 37}$, $R_{2,\ 37}$ y $R_{3,\ 37}$**, como se observa en la figura 7. Estas vinculaciones permitieron formar las relaciones **$R_{4,\ 37}$, $R_{5,\ 37}$ y $R_{6,\ 37}$** y determinar la falsedad de la afirmación. Donde podemos observar que las relaciones **$R_{2,\ 37}$** y **$R_{4,\ 37}$** establecen una vinculación con las relaciones **R11** y **R12.**

En cuanto a la gráfica, figura 7, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

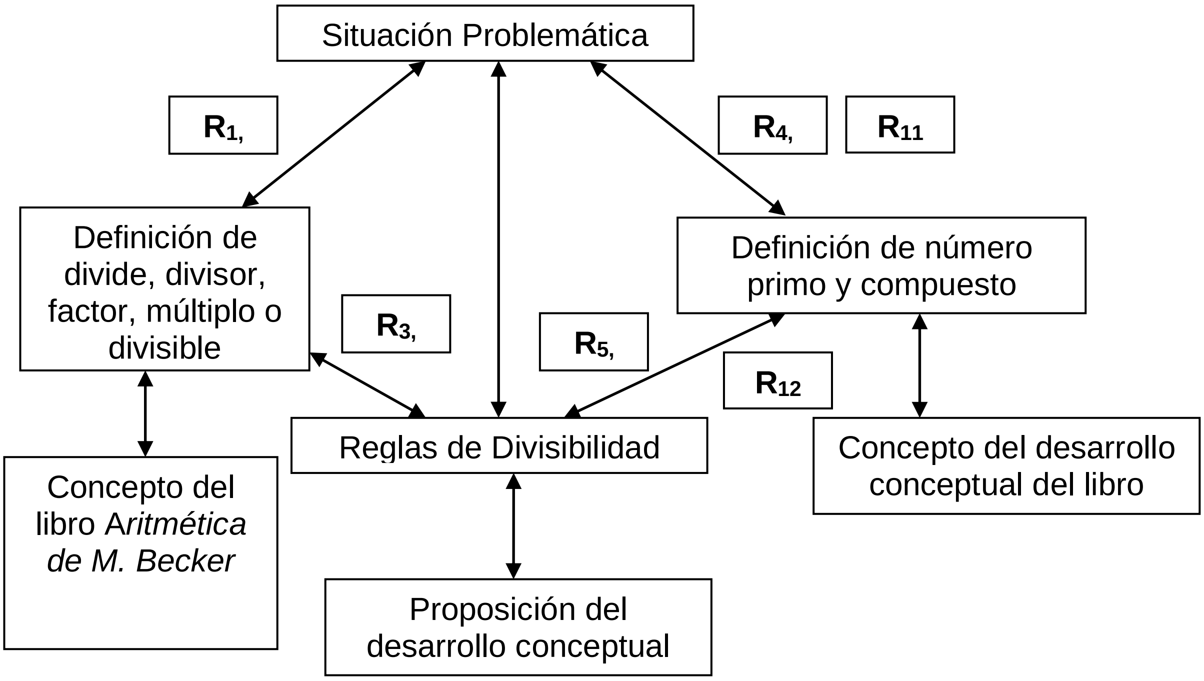


Figura 7

Ítem c: $P_{16:}$ ¿Si un número es divisible por otro, también es divisible por otro número distinto a los anteriores? Podemos observar que introdujimos la definición de divisible utilizada en ítems anteriores y en conjunto con la regla de divisibilidad por 4, pudimos establecer las relaciones $\mathbf{R}_{1,\,37}$**,** $\mathbf{R}_{2,\,37}$ **y** $\mathbf{R}_{3,\,37}$, como se observa en la figura 8. Estas vinculaciones permitieron formar las relaciones $\mathbf{R}_{4,\,37}$ **y** $\mathbf{R}_{5,\,37}$ y determinar la falsedad de la afirmación. En lo que respecta a la relación $\mathbf{R}_{2,\,37}$, podemos observar que establece una vinculación con la relación **R13** del desarrollo conceptual del libro.

En cuanto a la gráfica, figura 8, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que, en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

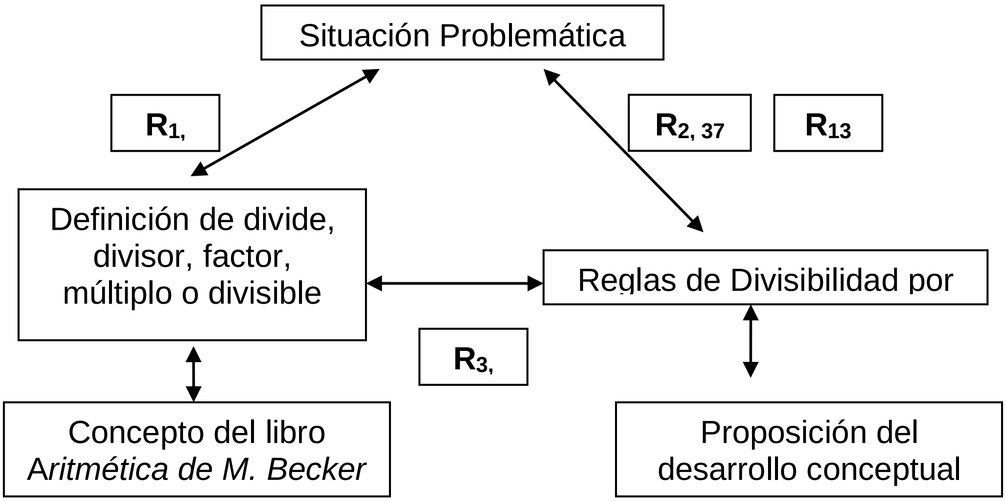


Figura 8

Ítem d: $P_{17:}$ ¿Si un número es múltiplo de un número y divisible por otro número, es también múltiplo de otro número distintos a los anteriores? Podemos observar que introdujimos la definición de divisible utilizada en ítems anteriores y en conjunto con las reglas de divisibilidad por 2, 3 y 6, pudimos establecer las relaciones **$R_{1,\,37}$, $R_{2,\,37}$ y $R_{3,\,37}$**, como se observa en la figura 9. Estas vinculaciones permitieron formar las relaciones **$R_{4,\,37}$, $R_{5,\,37}$ y $R_{6,\,37}$** y determinar la veracidad de la afirmación. Si bien en desarrollo conceptual que se desarrolla en el libro se esgrime una definición de cuando dos números son múltiplos, nos encontramos que dicha definición es confusa cuando utiliza el término factor sin hacer mención en ningún lugar del contenido sobre lo que significa dicha palabra, dejando además de lado el lenguaje simbólico, siendo así que la relación R**11** resulta forzada. No obstante, podemos observar que la relación **$R_{2,\,37}$** establece una vinculación con la relación **R15.**

En cuanto a la gráfica, figura 9, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema.

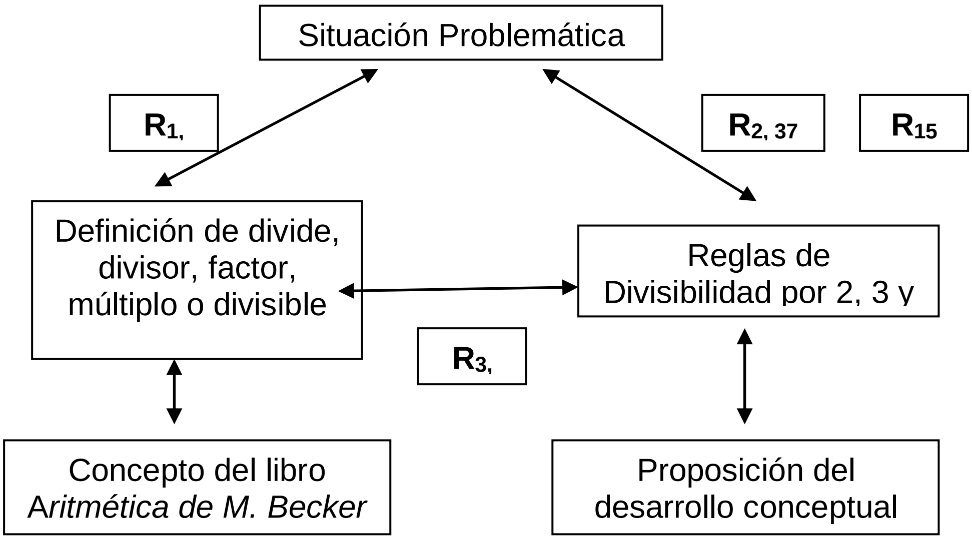


Figura 9

4.2.4 Cuarto libro

- ✓ **4.2.4.1 Descripción**

Con respecto a las características generales de este cuarto libro, denotamos la siguiente información:

Libro:	El Libro de la Matemática 7
Editorial:	Estrada
Año:	2011
Autores del libro:	Laura Inés Cantero
	Ana Maria Felissia
	Dilma Fregona

Adentrándonos en el contenido específico que nos compete, tenemos que en el índice del libro se encuentra escrito lo siguiente:

- ✓ **ÍNDICE**

Con respecto a las características específicas que tiene que ver con el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros, se puede denotar lo siguiente:

En la propuesta teórica del libro podemos observar un título que dice múltiplos y divisores. Luego una definición de cuando un número divide a otro, esto “dado dos números entero a y b con b≠0, decimos que a divide a b (y lo escribimos para abreviar a $|$b), si existe un número entero c tal que a.c=b. Posteriormente se enuncia varios ejemplos, uno de ellos expresa que 1 es divisor de 12 porque existe un número entero, el 12 tal que 1.12=12. Realiza una aclaración que a debe ser distinto de cero porque en el caso que b≠0 no existe un entero c tal que 0.b de b y si b=o entonces cualquier valor que pongamos para c hace verdadera la expresión 0.c=0. Luego da ejemplos de números que llama primos y brinda una definición que expresa “se llama número primo a todo número entero que tenga exactamente cuatro divisores”. Brinda varios ejemplos y aclara que 0, 1 y -1 no son primos. Luego expresa como hallar número primos realizando divisiones. También brinda un ejemplo de un número descompuesto en un producto de número primos y brinda el enunciado del Teorema fundamental de la Aritmética, expresando que todo entero distinto de cero puede descomponerse como el producto de +a y –a por factores primos positivos., siendo que esta descomposición es única salvo el orden y signo de los factores. Luego brinda aun ejemplo de esto. Brinda ejemplo y los descompone en factores primos determinando divisores. Brinda una propiedad sobre los divisores de un número opuesto. También da los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 y 25, da ejemplos. Luego brinda solo ejemplos del mayor divisor común y del mínimo común múltiplo y la propiedad que afirma que el mcm de los números enteros y sus opuestos son iguales. También una definición de que los múltiplos e un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero.

Con respecto a las situaciones problemáticas que se exponen para resolver por parte del lector, nos encontramos con las siguientes:

1. Dados los siguientes números enteros: -2, 3, 5, -10, -20, -1. Elijan uno de ellos y distingan tres múltiplos que estén en esa lisa. Hagan lo mismo con otro de esos números.

2. Escriban todos los enteros positivos de dos cifras que sean múltiplos de 14.

3. Escriban dos números enteros distintos tales que cada uno de ellos sea divisor del otro.

4. Escriban los números enteros x, múltiplos de 25, tales que x<10 y, a la vez x>-130.

5. Los números 1 y -1 son divisores de cualquier número entero. ¿Cómo se justifican esta afirmación?

6. ¿Cuántos divisores tienen 1 y el -1?

7. De las siguientes expresiones, distingan las verdaderas (V) y las falsas (F) y justifiquen:

2 es divisor de 20 V, porque existe un número entero, el 10, tal que $2.10 = 20$

-4 es divisor de 10 F, porque no existe un entero c tal que $c.(-4)$ de 10.

3 es divisor de 18

2 es divisor de -18

3 es divisor de -9

-1 es divisor de 7

8. En a=b.c, ¿Qué se pueden decir de los signos de c en cada caso?

Sugerencia: piensen en la regla de los signos de la multiplicación de números enteros.

Si a y b son dos números enteros positivos, c es…………

Si a y b son dos números enteros negativos, c es…………

Si a y b son dos números enteros de distintos signos, c es…………

9. A partir de la descomposición en factores primos de -42, encuentren todos sus divisores.

10. Completen con “es múltiplo de”, “es divisor de”, “divide a” para obtener frases verdaderas.

11. Expresen los siguientes números enteros como el producto de +1 o -1 por sus factores primos: 5, -100, -17, 45, 80

12. Distingan las expresiones verdaderas y justifiquen
7 es divisor de 84
9 es divisor de 103
3 es divisor de 1.412.532
7380 es múltiplo de 10
5 es divisor de 5
5 es múltiplo de 5

13. Determinen cuales de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 137, 138, 141

14. ¿Es lo mismo decir que “un número es par” que decir es “múltiplo de 2”?

15. Escriban cinco número de cuatro cifras que sean divisibles por 4

16. Según los criterios de divisibilidad, ¿Por qué números son divisibles los siguientes números?

17. ¿Todo número enteros es divisor de si mismo? Justifique la respuesta

18. Completen el número de tal modo que resulte múltiplo de 25 ÷76_ _

19. consideren los números 1, 11, 111, 1111,… ¿Qué características tienen los que son múltiplos de 3?

20. ¿Cuáles de los siguientes números tienen el mayor factor primo?

21. Escriban dos números enteros que sean divisibles por 5 y 25 simultáneamente

22. Escriban una cifra en cada casilla para que el número resulte divisible por 3.
2_1 174_ _1_18

23. Agreguen las cifras que faltan a los números para que resulten divisibles por 3 y por 4 simultáneamente. Busquen todas las soluciones posibles.

24. Verifiquen que los siguientes números sean múltiplos de 3: 3183; 1932; 216.456 ¿pueden modificar en cada caso solo una de sus cifras para que también sea múltiplos de 9?

25. Calculen:

Dcm(24,68)   dcm(204, 216, 84)   dcm(-18, 8)   dcm(17, -7)

26. La abuela Juana tiene dos nueros, Paula y Gustavo. Paula visita a su abuela cada 3 días y Gustavo la visita cada 4 días. Los dos se encontraron en lo de Juana el día 31 de mayo, ¿en cuántos días más volverán a encontrarse?

27. Escriban diez múltiplos de 5 y diez múltiplos de 13.

28. Analicen los siguientes conjuntos de números e indiquen, en cada caso, de que número entero son múltiplos.

.., -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, …

…,100, -10, 90, -40, -20, 0, 220, 1000, …

…, 28, .56, 0, 168, -112, 84, -84

29. Calculen: mcm(12, 16); mcm (-15, 20); mcm(4,7,14); mcm(-5,1)

30. Indiquen si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justifiquen la respuesta. “Todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 2”

La luz de un faro destella cada 8 segundos; la luz de otro cercano, cada 10 segundos y la de un tercer faro, cada 15 segundos. Si a las 8h destellan untos, ¿a qué hora volverán a hacerlo simultáneamente?

32. Con las cifras 2, 3 y 7, escriban un número que sea múltiplo de 3, otro múltiplo de 4 y otro múltiplo de 9.

33. Para su cumpleaños, Carlos recibió una caja de bombones. ¿Cuántos bombones había en la caja? Pregunto Bruno.

Yo solamente recuerdo, dice Carlos, que había menos de 100 y que cuando yo los repartía en montones de 2 o en montones de 3 o en montones de 4 siempre me sobraba uno, pero cuando los ponía en montones de 5 no sobraba ninguno, ¿Cuándo bombones recibió Carlos?

4.2.4.2 Configuración epistémica del desarrollo teórico del contenido

A continuación, se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que intervienen en el desarrollo del contenido.

Situación Problemática

$P_{1,\ 6}$: ¿Cuántos divisores tiene un número?

$P_{2,\ 1,\ 2,\ 12,\ 19,\ 27,\ 28}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro?

$P_{3,\ 4}$: ¿Qué múltiplos de un número son mayores y menores que otros números?

$P_{4,\ 3,\ 5,\ 7,10,\ 12,\ 17}$: ¿Qué número es divisor de otro número?

$P_{5,\ 10}$: ¿Qué número divide a otro número?

$P_{6,\ 8}$: ¿Qué condiciones cumplen los signos del producto de dos números enteros?

$P_{7,\ 9,\ 11,\ 20}$: ¿Cuál es la factorización de un número?

$P_{8,\ 13}$: Dado un número, ¿Dicho número es primo?

$P_{9,\ 15,\ 16,\ 21,\ 24}$: ¿Por cuál número es divisible otro número entero?

$P_{10,\ 22,23}$: ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro?

$P_{11,\ 25}$: ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños?

$P_{12,\ 29}$: ¿Cuál es el mcm de números relativamente pequeños?

$P_{13,\ 26,\ 31}$: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?

$P_{14,\ 33}$ Dado un problema con un contexto, ¿Qué número es divisible por otro número?

MOTIVAN

RESUELVEN

Lenguaje

-Verbal: Los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero

-Simbólico: 90=2.5.3.3
Dcm(-42,54)=6

Tabular: tabla de números primos

EXPRESA Y SOPORTA

REGULAN EL USO

DEFINICIONES (CONCEPTOS)

Dados dos números enteros a y b donde a≠0, decimos que a divide a b (y lo escribimos para abreviar a | b), si existe un número entero c tal que a.c=b
Se llama número primo a todo número enero que tenga exactamente cuatro divisores. Cualquier número entero distinto de 1 y que no sea primo puede descomponerse en un producto de factores primos, por eso se llaman números compuestos.
Los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero.

Propiedades

Teorema Fundamental de la Aritmética: todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores
Si b y –b son números enteros opuestos y a es un entero que divide a b, entonces a divide también a –b.
Un número entero es divisible por 2 si las cifras de las unidades es 0 o par

Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3”.

Un número entero es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4.

Un número entero es divisible por 5 si y solo si las cifras de las unidades es 0 o 5.

Un número entero es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3.

Un número entero es divisible por 9 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Un número es divisible por 10 si y solo si las cifras de las unidades es 0.

Un número entero es divisible por 25 si y solo el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 25.

Mcm(a,b)=mcm(-a,-b)= mcm(-a,b)= mcm(a,-b)

INTERVIENE N Y

JUSTIFICAN

Argumentos

Con respecto a la definición de divide: a debe ser distinto de cero porque si b 0, no existe un entero c tal que 0.c=b. y si b=0, entonces cualquier valor que pongamos para c hace verdadera la expresión 0.c=0.
Lo demás solo a través de ejemplos

4.2.4.3 Relaciones conceptuales más sobresalientes

A continuación, exponemos las relaciones conceptuales más pertinentes entre los objetos primarios

R_1: Entre la situación problemática $P_{2,1,2,27}$ y la definición de múltiplo de un número

R_2: Entre la situación problemática $P_{2,12,\ 19,\ 24,\ 28}$ y criterios de divisibilidad

R_3: Entre la situación problemática $P_{3,4}$ y la definición de múltiplo de un número

R_4: Entre la situación problemática $P_{6,9}$ y el Teorema Fundamental de la Aritmética

R_5: Entre la situación problemática P7 y los criterios de divisibilidad

R_6: Entre la situación problemática P8 y la definición de número primo

R_7: Entre la situación problemática P10 y los criterios de divisibilidad

R_8: Entre la situación problemática P11 y el Teorema Fundamental de la Aritmética

R_9: Entre la situación problemática P12 y el Teorema Fundamental de la Aritmética

R_{10}: Entre la situación problemática P13 y el Teorema Fundamental de la Aritmética

R_{11}: Entre la situación problemática P14 y los criterios de divisibilidad

4.2.4.4 Resolución de las situaciones problemáticas propuestas

- **Situación Problemática 1**

1. Dados los siguientes números enteros: -2, 3, 5, -10, -20, -1. Elijan uno de ellos y distingan tres múltiplos que estén en esa lisa. Hagan lo mismo con otro de esos números.

El problema consiste básicamente en dada una lista de números, considerar uno de ellos y determinar tres números de la lista que sean sus múltiplos.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática recurrimos a la definición "los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero" (concepto del libro)

Es así que, eligiendo convenientemente, tenemos que los números -10 y -20 son múltiplos del número -2. Esto es así porque podemos escribir al número -10 de la forma -2.5, al -20 de la forma -2.10 y teniendo presente la propiedad de divisibilidad que expresa que todo número "b es múltiplo de 1 (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*), podemos escribir que a la vez al número -2 de la forma -2.1 (procedimiento), con los números 5, 10 y 1 enteros. También los números -10 y -20 son múltiplos del 5. Esto es así porque podemos escribirlos de la forma 5.-2, 5.-4 y considerando la propiedad (*) tenemos 5.1. Con respecto al número -1, tenemos que todos los números de la lista son múltiplos, esto es así porque podemos escribir a todos lo números de la forma: -1.2,-1.-3, -1.-5, -1.10, -1.20 y finamente -1.1 (procedimiento). Cumpliendo así con lo solicitado por el problema.

- **Situación Problemática 2**

2. Escriban todos los enteros positivos de dos cifras que sean múltiplos de 14.

El problema consiste en escribir todos los múltiplos del número 14.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática recurrimos a la definición "los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero" (concepto del libro).

Como se deben escribir todos los múltiplos positivos del número 14 y considerando que estos son infinitos, recurrimos a una expresión que represente todos los múltiplos, es así que escribimos 14.c, siendo c un número entero cualquiera positivo. Como el menor número que puede valer c es 1(argumentación), eso significa que los números 14.c siempre van a ser de dos cifras.

- **Situación Problemática 3**

3. Escriban dos números enteros distintos tales que cada uno de ellos sea divisor del otro.

El problema consiste en hallar dos números que cumplan que ambos sean divisores del otro número.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, debemos recurrir a la definición de divisor que brindáramos en la resolución de los ejercicios de libros anteriores, como ser: *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* y la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*" (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), resultando esta propiedad una herramienta importante para determinar, entre números enteros positivos y negativos o ambos negativos, si uno de ellos es divisor del otro, sin tener que recurrir a la división. Podemos considerar a los números 2 y -2, siendo ambos divisores entre sí, puesto que podemos escribirlos de la forma 2=-2.-1 y -2=2.-1, cumpliendo con lo solicitado por el problema.

- **Situación Problemática 4**

4. Escriban los números enteros x, múltiplos de 25, tales que x<10 y, a la vez x>-130.

El problema consiste en hallar números múltiplos de 25 que sean mayores y menores a la vez que otros números

Resolución:

Como se debe determinar múltiplos de 25 que cumplan que sean mayores a -130 y menor a 10., podemos observar que el número 25 ya es mayor que 10, razón por lo cual sus múltiplos van a tener que ser negativos. Es así que utilizando la definición "los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero" (concepto del libro), tenemos que los múltiplos negativos de 25 son -25, -50, -75, -100 y -125, puesto que a cada uno podemos escribirlos de la forma 25.-1, 25.-2, 25.-3, 25.-4 y 25.-5 (procedimiento). Siendo que en el caso de 25.-6 obtenemos -150 y ya no cumple con que sea mayor a -130.

- **Situación Problemática 5**

5. Los números 1 y -1 son divisores de cualquier número entero. ¿Cómo se justifican esta afirmación?

El problema consiste en argumentar por 1 y -1 son divisores de cualquier número.

Resolución:

Para poder resolver esta situación problemática, debemos recurrir a la definición de divisor que brindáramos en la resolución de los ejercicios de libros anteriores, como ser: *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c"* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker)* y la propiedad que expresa que todo número "b es múltiplo de 1 (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*), tenemos que dado un número entero b cualquiera, podemos escribirlo de la forma b=b.1 siendo el 1 divisor (*) y considerando la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b*” (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), también tenemos que -1 es divisor de b.

- **Situación Problemática 6**

6. ¿Cuántos divisores tienen 1 y el -1?

El problema consiste en determinar los divisores de los números 1 y -1.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a la definición de divisor que brindáramos en la resolución de los ejercicios de libros anteriores, como ser: *“Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c”* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker) y además considerando las propiedad* la propiedad que expresa que todo número “b es múltiplo de 1 (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*) y la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b*” (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), tenemos que 1=1.1 y 1=-1.-1, a la vez -1=-1.1 y -1=1.-1, resultando que 1 tiene por divisores 1 y -1; y el número -1 tiene por divisores al 1 y -1. Siendo así que cada uno de ellos tiene dos divisores.

- **Situación Problemática 7**

7. De las siguientes expresiones, distingan las verdaderas (V) y las falsas (F) y justifiquen: 2 es divisor de 20 V, porque existe un número entero, el 10, tal que $2.10 = 20$ -4 es divisor de 10 F, porque no existe un entero c tal que $c.(-4)$ de 10. 3 es divisor de 18 2 es divisor de -18 3 es divisor de -9 -1 es divisor de 7

El problema consiste en determinar la verdad o falsedad de una lista de afirmaciones.

Resolución:

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a la definición de divisor que brindáramos en la resolución de los ejercicios de libros anteriores, como ser: *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c"* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker),* siendo así que al número 18 lo podemos escribir de la forma 18=3.6 resultando 3 divisor de 18; al número -18 de la forma -18=2.-9, resultado 2 divisor de -18; al número -9 de la forma -9=3.-3 ,resultando 3 divisor de -9; al número 7 de la forma 7=-1.-7, resultado -1 divisor de 7, siendo todas estas *Verdaderas*.

- **Situación Problemática 8**

8. En a=b.c, ¿Qué se pueden decir de los signos de c en cada caso?
Sugerencia: piensen en la regla de los signos de la multiplicación de números enteros.
Si a y b son dos números enteros positivos, c es…………
Si a y b son dos números enteros negativos, c es…………
Si a y b son dos números enteros de distintos signos, c es…………

El problema consiste realizar una afirmación dada una igualdad y condiciones de sus elementos.

Resolución:

Para resolver la situación problemática utilizaremos el enunciado que expresa que *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c"* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker), es así que p*ara el caso de la afirmación "Si a y b son dos números enteros positivos, c es…" tenemos que necesariamente el número c debe ser positivo, para que el producto b.c sea positivo (argumentación).

Para el caso de la afirmación "Si a y b son dos números enteros negativos, c es…" tenemos que necesariamente el número c debe ser positivo, para que el producto b.c=c y c sea negativo (argumentación).

Con respecto al enunciado "Si a y b son dos números enteros de distintos signos, c es…" tenemos que ahora tanto a como b son de distintos signos, siendo así que tenemos las siguientes posibilidades: si a es positivo y b es negativo, necesariamente el número debe c debe ser negativo, así el signo de la multiplicación b.c es positivos (argumentación). En el caso que a sea negativo y b sea positivo, es necesario que c sea negativo, así el signo de la multiplicación b.c es negativo (argumentación).

- **Situación Problemática 9**

9. A partir de la descomposición en factores primos de -42, encuentren todos sus divisores.

El problema consiste en factorizar al número -42 y determinar todos sus divisores.

<u>Resolución:</u>

Para factorizar al número -42, consideramos el Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que “todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores (concepto del libro) donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, valiéndonos de este teorema y la definición que expresa que *“si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c”* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker)*. Con base en lo anterior, escribimos al número -42 de la forma:

$$\begin{array}{r|l} -42 & 2 \\ -21 & 3 \\ -7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = 2^1.3^1.7^1$$

Para el cálculo tuvimos en cuenta las siguientes definiciones, propiedades y criterios de divisibilidad:

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n un números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

- Un número es divisible por 2 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o par (propiedad).

-Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. (Propiedad)
- Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).

De esta forma, utilizando la propiedad de divisibilidad que expresa que todo número "b" es múltiplo de 1, esto es b=b.1 y conociendo los factores de la descomposición, *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*) al número 42 lo podemos escribir de la siguiente forma: $-42 = -42.1 = -2.21 = -2.3.7 = -3.7.2 = -3.14 = -2.3.7 = -6.7$ (procedimiento). Considerando además la propiedad que expresa que la cantidad de divisores d(n) de un número entero cumple, $\mathrm{d(n)} = 2.(\mathrm{m}_1 + 1).(\mathrm{m}_2 + 1).(\mathrm{m}_3 + 1) \ldots (\mathrm{m}_\mathrm{h} + 1)$, siendo los números m_1, m_2, m_3, hasta m_h los exponentes de los números primos de la factorización, tenemos que la cantidad de divisores del número -42 es $\mathrm{d}(-42) = 2.(1 + 1).(1 + 1).(1 + 1) = 2.2.2.2 = 16$. Es así que utilizando la propiedad que expresa que si *un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c,* los divisores positivos del número -42 son los números 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42, pero además utilizando la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*" (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), resultando esta propiedad una herramienta importante para determinar, entre números enteros positivos y negativos o ambos negativos, si uno de ellos es divisor del otro, sin tener que recurrir a la división. Tenemos que los divisores del número -42, son también los números -1, -2, -3, -6, -7, -14, -21 y -42. Resultando de esta forma que los divisores del número -42 son los números 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, -1, -2, -3, -6, -7, -14, -21 y -42, obteniendo así el total de 16 divisores.

- **Situación Problemática 10**

10. Completen con "es múltiplo de", "es divisor de", "divide a" para obtener frases verdaderas. 20………..4   7………..21 4………..20   21………..7

El problema consiste en completar algunas afirmaciones con determinadas frases para que resulten verdaderas.

Resolución:

Para poder resolver esta situación problemática, debemos recurrir a la definición de divisor que brindáramos en la resolución de los ejercicios de libros anteriores, como ser: *“Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker),* es así que en la afirmación “20………..4” consideramos al número 20 como b=20 y a=4 (procedimiento), resultando 20 es múltiplo de 4. En los demás casos aplicamos un razonamiento similar, teniendo así que 4 es divisor de 20 porque 20=4.5 o 4 divide a 20, 7 es divisor de 21 porque 21=7.3 o 7 divide a 21 y 21 es múltiplo de 7. Resultando así varias posibilidades para algunos casos.

- **Situación Problemática 11**

11. Expresen los siguientes números enteros como el producto de +1 o -1 por sus factores primos: 5, -100, -17, 45, 80

El problema consiste en dad una lista de números, factorizarlos

Resolución:

Para factorizar los números de la lista, consideramos el Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que “todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores (concepto del libro) donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es” (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, valiéndonos de este teorema y la definición que expresa que *“si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c”* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker)*. Con base en lo anterior, escribimos a los números 5, -100, -17, 45, 80 de la forma:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -100 & 2 \\ -50 & 2 \\ -25 & 5 \\ -5 & 5 \\ -1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización:

$5 = 5.1 \quad -100 = -1.2.2.5.5 \qquad\qquad -17 = -1.17$

$45 = 3.3.5 \qquad\qquad 80 = 2.2.2.2.5$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

- *Un número es divisible por 2 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o par (propiedad).*

-Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. (Propiedad)

- Un número es divisible por 5 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o 5 (propiedad).

- Un número es divisible por 17 cuando separando la primera cifra de la unidad, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17(propiedad).

- **Situación Problemática 12**

12. Distingan las expresiones verdaderas y justifiquen
7 es divisor de 84
9 es divisor de 103
3 es divisor de 1.412.532
7380 es múltiplo de 10
5 es divisor de 5
5 es múltiplo de 5

El problema consiste en dada una lista de expresiones, determinar aquellas que son verdaderas.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a la definición que brindáramos en la resolución de los ejercicios de libros anteriores, como ser: *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*) (Concepto del libro aritmética de M)* y considerando criterios de divisibilidad, tenemos la expresión "7 es divisor de 84" resulta no verdadera, porque para que el número 7 sea divisor de 84 debe suceder que *la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad),* siendo que 8-2.3=8-6=2 y 2 no es divisible por 7. La expresión "9 es divisor de 103" resulta no verdadera, porque para que el número 9 sea divisor debe suceder que la suma de las cifras del número sea múltiplo de 9, sin embargo al sumar las cifras del número 103 teneos que 1+0+3=4 y 4 no es múltiplo de 9. La expresión 3 es divisor de 1.412.532 resulta ser verdadera, esto es así porque para que el número 3 sea divisor tiene que suceder que *la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3*, resultando que 1+4+1+2+5+3+2=18 y 18 es múltiplo de 3, resultando 18=3.6. La expresión 7380 es múltiplo de 10 resulta verdadera, porque utilizando la definición (*) y el criterio que expresa que un número es divisible por 10 si y solo la cifra de las unidades es 0, resulta 7380=10.738. La expresión 5 es divisor de 5 y 5 es múltiplo de 5 resultan ambas verdaderas, porque podemos escribir a ambo de la forma 5=5.1 (*).

- **Situación Problemática 13**

13. Determinen cuales de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 137, 138, 141

El problema consiste en dada una lista de números, determinar aquellos que son primos.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a las siguientes definiciones, definición que *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*) (Concepto del libro aritmética de M)* y *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es, resultando los divisores de a los números 1, a, -1 y -a (*)" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, con base en esto determinamos los divisores de los números 113, 123, 131, 137, 138, 141.

$$
\begin{array}{r|l} 113 & 113 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 123 & 3 \\ 41 & 41 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 131 & 131 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 137 & 137 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 138 & 2 \\ 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}
$$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

- *Un número es divisible por 2 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o par (propiedad).*

-Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. (Propiedad)

Podemos observar que los divisores del número 113, son los números 113 y 1, pero considerando la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*" (*) *(propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*) resultan los números -113 y -1 divisores de 113. Es así que valiéndonos de (*) resultan los números 1, 113, -1 y -113 divisores del 113, resultando primo. Considerando el mismo procedimiento para los demás números, tenemos que algunos de los divisores del número 123 son 1, 3, 41, 123, -1, -3, -41 y -123, y siendo que no cumple con (*) resulta no ser primo. En el caso de número 131, tenemos que sus divisores son los números 1, 131, -1 y -131, resultando primo. Para el caso del 137, sus divisores son 1, 137, -1 y -137, resultando primo. Para los números 138 y 141, tenemos que ambos no son primos, porque algunos de los divisores del número 138 son los números 1, 2, 3, 23, -1, -2, -3 y -23 que no cumple con (*) y en el caso del 141 algunos de sus divisores son 1, 3, 47, -1, -3 y -47.

- **Situación Problemática 14**

14. ¿Es lo mismo decir que "un número es par" que decir es "múltiplo de 2"?

El problema consiste en dada contestar una pregunta sobre número par o divisible por 2

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a la definición que expresa que *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*) (Concepto del libro aritmética de M)* resultando que si un número es múltiplo de 2, podemos escribirlo de la forma b=2.c, siendo b y c números enteros. Pero utilizando la definición (*) resulta ser 2 un divisor de 2, adquiriendo el nombre de número par.

- **Situación Problemática 15**

15. Escriban cinco números de cuatro cifras que sean divisibles por 4

El problema consiste en escribir cuatro números que sean divisibles por 4. Como no se dan mayores detalles, pueden ser cualesquiera.

Resolución:

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a los siguientes enunciados, *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*) (Concepto del libro aritmética de M)* , "los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero (procedimiento)" y el criterio de divisibilidad por cuatro que dice que un entero es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4 (*) (propiedad). Es así que algunos números múltiplos de 4 son, 16, 20, 24 y 28, puesto que podemos escribirlos de la forma 16=4.4, 20=4.5, 24=4.6 y 28=4.7.

Como dichos números son solo de dos cifras, escribiendo dos dígitos cualesquiera delante de ellos resultan ser de cuatro dígitos, como por ejemplo los números 4416, 5420, 3424 y 4528. A los cuales aplicando el criterio de divisibilidad (*), resultan ser todos divisibles por 4 y de cuatro cifras, como solicita el ejercicio.

- **Situación Problemática 16**

16. Según los criterios de divisibilidad, ¿Por qué números son divisibles los siguientes números? 120, 225, -500, 1322

El problema consiste en dada una lista de números, aplicando criterios de divisibilidad determinar por cuales números de dichos criterios son divisibles.

Resolución:

Si leemos la situación problema, se tiene una lista de números a los cuales se les debe aplicar los criterios de divisibilidad y determinar por cuales números son divisibles. A continuación, escribimos los siguientes enunciados que ayudaran en la resolución de este problema

"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)

Un número entero es divisible por 2 si las cifras de las unidades es 0 o par (propiedad).

Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3". (Propiedad)

Un número entero es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4 (propiedad).

Un número entero es divisible por 5 si y solo si las cifras de las unidades es 0 o 5 (propiedad).
Un número entero es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3 (propiedad).
Un número entero es divisible por 9 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 9 (propiedad).
Un número es divisible por 10 si y solo si las cifras de las unidades es 0 (propiedad).
Un número entero es divisible por 25 si y solo el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 25 (propiedad).

Como solo solicita determinar por cuales números son divisibles, solamente analizaremos los casos para cuando un número es divisible por otro. Consideremos primero al número 120. Siguiendo el orden de la lista podemos afirmar que es divisible por 2, porque el último es 0. También es divisible por 3, porque al sumar todos sus dígitos, esto es 1+2+0 (procedimiento) resulta igual a 3 y dicho número es múltiplo de 3. También es divisible por 4, porque sus dos últimas cifras son múltiplos de 4, esto es 20=4.5. Es divisible por 5, porque su última cifra es 0. Como es divisible por 2 y 3, también es divisible por 6. También es divisible por 10, porque su última cifra es el 0.

Con respecto al número 225, el mismo es divisible por 3, puesto que al sumar sus cifras esto es 2+2+5 (procedimiento) da como resultado 9 y este es múltiplo de 3. También es divisible por 5, puesto que su última cifra es 5. También es divisible por 9, puesto la suma de sus dígitos es 9. A su vez, también es divisible por 25, puesto que sus dos últimas cifras son 25.

En cuanto al número -500, tenemos que es divisible por 2, puesto que su último digito es 0. También es divisible por 4 porque sus dos últimas cifras son múltiplos de 4, esto es 00=4.0 (procedimiento). También es divisible por 5 y por 10, por ser su última cifra 0. También es divisible por 25, porque sus dos últimas cifras son múltiplos de 25, esto es 00=25.0.

Con respecto al número 1322, este número solo es divisible por 2, puesto que su última cifra es un número par.

- **Situación Problemática 17**

17. ¿Todo número enteros es divisor de sí mismo? Justifique la respuesta

El problema consiste en responder una pregunta sobre a si todo número es divisor de sí mismo.

Resolución:

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a la siguientes enunciados, "si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*) (Concepto del libro aritmética de M. Becker) y la propiedad que expresa que todo número "b es múltiplo de 1 *(propiedad-aritmética de M. Becker-1.1.5*), considerando un número cualquiera b y la propiedad que expresa que todo número b es múltiplo de 1, al mismo podemos escribirlo de la forma b=b.1, y teniendo presente la definición (*) tenemos que b es divisor de b, siendo este un número entero cualquiera distinto de cero.

- **Situación Problemática 18**

18. Completen el número de tal modo que resulte múltiplo de 25 ÷76_ _

El problema no resulta claro y no es posible determina lo que se solicita.

- **Situación Problemática 19**

19. Consideren los números 1, 11, 111, 1111,… ¿Qué características tienen los que son múltiplos de 3?

El problema consiste en dada una lista de números, determinar aquellos que tienen una determinada característica que los hace múltiplos de 3.

Resolución:

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a las siguientes definiciones *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*) (Concepto del libro aritmética de M)* y el criterio de divisibilidad por 3 que expresa que un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Entonces para el primer número 1, observamos que no es múltiplo de 3, para el número 11, observamos que la suma de sus dígitos 1+1=2 no resulta múltiplo o divisible por 3. Para el caso del número 111, tenemos que la suma de sus dígitos 1+1+1=3 (procedimiento) y este resulta divisible por 3, o sea múltiplo de 3. Para el caso del número 1111, la suma de sus dígitos resulta 1+1+1+1=4 y este no es múltiplo de 3. Con lo cual es posible razonar que la cantidad de números 1 que debe contener el número en cuestión debe ser una cantidad que sea múltiplo de 3. Como ser los números 111111, siendo que la suma de sus dígitos es 6, o el número 111111111, siendo la suma de sus dígitos 9 (argumentación), etc.

- **Situación Problemática 20**

20. ¿Cuáles de los siguientes números tienen el mayor factor primo? 39, 51, 77, 91, 121

El problema consiste en dada una lista de números, determinar cual número primo es el mayor de todos

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a los siguientes enunciados, consideramos el Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que "todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores (concepto del libro) donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, valiéndonos de este teorema y la definición que expresa que *"si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c"* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker)*. Con base en lo anterior, escribimos a los números 39, 51, 77, 91, 121 de la forma:

39	3	51	3	77	7	91	7	121	11
13	13	17	17	11	11	13	13	11	11
1		1		1		1		1	

Como podemos observar, el mayor factor primo es el número 17.

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

-Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3". (Propiedad)

-Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares es un múltiplo de 11(Propiedad).

-Un número es divisible por 13 cuando separando la cifra de la unidad, multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 13 (Propiedad).
-Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (Propiedad).
-Un número es divisible por 17 cuando separando la primera cifra de la unidad, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17(propiedad).

- **Situación Problemática 21**

21. Escriban dos números enteros que sean divisibles por 5 y 25 simultáneamente

El problema consiste en brindar dos números que cumplan que sean divisibles por 5 y 25 a la vez.

Resolución:

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a los siguientes enunciados *"si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c"* (*) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker)* y a los criterios de divisibilidad por 5 y 25 que expresan que un número entero es divisible por 5 si y solo si las cifras de las unidades es 0 o 5 (propiedad) y un número entero es divisible por 25 si y solo el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 25 (propiedad). Podemos observar que, si un número es divisible por 25, también lo será por 5 puesto que al número 25 lo podemos escribir de la forma 25=5.5 (procedimiento). Esto implica que un número que posea los dos últimos dígitos que sean divisibles por 25, también lo será por 5; es así que podemos considerar un número cualquiera de la forma ab25, siendo a y b números enteros. En particular podemos considerar los números 1225 y el 3425.

- **Situación Problemática 22**

22. Escriban una cifra en cada casilla para que el número resulte divisible por 3. 2_1 174_ _1_18

En el problema tenemos una lista de tres números a los cuales les hace falta un digito, en una determinada posición y solicita completarla con un digito para que dicho número sea divisible por 3.

Resolución:

Si leemos el problema, se tiene tres números de los cuales una o más de las cifras de cada número es desconocida, pero la condición para completar el espacio en blanco con una cifra en particular es que debe cumplir que dicho número tiene que ser divisible por 3. Para empezar a resolver dicha situación problemática, recurrimos a la siguiente definición de divisible y al criterio de divisibilidad por 3, que expresan: *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), u*n número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3". (Propiedad)

Valiéndonos de lo definido anteriormente, tenemos que el primer número a completar es 2_1. Como se observa es un solo espacio en blanco a completar, siendo así que tenemos 10 posibles números que pueden ocupar ese lugar, ellos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 (**). Pero como la condición es que sea divisible por 3, usando el criterio mencionado (*) (argumentación) tenemos que la suma de las cifras debe ser múltiplo de 3 y como solo tenemos un lugar que representa una cifra a determinar, llamando convenientemente a dicha cifra como X, se debe cumplir que 2+X+1=3+X (procedimiento) sea un múltiplo de 3. Planteando la situación como una igualdad tenemos la siguiente posibilidad, 3+X=3.c, con c un número entero.

Como tenemos que X solamente puede valer uno de los dados en (**), es así que tenemos (procedimientos):

Si X=0, tenemos que 3+0=3

Si X=1 tenemos que 3+1=4

Si X=2, tenemos que 3+2=5

Si X=3, tenemos que 3+3=6

Si X=4, tenemos que 3+4=7

Si X=5, tenemos que 3+5=8

Si X=6, tenemos que 3+6=9

Si X=7, tenemos que 3+7=10

Si X=8, tenemos que 3+8=11

Si X=9, tenemos que 3+9=12

Considerando todas las posibilidades que escribimos y analizando las igualdades, notamos que en los casos en los cuales X=1, X=2, X=4, X=5, X=7 y X=8, los resultados de la suma dan un número positivo que no es múltiplos de 3 (argumentación). Cuestión que cambia cuando consideramos los números X=0, X=3, X=6 y X=9, en estos casos al dar como resultado 3, 6, 9 y 12 respectivamente, y aplicando el criterio de divisibilidad por 3 (*) (propiedad) tenemos que se verifica las igualdades 3+0=3=3.1, 3+3=6=3.2, 3+6=9=3.3 y 3+9=12=3.4, resultando esos casos divisibles por 3. Es así que los números buscados son 201, 231, 261 y 291.

Con respecto al número 174_, podemos razonar de la misma forma que en el caso anterior. Llamando X a la cifra buscada, siendo el mismo un valor de la lista (**) y utilizando el criterio de divisibilidad por 3, tenemos que la suma de sus cifras origina la cuenta 1+7+4+X=12+X (procedimientos), teniendo como resultado un múltiplo de 3. Planteando la situación como una igualdad tenemos la siguiente posibilidad, 12+X=3.c, con c un número entero

Es así que considerando los valores que puede asumir X de la lista (*) y realizando la diferencia entre las cifras ubicadas en los lugares pares e impares, tenemos que (procedimientos):

Si X=0, tenemos que 12+0=12

Si X=1, tenemos que 12+1=13

Si X=2, tenemos que 12+2=14

Si X=3, tenemos que 12+3=15

Si X=4, tenemos que 12+4=16

Si X=5, tenemos que 12+5=17

Si X=6, tenemos que 12+6=18

Si X=7, tenemos que 12+7=19

Si X=8, tenemos que 12+8=20

Si X=9, tenemos que 12+9=21

Considerando todas las posibilidades que escribimos y analizando las igualdades, notamos que en los casos donde X=1, X=2, X=4, X=5, X=7 y X=8, los resultados de la suma dan un número positivo que no son múltiplos de 3 (argumentación). Cuestión que cambia cuando consideramos los números X=0, X=3, X=6 y X=9, en estos casos al dar como resultado 12, 15, 18 Y 21 respectivamente, y aplicando el criterio de divisibilidad por 3 (*) (propiedad) tenemos que se verifica las igualdades 12=3.4, 15=3.5, 18=3.6 Y 21=3.7, resultando esos casos divisibles por 3. Es así que los números buscados son 1740, 1743, 1746 y 1749.

En cuanto al número _1_18, la cuestión cambia con respecto a los párrafos anteriores, porque ahora tenemos dos espacios en blanco donde se deben completar con una cifra de la lista (*). Para este caso, llamamos X al lugar de la decena de mil e Y al lugar de la centena, siendo ambos un valor de la lista (*), donde ahora obtenemos el número X1Y18. Utilizando el criterio de divisibilidad por 3, tenemos que la suma de todos los dígitos es X+1+Y+1+8=X+Y+1+1+8=X+Y+10=3.c, con c entero (procedimiento). A diferencia de los casos anteriores, ahora tenemos dos números, X e Y que asumen cualquier valor de la lista (*) y que pueden verificar que el número X1Y18 cumpla que de cómo resultado un número múltiplo de 3.

Consideremos la siguiente tabla donde anotamos todas las posibilidades que se dan al sumar X e Y:

+		Y									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
X	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Observando la tabla, notamos que existen números que se van repitiendo a lo largo de toda la misma, es así que usando la propiedad conmutativa de la suma en números naturales (argumentación), tenemos que X+Y+10 = Y+X+10, no obstante, el 0 en la decena de mil originaria un número de cuatro cifras. Observando la tabla, podemos denotar que la suma de los números X e Y da como resultado un número que es mayor o igual a 0 y menor o igual a 18. Esto nos conduce a razonar que la suma X+Y+10 es un número mayor o igual a 10 y menor o igual a 28, en los cuales se encuentran los números 12, 15, 18, 21, 24 y 27 que son divisibles por 3.

Considerando los casos anteriores, las posibilidades son:

Para el caso que la suma de cómo resultado 12 (procedimiento):

Si X=1, Y=1, tenemos el número 11118. En el cual por (*) 1+1+1+1+8=12

Si X=0, Y=2, tenemos el número 1218. En el cual por (*), 1+2+1+8=12

Si X=2, Y=0, tenemos el número 21018. En el cual por (*), 2+1+0+1+8=12

Para el caso que la suma de cómo resultado 15 (procedimiento):

Si X=0, Y=5, tenemos el número 1518. En el cual por (*), 1+5+1+8=15.

Si X=1, Y=4, tenemos el número 11418. En el cual por (*), 1+1+4+1+8=15.

Si X=2, Y=3, tenemos el número 21318. En el cual por (*), 2+1+3+1+8=15

Si X=3, Y=2, tenemos el número 31218. En el cual por (*), 3+1+2+1+8=15

Si X=4, Y=1, tenemos el número 41118. En el cual por (*), 4+1+1+1+8=15

Si X=5, Y=0, tenemos el número 51018. En el cual por (*), 5+1+0+1+8=15

Para el caso que la suma de cómo resultado 18 (procedimiento):

Si X=0, Y=8, tenemos el número 1818. En el cual por (*) 1+8+1+8=18

Si X=1, Y=7, tenemos el número 11718. En el cual por (*) 1+1+7+1+8=18

Si X=2, Y=6, tenemos el número 21618. En el cual por (*) 2+1+6+1+8=18

Si X=3, Y=5, tenemos el número 31518. En el cual por (*) 3+1+5+1+8=18

Si X=4, Y=4, tenemos el número 41418. En el cual por (*) 4+1+4+1+8=18

Si X=5, Y=3, tenemos el número 51318. En el cual por (*) 5+1+3+1+8=18

Si X=6, Y=2, tenemos el número 61218. En el cual por (*) 6+1+2+1+8=18

Si X=7, Y=1, tenemos el número 71118. En el cual por (*) 7+1+1+1+8= 18

Si X=8, Y=0, tenemos el número 81018. En el cual por (*) 8+1+1+8=18

Para el caso que la suma de cómo resultado 21 (procedimiento):

Si X=2, Y=9, tenemos el número 21918. En el cual por (*) 2+1+9+1+8=21

Si X=3, Y=8, tenemos el número 31818. En el cual por (*) 3+1+8+1+8=21

Si X=4, Y=7, tenemos el número 41718. En el cual por (*) 4+1+7+1+8=21

Si X=5, Y=6, tenemos el número 51618. En el cual por (*) 5+1+6+1+8=21

Si X=6, Y=5, tenemos el número 61518. En el cual por (*) 6+1+5+1+8=21

Si X=7, Y=4, tenemos el número 71418. En el cual por (*) 7+1+4+1+8=21

Si X=8, Y=3, tenemos el número 81318. En el cual por (*) 8+1+3+1+8=21

Si X=9, Y=2, tenemos el número 91218. En el cual por (*) 9+1+2+1+8=21

Para el caso que la suma de cómo resultado 24 (procedimiento):

Si X=5, Y=9, tenemos el número 51918. En el cual por (*) 5+1+9+1+8=24

Si X=6, Y=8, tenemos el número 61818. En el cual por (*) 6+1+8+1+8=24

Si X=7, Y=7, tenemos el número 71718. En el cual por (*) 7+1+7+1+8=24

Si X=8, Y=6, tenemos el número 81618. En el cual por (*) 8+1+6+1+8=24

Si X=9, Y=5, tenemos el número 91518. En el cual por (*) 9+1+5+1+8=24

Para el caso que la suma de cómo resultado 27 (procedimiento):

Si X=8, Y=9, tenemos el número 81918. En el cual por (*) 8+1+9+1+8=27

Si X=9, Y=8, tenemos el número 91818. En el cual por (*) 9+1+8+1+8=27

Es así que completando convenientemente la cifra de la decena de mil y la centena del número _1_18, los números que verifican que son divisibles por 3 son 11118, 1218, 21018, 1518, 11418, 21318, 31218, 41118, 51018, 1818, 11718, 21618, 31518, 41418, 51318, 61218, 71118, 81018, 21918, 31818, 41718, 51618, 61518, 71418, 81318, 91218, 51918, 61818, 71718, 81618, 91518, 81918 y 91818

- **Situación Problemática 23**

23. Agreguen las cifras que faltan a los números para que resulten divisibles por 3 y por 4 simultáneamente. Busquen todas las soluciones posibles.
52_   1_8

En el problema tenemos una lista de tres números a los cuales les hace falta un digito, en una determinada posición y solicita completarla con un digito para que dicho número sea divisible por 3 y 4 simultáneamente.

<u>Resolución:</u>

Si leemos el problema, se tiene dos números de los cuales una de las cifras de cada número es desconocida, pero la condición para completar el espacio en blanco con una cifra en particular es que debe cumplir que dicho número tiene que ser divisible por 3 y 4 a la vez. Para empezar a resolver dicha situación problemática, recurrimos a la siguiente definición de divisible, al criterio de divisibilidad por 3 y 4, que expresan: *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), u*n número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3". (Propiedad) y un número entero es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4 (propiedad).

Valiéndonos de lo definido anteriormente, tenemos que el primer número a completar es 52_. Como se observa es un solo espacio en blanco a completar, siendo así que tenemos 10 posibles números que pueden ocupar ese lugar, ellos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 (**). Pero como la condición es que sea divisible por 3 y 4, usando los criterios mencionados (argumentación) tenemos que la suma de las cifras debe ser múltiplo de 3 y los dos últimos números deben ser un múltiplo de 4, como solo tenemos un lugar que representa una cifra a determinar, llamando convenientemente a dicha cifra como X, se debe cumplir que 5+2+X=7+X (procedimiento) sea un múltiplo de 3 y a la vez 2X debe ser un múltiplo de 4. Planteando la situación como una igualdad tenemos la siguiente posibilidad, 7+X=3.c y 2X=4d, con c y d números enteros.

Como tenemos que X solamente puede valer uno de los dados en (**), es así que tenemos (procedimientos):

Si X=0, tenemos que 5+2+0=7, siendo los dos últimos números 20

Si X=1 tenemos que 5+2+1=8, siendo los dos últimos números 21

Si X=2, tenemos que 5+2+2=9, siendo los dos últimos números 22

Si X=3, tenemos que 5+2+3=10, siendo los dos últimos números 23

Si X=4, tenemos que 5+2+4=11, siendo los dos últimos números 24

Si X=5, tenemos que 5+2+5=12, siendo los dos últimos números 25

Si X=6, tenemos que 5+2+6=13, siendo los dos últimos números 26

Si X=7, tenemos que 5+2+7=14, siendo los dos últimos números 27

Si X=8, tenemos que 5+2+8=15, siendo los dos últimos números 28

Si X=9, tenemos que 5+2+9=16, siendo los dos últimos números 29

Considerando todas las posibilidades que escribimos y analizando las igualdades, notamos que en los casos en los cuales X=0, X=1, X=3, X=4, X=6, X=7 y X=9, los resultados de la suma dan un número positivo que no es múltiplos de 3 (argumentación). Cuestión que cambia cuando consideramos los números X=2, X=5, X=8, en estos casos al dar como resultado 9, 12 y 15 respectivamente, y aplicando el criterio de divisibilidad por 3 (*) (propiedad) tenemos que se verifica las igualdades 7+2=9=3.3, 7+5=12=3.4 y 7+8=15=3.5, resultando esos casos divisibles por 3. Si ahora consideramos que además debe ser divisible por 4, tenemos que la única posibilidad es el caso de X=8, siendo el número buscado el 528.

Con respecto al número 1_8, podemos razonar de la misma forma que en el caso anterior. Llamando X a la cifra buscada, siendo el mismo un valor de la lista (**) y utilizando el criterio de divisibilidad por 3 y 4, tenemos que la suma de sus cifras origina la cuenta 1+X+8=3.c y X8=4.d con c y d números enteros

Es así que considerando los valores que puede asumir X de la lista (*) y realizando la diferencia entre las cifras ubicadas en los lugares pares e impares, tenemos que:

Si X=0, tenemos que 1+0+8=9, siendo los dos últimos números 08

Si X=1, tenemos que 1+1+8=10, siendo los dos últimos números 18

Si X=2, tenemos que 1+2+8=11, siendo los dos últimos números 28

Si X=3, tenemos que 1+3+8=12, siendo los dos últimos números 38

Si X=4, tenemos que 1+4+8=13, siendo los dos últimos números 48

Si X=5, tenemos que 1+5+8=14, siendo los dos últimos números 58

Si X=6, tenemos que 1+6+8=15, siendo los dos últimos números 68

Si X=7, tenemos que 1+7+8=16, siendo los dos últimos números 78

Si X=8, tenemos que 1+8+8=17, siendo los dos últimos números 88

Si X=9, tenemos que 1+9+8=18, siendo los dos últimos números 89

Considerando todas las posibilidades que escribimos y analizando las igualdades, notamos que en los casos donde X=1, X=2, X=4, X=5, X=7 y X=8, los resultados de la suma dan un número positivo que no es múltiplos de 3 (argumentación). Cuestión que cambia cuando consideramos los números X=1, X=3, X=6 y X=9, en estos casos al dar como resultado 9, 12, 15 y 18 respectivamente, y aplicando el criterio de divisibilidad por 3 (*) (propiedad) tenemos que se verifica las igualdades 1+0+8=9=3.3, 1+3+8=12=3.4, 1+6+8=15=3.5 y 1+9+8=18=3.6, resultando esos casos divisibles por 3. Si ahora consideramos que además debe ser divisible por 4, tenemos que las posibilidades son para los casos X=0 y X=6, siendo los números en cuestión 108 y 168.

- **Situación Problemática 24**

24. Verifiquen que los siguientes números sean múltiplos de 3: 3183; 1932; 216.456 ¿pueden modificar en cada caso solo una de sus cifras para que también sea múltiplos de 9?

El problema consiste en dada una lista de números, verificar si los mismo son múltiplos de 3. Posteriormente modificarlos para que sean divisibles por 9, en el caso que sea posible.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos al siguiente enunciados *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (*)(Concepto del libro aritmética de M. Becker)* considerando el enunciado anterior, escribimos cada número como múltiplo de 3, esto es 3183=3.1061, 1932=3.644 y 216456=3.72152.

Como además se debe modificar un digito de cada número para que sea múltiplo de 9; considerando el enunciado (*) el criterio de divisibilidad por 9 que expresa que un número es divisible por 9 si y solo la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9, tenemos que para el caso del número 3183, 3+1+8+3=15 (procedimiento), modificando convenientemente el número 3 por el 6 tenemos 6+1+8+3=18 y 18 es múltiplo de 9, con lo cual el número 6183=9.687. Considerando el mismo procedimiento para el demás número, tenemos que sumando las cifras del número 1932 es 1+9+3+2-=15, modificando el número 2 por el 5 tenemos1+9+3+5-=18 y 18 es múltiplo de 9, con lo cual el número 1935=9.215. En el caso del número 216456, tenemos que 2+1+6+4+5+6=24, modificando el último número por 9 resulta 2+1+6+4+5+9=27 y 27 es múltiplo de9, resultando 216459=9.24051

- **Situación Problemática 25**

25. Calculen: Dcm(24,68)   dcm(204, 216, 84)   dcm(-18, 8)   dcm(17, -7)

El enunciado del ejercicio solicita determinar el máximo común divisor de cuatro grupos números

.

<u>Resolución:</u>

Como el enunciado solicita determinar el máximo común divisor de diversos grupos de números enteros, consideramos lo siguiente: *"Dados dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivo será llamado el máximo común divisor (mcd) de a y b y lo denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". "Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural* (*)*".*

Para poder utilizar lo definido anteriormente debemos determinar los factores primos de cada número, para ello nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del* Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que "todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores (concepto del libro) donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, es así que considerando todos los números propuesto por el ejercicio y hacemos lo siguiente:

<table>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ 34 & 2 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$
Factorización:
$24 = 2.2.2.3 = 2^3.3^1$
$68 = 2.2.17 = 2^2.17$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$
Factorización:
$204 = 2.2.3.17 = 2^2.3^1.17^1$
$216 = 2.2.2.3.3.3 = 2^3.3^2$
$84 = 2.2.3.7 = 2^2.3^1.7^1$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l} -18 & 2 \\ -9 & 3 \\ -3 & 3 \\ -1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$
Factorización:
$-18 = -1.2.3.3 = -1.2^1.3^2$
$8 = 2.2.2 = 2^3$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} -7 & 7 \\ 1 & \end{array}$
Factorización:
$17 = 17 = 17^1$
$-7 = -1.7 = -1.7^1$</td>
</tr>
</table>

Para esto tuvimos en cuenta que:

-Un número entero es divisible por 2 si las cifras de las unidades es 0 o par (propiedad).

-Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. (Propiedad)

-Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

-Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (Propiedad).

-Un número es divisible por 17 cuando separando la primera cifra de la unidad, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17(propiedad).

-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)

Propiedad de potencia:

-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como ya contamos con la factorización de cada número de cada ítem, ahora nos resta determinar el máximo común divisor de cada grupo. Pero como nos encontramos con números enteros de distintos signos, recurrimos a la propiedad que expresa que dados *dos números enteros a y b se cumple que* $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(|a|, |b|)$, (**)) *(Concepto del libro aritmética de M. Becker pág. 31.)*. Donde las barras | | Simbolizan el valor absoluto de un número. Razón por la cual la definición que ocuparemos es: el valor absoluto de un número, $|x|$, es el mismo número x, siempre y cuando x sea mayor o igual a cero y es –x siempre y cuando el número x sea menor estricto que cero.

Es así que la factorización de los números 24 y 68 es $24 = 2.2.2.3 = 2^3.3^1$ y $68 = 2.2.17 = 2^2.17$, valiendonos de la definición de mcd que diéramos al comienzo del ejercicio (*) el $\mathrm{mcd}(24,68) = 2^2 = 4$ (procedimiento). Siendo el máximo común divisor de 24 y 68, el número 4.

Considerando el mismo procedimiento para los demás casos, tenemos que en cuanto a los número 204, 216 y 84, tenemos que la factorización de todos ellos es $204 = 2.2.3.17 = 2^2.3^1.17^1$, $216 = 2.2.2.3.3.3 = 2^3.3^2$ y $84 = 2.2.3.7 = 2^2.3^1.7^1$, siendo el $\mathrm{mcd}(204,216, 84) = 2^2.3^1 = 12$ (procedimiento). Siendo el máximo común divisor de 204, 216 y 84, el número 12.

Con respecto a los números -18 y 8, su factorización es $-18 = -1.2.3.3 = -1.2^1.3^2$ y $8 = 2.2.2 = 2^3$, valiéndonos de la definición de mcd que diéramos al comienzo del ejercicio (*) y la propiedad (argumento) anterior (**), tenemos que $|-18|=18$ y $|8|=8$ y el $\mathrm{mcd}(|-18|, |8|) = \mathrm{mcd}(18,8) = 2$ (procedimiento). Siendo el máximo común divisor de -18 y 8, el número 2.

En cuanto 17 y -7, aplicando el mismo procedimiento que en el caso anterior, tenemos que a dichos números, los podemos escribir $17=17^1$ y -7=-1.71, usando la definición de mcd (*) y la propiedad (**) (argumento), tenemos que $\mathrm{mcd}(|17|, |-7|) = \mathrm{mcd}(17,7) = 1$ (procedimiento). Siendo el máximo común divisor de 16, -28 y 20, el número 4.

- **Situación Problemática 26**

26. La abuela Juana tiene dos nietos, Paula y Gustavo. Paula visita a su abuela cada 3 días y Gustavo la visita cada 4 días. Los dos se encontraron en lo de Juana el día 31 de mayo, ¿en cuántos días más volverán a encontrarse?

La situación problemática tiene un contexto donde intervienen dos nietos que visitan a su abuela y que cada cierto tiempo se encuentran. Como lo hacen a intervalos de tiempo regulares, solicita determinar en qué momento vuelven a encontrarse.

<u>Resolución:</u>

El enunciado del problema manifiesta que dos nietos van a visitar a su abuela cada cierto tiempo y coinciden en un determinado día. Paulo va cada 3 días, Gustavo cada 4 días y coincidieron el 31 de mayo. Como cada cierto tiempo se coinciden, hay que determinar el momento siguiente día en que lo volverán a coincidir. Es así, que debemos determinar el mínimo común múltiplo de 18 y 30 para saber en qué momento volverán a cruzarse a partir de la última vez que se cruzaron. Para ello definimos lo siguiente: *"Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". "Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor* (*)

Ahora, valiendo de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker),* Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que "todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores (concepto del libro) donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, escribimos a los 3 y 4 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización: $3 = 3 = 3^1$ $\qquad 4 = 2.2 = 2^2$

Para esto tuvimos en cuenta que:

-Un número entero es divisible por 2 si las cifras de las unidades es 0 o par (propiedad).
-Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. (Propiedad)
-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)
Propiedad de potencia:
-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes
-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como a los números 3 y 4 los podemos escribir de la forma $3=3^2$ y $4=2^2$, utilizando lo definido en (*), tenemos que el mcm de dichos números es $mcm[3{,}4] = 3.2^2 = 12$

Como los números 3 y 4 están expresados en días, esto implica que el mcm también lo está. Con lo cual, si el 31 de mayo coincidieron, eso significa que a los 12 días volverán a coincidir, esto es el 12 de junio

- **Situación Problemática 27**

27. Escriban diez múltiplos de 5 y diez múltiplos de 13.

La situación problemática consiste en escribir múltiplos de dos números distintos.

<u>Resolución:</u>

Como en el problema se solicita determinar diez múltiplos del número 5 y diez del número 13, recurrimos al enunciado que expresa "los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero", es así que considerando como a=5, multiplicamos al número 5 por número enteros cualesquiera (procedimiento), obteniendo -20, -10, -5, 5, 10, 15, 20, 25, 30 y 35. De igual forma para el caso del número 13, tenemos que si a=13, obtenemos -26, -13, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91 y 104.

- **Situación Problemática 28**

28. Analicen los siguientes conjuntos de números e indiquen, en cada caso, de que número entero son múltiplos. .., -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, … …,100, -10, 90, -40, -20, 0, 220, 1000, … …, 28, .56, 0, 168, -112, 84, -84

El problema consiste en dada una lista de números, determinar el número del cual son múltiplos.

Resolución:

Como se trabajara con múltiplos de un número, utilizamos el enunciado que expresa que *"Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker),* con lo cual a cada número de la lista lo expresamos como el producto de un número por otro. Como es posible observar, en la primera lista los números están ordenados del menor al mayor, sin embargo, en las otras dos listas no, entonces los ordenaremos del menor al mayor. Esta ordenación la realizamos con el fin de facilitar lo solicitado por el ejercicio. Resultando todo: .., -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, …, ;…,- 40, -20, -10, 0, 90, 100, 220, 1000… y …, -112, -84, 0, 28, 56, 84, 168…

Con respeto a la lista .., -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, …, considerando el criterio de divisibilidad por 4 que expresa que un número es divisible por 4 si y solo si sus últimas cifras es múltiplo de 4, podemos observar que todos los números son múltiplos de 4, esto significa que a cada número podemos escribirlo de la forma -16=4.-4, -12=4.-3, -8=4.-2, -4=4.-1, 0=4.0, 4=4.1, 8=4.2, 12=4.3, 16=4.4 y 20=4.5, (procedimiento) resultando que los números son múltiplos del número 4.

En el caso de la lista;…,- 40, -20, -10, 0, 90, 100, 220, 1000…, considerando la regla de divisibilidad por 10 que expresa que un número es divisible por 10 si sus últimas cifra es 0,podemos observar que todos los números tienen por ultimo número al cero, esto implica que a cada número podemos escribirlo de la forma – 40=10.-4, -20=10.-2, -10=10.-1, 0=10.0, 90=10.9, 100=10.10, 220=10.22 y 1000=10.100 (procedimiento) resultando que los números son múltiplos del número 10.

- **Situación Problemática 29**

29. Calculen: mcm(12, 16); mcm (-15, 20); mcm(4,7,14); mcm(-5,1)

En este problema, básicamente solicita el mcm de una lista de número enteros.

Resolución:

Como debemos calcular el mínimo común múltiplo-mcm, consideremos la siguiente definición:

Dada la factorización de cada número, consideramos que *dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de* *sus múltiplos comunes, que denotaremos como [a;b] (Concepto del libro aritmética de M. Becker). Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente (*).*

Para poder utilizar lo definido anteriormente debemos determinar los factores primos de cada número, para ello nos valemos de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker), también del* Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que "todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores (concepto del libro) donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, es así que considerando todos los números propuesto por el ejercicio y hacemos lo siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-15 & 3 \\
-5 & 5 \\
-1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
20 & 2 \\
10 & 2 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
14 & 2 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
-5 & 5 \\
-1 &
\end{array}
$$

Factorización:

$12 = 2.2.3 = 2^2.3^1$ $\qquad$ $16 = 2.2.2.2 = 2^4$

$-15 = -1.3.5 = -1.\ 3^1.5^1$ $\qquad$ $20 = 2.2.5 = 2^2.5^1$

$4 = 2.2 = 2^2$ $\qquad$ $7 = 7^1$ $\qquad$ $14 = 2.7 = 2^1.7^1$

$-5 = -1.5 = -1.5^1$

Para esto tuvimos en cuenta que:

-Un número entero es divisible por 2 si las cifras de las unidades es 0 o par (propiedad).

-Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. (Propiedad)

-Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

-Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (Propiedad).

$-a^n=a.a.a\ldots a$, siendo a y n números naturales (concepto)
Propiedad de potencia:
-El producto de potencias de igual base se suma los exponentes
-Todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como ya contamos con la factorización de cada número, valiéndonos de lo definido en (*), tenemos que

Considerando primero los números 12 y 16 tenemos que $12 = 2.2.3 = 2^2.3^1$ y $16 = 2.2.2.2 = 2^4$ (procedimiento), siendo el $\mathrm{mcm}[12,16] = 2^4.3^1 = 16.3 = 48$

Consideramos ahora los números -15 y 20. Como podemos observar, a diferencia del caso anterior, los números son de distinto signos. Para este caso utilizamos la propiedad que expresa que $\mathrm{mcm}[a,b] = \mathrm{mcm}[-a,-b] = \mathrm{mcm}[-a,b] = \mathrm{mcm}[a,-b](**)$ (propiedad). Considerando la factorización de cada uno, esto es $-15 = -1.3.5 = -1.\ 3^1.5^1$ y $20 = 2.2.5 = 2^2.5^1$ (procedimiento),, siendo el $\mathrm{mcm}[-15,20] = 2^2.3^1.5^1 = 4.3.5 = 60$

Considerando primero los números 4, 7 y 14 tenemos que $4 = 2.2 = 2^2$, $7 = 7^1$ y $14 = 2.7 = 2^1.7^1$ (procedimiento), siendo el $\mathrm{mcm}[4,7,14] = 2^2.7^1 = 4.7 = 28$

Por último, considerando los números -5 y 1 y la propiedad (**) tenemos que -5=-1.5 y 1=1.1, $\mathrm{mcm}[-5,1] = 5^1.1 = 5$

- **Situación Problemática 30**

30. Indiquen si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justifiquen la respuesta. “Todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 2”

El problema consiste en dada una lista de números, determinar aquellos que son primos.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos al siguiente enunciado, si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker),*razón or lo cual si dado un número b que es múltiplo de 4, entonces b es de la forma b=4.c, con c un número entero, pero como sabemos el número 4=2.2, es así que tenemos b=2.2.c y como 2.c es un número entero, significa que 2.c=d con d entero. Por lo cual tenemos que b=4.c=2.2.c=2.d, demostrando que b=2.d, o sea b es múltiplo de 2.

- **Situación Problemática 31**

31. La luz de un faro destella cada 8 segundos; la luz de otro cercano, cada 10 segundos y la de un tercer faro, cada 15 segundos. Si a las 8h destellan juntos, ¿a qué hora volverán a hacerlo simultáneamente?

La situación problemática tiene un contexto donde intervienen tres faros que destellan a intervalos de tiempo distinto y que cada cierto tiempo lo hacen juntos. Como lo hacen a intervalos de tiempo regulares, solicita determinar en qué momento vuelven a destellar juntos.

<u>Resolución:</u>

El enunciado del problema manifiesta que tres faros destellan a intervalos de tiempos distintos y de forma regular, siendo que el 1er faro destella cada 8 segundos, el 2do cada 10segundos y el 3ro cada 15segundos. Como cada cierto tiempo destellan de forma conjunto, hay que determinar el momento en que volverán a coincidir. Es así, que debemos determinar el mínimo común múltiplo de 8, 10 y 15 para determinar en qué momento volverán a coincidir a partir de la última vez que lo hicieron. Para ello definimos lo siguiente: *"Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como (a;b) (Concepto del libro aritmética de M. Becker)". "Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b (Concepto del libro aritmética de M. Becker), cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente* (*)

Ahora, valiendo de la definición que expresa que si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker),* Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que "todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores (concepto del libro) donde tenemos que *un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos y donde tenemos que a es primo si y solo si –a también lo es" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)*, escribimos a los números 8, 10 y 15 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Factorización: 8$= 2.2.2 = 2^3$ $\quad 10 = 2.5 = 2^1.5^1$ $\qquad 15 = 3.5 = 3^1.5^1$

Para esto tuvimos en cuenta que:
-Un número entero es divisible por 2 si las cifras de las unidades es 0 o par (propiedad).
-Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. (Propiedad)
- Un número es divisible por 5 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o 5 (propiedad).
-a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales (concepto)
Propiedad de potencia:
-el producto de potencias de igual base se suman los exponentes
-todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1(propiedades)

Como a los números 8, 10 y 15 los podemos escribir de la forma 8=2^3; 10=2.5 y 15=3.5, utilizando lo definido en (*), tenemos que el mcm de dichos números es
$mcm[8{,}10{,}15] = 2^3.3.5 = 120$

Como los números 8, 10 y 15 están expresados en segundos, esto implica que el mcm también lo está. Con lo cual, si a las 8 hs destellaron juntos, eso significa que a los 120 segundos volverán a coincidir, es decir a los 2 minutos, o sea a las 8.02 hs

- **Situación Problemática 32**

32. Con las cifras 2, 3 y 7, escriban un número que sea múltiplo de 3, otro múltiplo de 4 y otro múltiplo de 9.

El problema consiste en dada una lista de números, construir un número que sea múltiplo de otros números.

<u>Resolución:</u>

Para poder resolver esta situación problemática, recurrimos a los siguientes enunciados: si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a **divide a** b, a es **divisor** o factor de b, b es un **múltiplo** de a o **divisible** por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c" (Concepto del libro aritmética de M. Becker)* *y a los criterios de divisibilidad que expresan que u*n número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. (Propiedad), un número entero es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4 (propiedad) y un número entero es divisible por 9 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 9 (propiedad). Valiéndonos de lo enunciado (argumentación), tenemos que para que un número sea divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de 3, entonces la suma de los 2 y 7, esto es 2+7 =9 (procedimiento) es un múltiplo de 3, coma si también 2+3+7= 12. Esto significa que los números 27, 72, 237, 273, 327, 372, 723 y 732 son números múltiplos de 3. Específicamente 27=3.9, 72=3.24, 237=3.79, 273=3.91, 327=3.109, 372=3.124, 723=3.241 y 732=3.244.

Si consideramos ahora que un número es divisible por cuatro si sus últimas dos cifras es múltiplo de 4, esto significa que los números 32 y 732 son divisibles y a la vez múltiplos de 4. En particular tenemos que 32=4.8 y 732=4.183.

En cuando al criterio de divisibilidad por 9, tenemos que la suma de las cifras debe ser un múltiplo de 9, esto significa que los números 27 y 72 son múltiplos de 9 puesto que 2+7=9. En particular tenemos que 27=9.3 y 72=9.8

- **Situación Problemática 33**

33. Para su cumpleaños, Carlos recibió una caja de bombones. ¿Cuántos bombones había en la caja? Pregunto Bruno. Yo solamente recuerdo, dice Carlos, que había menos de 100 y que cuando yo los repartía en montones de 2 o en montones de 3 o en montones de 4 siempre me sobraba uno, pero cuando los ponía en montones de 5 no sobraba ninguno, ¿Cuantos bombones recibió Carlos?

La situación problemática tiene un contexto en particular en el cual se debe determinar la cantidad de bombones que se le regalo a una persona. Dicha cantidad cumple con determinadas condiciones.

Resolución:

Al leer el enunciado del problema, podes observar que la cantidad de bombones, llamémosle X, es un número que no es divisible por los números 2, 3 y 4. Sin embargo si lo es por 5, lo cual implica que la cantidad X es un número múltiplo de 5.

Como la cantidad X es un número menor a 100, tenemos que los números múltiplos de 5 que son menores a 100 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 75, 80, 85, 90 y 95. Como se debe cumplir que no es divisible por 2, retiramos los números que lo sean y entonces quedan los números: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 y 95. De esta última lista, debemos retirar los que sean múltiplos de 3, quedando los números: 5, 25, 35, 55, 65, 85 y 95. Ahora retiramos los que son múltiplos de 4, quedando los números: 5, 25, 35, 55, 65, 85 y 95.

Como además tenemos la información que al dividir el número X por 2, 3 y 4 sobraba un elemento, esto significa que ahora debemos considerar el o los números que cumplan con esas condiciones, observando que los números que cumplen que al dividirlos por dichos números se obtiene por resto 1 son los números 25 y 85. Siendo estos la cantidad de bombones que pudo haber. Los enunciados que utilizamos para realizar las operaciones fueron, si *a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c” (Concepto del libro aritmética de M. Becker) y a los criterios de divisibilidad que expresan que u*n número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. (Propiedad), un *número es divisible por 2 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o par (propiedad) y* un número entero es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4 (propiedad).

4.2.4.5 Configuración epistémica del sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas

A continuación, se esgrimen los objetos primarios y la red de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que intervienen en el sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas.

- **Lenguaje**

-Expresión verbal: número natural, número entero, divisible, múltiplo, divisor común mayor, dcm, divisor positivo, múltiplo común menor, mcm, menores a cero, potencia, exponentes, cifra, factorizarce, primo, compuesto

-Expresión simbólica: dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, los signos de las operaciones básicas, como ser la “+” (suma), “-“(resta), “.” (Multiplicación) y “/” (división), el signo “=”, los paréntesis (,), corchetes [,], un número x,.

-Expresión tabular: tablas compuestas por números.

- **Situaciones-Problemáticas**

Se presentan los siguientes tipos de problemas:

$P_{1,\,6}$: ¿Cuántos divisores tiene un número? $P_{2,\,1,\,2,\,12,\,19,\,27,\,28}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro? $P_{3,\,4}$: ¿Qué múltiplos de un número son mayores y menores que otros números? $P_{4,\,3,\,5,\,7,10,\,12,\,17}$: ¿Qué número es divisor de otro número? $P_{5,\,10}$: ¿Qué número divide a otro número? $P_{6,\,8}$: ¿Qué condiciones cumplen los signos del producto de dos números enteros? $P_{7,\,9,\,11,\,20}$: ¿Cuál es la factorización de un número? $P_{8,\,13}$: Dado un número, ¿Dicho número es primo? $P_{9,\,15,\,16,\,21,\,24}$: ¿Por cuál número es divisible otro número entero? $P_{10,\,22,23}$: ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro? $P_{11,\,25}$: ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños? $P_{12,\,29}$: ¿Cuál es el mcm de números relativamente pequeños? $P_{13,\,26,\,31}$: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo? $P_{14,\,33}$ Dado un problema con un contexto, ¿Qué número es divisible por otro número?
• **Conceptos** *-Si a y b son números enteros y a distinto de cero, diremos que a* ***divide a*** *b, a es* ***divisor*** *o factor de b, b es un* ***múltiplo*** *de a o* ***divisible*** *por a, si y solo si existe un número entero c, tal que b=a.c.* Los múltiplos de un número entero a se obtienen multiplicando a por cualquier número entero” Un número natural a mayor que 1, se dice primo si 1 y a son sus únicos divisores positivos a es primo si y solo si –a también lo es” -Dos números naturales a y b, el mayor de sus divisores positivos comunes será llamado el máximo común divisor de a y b, donde la notación a utilizar sea (a; b). Como el máximo común divisor (mcd) es el único número natural d que satisface que es divisor de a y b a la vez y que d es un múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b, también cumple que d es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente natural”. -Dados dos números naturales a y b, definimos el mínimo común múltiplo (mcm) de a y b como el menor de sus múltiplos comunes, que denotaremos como [a;b]. -Como el mínimo común múltiplo (mcm) es el único número natural m que satisface que es múltiplo de a y b a la vez, y que m es múltiplo de todos los múltiplos de a y de b cumple que m no es otra cosa que el producto de los factores primos de a y b elevados al mayor exponente

-El valor absoluto de un número x, $\lvert x \rvert$, es el mismo número x, siempre y cuando x sea mayor o igual a cero y es –x siempre y cuando el número x sea menor estricto que cero. -a^n=a.a.a…a, siendo a y n números naturales
• **Proposiciones** -Todo número “b” es múltiplo de 1 -Si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b” Teorema Fundamental de la Aritmética que expresa que “todo número entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de +1 o -1 por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores. -Un número entero es divisible por 2 si las cifras de las unidades es 0 o par -Un número entero es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3”. -Un número entero es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de 4. -Un número entero es divisible por 5 si y solo si las cifras de las unidades es 0 o 5. -Un número entero es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3. - Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7. -Un número entero es divisible por 9 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 9. -Un número es divisible por 10 si y solo si las cifras de las unidades es 0. -Un número entero es divisible por 25 si y solo el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 25. Mcm(a,b)=mcm(-a,-b)= mcm(-a,b)= mcm(a,-b) -Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares es un múltiplo de 11. - Un número es divisible por 13 cuando separando la cifra de la unidad, multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 13. - Un número es divisible por 17 cuando separando la primera cifra de la unidad, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda del número original y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17. -El producto de potencias de igual base se suman los exponentes -Todo número entero puede escribirse con potencia igual a 1 -Dado dos números enteros a y b, se que cumple que $\mathrm{dcm}\ (a, b) = \mathrm{dcm}\ (\lvert a\rvert, \lvert b\rvert)$ d(n)=2.(m+1).(m+1).(m+1)…(m+1), $d(n) = 2.(m_1 + 1).(m_2 + 1).(m_3 + 1) \ldots (m_h + 1)$,

siendo los números m_1, m_2, m_3, hasta m_h los exponentes de los números primos de la factorización
• **Procedimientos** Divisiones de números por factores primos. Cálculo de operaciones mediante suma y resta de números. Cálculo de operaciones mediante producto de números. Cálculo de divisores. Cálculo de múltiplos. Cálculo de potencias Cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
• **Argumentos** Argumentación de los resultados a través de los procedimientos utilizados. -El resultado de las operaciones se justifica por medio de la utilización de las operaciones básicas. -El cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo se justifica a través de la definición y utilización de las propiedades de potencia. -El cálculo de las potencias se justifica a través de la aplicación de las propiedades de potencia se justifican a través de la definición de potencia

4.2.4.6 Relaciones conceptuales más sobresalientes

A continuación, exponemos las relaciones conceptuales más pertinentes entre los objetos primarios

$P_{1,6}$: ¿Cuántos divisores tiene un número? **Situación problemática 6** $R_{1,6}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2,6}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”. $R_{3,6}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1
$P_{2,1,2,10,12,19,24\ 27,28}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro? **Situaciones problemáticas 1, 2, 10, 12, 19, 24, 27, 28** $R_{1,1,2,27}$: Entre la situación problemática y la definición de múltiplo $R_{2,1}$: Entre la situación problemática y la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1

$R_{3,\ 1}$: Entre la definición de múltiplo y la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1 $R_{4,\ 1,\ 2}$: Entre la definición de múltiplo y el procedimiento para determinar múltiplos $R_{5,\ 10,\ 12,19,24,28}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{6,\ 12,19,24,28}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad $R_{7,\ 12,19,\ 24,\ 28}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y los criterios de divisibilidad. $R_{8,\ 12,19,24,28}$: Entre la situación problemática y las argumentaciones
$P_{3,\ 4}$: ¿Qué múltiplos de un número son mayores y menores que otros números? **Situación problemática 4** $R_{1,\ 4}$: Entre la situación problemática y la definición de múltiplo $R_{2,\ 4}$: Entre la situación problemática y el procedimiento parar determinar los múltiplos
$P_{4,\ 3,\ 5,\ 7,\ 12,\ 17}$: ¿Qué número es divisor de otro número? **Situaciones problemáticas 3, 5, 7, 10, 12 y 17** $R_{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 17}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, múltiplo o divisible. $R_{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 17}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisor, divisible o múltiplo de otro número. $R_{3,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 17}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar que un número es divisor de otro número
$P_{5,\ 10}$: ¿Qué número divide a otro número? **Situación problemática 10** $R_{1,\ 10}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, múltiplo o divisible. $R_{2,\ 10}$: Entre la definición de divide, divisor, múltiplo o divisible y la argumentación para determinar una afirmación $R_{3,\ 10}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisor, divisible o múltiplo de otro número. $R_{4,\ 10}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar que un número es divisor de otro número
$P_{6,\ 8}$: ¿Qué condiciones cumplen los signos del producto de dos números enteros? **Situación problemática 8** $R_{1,\ 8}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2,\ 8}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar si un número es divisor, divisible o múltiplo de otro número.

$R_{3,\ 8}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar que un número es divisor de otro número

$P_{7,\ 9,\ 11,\ 20}$: ¿Cuál es la factorización de un número?

Situaciones problemáticas 9, 11, 20

$R_{1,\ 9,\ 11,20}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2,\ 9,11,20}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética

$R_{3,\ 9,11,20}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y el Teorema Fundamental de la Aritmética

$R_{4,\ 9,\ 11,20}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y los criterios de divisibilidad.

$R_{5,\ 9,11,20}$: Entre el Teorema Fundamental de la Aritmética y los criterios de divisibilidad

$R_{6,\ 9}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”.

$R_{7,\ 9}$: Entre la propiedad que indica que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b y la propiedad que determina la cantidad de divisores.

$R_{8,\ 9}$: Entre la situación problemática y la propiedad que determina la cantidad de divisores.

$R_{9,\ 9}$: Entre la propiedad que determina la cantidad de divisores y las propiedades de potencia.

$P_{8,\ 13}$: Dado un número, ¿Dicho número es primo?

Situación problemática 13

$R_{1,\ 13}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{2,\ 13}$: Entre la situación problemática y la definición número primo

$R_{3,\ 13}$: Entre definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y los criterios de divisibilidad.

$R_{4,\ 13}$: Entre la definición número primo y los criterios de divisibilidad.

$R_{5,\ 13}$: Entre la situación problemática y la propiedad que indica que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”.

$R_{6,\ 13}$: Entre la definición número primo y el procedimiento para determinarlo

$R_{7,\ 13}$: Entre definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y la definición de número primo
$P_{9,\,15,\,16,\,21}$: ¿Por cuál número es divisible otro número entero? **Situaciones problemáticas 15, 16, 21** $R_{1,\ 15,16,\ 21}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2,\ 15,16,\ 21}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{3,\ 15,16,21}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y los criterios de divisibilidad $R_{4,\ 15,21}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar números divisibles por 4 $R_{5,\ 15,16,\ 21}$: Entre la situación problemática y la argumentación para determinar si un número es divisible por otro.
$P_{10,\,22,\,23}$: ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro? **Situaciones problemáticas 22 y 23** $R_{1,\ 22,23}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2,\ 22}$: Entre la situación problemática y criterios de divisibilidad $R_{3,\ 22,23}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y criterios de divisibilidad. $R_{4,\ 22}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el digito faltante. $R_{5,\ 22}$: Entre las operaciones de suma y el procedimiento para determinar el digito faltante. $R_{6,\ 22}$: Entre la situación problemática y las operaciones de suma y resta. $R_{7,\ 22}$: Entre el criterio de divisibilidad y el procedimiento para determinar el o los dígitos faltantes.
$P_{11,\ 25}$: ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños? **Situación problemática 25** $R_{1,\ 25}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2,\ 25}$: Entre la situación problemática y la definición máximo común divisor $R_{3,\ 25}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el máximo común divisor números enteros

$R_{4,\ 25}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética

$R_{5,\ 25}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia

$R_{6,\ 25}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo

$R_{7,\ 25}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{8,\ 25}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números.

$R_{9,\ 25}$: Entre el procedimiento para determinar el máximo común divisor y las propiedades de potencia.

$R_{10,\ 25}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcd}[a, b] = \mathrm{mcd}[|a|, |b|]$ y el procedimiento para el cálculo del máximo común divisor

$R_{11,\ 25}$: Entre la propiedad de dados dos números enteros a y b se cumple que $\mathrm{mcd}[a, b] = \mathrm{mcd}[|a|, |b|]$ y la definición de valor absoluto

$R_{12,\ 25}$: Entre el Teorema Fundamental de la Aritmética y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{12,\ 25}$: Entre el máximo común divisor y la el Teorema Fundamental de la Aritmética

$P_{12,\ 29}$: ¿Cuál es el mcm de números relativamente pequeños?

Situación problemática 29

$R_{1,\ 29}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible

$R_{2,\ 29}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo.

$R_{3,\ 29}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética

$R_{4,\ 29}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia

$R_{5,\ 29}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo

$R_{6,\ 29}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad.

$R_{7,\ 29}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números.

$R_{8,\ 29}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo de números enteros.

$R_{9,\ 29}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia.

$R_{10,\ 29}$: Entre la descomposición factorial de un número entero y el procedimiento para el cálculo del mínimo común múltiplo.

$R_{11,\ 29}$: Entre el Teorema Fundamental de la Aritmética y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible.

$R_{12,\ 29}$: Entre el máximo común divisor y la el Teorema Fundamental de la Aritmética

$P_{13,\ 26,\ 31}$: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común

múltiplo? **Situación problemática 26 y 31** $R_{1, 26, 31}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible $R_{2, 26, 31}$: Entre la situación problemática y la definición de mínimo común múltiplo. $R_{3, 26, 31}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo de números enteros. $R_{4, 26, 31}$: Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética $R_{5, 26, 31}$: Entre el procedimiento para factorizar los números y las propiedades de potencia $R_{6, 26, 31}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo $R_{7, 26, 31}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{8, 26, 31}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para factorizar números. $R_{9, 26, 31}$: Entre el procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo y las propiedades de potencia. $R_{10, 26, 31}$: Entre la situación problemática y el procedimiento para determinar múltiplos comunes mayores al mínimo común múltiplo $R_{11, 26, 31}$: Entre el procedimiento para determinar múltiplos comunes mayores al mínimo común múltiplo y el argumento para determinar que el múltiplo encontrado es respuesta a la situación problemática. $R_{12, 26,31}$: Entre el Teorema Fundamental de la Aritmética y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{13,26,31}$: Entre el mínimo común múltiplo y la el Teorema Fundamental de la Aritmética
$P_{14, 33}$ Dado un problema con un contexto, ¿Qué número es divisible por otro número? **Situación problemática 33** $R_{1, 33}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{2, 33}$: Entre la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible y los criterios de divisibilidad. $R_{3, 33}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad. $R_{4, 33}$: Entre el procedimiento para determinar los múltiplos de un número y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible. $R_{5, 33}$: Entre el procedimiento para determinar los múltiplos de un número y el argumento para determinar el número solicitado como respuesta a la situación problemática

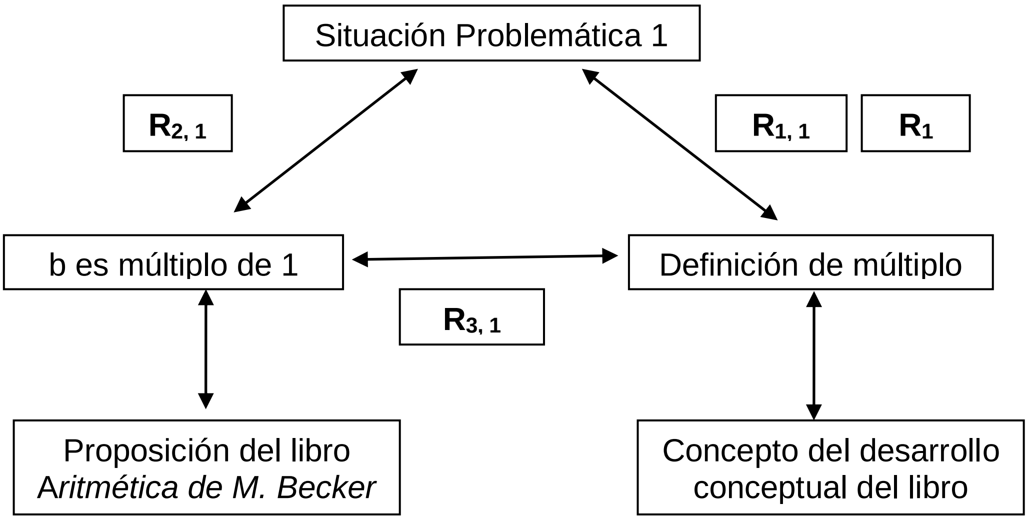
4.2.4.7 Análisis de las relaciones conceptuales de ambas configuraciones epistémicas

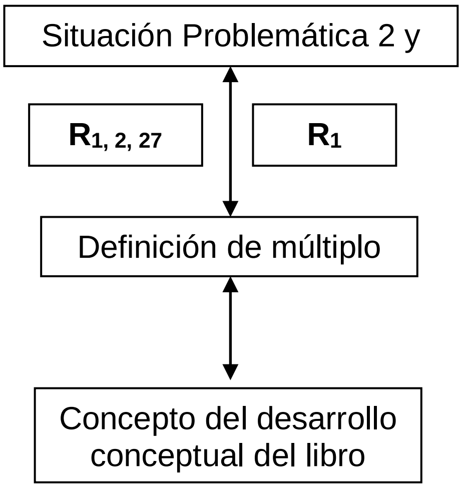
Teniendo en cuenta la configuración epistémica construida con el desarrollo conceptual del contenido divisibilidad de números enteros y las relaciones conceptuales más pertinente que se establecen entre los objetos primarios de dicha configuración, como así también la configuración epistémica de las practicas matemáticas realizadas en las resoluciones de las situaciones problemáticas y las relaciones conceptuales establecidas entre los objetos primarios intervinientes y emergentes de tales resoluciones, encontramos que:

Con respecto a la *situación problemática 6*, que es un representante del tipo de problema $P_{1, 6}$: ¿Cuántos divisores tiene un número? Se puede observar que fue vital e indispensable incorporar la definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para determinar cuándo un número entero es divisor de otro número entero y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{1, 6}}$. La introducción de esta definición fue necesaria porque en el desarrollo conceptual del contenido, en el libro, no se evidencia ninguna definición de lo que representa un divisor, siendo así imposible resolver dicha situación y establecer alguna relación con el problema. Como se debían determinar todos los divisores de un número, también fue necesario considerar divisores negativos. Siendo necesario introducir las propiedades que expresan que, si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b" (*), generando así la relación $\mathbf{R_{2, 6}}$ y la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1, generando así las relaciones $\mathbf{R_{3, 6}}$.

Con respecto a las *situaciones problemáticas 1, 2, 12, 19, 24, 27 y 28*, que son representantes del tipo de problema $P_{2, 1, 2, 12, 19, 27, 28}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro? Podemos observar que con respecto a los problemas 1 y 2, fue suficiente utilizar la definición de múltiplo de brinda el desarrollo teórico del libro, construyendo así la relación $\mathbf{R_{1, 1, 2,27}}$ en conjunto con el procedimiento para determinar los múltiplos, generando la relación $\mathbf{R_{4, 1, 2}}$. Con respecto a los problemas 12, 19, 27 y 28, fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para determinar cuándo un número entero es divisor de otro número entero y así poder establecer la relación $\mathbf{R_{5, 10, 12,19, 24, 28}}$. Con respecto a los problemas 19, 27 y 28, la utilización de los criterios de divisibilidad que brinda el libro en conjunto la con definición dada anteriormente, permitió las relaciones $\mathbf{R_{6, 12,19, 24, 28}}$ **y** $\mathbf{R_{7, 12,19, 24, 28}}$.

En la figura 1 se puede observar que con respecto a la relaciones $\mathbf{R_{1,1}}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_1}$**,** la relación $\mathbf{R_{1,2, 27}}$ se vincula de forma directa con la relación R_1, la relación $R_{6, 12, 19,24, 28}$ se vincula con la relación y R_2 del desarrollo conceptual del libro.





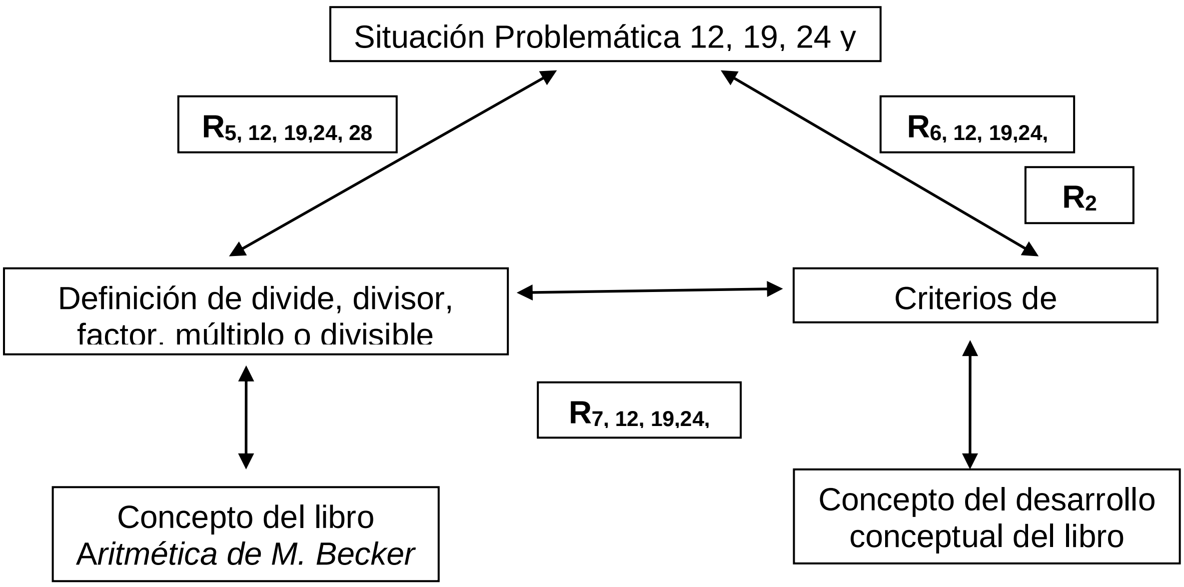


Figura 1

Con respecto a la situación problemática 4, que es un representante del tio de problema $P_{3,\ 4}$: ¿Qué múltiplos de un número son mayores y menores que otros números? Podemos observar que con la definición de múltiplo que brinda el libro es suficiente para determinar lo solicitado por el libro y poder así construir las relaciones $\mathbf{R}_{1,\ 4}$ y $\mathbf{R}_{2,\ 4}$. En la figura 2 se puede observar que con respecto a la relación $\mathbf{R}_{1,4}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R}_{3}$ de la propuesta teórica del libro.

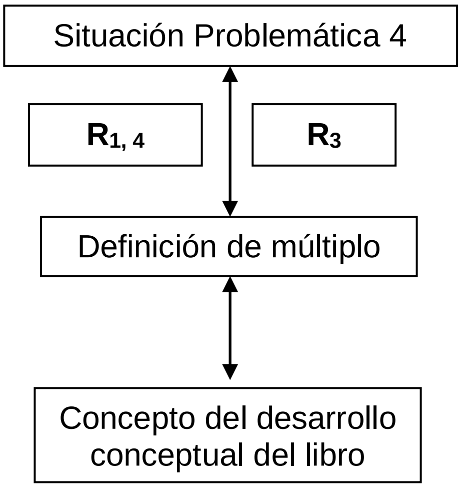


Figura 2

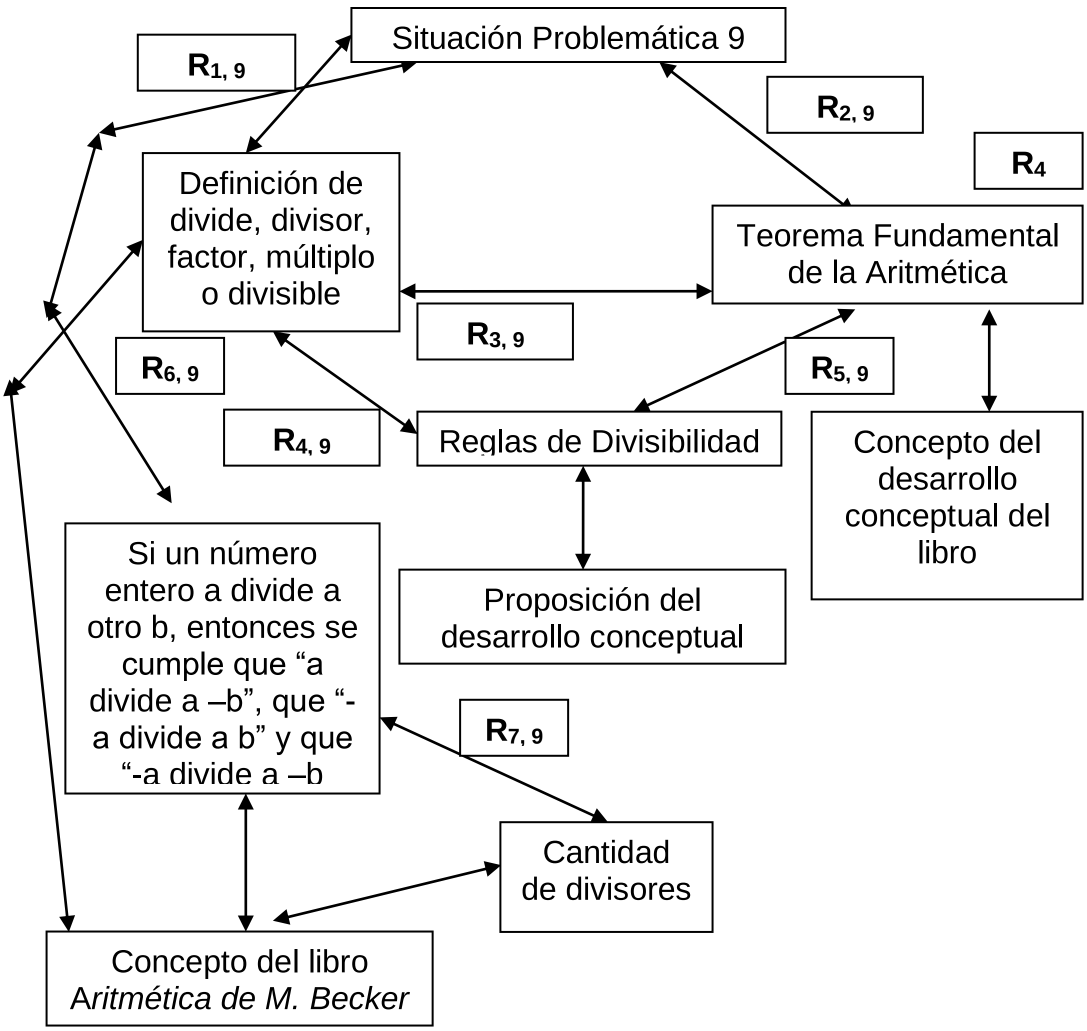
En relación con las situaciones problemáticas 3, 5, 7, 10, 12 y 17, siendo estos representantes del tipo de problema $P_{4,\ 3,5,7,10,12,\ 17}$: ¿Qué número es divisor de otro número? $P_{5,\ 10}$: ¿Qué número divide a otro número? Podemos observar que se introdujo la definición de divisor utilizada en problemas anteriores estableciendo las relaciones $\mathbf{R}_{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,17}$, $\mathbf{R}_{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 17}$ y $\mathbf{R}_{1,\ 10}$. La introducción de esta definición fue necesaria porque en el desarrollo teórico del libro no se brinda ninguna definición de lo que representa un divisor en el conjunto de número enteros. Esta introducción determino los procedimientos y argumentaciones necesarios para resolver los problemas, generando las relaciones $\mathbf{R}_{3,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 17}$, $\mathbf{R}_{2,\ 10}$, $\mathbf{R}_{3,\ 10}$ **y** $\mathbf{R}_{4,\ 10}$.

En cuanto a la situación problemática 8, que es un representante del tipo de problema $P_{6,\ 8}$: ¿Qué condiciones cumplen los signos del producto de dos números enteros? En este problema fue suficiente la introducción de la definición de las condiciones que cumple don números enteros para ser múltiplos y así generar las relaciones $\mathbf{R}_{1,\ 8}$, $\mathbf{R}_{2,\ 8}$ **y** $\mathbf{R}_{3,\ 8}$.

Con respecto a las situaciones problemáticas 9, 11 y 20, que son representantes del tipo de problema $P_{7,\ 9,11,\ 20}$: ¿Cuál es la factorización de un número?

Podemos observar que algunas relaciones resultan similares, siendo que nuevamente fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R_{1,\,9,\,11,20}}$. En conjunto con esta definición utilizamos el Teorema Fundamental de la Aritmética que brinda el libro y los criterios de divisibiliada, permitiendo construir las relaciones $R_{2,\,9,11,\,20}$, $R_{3,\,9,\,11,20}$, $R_{4,\,9,\,11,20}$ y $R_{5,\,9}$. Con respecto al problema 9, fue necesaria la introducción de la propiedad que expresa que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b” y así establecer la relaciones $R_{6,\,9}$ y $R_{7,\,9}$. Como se solicitaba determinar todos lo divisores, fue necesaria la introducción de la propiedad que expresa la cantidad de divisores, en conjunto con las propiedades de potencia.

En la figura 3 se puede observar que con respecto a las relaciones $\mathbf{R_{2,9}}$ y $\mathbf{R_{2,11,20}}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_4}$ de la propuesta teórica del libro.



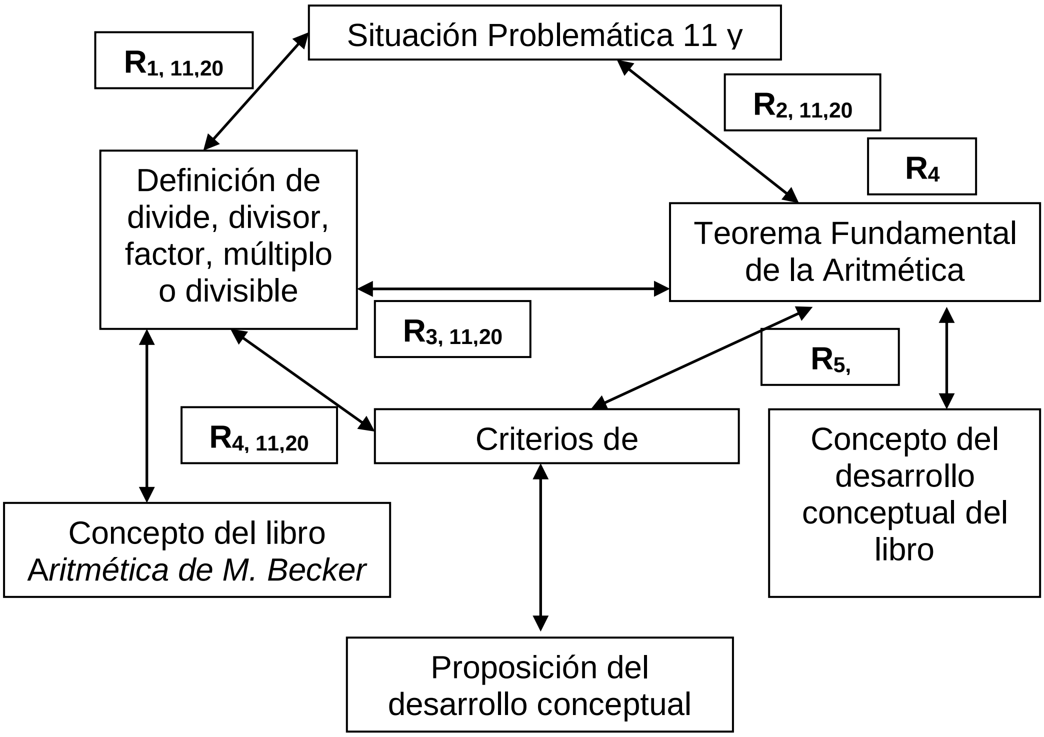


Figura 3

En relación a la situación problemática 13, que es un representante del tipo de problema $P_{8,\ 13}$: Dado un número, ¿Dicho número es primo? Podemos notar que se introdujo la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número en conjunto con la propiedad que determinar los divisores opuesto de un número entero y poder así establecer las relaciones $\mathbf{R_{1,\ 31}}$y $\mathbf{R_{5,\ 13}}$.

En conjunto con esta definición se utilizó los criterios de divisibilidad que brinda el libro y así construir la relación $\mathbf{R_{3,\ 13}}$. A su vez, se introdujo una definición de número primo, puesto que en desarrollo del libro el enunciado brindado es poco claro, esto generó la construcción de las relaciones $\mathbf{R_{2,\ 13}}$, $\mathbf{R_{4,\ 13}}$ y $\mathbf{R_{6,\ 13}}$. En la figura 4 se puede observar que con respecto a la relación $\mathbf{R_{2,\ 13}}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_{5}}$ de la propuesta teórica del libro.

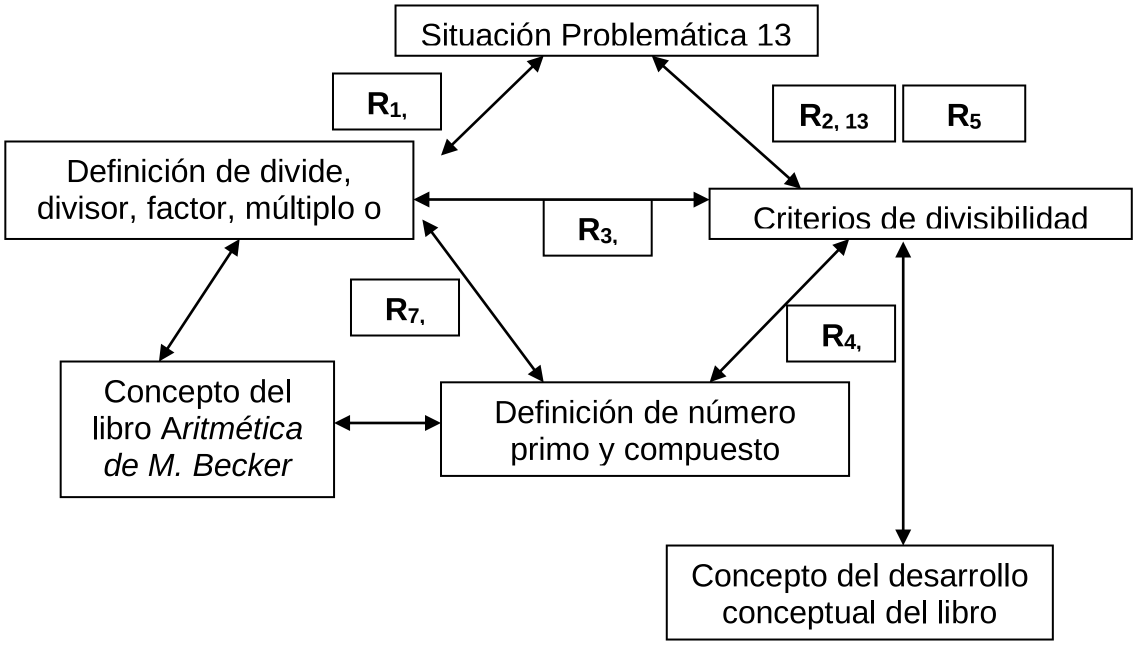


Figura 4

Con respecto a las relaciones problemáticas 15, 16 y 21, que son representantes del tipo de problema $P_{9,\ 15,\ 16,\ 21}$: ¿Por cuál número es divisible otro número entero? Podemos observar que fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $R_{1,\ 15,16,\ 21}$. La introducción de esta definición fue necesaria porque en el desarrollo conceptual del contenido, en el libro, no se evidencia ningún enunciado respecto a las condiciones que cumple un número para ser divisible por otro. Además esta definición posibilito usar un procedimiento para determinar si un número era divisible por otro, generando la relación $R_{4,\ 15,\ 16,\ 21}$ y $R_{9,\ 16}$. A su vez, esta definición posibilito la relación $R_{5,\ 15,21}$. Así mismo se utilizaron los criterios de divisibilidad que brinda el libro y así construir las relaciones $R_{4,\ 15,16,\ 21}$ $R_{2,\ 15,16,\ 21}$. En la figura 5 se puede observar que con respecto a la relación $R_{2,\ 15,16,\ 21}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_5}$ de la propuesta teórica del libro.

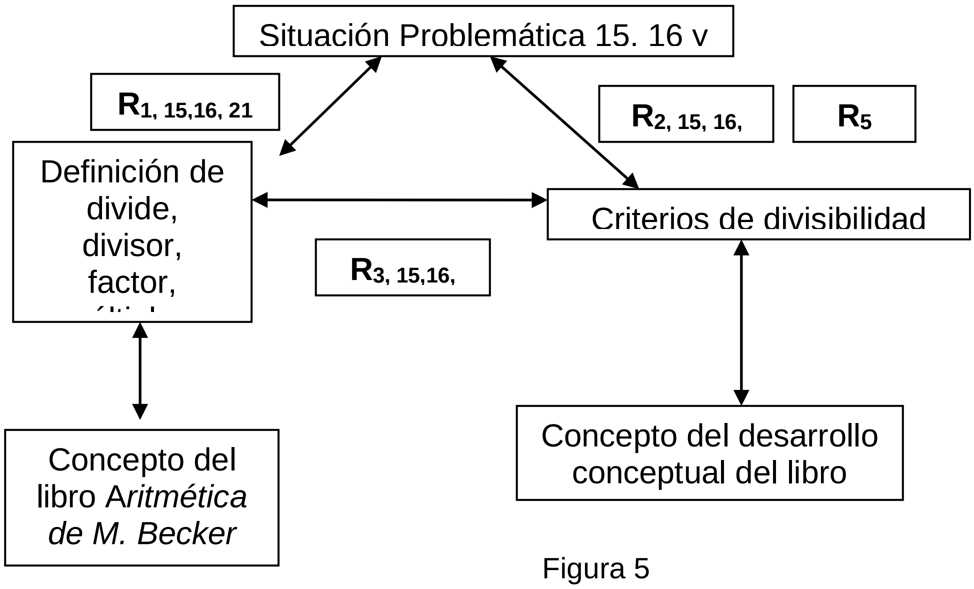


Figura 5

Con respecto a las situaciones problemáticas 22 y 23, representantes del tipo de problema $P_{10,\ 22,\ 23}$: ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro? Podemos observar que fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R_{1,\ 22}}$ y $\mathbf{R_{1,\ 23}}$. Esta definición permitió utilizar las reglas de divisibilidad por 3 y por 4, permitiendo construir las relaciones $\mathbf{R_{2,\ 22}}$, $\mathbf{R_{3,\ 22}}$, $\mathbf{R_{9,\ 23}}$ **y** $\mathbf{R_{10,\ 23}}$. La utilización de los enunciados mencionados, generaron las relaciones $\mathbf{R_{6,\ 22}}$, $\mathbf{R_{7,\ 22}}$ $\mathbf{R_{12,\ 23}}$, $\mathbf{R_{13,\ 23}}$ y $\mathbf{R_{14,\ 23}}$. En la figura 6 se puede observar que con respecto a la relación $R_{2,\ 22,23}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_6}$ de la propuesta teórica del libro.

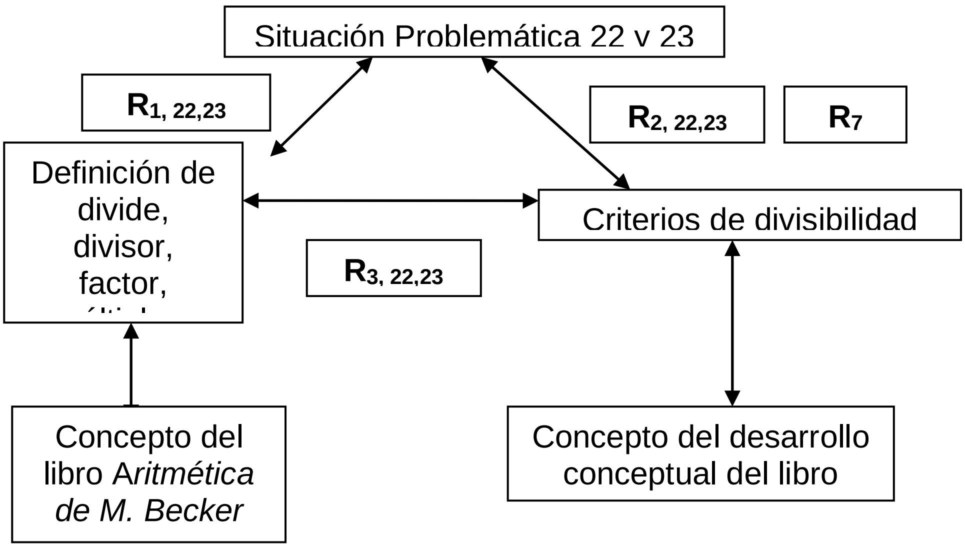


Figura 6

En cuanto a la situación problemática 25, que es un representante del tipo de problema $P_{11, 25}$: ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños? Podemos observar que se solicita el cálculo del máximo común divisor de un grupo de números, razón por lo cual se introdujo la definición de divisible y definición de de máximo común divisor, generando las relaciones $R_{1, 25,}$ $R_{2, 25}$ y $R_{3, 25}$. A su vez se utilizó el Teorema Fundamental de la Aritmética, criterios de divisibilidad, propiedades de potencia y la propiedad para calcular el mcd de números enteros, generando las relaciones $R_{4, 25}$, $R_{5, 25}$ $R_{6, 25}$, $R_{7, 25}$, $R_{8, 25}$, $R_{9, 25}$, $R_{10, 25}$ y $R_{11, 25}$. En la figura 7 se puede observar que con respecto a la relación $R_{4, 25}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_8}$ de la propuesta teórica del libro.

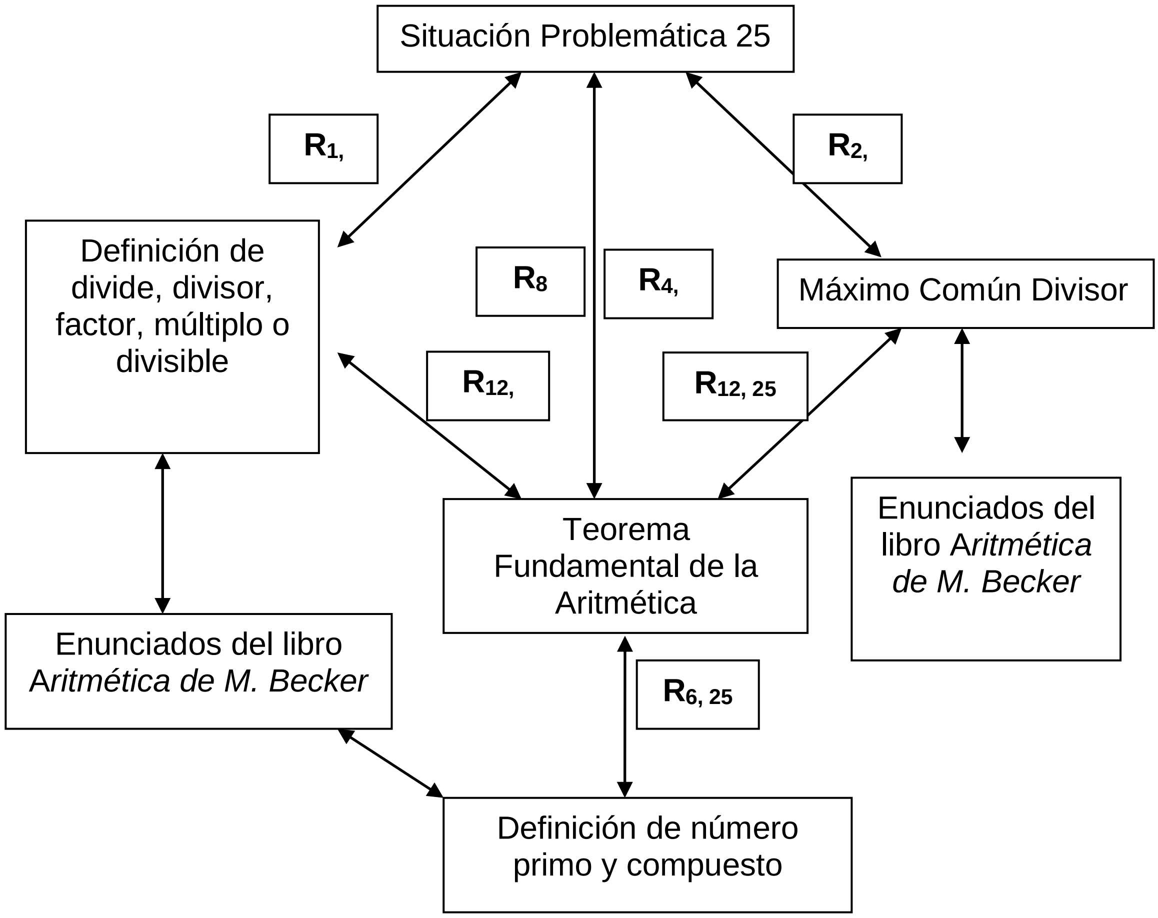


Figura 7

En relación con la situación problemática 29, siendo un representante del tipo de problema $P_{12, 29}$: ¿Cuál es el mcm de números relativamente pequeños? Podemos observar que fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R_{1, 29}}$ y $\mathbf{R_{2, 29}}$ En el desarrollo teórico del libro se esgrime un procedimiento a través de un ejemplo para determinar el mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros, no obstante no brinda un concepto de lo que es un mcm, por lo cual se introdujo una definición de lo que es y cómo se calcula el mínimo común múltiplo de número enteros, permitiendo construir la relación $R_{2,\ 29}$. Para la utilización de la definición que dimos de mcm, fue necesaria la utilización de lo que representa un número primo, el Teorema Fundamental de la Aritmética (*), como se observa en la figura 4, las propiedades de potencia y criterios de divisibilidad. Permitiendo construir las siguientes correspondencias $R_{5,\ 29}$, $R_{6,\ 29}$, $R_{7,\ 29}$, $R_{8,\ 29}$, $R_{9,\ 29}$ y $R_{10,\ 29}$. En la figura 8 se puede observar que con respecto a la relación $R_{3,\ 25}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_9}$ de la propuesta teórica del libro.

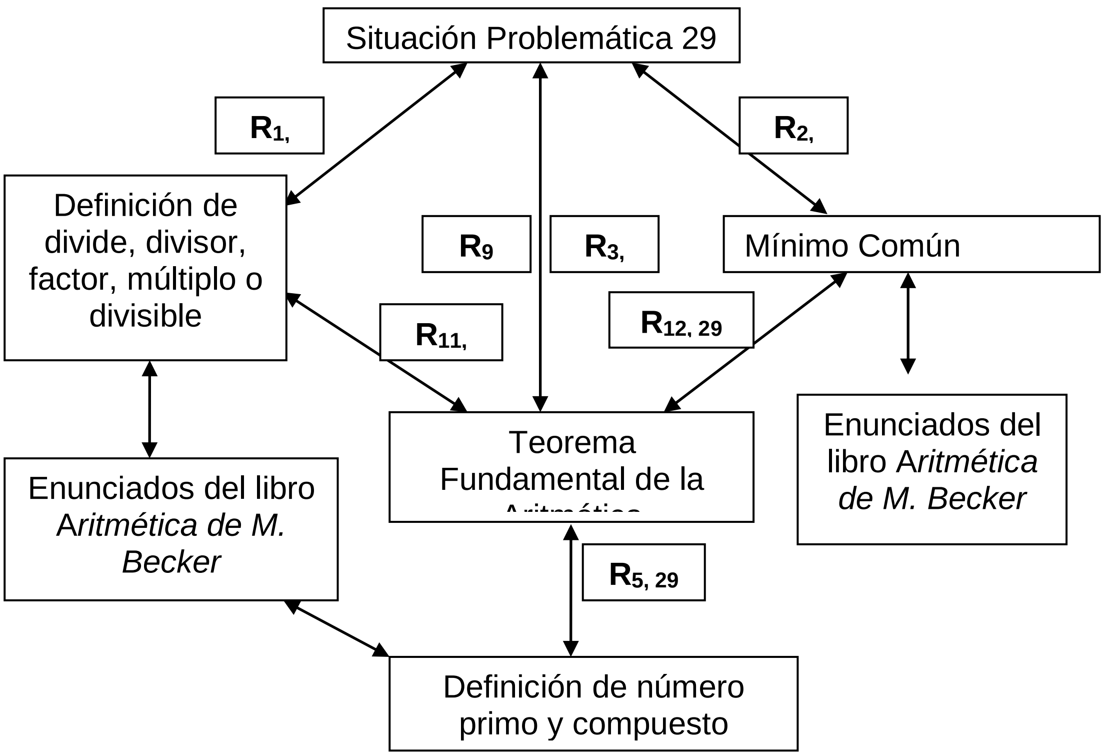


Figura 8

Con respecto a las situaciones problemáticas 26 y 31, ambos representantes del tipo de problema $P_{13,\ 26,31}$: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo? Para resolver estas situaciones, las consideraciones realizadas para establecer las relaciones entre los objetos primarios fueron similares a las realizadas en el problema anterior. Cabe destacar que en el desarrollo teórico del libro se esgrime un procedimiento a través de un ejemplo para determinar el mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros, no obstante, no brinda un concepto de lo que es un mcm. Como así tampoco un argumento del porque realiza determinadas acciones al realizar el cálculo del mcm de números enteros positivos y negativos. Es asi que se introdujeron la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $R_{1, 26, 31}$ y una definición de lo que es y cómo se calcula el mínimo común múltiplo de número enteros, permitiendo construir la relación $R_{2, 26, 31}$. Para la utilización de la definición que dimos de mcm, fue necesaria la utilización de lo que representa un número primo, el Teorema Fundamental de la Aritmética (*), como se observa en la figura 4, las propiedades de potencia y criterios de divisibilidad. Permitiendo construir las siguientes correspondencias $R_{4, 26, 31}$, $R_{5, 26, 31}$, $R_{6, 26, 31}$, $R_{7, 26, 31}$, $R_{8, 26, 31}$, $R_{9, 26, 31}$, $R_{10, 26, 31}$ y $R_{11, 26, 31}$. En la figura 8 se puede observar que con respecto a la relación $R_{4, 26, 31}$se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_{10}}$ de la propuesta teórica del libro.

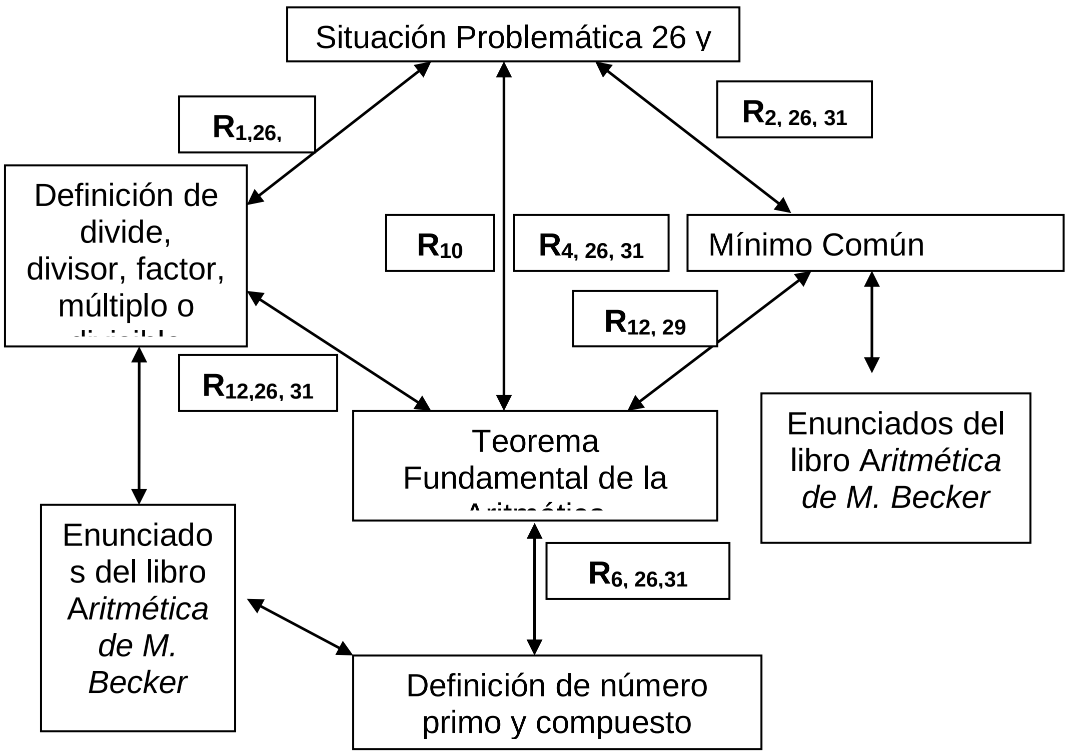


Figura 8

En cuanto a la situación problemática 33, representante del tipo de problema $P_{14, 33}$ Dado un problema con un contexto, ¿Qué número es divisible por otro número? Podemos observar que fue necesaria la introducción de la definición de las condiciones que cumple un número para ser divisor, múltiplo o divisible por otro número y poder así establecer la relación $\mathbf{R_{1, 33}}$ en conjunto con los criterios de divisibilidad que brinda el libro, generando las relaciones $R_{2, 33}$ y $R_{3, 33}$. Posibilitando determinar lo solicitado por el problema, generando las relaciones $R_{4, 33}$ y $R_{5, 33}$. En la figura 9 se puede observar que con respecto a la relación $R_{3,\ 33}$ se vinculan con las relaciones $\mathbf{R_{11}}$ de la propuesta teórica del libro.

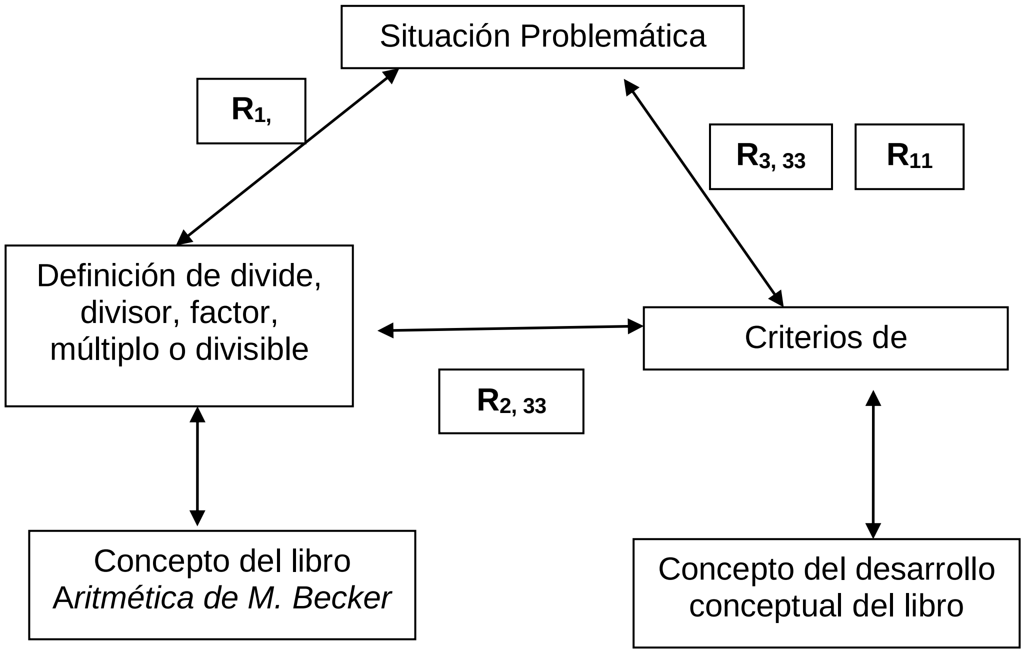


Figura 9

4.3. Semejanzas y diferencias que se establecen entre los procedimientos y argumentaciones utilizados en la resolución de las situaciones problemáticas de cada libro

A continuación, se exponen dos cuadros que contienen los procedimientos y argumentaciones para resolver las situaciones problemáticas propuestas en cada libro respecto al contenido divisibilidad de números enteros. En el cuadro 1 se encuentran los brindados por el desarrollo teórico de cada libro y en el cuadro 2 los necesarios para resolver dichos problemas. Posteriormente realizamos un análisis de ambos cuadros.

De esta forma, intentamos responder a la pregunta de investigación que formulamos en el capítulo 1, esta es: ¿Qué semejanzas y diferencias se establecen entre los procedimientos y argumentaciones propuestos por libros usuales de matemática respecto al contenido divisibilidad de números enteros y aquellos necesarios para resolver las situaciones problemáticas que proponen?

4.3.1 Primer libro

A continuación, exponemos los cuadros referentes al libro Navegantes del Conocimiento de Pablo Amster**,** Leonardo Moledo e Irene Zapico.

A cada tipo de problema lo simbolizamos con la letra $P_{m,n}$ en el cual m representa el número de orden del tipo de problema y n el número de la situación problemática que le corresponde como representante de ese tipo de problema, siendo m y n números naturales. Esto se aplica para todos los cuadros.

Cuadro 1

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1, 75}$: ¿Cuáles son los divisores de números relativamente pequeños?	No tiene	No tiene
$P_{2, 75}$: ¿Qué números son coprimos?	No tiene para resolver	No tiene
$P_{3, 76}$: ¿Un número entero, es divisor de otro?	No tiene para resolver	No tiene
$P_{4, 76}$: ¿Un número entero es divisible por otro?	Tiene. Se realiza la división y se determina si el resto es cero.	Tiene. La definición explica cuando los es
$P_{5, 76}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro?	Tiene. Se realiza una división y se determinar si es múltiplo.	Tiene. La definición explica cuando lo es
$P_{6, 78}$: ¿Cuál es el dcm de dos números enteros relativamente pequeños?	No tiene para calcularlo	No tiene
$P_{7, 78}$: ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños?	No tiene para calcularlo	No tiene
$P_{8, 79}$: Dados el mcm y el dcm de dos números enteros, ¿Cuáles son dichos números?	No tiene para calcular ninguno de los dos	No tiene

Cuadro 2

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1,\ 75}$: ¿Cuáles son los divisores de números relativamente pequeños?	Se dividió a cada número por otros. Se utilizo criterios de divisibilidad para determinar divisores de un número. Se expreso a los números como producto de números. Se considero la regla de los signos para la multiplicación. Se utilizo la propiedad que expresa que si un número divide a otro, divide a su opuesto. Se expreso a los números compuestos que aparecen en las tablas de multiplicar como producto de números para determinar divisores.	Definición de divisible y de divisor de números enteros. Todo número es múltiplo de 1. Si el número a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b" Definición de número primo y compuesto Un número entero a es primo si y si solo –a también lo es. Teorema Fundamental de la Aritmética. Un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c Criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5.
$P_{2,\ 75}$:¿Qué par de números son coprimos?	Se considero números primos y se los expreso a cada uno de ellos como un producto de números.	Definición de máximo común divisor. Definición de números coprimos
$P_{3,\ 76}$: ¿Un número entero, es divisor de otro?	Se determino si un número era o no divisor de otro número expresándolo como un producto de números enteros.	Definición de divisor y de multiplicación. Regla de los signos para la multiplicación

$P_{4,\ 76}$: ¿Un número entero es divisible por otro?	Se determino si un número era o no divisible por otro número expresándolo como un producto de números enteros.	Definición de Divisible y de multiplicación. Regla de los signos para la multiplicación
$P_{5,\ 76}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro?	Se determino si un número era o no múltiplo de otro número expresándolo como un producto de números enteros.	Definición de Divisible, de divisor, de multiplicación. Regla de los signos para la multiplicación
$P_{6,\ 78}$: ¿Cuál es el dcm de dos números enteros relativamente pequeños?	Se realizo divisiones sucesivas y se determinó los factores primos de cada número. A cada número se los expreso como un producto de dichos factores primos. Se utilizo la definición de máximo común divisor y propiedades, para determinar el máximo común divisor de dos números	Definición de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. $\mathrm{dcm}(a,b)=\mathrm{dcm}(\|a\|,\|b\|)$ $\mathrm{mcm}[a,b]=\mathrm{mcm}[\|a\|,\|b\|]$ Teorema Fundamental de la Aritmética
$P_{7,\ 78}$: ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños?	Se realizo divisiones sucesivas y se determinó los factores primos de cada número. A cada número se los expreso como un producto de dichos factores primos. Se utilizo la definición de mínimo común múltiplo y propiedades, para determinar el mínimo común múltiplo de dos	Definición de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. $\mathrm{dcm}(a,b)=\mathrm{dcm}(\|a\|,\|b\|)$ $\mathrm{mcm}[a,b]=\mathrm{mcm}[\|a\|,\|b\|]$ Teorema Fundamental de la Aritmética

	números.	
$P_{8,\ 79}$: Dados el mcm y el dcm de dos números enteros, ¿Cuáles son dichos números?	Se expreso a los números como producto de números primos. Se analizo si un número es múltiplo de otro. Se considero diversas posibilidades de solución	Dados dos números enteros a y b se cumple que : $\mathrm{dcm}(a,b) = \mathrm{dcm}(\lvert a\rvert, \lvert b\rvert)$ $\mathrm{mcm}[a,b] = \mathrm{mcm}[\lvert a\rvert, \lvert b\rvert]$ Definición de valor absoluto

4.3.1.1 Análisis de los aspectos más sobresalientes que se observa en ambos cuadros.

Con respeto al Problema 1 (situación problemática 75), el primer inconveniente con el cual nos encontramos, es que solicita dar a conocer cuáles son los divisores de un determinado grupo de números. Pero al tratar de resolver el problema utilizando las herramientas conceptuales que brinda el libro, nos encontramos con la situación que en ningún lugar del capítulo que trata el tema divisibilidad se brinda una definición o mención de lo que es un divisor, lo que ocasiona que no pueda ser posible dar una respuesta de cuáles son los divisores del grupo de números del problema.

Observando los números de la tabla del Problema 1, nos encontramos con números que son primos y números que no lo son, llámese compuestos. Con respecto a esto, es aconsejable y necesario saber las condiciones que cumple un número para ser denominado número primo, para de esta forma poder concluir de un modo más rápido que existen solo determinados números que van a ser sus divisores. Lo que evita estar buscando de forma arbitraria, números que los dividan. En concordancia con lo anterior, también es importante saber las condiciones que cumple un número para ser denominado compuesto, para de esta forma estar al tanto que a diferencia de los números primos, estos pueden tener una mayor cantidad de números que lo dividan. Razón por la cual, fue necesario introducir una definición de las condiciones que debe cumplir un número para ser considerado un número primo. A su vez, como el capítulo de divisibilidad del libro trabaja con el conjunto de números enteros, no basta solamente con determinar los divisores positivos de un número, si no también se debe tener presente los divisores negativos, donde para ello debimos considerar la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*". Esto último, posibilito que, al determinar los divisores positivos de un número, también se determinaran los negativos.

Si prestamos nuevamente atención al grupo de números del problema, nos encontramos con la particularidad que se presentan números que se encuentran en las tablas de multiplicar que se aprende a lo largo de la secundaria como así también números que no lo están. Pero todos ellos cumplen que son números compuestos. Lo que nos direccionó en la utilización del Teorema Fundamental de la Aritmética y los criterios de divisibilidad, para de esta forma poder factorizar dichos números compuestos y poder determinar todos sus divisores. Acción que no podría realizarse fácilmente con la definición de divisible que brinda el libro.

En el apartado b) del ítem 75, se solicita escribir pares de números coprimos, pero nuevamente nos encontramos con la situación que en el desarrollo del tema divisibilidad por parte del libro, no brinda ninguna herramienta conceptual sobre lo que es o lo que representa un número primo, como así tampoco que a que se denomina números coprimos. Con lo cual, nos resultó pertinente y necesario brindar una definición de las condiciones que deben cumplir dos números para ser considerados coprimos y así poder dar un par de números que cumplan con lo solicitado en dichos ítems.

Con respecto a los Problemas 3, 4 y 5 (situación problemática 76), la definición que brinda el libro sobre divisible, nos otorga una herramienta para poder afirmar o negar las afirmaciones que incluyan determinar cuándo un número es divisible por otro o cuando un número es múltiplo de otro. No obstante, no brinda una herramienta para determinar cuándo un número es divisor de otro, pues como nombráramos en párrafos anteriores, el libro no otorga ninguna definición de cuando un número es divisor de otro. Con lo cual, es necesario introducir una definición de divisor y poder así, determinar la verdad o falsedad de las afirmaciones que incluyan la utilización de dicho concepto.

En cuanto al problema 6 (situación problemática 78), el mismo solicita la determinación del máximo común divisor (mcd) de dos números enteros. Pero para cumplir con lo solicitado, no nos basta con la definición que brinda el libro, puesto que solo da una definición sobre lo que representa un máximo común divisor, pero no brinda un procedimiento sumamente práctico para determinarlo. Destacamos esto, porque en el caso de tener que determinar el mcd de números relativamente pequeños, puede utilizarse la definición que brinda el libro y es posible calcular el mcd de una forma relativamente fácil. No obstante, cuando se tiene números relativamente grandes, en valor absoluto, se torna sumamente difícil y trabajoso poder determinar el máximo común divisor utilizando solamente las herramientas conceptuales que otorga el libro. Debido a ello, nos fue necesario introducir una definición que nos brinde un procedimiento práctico para determinar el máximo común divisor de dos números cualesquiera sin importar si son relativamente pequeños o grandes.

Así mismo, con respecto al Problema 7 (situación problemática 78), nos encontramos con una situación similar al planteado en el párrafo anterior. Con la diferencia que en este caso se solita el cálculo del mínimo común múltiplo (mcm) de un par de números enteros. Nuevamente nos encontramos con que el libro brinda una definición de lo que representa el mínimo común múltiplo de números enteros, pero no obstante resulta sumamente poco práctico para determinar dicho número cuando los números son relativamente grandes, en valor absoluto. Es así, que nos vimos forzamos a introducir una definición de mínimo común múltiplo que nos brinde una herramienta para calcular el mínimo común múltiplo de dos números cualesquiera.

En cuanto al Problema 8 (situación problemática 79), nos encontramos con la particularidad que dado el mínimo común múltiplo (mcm) y el máximo común divisor (dcm) de dos números enteros específicos, se solicita determinar dichos números. Consideramos que este ejercicio es diferente a todos los anteriores, donde dados dos números enteros se solicita determinar el dcm o mcm. Destacamos que la diferencia fundamental radica en la capacidad de la puesta en marcha de un razonamiento muy deductivo. Pensamiento que, a lo largo de las situaciones problemáticas, no se desarrolla. Siendo así, que podemos observar que en el desarrollo del contenido teórico del libro no se brinda un procedimiento para resolver un problema de dicha característica. Por lo cual, al momento de dar con una solución, nos encontramos con que existen diversos números que cumplen que tienen el mismo mcm y dcm. De donde, al no especificar las características de los números buscados, se deben considerar todas las posibilidades.

4.3.2 Segundo libro

A continuación, exponemos los cuadros referentes al libro Matemática II de María Dolores Álvarez.

Cuadro 1

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1,\ 24}$ ¿Cuáles son todos los divisores de números relativamente pequeños?	No tiene	No tiene

$P_{2,\ 28}$ ¿Por cuál número es divisible otro número entero?	No tiene para resolver todos los casos	No tiene
$P_{3,\ 30}$ ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro?	No tiene	Regla de divisibilidad por 11, pero no pertinente
$P_{4,\ 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es primo?	No tiene como resolver	Tiene. La definición explica cuando los es
$P_{5,\ 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es compuesto?	No tiene como resolver	Tiene. La definición explica cuando lo es
$P_{6,\ 32}$ ¿Cuáles son los múltiplos comunes de números relativamente pequeños?	No tiene para determinarlo	Solo tiene para saber cuándo un número es múltiplo de otro
$P_{7,\ 32}$: ¿Cuál es la factorización de un número?	Tiene para calcularlo, pero es poco claro	Se justifica a que es similar a cuando se tiene números naturales.
$P_{8,\ 32,\ 33}$ ¿Cuál es el mcm de números enteros positivos relativamente pequeños?	Tiene para calcularlo, pero no es pertinente	
$P_{9,\ 34}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?	Tiene para calcularlo, pero no es pertinente	No tiene para resolverlo.
$P_{9,\ 35}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?	Tiene, pero poco claro	No pertinente

$P_{10,\ 36}$ a. ¿Cuál es el mcd de tres números enteros positivos relativamente pequeños?	Tiene para calcularlo, pero no es pertinente	No pertinente
$P_{11,\ 37}$ ¿Cuál es el mcd de números enteros relativamente pequeños?	Tiene para calcularlo, pero no es pertinente	No pertinente
$P_{12,\ 38}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el máximo común divisor?	Tiene para calcularlo, pero no es pertinente	No pertinente
$P_{13,\ 39}$ Dado dos números relativamente grandes, ¿Cuál es su mínimo común múltiplo y máximo común divisor?	Tiene para calcularlo, pero no es pertinente	No pertinente

Cuadro 2

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1,\ 24}$ ¿Cuáles son todos los divisores de números relativamente pequeños?	Se dividió a cada número por otros. Se utilizo criterios de divisibilidad para determinar divisores de un número. Se expreso a los números como producto de números. Se utilizo la propiedad que expresa que, si un número divide a otro, divide a su opuesto.	Definición de cuando un número divide a otro. Todo número es múltiplo de 1. Si el número a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b” Teorema Fundamental de la Aritmética. Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 7

$P_{2,\ 28}$ ¿Por cuál número es divisible otro número entero?	Se aplico la definición de cada criterio para determinar si era divisible por un número en particular	Criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10
$P_{3,\ 30}$ ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro?	Se realizó la suma y resta de las cifras del número y donde no figuraba la o las cifras a determinar la consignamos con una letra para poder operar con ella. Se constituyo una igualdad y se determinó si era un múltiplo de 11 agotando posibilidades.	Criterio de divisibilidad por 11.
$P_{4,\ 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es primo?	Se aplicó criterios de divisibilidad y se determinó los divisores de cada número, tanto positivos como negativos.	Definición de número primo. Definición de número compuesto Si un número d divide a otro número c si y solo si la factorización del número d divide a c. Criterios de divisibilidad por 3 y 7 si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”
$P_{5,\ 31}$ Dado un número, ¿Dicho número es compuesto?	Se aplicó criterios de divisibilidad y se determinó los divisores de cada número, tanto positivos como negativos.	Definición de número primo. Definición de número compuesto Si un número d divide a otro número c si y solo si la

		factorización del número d divide a c. Criterios de divisibilidad por 3 y 7 si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”
$P_{5,\ 32}$ ¿Cuáles son los múltiplos comunes de números relativamente pequeños?	Se aplicó criterios de divisibilidad y se determinó los divisores positivos de cada número. Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números primos y luego se aplicó la definición de mínimo común múltiplo para determinar el mcm. Luego determinamos los tres primeros múltiplos. Se expresó al mcm como múltiplo de los números 9, 12 y 18	Definición de que es el mínimo común múltiplo de dos números. Criterios de divisibilidad por 2 y 3. Teorema Fundamental de la Aritmética.
$P_{6,\ 33}$ ¿Cuál es el mcm de dos números relativamente pequeños?	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número. Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números	Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 7. Teorema Fundamental de la Aritmética. Definición de mínimo común múltiplo.

	primos y luego se aplicó la definición de mínimo común múltiplo para determinar el mcm.	
$P_{7,\ 32}$: ¿Cuál es la factorización de un número?	Se aplicó criterios de divisibilidad y se determinó los divisores primos.	Criterios de divisibilidad. Definición de números primo. Teorema Fundamental d la Aritmética
$P_{8,\ 32,\ 33}$ ¿Cuál es el mcm de números enteros positivos relativamente pequeños?	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número. Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números primos y luego se aplicó la definición de mínimo común múltiplo para determinar el mcm. Luego se expresó al mcm como respuesta a la pregunta del problema. El mcm encontrado se lo expreso en minutos y se consideró la ultima hora en que se encontraron los trenes para saber que una hora y media después se volverían a encontrar.	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 7. Teorema Fundamental de la Aritmética. Definición de máximo común divisor
$P_{9,\ 37}$ ¿Cuál es el mcd de números enteros relativamente pequeños?	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número.	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 7. Teorema Fundamental de

	Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números primos. Se aplico una propiedad para el caso de números enteros negativos y luego se aplicó la definición de máximo común divisor para determinar el mcd.	la Aritmética. $dcm(a,b) = dcm(\|a\|,\|b\|)$ Definición de máximo común divisor
$P_{10,\ 38}$ Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el máximo común divisor?	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número. Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números primos y luego se aplicó la definición de máximo común divisor para determinar el mcd. Luego se expresó al mcd como respuesta a la pregunta del problema. Se determino cada divisor de los números como posibles longitudes de los trozos de las cuerdas.	Criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5 Teorema Fundamental de la Aritmética. Definición de máximo común divisor
$P_{11,\ 39}$ Dado dos números relativamente grandes, ¿Cuál es su mínimo común múltiplo y máximo común	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número.	Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 7 y 11 Teorema Fundamental de la Aritmética.

divisor?	Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números primos y luego se aplicó la definición de máximo común divisor para determinar el mcd. Se aplico una propiedad para dar respuesta a la pregunta del porque da así lo encontrado.	todo número “b” es múltiplo de 1 Definición de máximo común divisor Dado dos números enteros a y b, se cumple que (a,b).[a,b]=a.b Saque del gentile

4.3.2.1 Análisis de los aspectos más sobresalientes que se observa en ambos cuadros

Con respecto al problema 1(situación problemática 24) cuando leemos la consiga y tratamos de determinar lo que solicita, nos encontramos que la situación problemática requiere escribir todos los divisores de un determinado grupo de números enteros positivos. Pero al tratar de resolver lo solicitado con las herramientas conceptuales que brinda el libro, nos encontramos con el inconveniente de que, en ningún lugar del capítulo, que trata el tema de divisibilidad, podemos hallar una definición de lo que representa un divisor, mucho menos de cuando un número es divisible por otro, razón por la cual no es posible determinar los divisores de un número entero si no se cuenta con las herramientas conceptuales para tal fin. No obstante, esto propició que tuviéramos que brindar una definición de las condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisor de otro número entero y de esta forma determinar los divisores solicitados. A la vez, como todos los números son relativamente pequeños, fue necesario introducir y recurrir a los criterios de divisibilidad, para de esta forma evitar buscar números al azar que pudieran ser o no divisores del grupo de número del cual se solicita.

Como mencionamos, hicimos uso de criterios de divisibilidad para determinar los divisores solicitados. No obstante, dichos criterios no están plasmados en su totalidad en el desarrollo del contenido por parte del libro. Siendo que solamente se esgrime el criterio de divisibilidad por 11, donde además dicho criterio no es posible utilizarlo en esta situación. Razón por la cual, a la hora de determinar los divisores del grupo de números, nos encontramos que fueron necesarios introducir los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 7, criterios que como remarcábamos, no brinda el libro. Además, como el capítulo de divisibilidad del libro trabaja con el conjunto de números enteros, no basta solamente con determinar los divisores positivos de un número, si no también se debe tener presente los divisores negativos, donde para ello debimos considerar la propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*". Esto último, posibilito que, al determinar los divisores positivos de un número, también se determinaran los negativos.

Si miramos el Problema 2 (situación problemática 28) nos encontramos que se solicita determinar si un grupo de números enteros, en este caso los números 145, -2.120 y 12624, son divisibles por una lista de números enteros positivos menores o iguales a la decena, como ser los números 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10. Sin embargo, como remarcáramos en párrafos anteriores, en el capítulo donde se desarrolla el contenido divisibilidad de números enteros, no solo no brinda una definición de cuando dos números enteros son divisibles, sino que además solamente se encuentra escrita la regla de divisibilidad por 11, esto es, el caso donde un número entero es divisible por 11. Es así que nos encontramos que las herramientas que brinda el libro no son suficientes para desarrollar la situación problemática, considerando que exige aplicar reglas de las cuales no se tiene, siendo que la regla que brinda no es aplicable para esta situación. Todo lo expresado, nos direccionó a considerar que era necesario que introdujéramos las distintas reglas o también llamados criterios de divisibilidad para poder determinar si los números dados por la situación problemática son divisibles por números enteros 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10.

Con respecto al Problema 3 (situación problemática 30), el enunciado solicita completar con uno o dos dígitos enteros positivos, elegidos entre el cero y el nueve, cada uno de los espacios en blanco de cada número de una lista de tres números enteros positivos, con la condición de que al completar con uno o dos dígitos cada espacio en blanco según corresponda, dicho número sea divisible por 11. Para esta situación problemática el libro brinda una regla de divisibilidad que permite dar con lo solicitado, en este caso la regla de divisibilidad por 11, aun así, podemos observar que dicha regla solo es válida hasta un determinado número entero, siendo que para el caso del número 81.818 no se cumple. Siendo así necesaria la introducción de una definición de las condiciones que cumple un número para ser divisible por 11. No obstante debemos recordar que el libro no brinda una definición de las condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisible por otro número entero, además con respecto a la resolución del problema, podemos observar que para el caso del número que debe completarse con dos dígitos, las operaciones a realizar se tornan sumamente complicadas. Decimos esto, porque dado los números 3_6 y 4.3_8 se tiene que cada número puede completarse con un solo digito de diez posibles. Encontrándonos que, al momento de realizar los procedimientos para determinar cuál digito es el que hacía posible que el número 3_6 y 4.3_8 sea divisible por once, solamente un dígito cumplía con lo solicitado. Es decir que, de diez posibilidades, solo una de ellas era la que cumplía con lo solicitado. Sin embargo, esta cuestión cambia con respecto al número 8_.1_5, porque en este caso se tiene dos espacios en blanco para completar con un digito del cero al diez, generando que ahora por cada digito que se pueda ocupar para el primer espacio en blanco, se tiene diez posibles dígitos para el segundo espacio en blanco, situación que genera que ahora se tenga 100 posibles números que satisfagan que al completarse por dos dígitos, sea divisible por 11. Esto lleva a pensar que ahora de todas esas posibilidades, se tenga más de un número que cumpla que sea divisible por 11, con lo cual ahora la cuestión radica en que no se puede determinar de forma rápida cuantos números de esos 100 casos, van a ser divisibles por 11. Es así que pasamos de dos casos, 3_6 y 4.3_8, en donde se tiene que un solo digito de diez posibles hace que cada uno de ellos sea divisible por 11, a un caso donde se tienen cien posibles números que sean divisibles por 11, siendo mucha la diferencia en cuanto a posibilidades entre ambos casos.

En cuanto al Problema 4 y 5 (situación problemática 31) el enunciado del problema solicita determinar de una lista de cuatro números enteros positivos, cuáles de ellos es un número primo o compuesto, justificando cada afirmación que se realice. Para este problema, el libro trae consigo en el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros una definición de las condiciones que cumple un número para ser considerado un número primo o compuesto, con lo cual, anexando la propiedad que diéramos en la resolución del problema y criterios de divisibilidad, se puede determinar lo solicitado por dicho problema. No obstante, la definición que brinda expresa que un número es primo si tiene 4 divisores, esto es el mismo número, su opuesto y los números 1 y -1, con lo cual se asume que un número primo puede ser un número entero positivo o negativo, sin embargo, en la lista de números que brinda el problema, solo se pueden observar números positivos. Descartando así, el caso de números primos negativos

Con respecto al problema 7 y 8 (situación problemática 32 y 33) se solicita no solo escribir los primeros tres múltiplos comunes de una lista de tres números enteros positivos, sino que además solicita la factorización de los mismos y el cálculo de su mínimo común múltiplo. Si bien el libro tiene una definición de las condiciones que cumple un número entero para ser múltiplo de otro número entero, nos encontramos que el libro no brinda un procedimiento evidente para poder hallar un múltiplo de otro dado uno en particular. Porque para el caso de considerar el enunciado que propone sobre la factorización de un número entero, solo aclara que es similar al caso de factorización de números naturales, pero no da una definición del mismo ni las condiciones que se deben cumplir. Además, nos encontramos que expone un ejemplo de factorización de un número entero negativo, siendo que la situación problemática solo da una lista de números enteros positivos. A su vez, en cuanto al cálculo del mínimo común múltiplo, nos encontramos no solo que el desarrollo del libro no brinda un enunciado o definición de lo que es un mínimo común múltiplo ni de las condiciones que debe cumplir, sino que además la definición o enunciado que da el libro sobre ello es poco claro. Consideramos que esto se debe en gran medida a que apoya en un ejemplo en los cuales los números son enteros negativos, en contra posición con la lista de números de la situación problemática donde todos son números enteros positivos. Siendo así, que nos vimos en la necesidad de dar una definición de mínimo común múltiplo y un procedimiento para su obtención, sin dejar de lado que tuvimos que incorporar criterios de divisibilidad. Con respecto situación problemática 33, el enunciado básicamente solicita hallar el mínimo común múltiplo de dos grupos de números, uno con dos números enteros positivos y el otro grupo con tres números positivos relativamente pequeños. Para este problema, no solo nos encontramos que el desarrollo del libro no brinda un enunciado o definición de lo que es un mínimo común múltiplo ni de las condiciones que debe cumplir, si no que, a su vez, el enunciado que brinda para su cálculo, esta mediado por un ejemplo de cálculo de un mínimo común múltiplo de números enteros negativos, en discordancia con los números positivos que tiene la situación problemática. Siendo así que nos vimos forzados a incorporar una definición de factorización de un número entero y las condiciones que cumple un número para ser considerados un mínimo común múltiplo de números enteros, junto con el procedimiento para su cálculo.

En cuanto al Problema 9 (situación problemática 34) este consta de un contexto en particular, donde se tiene una cantidad de fotografías mayor a 100 pero menor a 150 y que puede distribuirse por hoja a razón de 8, 9 o 12 fotografías sin que sobre ninguna. Para dar con la respuesta de la pregunta sobre la cantidad de fotografías que se tiene en total, es necesario calcular un número que sea múltiplo de los números 8, 9 o 12 con la condición de que sea mayor a 100 pero menor a 150. Es así, que fue necesario calcular el mínimo común múltiplo de de los números 8, 9 y 12. Donde, al igual que en el caso del Problema 5 y 6, nos encontramos no solo que el desarrollo del libro no brinda un enunciado o definición de lo que es un mínimo común múltiplo ni de las condiciones que debe cumplir, sino que además la definición o enunciado que da el libro sobre ello es poco clara, debido a que se apoya en un ejemplo sin un contexto en particular, en los cuales los números son enteros negativos, en contra posición con la lista de números de la situación problemática donde todos son números enteros positivos. Siendo así, que nos vimos nuevamente en la necesidad de dar una definición de las condiciones que debe cumplir un número para ser considerado un mínimo común múltiplo y los procedimientos para su obtención, como así también la incorporación de criterios de divisibilidad.

En el Problema 9 (situación problemática 35) se tiene un contexto en particular, donde intervienen dos trenes que se cruzan en un determinado momento del día y se solicita determinar en qué momento nuevamente se vuelven a cruzar, conociendo el tiempo en que cada tren pasa por un paso a nivel. Al igual que en los problemas 5, 6, 7 y 8, nos encontramos en la necesidad de determinar el mínimo común múltiplo, en este caso de dos números enteros positivos. Donde nuevamente nos encontramos no solo que el desarrollo del libro no brinda un enunciado o definición de lo que es un mínimo común múltiplo ni de las condiciones que debe cumplir, sino que además la definición o enunciado que da el libro sobre ello es poco clara, debido a que se apoya en un ejemplo sin un contexto en particular ni nada similar, en los cuales los números son enteros negativos, en contra posición con la lista de números de la situación problemática donde se tiene que son números enteros positivos. Siendo así, que nos vimos nuevamente en la necesidad de dar una definición de mínimo común múltiplo y su obtención, como así también la incorporación de criterios de divisibilidad.

En el Problema 10 (situación problemática 36) tenemos dos ítems, donde en el ítem a) se solicita factorizar tres números relativamente pequeños y dar con el divisor común mayor, para luego en el ítem b), utilizar el divisor común mayor en relación con los tres números dados. Si bien el desarrollo del contenido por parte del libro tiene un enunciado de cómo factorizar un número entero y un enunciado de cómo hallar un máximo común divisor, los mismos tienen sus limitaciones. Decimos esto porque con respecto a la factorización de números enteros, nos encontramos que el enunciado del libro expresa que se debe buscar los factores primos de un número entero como si se tratase de un número natural, aun así, no expresa como realizar esa acción. Además, brinda un ejemplo de factorización para el caso de un número entero negativo, aludiendo que se debe multiplicar por -1 a la factorización. Pero que, aun así, no expresa nada de los factores primos a los cuales multiplica, siendo que estos pudieran ser positivos o negativos. Es por ello, que incorporamos la definición del Teorema Fundamental de la Aritmética para realizar lo solicitad por el ítem a. Por otra parte, dicho ítem requiere el cálculo del divisor común mayor, pero nos encontramos con dos inconvenientes, el primero de ellos es que en el desarrollo del contenido por parte del libro, no aclara o brinda alguna definición de lo que es o representa el divisor común mayor de dos o más números y de las condiciones que debe cumplir, y como segundo inconveniente, nos encontramos que el enunciado que se brinda para poder hallar el divisor común mayor, se apoya en un ejemplo en particular en los cuales los números enteros son negativos, en discordancia con la situación problemática en cuestión, donde los números son enteros positivos. Es así, que nuevamente al igual que en situaciones anteriores, nos vimos en la necesidad de dar una definición de lo que es el divisor común mayor de dos o más números, de las condiciones que debe cumplir y como hallarlo, como así también la incorporación de criterios de divisibilidad para poder factorizar los números de la situación problemática.

En la resolución del Problema 11 (situación problemática 37) nos encontramos no solo que debimos incorporar una definición de lo que representa un máximo común divisor y de las condiciones que debe cumplir, sino que además debimos incorporar un procedimiento para su determinación. Esto fue así porque al leer el problema nos encontramos que solicita hallar el máximo común divisor de tres grupos de números enteros, donde cada grupo tiene tres números, entre ellos positivos y negativos, relativamente pequeños. Si bien el libro brinda un enunciado de cómo hallar el máximo común divisor de números enteros, dicho enunciado se apoya básicamente en un ejemplo donde se determina el m.c.d de tres números enteros, siendo algunos positivos y otros negativos, pero que al hacerlo es poco claro del porque realiza determinados procedimientos. Decimos esto, porque en el ejemplo que brinda da tres números enteros donde uno de ellos es negativo y los demás positivos, exigiendo que se aplique el valor absoluto de todos ellos para posteriormente realizar el cálculo del máximo común divisor. Sin embargo, nos encontramos que el máximo común divisor calculado corresponde a números enteros positivos, pero el libro hace corresponder a dicho número como el máximo común divisor de los números enteros originales, sin explicitar un argumento del porqué de tal acción o sin determinar si se aplicó una determina propiedad que argumente tal procedimiento.

Con respecto a la solución del Problema 12 (situación problemática 38) nos encontramos que el problema tiene un contexto en particular donde se tiene tres cuerdas y se deben cortar en trozos de determinadas longitudes. Para resolver este problema, debimos recurrir al cálculo del máximo común divisor, donde nos encontramos con el inconveniente, al igual que en el caso del problema 10, que el libro no solo no aclara o brinda una definición de lo que representa el divisor común mayor de dos o más números enteros y de las condiciones que debe cumplir, sino que además nos encontramos que el enunciado que se brinda para hallar e divisor común mayor, te apoya en un ejemplo en particular, en los que se tiene un número negativo, en discordancia con la situación problemática.

En cuanto al Problema 13 (situación problemática 39) nos encontramos que dado dos números enteros positivos mayores a 500, de los cuales aparte de que solicita factorizar dichos números y determinar su mínimo común múltiplo y máximo común divisor, se debe responder a una pregunta acorde a los resultados encontrados. Para lograr todo lo solicitado, nos vimos en la necesidad de incorporar la definición del Teorema Fundamental de la aritmética para poder dar con la factorización de los números dados, porque si bien el libro trae consigo un enunciado de como factorizar un número entero, nos encontramos que dicho enunciado es poco claro porque como primer inconveniente que se destaca, es que se sustenta en un ejemplo de factorización de un número entero negativo pero que el mismo se encuentra en discordancia con los números positivos de nuestro problema, y como segundo inconveniente, hace alusión a una factorización de números naturales pero sin embargo no da a conocer o no evidencia procedimiento alguno para tal fin.

A su vez, nos vimos en la necesidad de incorporar la definición de lo que es y representa un mínimo común múltiplo y un máximo común divisor de números enteros, como así también las condiciones para poder hallarlos. Estas incorporaciones debimos realizarlas debido a que el libro no solo no trae una definición formal o enunciado de lo que es o representa el mínimo común múltiplo (mcm) y divisor común mayor (dcm) de números enteros, sino que solo a través de un ejemplo brinda una idea poco clara de cómo hallar dichos números. Esto se debe a que básicamente se sustenta en el cálculo del mcm y dcm de números enteros negativos en discordancia con los números positivos de nuestro problema. Si bien todo lo expuesto manifiesta lo que se realizó para determinar lo solicitado por el problema, con respecto a la pregunta que se realiza, nos encontramos que da la idea de que al realizar el cálculo del mcm y dcm se evidenciara por sí mismo un resultado en particular, sin embargo, esto no es así. Una posible respuesta de la pregunta es la aplicación de una propiedad que relaciona el mcm y dcm, pero que no se evidencia con números tan grandes como los del problema.

4.3.3 Tercer libro

A continuación, exponemos los cuadros referentes al libro Matemática II de Andrea Berman, Daniel Dacunti, Martin M. Perez y Ana Veronica Veltri

Cuadro 1

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1, 22}$: ¿Cuáles números son divisibles por 7?	No tiene	No tiene
$P_{2, 23}$: ¿Cuándo un número entero es múltiplo o no de otro número entero?	No tiene para divisibilidad de números enteros. Tiene para aplicación de criterios.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 9 y 10 del libro
$P_{3, 23}$: ¿Cuándo un número entero es divisible o no por otro número entero?	No tiene para divisibilidad de números enteros. Tiene para aplicación de criterios.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 9 y 10
$P_{4, 25}$: ¿Cuándo el producto de dos números es divisible por otro?	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible
$P_{5, 26, 28}$: ¿Qué número multiplicado por otro, da un número en particular?	No tiene para divisibilidad de números enteros. Tiene para aplicación de criterios.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 4
$P_{6, 28}$: ¿Qué número que divide a otro da un resultado en particular?	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible No tiene
$P_{7, 32, 33}$: ¿Qué pares de números cumplen que multiplicados dan un número en particular?	No tiene para divisibilidad de números enteros. No tiene para determinar números que multiplicados den uno en particular.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 2 y 3 Si un número a divide a otro número b, también –a lo es.
$P_{8, 34}$: ¿Los divisores de un número lo son también de su opuesto?	Tiene, pero no es pertinente.	Tiene, pero no es pertinente.
$P_{9, 34}$: ¿Existe un número que divide a todos los demás números?	No tiene para divisibilidad de números enteros. No tiene para divisibilidad por 1	No tiene

$P_{10,\ 34}$: ¿Existen números primos que sean opuestos?	Tiene, pero no es pertinente	Tiene, pero no es pertinente.
$P_{11,\ 34}$: ¿Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores?	Tiene y es pertinente.	Un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es
$P_{12,\ 35}$: ¿Cuándo un número entero es primo?	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible un número entero a es primo si tiene solo cuatro divisores (1, -1, a y -a)
$P_{13,\ 36}$: ¿Qué número es divisor de otro número?	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible Criterios de divisibilidad por 2, 3, 4 y 5
$P_{14,\ 37}$: ¿Si dos números enteros que son múltiplo de otro se multiplican entre sí, dicho producto es múltiplo de otro número?	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 2 y 6
$P_{15,\ 37}$: ¿Todos los números primos son impares?	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 2 un número entero a es primo si tiene solo cuatro divisores (1, -1, a y –a)
$P_{16,\ 37}$: ¿Si un número es divisible por otro, también es divisible por otro número distinto a los anteriores?	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 4.
$P_{17,\ 37}$: ¿Si un número es múltiplo de un número y divisible por otro número, es también múltiplo de otro	No tiene para divisibilidad de números enteros.	No tiene definición de divisible Criterio de divisibilidad por 6.

número distintos a los anteriores?		

Cuadro 2

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1, 22:}$ ¿Cuáles números son divisibles por 7?	Expresamos a cada operación como el producto de dos expresiones, donde una de las expresiones resulta ser el número 7.	Definición de divisibilidad
$P_{2, 23:}$ ¿Cuándo un número entero es múltiplo o no de otro número entero?	Planteamos las definiciones y criterios y formamos los números con las condiciones que solicitaba	Definición de divisibilidad Criterio de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 9 y 10 del libro
$P_{3, 23:}$ ¿Cuándo un número entero es divisible o no por otro número entero?	Planteamos las definiciones y criterios y formamos los números con las condiciones que solicitaba	Definición de divisibilidad Criterio de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 9 y 10
$P_{4, 25:}$ ¿Cuándo el producto de dos números es divisible por otro?	Se expreso al número 24.m como el producto de otros números, siendo uno de estos el número por el cual se tenía que dividir.	Definición de divisibilidad
$P_{5, 26:}$ ¿Qué número multiplicado por otro, da un número en particular?	Se expreso la situación como un producto con un término desconocido. Se utilizo el criterio de divisibilidad por 4 para encontrar el número buscado	Definición de divisibilidad Criterio de divisibilidad por 4
$P_{6, 28, 30:}$ ¿Qué número que divide a otro da un resultado en particular? SP 28	Se determino al valor a determinar cómo X y se aplicó una definición de divisible. Se realizo una	Definición de divisibilidad Regla de los signos para la multiplicación de números enteros.

	división, se aplicó la regla de los signos y se determinó el número desconocido.	
$P_{7,\ 32,\ 33:}$ ¿Qué pares de números cumplen que multiplicados dan un número en particular?	Se determino todos los divisores de los números 24 y -24 y se los agrupo convenientemente y se los multiplico para así determinar los números a y b que solicitaba el ejercicio. Se aplico una propiedad y así se determinó los números –a y –b que también cumplen que multiplicados dan 24 y la regla de los signos para el caso que diera -24	Definición de divisibilidad Criterio de divisibilidad por 2 y 3
$P_{8,\ 34:}$ ¿Los divisores de un número lo son también de su opuesto?	Se considero una propiedad y en base a eso se dedujo la afirmación	Propiedad que expresa que si si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”
$P_{9,\ 34:}$ ¿Existe un número que divide a todos los demás números?	Se considero la propiedad que expresa que todo número es múltiplo de 1 y la definición de divisible para llegar a la conclusión que el número 1 es divisor de todos los números enteros.	Propiedad que expresa que todo número “b” es múltiplo de 1 Definición de divisible
$P_{10,\ 34:}$ ¿Existen números primos que sean opuestos?	Se utilizó una propiedad para determinar la veracidad de la afirmación	a es primo si y solo si –a también lo es”

$P_{11,\ 34}$: ¿Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores?	Se utilizo una propiedad para razonar que un número entero tiene una cantidad par de divisores.	un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es
$P_{12,\ 35}$: ¿Cuándo un número entero es primo?	Se determino los divisores de cada número y se llegó a una conclusión con base en la cantidad de divisores de cada número.	Definición de divisible un número entero a es primo si tiene solo cuatro divisores (1, -1, a y -a)
$P_{13,\ 36}$: ¿Qué número es divisor de otro número?	Se aplico distintos criterios de divisibilidad a cada número y se determinó sus divisores.	Definición de divisible Criterios de divisibilidad por 2, 3, 4 y 5
$P_{14,\ 37}$: ¿Si dos números enteros que son múltiplo de otro se multiplican entre sí, dicho producto es múltiplo de otro número?	Se propuso dos números enteros, se los multiplico y se llegó a la conclusión que no era divisible por otro número en particular	Definición de divisible Criterio de divisibilidad por 2 y 6
$P_{15,\ 37}$: ¿Todos los números primos son impares?	Se considero al número 2 y se demostró que es primo y que además es divisible por 2.	Definición de divisible Criterio de divisibilidad por 2 un número entero a es primo si tiene solo cuatro divisores (1, -1, a y -a)
$P_{16,\ 37}$: ¿Si un número es divisible por otro, también es divisible por otro número distinto a los anteriores?	Se considero un número múltiplo de 4, pero no era múltiplo de 8 como afirmaba el ítem.	Definición de divisible Criterio de divisibilidad por 4.
$P_{17,\ 37}$: ¿Si un número es múltiplo de un número y divisible por otro número, es también múltiplo de otro número distintos a los anteriores?	Se consideró un número cualquiera divisible por 6 y se llegó a la conclusión que era múltiplo de 3 y divisible por 2	Definición de divisible Criterio de divisibilidad por 6. Si un número es divisible por otro, el resto es cero.

4.3.3.1 Análisis de los aspectos más sobresalientes que se observa en ambos cuadros

En cuanto al Problema 1 (situación problemática 22) nos encontramos que se tiene una lista de números vinculados por medio de operaciones de suma, resta y multiplicación y se debe determinar, sin dar con el resultado de las operaciones, si son divisibles por 7. Para resolver esta situación problemática, nos vimos en la necesidad de dar una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles, puesto que el libro no brinda ninguna definición formal sobre ello. Si bien en una sección del libro se exhibe un título de “múltiplos y divisores”, nos encontramos que solamente brinda una definición de las condiciones que cumplen los números enteros para ser considerados múltiplos y solamente a través de un ejemplo de esto último, introduce una idea de divisible, pero ninguna definición formal.

Con respecto a los Problemas 2 y 3 (situación problemática 23) nos encontramos que se da una lista de cuatro números y se deben formar otros números de cuatro cifras que cumplan con determinadas condiciones. Si bien el libro brinda una definición de múltiplo y reglas de divisibilidad para poder formar números con las condiciones expuestas en cada ítem, nos encontramos que el libro, más allá de un débil ejemplo, no esgrime ninguna definición formal de las condiciones que deben cumplir dos números enteros para ser divisibles. Razón por la cual nos vimos en la necesidad de introducir una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles, con la ventaja que dicha definición también explica cuando dos números enteros son múltiplos. Si bien, como mencionáramos, el libro brinda una definición de cuando un número entero es múltiplo de otro, la definición que diéramos establece las relaciones entre múltiplo y divisible, siendo esta de una mayor claridad matemática.

En cuanto al problema 4 (situación problemática 25) se solicita dar un número natural que cumpla con la condición de que el producto de dicho número por 24, sea o no divisible por 3. Para esta situación, nos encontramos en la necesidad de brindar una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles ente sí. Recurrimos a esto, porque como mencionáramos en párrafos anteriores, el libro no brinda, más allá de un ejemplo, una definición formal de cuando dos números son divisibles entre sí.

En el Problema 5 (situación problemática 26) nos encontramos que debimos incorporar una definición de divisibilidad para poder determinar un número en particular, que multiplicado por 4 de cómo resultado -12. Esto fue necesario porque el libro no solo no trae consigo un enunciado de cuando dos números son divisibles, sino que, al dar un enunciado de divisibilidad entre dos números, solamente se apoya en un ejemplo. A su vez, utilizamos el criterio de divisibilidad por 4 que brinda el libro.

Para el caso del problema 6 (situación problemática 28 y 30), nos encontramos que dada la multiplicación o división de dos números enteros y un resultado en particular, se deben determinar en algunos casos, los números que se multiplicaron o el resultado de una multiplicación de dos números en particular. Para poder hallar los números que verifican la igualdad, nos encontramos que fue necesario incorporar una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles entre sí. Esto fue necesario, debido a que el libro no trae un enunciado formal de cuando dos números son divisibles entre sí. Si bien se esgrime una noción de divisible, solo se realiza a través de un ejemplo en articular y nada más.

En el problema 7 (situación problemática 32 y 33) nos encontramos que se debía determinar dos números que cumplieran que su producto sea igual a un número en particular, para un caso debía dar 24 y para otro caso -24. Para determinar los números solicitados que cumplieran con la igualdad, debimos introducir una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles puesto que, como mencionáramos, el libro solamente brinda una idea de divisible apoyándose en un ejemplo. También fue necesario utilizar algunos enunciados que brinda el libro, como ser una propiedad que expresa que, si un número divide a otro, su opuesto también lo divide, como así también la regla de los signos para la multiplicación y diversas reglas de divisibilidad.

En los problemas 9, 10 y 11 (situación problemática 34) nos encontramos con diversas afirmaciones de las cuales se debe determinar si son verdaderas o falsas. Para el caso del ítem a), fue necesario introducir una propiedad que expresa que si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*" (*propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.4*), siendo así que los divisores de -20, lo son también de su opuesto. Si bien es cierto que el desarrollo conceptual del libro brinda una propiedad similar, esta es *"Si un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es"*, no especifica nada con respecto al número b. Siendo así que la propiedad que diéramos, hace posible determinar la verdad de la afirmación del ítem a. Para el caso del ítem b, el desarrollo conceptual del libro no brinda ninguna definición que nos permita determinar la verdad o falsedad de dicha afirmación. Fue por esto, que fue necesario introducir la propiedad que expresa que todo número "b" es múltiplo de 1 (*propiedad- aritmética de M. Becker-1.1.5*) y una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser considerados divisibles entre sí. Determinando así la veracidad de la afirmación. Con respecto al ítem c, fue necesario introducir una definición de número rimo y su relación con su opuesto. Si bien el libro brinda una definición de número primo, el mismo solo alcanza a los números positivos, descartando el caso de sus opuestos. Con respecto al ítem d, utilizamos una propiedad que brinda el libro y a través del mismo, determinar la falsedad del enunciado del ítem d.

Con respecto al problema 12 (situación problemática 35), dada una lista de número enteros positivos y negativos, se deben determinar aquellos que sean números primos. Como el libro no brinda una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles, fue necesario introducir una definición que diera dichas condiciones, además, utilizando las reglas de divisibilidad que brinda el libro y la definición de número primo que diera el desarrollo conceptual del libro, pudimos determinar aquellos números que fueran primos.

Para el problema 13 (situación problemática 36) se tiene dos listas distintas de números enteros, donde se los debe relacionar en el caso que los números de una lista sean divisores de los números de la otra lista. Para esta situación, nos vimos en la necesidad de introducir una definición de las condiciones que cumplen donde números enteros para ser uno divisor del otro. Esta necesidad se fundamenta en el hecho que el desarrollo conceptual del libro no esgrime ninguna definición de divisor. Valiéndonos de esta definición, que relaciona la definición de divisor con la de múltiplo y las reglas de divisibilidad que brinda el libro, permitió relacionar los números que son divisores de los números de la otra lista.

Con respecto a los problemas 14, 15, 16 y 17 (situación problemática 37), se tiene una lista de cuatro afirmaciones donde se deben determinar la verdad o falsedad de cada una de ellas. Para el caso del ítem a), se solicita determinar si el producto de dos números que son múltiplos de 3, es también un múltiplo de 6. Si bien el libro brinda una definición de las condiciones que cumplen dos números para ser múltiplos entre sí, resulta poco clara y poco útil para demostrar la verdad o falsedad de esta afirmación. Es por ello, que para determina la falsedad de esta afirmación, brindamos una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles entre sí y la regla de divisibilidad por seis. Con base en esto último, brindamos dos números que son múltiplos de tres y mostramos que su producto no es un múltiplo de seis. Con respecto al ítem b), se realiza una afirmación donde manifiesta que todos los números primos son impares. Para determinar la falsedad de esta afirmación, utilizamos la definición de divisible que diéramos con anterioridad, la regla de divisibilidad por 2 y la definición de número primo que esgrime el desarrollo conceptual del libro. Esto fue suficiente para argumentar que el número 2, contradice la afirmación. En cuanto al ítem c), se afirma que, si un número es divisible por cuatro, lo es también por 8. Para determinar la falsedad de esta afirmación, utilizamos la definición de divisible que utilizáramos en los ítems anteriores y la regla de divisibilidad por cuatro. Con base en esto, brindamos un número en particular y mostramos que dicho número era un divisible por cuatro, pero no por ocho. Por último, en el ítem d), se tiene la afirmación que, si un número entero es múltiplo de tres y al dividirlo por dos se obtiene resto cero, dicho número es múltiplo de seis. Para demostrar la Veracidad de esta afirmación, nos valimos de la regla de divisibilidad por 6, la definición de divisible que diéramos anteriormente y la propiedad que expresa que un número es divisible por otro si y solo si tiene resto cero. Donde propusimos un número b cualquiera y argumentándonos que dicho número cumplía que era múltiplo de 3 y divisible por 2, llegábamos a que dicho número b era múltiplo de 6.

4.3.4 Cuarto libro

A continuación, exponemos los cuadros referentes al libro El Libro de la Matemática 7 de Laura Inés Cantero.

Cuadro 1

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1,\ 6}$: ¿Cuántos divisores tiene un número?	No tiene	No tiene
$P_{2,\ 1,\ 2,\ 10,\ 12,\ 19,\ 24,\ 27,\ 28}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro?	Tiene para el caso de los problemas 1, 2 y 27. Se determino los múltiplos solicitados Tiene para resolver solo un caso del 10, 12 Tiene, pero no es pertinente para el problema 24 y 28. Se utilizo criterios de divisibilidad para determinar múltiplos	Definición de múltiplos de enteros para el caso de los problemas 1,2 y 27. Criterios de divisibilidad
$P_{3,\ 4}$: ¿Qué múltiplos de un número son mayores y menores que otros números?	Se determino los múltiplos de un número.	Definición de múltiplos de enteros
$P_{4,\ 3,\ 5,\ 7,10,\ 12,\ 17}$: ¿Qué	No tiene como resolver, no	No tiene definición de

número es divisor de otro número?	tiene definición de divisor	divisor
$P_{5,\ 10}$: ¿Qué número divide a otro número?	Tiene, pero no pertinente porque solo resuelve un caso de todos los dados en el ítem	Tiene. La definición explica cuando lo es
$P_{6,\ 8}$: ¿Qué condiciones cumplen los signos del producto de dos números enteros?	No tiene para determinarlo	Solo tiene para saber cuándo un número es múltiplo de otro.
$P_{7,\ 9,\ 11,\ 20}$: ¿Cuál es la factorización de un número?	Tiene como hacer. Se brinda ejemplos de cómo factorizar un número. Aun asi es insuficiente porque es necesario determinar divisores	Teorema Fundamental de la aritmética. Criterios de Divisibilidad
$P_{8,\ 13}$: Dado un número, ¿Dicho número es primo?	Brinda un procedimiento para determinar realizando divisiones.	Poco clara la definición de número primo Criterios de divisibilidad
$P_{9,\ 15,\ 16,\ 21}$: ¿Por cuál número es divisible otro número entero?	No tiene	No tiene definición de divisible
$P_{10,\ 22,23}$: ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro?	No tiene	No tiene
$P_{11,\ 25}$: ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños?	No tiene, solo ejemplos	No tiene
$P_{12,\ 29}$: ¿Cuál es el mcm de	No tiene, solo ejemplos	No tiene

números relativamente pequeños?		
$P_{13,\ 26,\ 31}$: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?	No tiene, solo ejemplos	No tiene
$P_{14,\ 33}$ Dado un problema con un contexto, ¿Qué número es divisible por otro número?	No tiene	No tiene definición de divisible

Cuadro 2

Situación Problemática	Procedimiento	Argumento
$P_{1,\ 6}$: ¿Cuántos divisores tiene un número?	Se expreso a cada número como un producto y se determinó la cantidad de divisores.	Definición de divisor de números enteros
$P_{2,\ 1,\ 2,\ 10,\ 12,\ 19,\ 24\ 27,\ 28}$: ¿Un número entero es múltiplo de otro?	Tiene para el caso de los problemas 1, 2 y 27. Se determino los múltiplos solicitados. Para resolver el problema 10 y 12 se utilizó la definición de divisor y divide que se introdujo. Para los casos 24 y 28 se determinó los múltiplos expresados como una igualdad. Se utilizo criterios de divisibilidad para determinar múltiplos	Multiplicación de enteros para el caso de los problemas 1,2 y 27 Definición de múltiplo expresado como igualdad Criterios de divisibilidad Definición de divisor de números enteros

$P_{3, 4}$: ¿Qué múltiplos de un número son mayores y menores que otros números?	Se determino los divisores de un número utilizando la definición de divisor	Definición de divisor
$P_{4, 3, 5, 7,10, 12, 17}$: ¿Qué número es divisor de otro número?	Se determino si un número era divisor, múltiplo o si divide a otro planteando igualdades. Se sumo los dígitos de un número para determinar si divisible por otro. En el caso del problema 17 se expresa a un número como múltiplo de 1	Definición de divisor, múltiplo y divide Criterios de divisibilidad Propiedad que expresa que todo número b es múltiplo de 1
$P_{5, 10}$: ¿Qué número divide a otro número?	Se expreso a los números como una igualdad y se determine si un número divide a otro	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide
$P_{6, 8}$: ¿Qué condiciones cumplen los signos del producto de dos números enteros?	Se expreso a las afirmaciones como un producto	Definición de divisor, divisible, divide y múltiplo
$P_{7, 9, 11, 20}$: ¿Cuál es la factorización de un número?	Tiene como hacer. Se brinda ejemplos de cómo factorizar un número. Se determina los divisores de los números utilizando criterios	Teorema Fundamental de la aritmética. Definición de divisor Criterios de Divisibilidad
$P_{8, 13}$: Dado un número, ¿Dicho número es primo?	Se determino los divisores de cada número utilizando los criterios de divisibilidad	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de Divisibilidad
$P_{9, 15, 16, 21, 24}$: ¿Por cuál número es divisible otro número entero?	Se determino que número era divisible por otro utilizando criterios de	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de Divisibilidad

	divisibilidad y realizando divisiones	
$P_{10,\ 22,23}$: ¿Por cuál cifra se debe completar un número para que sea divisible por otro?	Se realizó la suma de las cifras del número y donde no figuraba la o las cifras a determinar la consignamos con una letra para poder operar con ella. Se constituyo una igualdad y se determinó si era un divisible por 3 y luego por 3 y 4 agotando posibilidades.	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de Divisibilidad
$P_{11,\ 25}$: ¿Cuál es el máximo común divisor de números enteros relativamente pequeños?	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número. Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números primos. Se aplico una propiedad para el caso de números enteros negativos y luego se aplicó la definición de máximo común divisor para determinar el mcd.	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de divisibilidad Teorema Fundamental de la Aritmética. $\mathrm{dcm}(a,b) = \mathrm{dcm}(\lvert a\rvert, \lvert b\rvert)$ Definición de máximo común divisor
$P_{12,\ 29}$: ¿Cuál es el mcm de números relativamente pequeños?	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número. Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de divisibilidad Teorema Fundamental de la Aritmética. Definición de máximo común divisor

	producto de números primos y luego se aplicó la definición de mínimo común múltiplo para determinar el mcm. Luego se expresó al mcm como respuesta a la pregunta del problema. El mcm encontrado se lo expreso en minutos y se consideró la ultima hora en que se encontraron los trenes para saber que una hora y media después se volverían a encontrar.	
$P_{13,\ 26,\ 31}$: Dado un problema con un contexto, ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?	Se aplico los criterios de divisibilidad y se determinó todos los divisores primos. Se factorizó cada número. Se aplico el Teorema Fundamental de la Aritmética y se expresó a cada número como un producto de números primos y luego se aplicó la definición de mínimo común múltiplo para determinar el mcm. Luego se expresó al mcm como respuesta a la pregunta del problema. Se determino cada divisor de los números como posibles longitudes de los trozos de las cuerdas.	Definición de divisible, divisor, múltiplo o divide Criterios de divisibilidad Teorema Fundamental de la Aritmética. Definición de máximo común divisor
$P_{14,\ 33}$ Dado un problema	Se determino los múltiplos	Definición de divisible,

con un contexto, ¿Qué número es divisible por otro número?	de 5 y se descartó los que eran divisible por 3 y 4 y luego. Luego se determinó los que al dividir por 3 y 4 tenían por resto 1 y se determinó la cantidad solicitada.	divisor, múltiplo o divide Criterios de divisibilidad

4.3.4.1 Análisis de los aspectos más sobresalientes que se observa en ambos cuadros

Con respecto al tipo de problema 1 (situación problemática 6), cuando leemos la consiga y tratamos de determinar lo que solicita, nos encontramos que la situación problemática requiere determinar la cantidad de divisores de los números 1 y -1. Pero al tratar de resolver lo solicitado con las herramientas conceptuales que brinda el libro, nos encontramos con el inconveniente de que, en ningún lugar del capítulo, que trata el tema de divisibilidad, podemos hallar una definición de lo que representa un divisor en el conjunto de números enteros, razón por la cual no es posible determinar los divisores de un número entero si no se cuenta con las herramientas conceptuales para tal fin. No obstante, esto propició que tuviéramos que brindar una definición de las condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisor de otro número entero y de esta forma determinar los divisores solicitados. A la vez, como todos los números son relativamente pequeños y se debía determinar todos los divisores, se introdujo la propiedad que expresa que todo no número es múltiplo de 1 y la propiedad que expresa que, si un número entero *a divide a otro b*, *entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b*".

Si miramos el tipo de Problema 2 (situaciones problemáticas 1, 2, 12, 19, 24, 27 y 28), podemos observar que en los problemas 1, 2, y 27 se utilizó la definición de múltiplo que brinda la propuesta teórica, siendo este enunciado suficiente para resolver la situación problemática. No obstante, en el problema 1 fue necesaria la propiedad que expresa que todo número entero es múltiplo de 1. Con respecto a los problemas. Con respecto a los problemas 12, 19, 24 y 28, en los mismos fue necesaria la definición de divisible, múltiplo, divide y divisor que utilizáramos, con el fin de utilizar una igualdad que permitiera resolver el problema. A su vez, se utilizó distintos criterios de divisibilidad que brinda la propuesta teórica del libro.

Con respecto al tipo de problema 3 (situación problemática 4) fue suficiente utilizar la definición de múltiplo que brinda el libro para dar con los múltiplos de 25 que son mayores y menores a otro número.

En cuanto al tipo de problema 4 (situaciones problemáticas 3, 5, 7, 10, 12 y 17) podemos observar que en todos ellos solicita determinar divisores de un número, es así que nos vimos en la necesidad de introducir una definición de las condiciones que cumplen donde números enteros para ser uno divisor del otro. Esta necesidad se fundamenta en el hecho que en la propuesta teórica del libro no se esgrime ninguna definición de divisor. Valiéndonos de esta definición, que relaciona la definición de divisor con la de múltiplo determinar los divisores solicitados.

Con respecto al tipo de problema 5 (situación problemática 10), podemos observar que si bien en la propuesta teórica del libro se brinda una definición de "divide", no es pertinente para utilizar en el problema puesto que, con la definición de divisible, divide, múltiplo o divisor que se introduce, ya es posible resolver todos los ítems del problema y no solo uno.

En cuanto al tipo de problema 6 (situación problemática 8) fue necesaria la introducción de una definición de las condiciones que cumplen dos números para ser múltiplos y así utilizando la igualdad que define, poder determinar los signos de los números que componen una igualdad. Si bien en la propuesta teórica se brinda una definición de múltiplo, no es posible apreciar un lenguaje simbólico que determine la forma de esos múltiplos como para utilizar en la resolución del problema.

Con respecto al tipo de problema 7 (situaciones problemáticas 9, 11 y 20) podemos observar que en la propuesta teórica se brinda el Teorema Fundamental de la Aritmética para determinar la factorización de los números. No obstante, fue necesaria la introducción de la definición de divisor para determinar los divisores de los números y así poder factorizarlos. Como se debía determinar los divisores primos, se introdujo una definición de número primo, puesto que en la que propone el libro no determina que forma tiene un número primo, sino solo menciona. A su vez se utilizó los criterios de divisibilidad que brinda el libro.

En el tipo de problema 8 (situación problemática 13) se debe determinar cuáles números son primos, si bien en la propuesta teórica se brinda una definición de número primo el mismo resulta poco claro porque no determina que forma tienen. Es así que fue necesaria la introducción de una definición que permita determinar cuándo un número es primo y las condiciones que cumple, a su vez se introdujo una definición de las condiciones que cumplen dos números para ser uno divisor del otro, de esta forma se determinó los divisores, utilizando los criterios de divisibilidad que brinda el libro.

En relación al tipo de problema 9 (situaciones problemáticas 15, 16 y 21) nos encontramos que en los casos 15 y 21 se debe brindar números que cumplan que sean divisibles por 4, 5 y 25 respectivamente, en el caso del problema 16 tenemos una lista de números de los cuales se debe determinar cuales los dividen. Para todos los casos fue necesaria la introducción de una definición de cuando un número entero es divisible por otros y en conjunto con los criterios de divisibilidad, por determinar lo solicitado en cada problema. La introducción de esta definición se apoya en el hecho que la propuesta teórica ano brinda ninguna definición de cuando un número es divisible por otro.

Con respecto al tipo de problema 10 (situaciones problemáticas 22 y 23) el enunciado de cada problema solicita completar con uno o dos dígitos enteros positivos, elegidos entre el cero y el nueve, cada uno de los espacios en blanco de cada número de una lista de enteros positivos, con la condición de que al completar con uno o dos dígitos cada espacio en blanco según corresponda, dicho número sea ,para el caso del problema 22, divisible por 3 y ,para el problema 23, sea divisible por 3 y 4. Para esta situación problemática el libro brinda criterios de divisibilidad que permite dar con lo solicitado. No obstante, debemos recordar que el libro no brinda una definición de las condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisible por otro número entero, además con respecto a la resolución del problema, podemos observar que para el caso del número que debe completarse con dos dígitos, las operaciones a realizar se tornan sumamente complicadas. Decimos esto, porque dado los números 2_1, 174_, 52_ y 1_8 se observa que cada número solo debe completarse un digito. Sin embargo, esta cuestión cambia con respecto al número _1_18, porque en este caso se tiene dos espacios en blanco para completar con un digito del cero al diez, generando que por cada digito que se pueda ocupar para el primer espacio en blanco, se tiene diez posibles dígitos para el segundo espacio en blanco, situación que genera que ahora se tenga 100 posibles números que satisfagan que al completarse por dos dígitos, sea divisible por 3. Esto lleva a pensar que ahora de todas esas posibilidades, se tenga muchos números que cumplan que sea divisible por 3, con lo cual ahora la cuestión radica en que no se puede determinar de forma rápida cuantos números de esos 100 casos, van a ser divisibles por 3. Para ambos problemas se introdujo una definición de las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles por otro.

En la resolución al tipo de problema 11 (situación problemática 25) nos encontramos que debimos incorporar una definición de lo que representa un máximo común divisor, de las condiciones que debe cumplir, un procedimiento explicito para su determinación y la propiedad que determina el mcd de números enteros de distintos signos. Esto fue así porque al leer el problema nos encontramos que solicita hallar el máximo común divisor de grupos de números enteros, donde cada grupo tiene dos o más números, entre ellos positivos y negativos, relativamente pequeños. Encontrándonos que en la propuesta teórica del libro solamente se brinda ejemplos de cómo determinarlo, mas no un enunciado matemática formal. Además, que en los ejemplos que brinda realiza el cálculo del mcd a números de distintos signos sin especificar del porqué de algunas cuentas.

Con respecto al tipo de problema 12 (situación problemática 29), nos encontramos que debimos incorporar una definición de lo que representa un mínimo común múltiplo, de las condiciones que debe cumplir y un procedimiento explicito para su determinación. Esta incorporación se debió a que en la propuesta teórica del libro solamente se brinda ejemplos de cómo determinarlo, mas no un enunciado matemática formal. Además, que en los ejemplos que brinda realiza el cálculo del mcd a números de distintos signos sin especificar del porqué de algunas cuentas.

En el tipo de problema 13 (situaciones problemáticas 26 y 31), tenemos que en caso del problema 26 se tienen dos personas que visitan a su abuela en diversos días a intervalos de tiempo regulares, sucediendo que en algunos días coinciden. Para dar con la respuesta de la pregunta, debimos calcular el mcm. Nuevamente nos vimos en la necesidad de incorporar una definición de lo que representa un mínimo común múltiplo, de las condiciones que debe cumplir y un procedimiento explicito para su determinación. Nuevamente esta introducción se debió a que en la propuesta textualizada solamente se brinda un ejemplo del cálculo del mcm y no un enunciado matemático.

En cuanto al tipo de problema 14 (situación problemática 14) no encontramos que dado un contexto en particular, se deben determinar la cantidad de bombones de una caja, con la particularidad que si se lo reparte en diversas cantidades, se tienen distintos grupos. Como solicitaba que dicha sea divisible por otro número, nos vimos en la necesidad de incorporar una definición de las condiciones que cumplen los números enteros para ser divisibles y así con los criterios de divisibilidad que brinda el libro poder dar con la respuesta solicita.

4.4 Preguntas descriptivas de la componente epistémica

En este apartado, realizamos un análisis y evaluación del desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros que se encuentra en los libros seleccionados, teniendo presente las preguntas descriptivas que permiten describir las distintas partes del contenido divisibilidad de números enteros explicitados en el capítulo 3.

4.4.1 Preguntas descriptivas de la componente epistémica de cada libro

A continuación, respondemos las preguntas que permiten describir la faceta epistémica de cada libro seleccionado.

4.4.1.1 Primer libro

Libro: Navegantes del Conocimiento
Logonautas Matemática 2.
Equivalente a 1°, E. S/2 ° E.S.B.

Editorial: Puerto de Palos.

Edición: Primera

Reimpresión: Primera

Año: 2011

Autores del libro: Pablo Amster
Leonardo Moledo
Irene Zapico

Preguntas de la componente epistémica

- ✓ **Situaciones-Problemas**

¿Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación o aplicación respecto al contenido divisibilidad en números enteros?

Consideramos que no se presenta una muestra representativa y articulada de las diversas situaciones con respecto al contenido divisibilidad de número enteros. En cuanto a situaciones de contextualización, podemos observar que no se evidencian situaciones de tal tipo para ninguna de las definiciones, propiedades o enunciados referente al contenido mencionado. Las situaciones que se presentan para la resolución por parte del lector son solamente situaciones de ejercitación y aplicación de definiciones matemáticas del contenido mencionado y sin nexo con un contexto en particular, ya sea de un contexto ideal o uno próximo a la realidad del alumno.

¿Se proponen situaciones de construcción de problemas (problematización) relacionadas con el contenido divisibilidad de números enteros?

El libro no propone ninguna situación problemática en la cual se deba generar un contexto que se pueda responder o vincular con el contenido divisibilidad de números enteros.

- ✓ **Lenguajes**

¿Se realiza el uso de diferentes modos de expresión matemática, como ser gráfica o simbólica, traducciones y conversiones entre los mismas, con respecto al contenido divisibilidad de números enteros?

Con respecto a esta pregunta, a lo largo del desarrollo del contenido podemos observar lo siguiente:

Expresión verbal: nos encontramos con expresiones del tipo número entero, divisible, división entera, valores absolutos, múltiplo, divisor común mayor, dcm, divisor positivo, múltiplo común menor, mcm, menor múltiplo,

Expresión simbólica: nos encontramos con solamente los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, los signos de las operaciones básicas, como ser la "+" (suma), "-"(resta), "." (Multiplicación) y "/" (división), el signo "=", los paréntesis (,)

-Expresión gráfica: No es posible encontrar a lo largo del libro representaciones graficas con respecto al contenido divisibilidad de números enteros.

¿Se proponen situaciones de interpretación acerca del contenido divisibilidad de números enteros?

Si bien el libro en algunos casos brinda ejemplos de aquello que define o enuncia respecto al contenido, nos encontramos que solamente brinda ejemplos para cuando se cumple aquello definido y no cuando no lo hace. Como así también, no es posible encontrar situaciones para los cuales se deba cuestionar un enunciado.

- ✓ **Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)**

¿Las definiciones o procedimientos son claros y correctos respecto al contenido?

En las definiciones que brinda el libro, nos encontramos que son correctos, pero no muy claros. En particular con respecto a las condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisible de otro número entero. Resaltamos esto porque en la definición *"Un número entero a es **divisible** por otro b (distinto de cero), cuando la división entera entre sus valores absolutos tiene resto 0. También se dice que a es un múltiplo de b"*, hace referencia a valores absolutos, pero no especifica que se trate de los valores absolutos de a y b. A su vez, aclara que el resto de la división debe ser cero, pero no brinda mayores detalles con respecto al cociente.

¿Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales para resolver las situaciones problemáticas qué propone?

De la lectura de lo desarrollado por el libro respecto al contenido, nos encontramos que en ninguna parte se define las condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisor de otro número entero. Lo cual nos resulta sumamente extraño considerando que, en las situaciones a resolver por parte del lector, es necesario saber este concepto para poder dar con un procedimiento que sea respuesta a sales situaciones problemáticas.

También resaltamos, que, si bien se brinda una definición de lo que es un divisor común mayor y el múltiplo común menor de dos o más número enteros, no es posible hallar en ninguna parte del capítulo, un procedimiento para determinar tales números.

A la vez podemos resaltar que, en gran medida, no se presentan enunciados y procedimientos fundamentales del contenido en cuestión. Siendo así, que no se enuncia ninguna propiedad con respecto a cuando un número divide a otro, como así también las reglas de divisibilidad y todo aquello relacionado con números primos, compuestos y factorización de números enteros.

¿Se proponen situaciones donde el lector tenga que generar definiciones, proposiciones o procedimientos?

En el apartado de situaciones problemáticas a resolver por parte del lector, se encuentran situaciones donde el alumno tiene que generar un procedimiento para poder dar con lo solicitado por el problema, en particular con respecto al ítem 79, donde se deben determinar número enteros para cuales se brinda un divisor común mayor y un mínimo común menor en particular.

- ✓ **Argumentos**

¿Las explicaciones, comprobaciones o demostraciones sobre el contenido divisibilidad de números enteros, son comprensibles?

En el desarrollo del contenido, con respecto a la definición y condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisible por otro número entero, no se brinda mayores detalles de tal definición, como así tampoco una explicación sobre lo definido, sin dejar de lado que no se esboza ningún ejemplo.

También podemos notar que, con respecto a la definición de divisor común mayor, esta es *"el divisor común mayor (dcm) entre dos o más número es el mayor divisor positivo que tienen en común esos números"* nos encontramos que solamente brinda un ejemplo del dcm de dos números enteros, no brindando ejemplos para el caso de tener más de dos números enteros. A su vez, en el ejemplo que brinda, se presenta el caso donde ambos números son de signos distintos y no realiza ninguna aclaración si el hecho de ser de signos distintos tiene alguna implicancia e el cálculo de dicho dcm.

Por otra parte, podemos resaltar, que con respecto a las definiciones sobre el divisor común mayor y el múltiplo común menor de dos o más número enteros, no es posible encontrar una explicación de lo que define, a lo sumo un ejemplo del dcm y mcm de dos números, pero no como se los determina.

Asimismo, destacamos que no es posible encontrar demostraciones formales en el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros, a lo sumo se brinda un ejemplo sobre un enunciado en particular.

¿Se promueven situaciones donde el lector tenga que argumentar?

En la sección de situaciones problemáticas a resolver por parte del lector, no se evidencian situaciones que promuevan en el lector la argumentación de sus resoluciones, como así tampoco alguna discusión sobre alguna proposición en particular o solución en particular.

- ✓ **Relaciones**

Con respecto a este objeto primario, retomamos las relaciones que establecimos entre los objetos primarios de la configuración epistémica del desarrollo del contenido. Estas relaciones que establecimos, permiten responder a la siguiente pregunta:

¿Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) con respecto al contenido divisibilidad de números enteros, se relacionan y conectan entre sí?

Podemos observar que, con respecto a las situaciones problemáticas, en determinados ítems se debe utilizar una definición de cuando un número entero es divisor de otro número entero, pero sin embargo nos encontramos que en la sección del capítulo donde se dan a conocer las definiciones del contenido, no se evidencia ninguna definición de cuando un número entero es divisor de otro número entero.

En diversas situaciones problemáticas, se debe utilizar un procedimiento para el cálculo del divisor común mayor (dcm) y mínimo común múltiplo (mcm) de número enteros, pero sin embargo nos encontramos que el libro solamente brinda una definición de lo que representa el divisor común mayor y mínimo común múltiplo de dos o más números, pero no un procedimiento para poder determinarlo. A su vez, los ítems solicitan el cálculo del dcm y mcm de números enteros, tanto positivos como negativos, sin dar un procedimiento para tales casos.

4.4.1.2 Segundo libro

Libro: Matemática II para resolver problemas

Editorial: Ediciones Santillana Practicas S. A.

Año: 2011

Autores del libro: María Dolores Álvarez

Preguntas descriptivas de la componente epistémica

- ✓ **Situaciones-Problemas**

¿Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación o aplicación respecto al contenido divisibilidad en números enteros?

En lo que respecta a problemas de contextualización, se puede observar que en cantidad es menor a los de ejercitación y aplicación, encontrándonos solamente con menos de cinco problemas de contextualización distribuidas para cada tema desarrollado del contenido divisibilidad en números enteros, además nos encontramos que las preguntas a responder de dichos problemas resultan en algunos casos poco claras para el lector. Además, se suma que dichos problemas están destinados a la ejercitación de un determinado contenido, más que en la modelización de un determinador fenómeno utilizando las herramientas conceptuales que brinda el libro.

La mayor parte de situaciones problemáticas por resolver son simplemente ejercicios de aplicación de teoría matemática con poca o ninguna relación con contextos reales próximos a los alumnos. Siendo en algunos casos ejercicios en los cuales la resolución conlleva cuentas demasiado extensas y complicadas, en particular el ejercicio 30.

¿Se proponen situaciones de construcción de problemas (problematización) relacionadas con el contenido divisibilidad de números enteros?

A lo largo del capítulo no es posible encontrar situaciones problemáticas que propongan situaciones de generación de problemas.

- ✓ **Lenguajes**

¿Se realiza el uso de diferentes modos de expresión matemática, como ser gráfica o simbólica, traducciones y conversiones entre los mismas, con respecto al contenido divisibilidad de números enteros?

Con respecto a esta pregunta, a lo largo del desarrollo del contenido podemos observar lo siguiente:

Expresión verbal: nos encontramos con expresiones como número positivo, número negativo, múltiplo, número primo, divisible, valor absoluto, factores comunes, opuesto, producto, factores primos, mcm, mcd, máximo común divisor, múltiplo común menor, mayor exponente, menor exponente, división entera, etc.

Expresión simbólica: nos encontramos que se utilizan solamente los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, los signos de las operaciones básicas, como ser la “+” (suma), “-“(resta), “.” (Multiplicación) y “/” (división), el signo “=”.

-Expresión gráfica: No es posible encontrar a lo largo del libro representaciones graficas con respecto al contenido divisibilidad de números enteros.

¿Se proponen situaciones de interpretación acerca del contenido divisibilidad de números enteros?

Si bien el libro brinda ejemplos de lo que define matemáticamente, nos encontramos que solamente brinda ejemplos para cuando se cumple una determinada definición o propiedad, pero no brinda casos para los cuales no es posible aplicar lo que define, como así tampoco brinda las razones por las cuales no se cumple. A la vez, no es posible encontrar casos para los cuales se realice un análisis minucioso de las definiciones o propiedades que propone. Siendo así, que nuestra valoración es baja con respecto a este indicador.

- ✓ **Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)**

¿Las definiciones o procedimientos son claros y correctos respecto al contenido?

Nos encontramos que con respecto a las definiciones en determinadas ocasiones resultan poco claras. Este es el caso de la definición de múltiplo que brinda el libro, porque expresa que “*un número es múltiplo de otro si este último es uno de sus factores*” siendo que es poco claro al determinar a que llama último, como así también a que denomina factor. Además, brinda un ejemplo de cuando dos números son múltiplos entre sí, esto es: *“20 es múltiplo de 5 y de 4 porque 2005.4. También se dice que 20 es divisible por 5 por 4, porque al hacer la división entera (20:5 o 20:4), esta es exacta, o sea, el resto es 0”.*

Siendo que a partir de allí menciona una idea de divisible, sin dar una definición clara y precisa, prestándose a la idea que solamente se cumple o se llama divisible para ese caso en particular y nada más.

En cuanto a la regla de divisibilidad por 11, manifiesta que “*un número es divisible por 11 si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares da 0, 11 o -11”*. En este caso no solo nos encontramos que en ninguna parte del capítulo se menciona a que se llama cifra par o impar, sino que además esta regla solamente está definida para una determinada cantidad de número enteros, porque para el caso del número 609191, nos encontramos que al aplicar el criterio de divisibilidad por 11, tenemos que (6+9+9)-(1+1+0)=22 y como 22 es un número múltiplo de 11, tenemos que el número 609191 es divisible por 11, sin embargo, bajo la regla brindada por el libro, el número anterior no es un número divisible por 11, siendo así que consideramos que no es correcta la regla brindada.

En el siguiente párrafo, que brinda el libro para factorizar números enteros, "*La hacemos de igual forma que al buscar factores primos de un número natural, pero tenemos en cuenta el signo del entero; si es negativo, su descomposición en factores primos aparecerá multiplicada por -1*". Nos encontramos que no solo no determina como realizar la factorización de un número natural, sino que además al definir número primo en partes del libro anteriores a este párrafo, da la posibilidad que el mismo sea negativo o positivo, siendo así que se presenta la posibilidad de que los números primos de la factorización puedan ser positivos o negativos, siendo así que no se aclara en el párrafo.

Con respecto a los procedimientos, nos encontramos que en el enunciado de cómo se calcula un máximo común divisor o un mínimo común múltiplo, brinda un ejemplo en la que intervienen número enteros negativos, pero a medida que se realizan los cálculos necesarios para dar con lo que se busca, aplica el valor absoluto a los números negativos y solamente trabaja con número positivos, no explicitando porque lo hace, como así tampoco brinda detalles del porque se realiza la igualdad entre el máximo común divisor o mínimo común múltiplo de números negativos con respecto a los mismos números pero positivos.

¿Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales para resolver las situaciones problemáticas que propone?

Podemos observar que si bien los enunciados con respecto al contenido divisibilidad de números enteros son del nivel acorde al cual va dirigido, nos encontramos que al realizar la lectura del capítulo, en ninguna parte se define cuando un número entero es divisor, factor o divide a otro número entero, resultando sumamente extraño considerando que en las actividades a resolver por parte del lector resulta necesario ocupar una definición de cuando dos o más números enteros cumplen con esa características.

También podemos destacar que de los diversos criterios de divisibilidad que se definen para números enteros, como ser el criterio de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 y otros, en el capítulo solamente se detalla el criterio de divisibilidad por 11. Como así también nos encontramos que no se detalla cómo se determina la factorización de un número natural, como así tampoco la de un número entero, dando simplemente una idea que se encuentra sujeta a diversas interpretaciones.

También resaltamos, que no se detalla la propiedad que permite determinar el cálculo del mínimo común múltiplo o máximo común divisor de números enteros negativos, si bien el libro da una idea de dicha propiedad, solamente la declara en forma de una aclaratoria.

¿Se proponen situaciones donde el lector tenga que generar definiciones proposiciones o procedimientos?

En el apartado de situaciones problemáticas a resolver por parte del lector, se encuentran problemas donde el alumno tiene que generar un procedimiento para poder dar con lo solicitado por el problema, en particular las situaciones problemáticas 30, a) donde se deben determinar dígitos para que un número que se encuentra incompleto, sea completado con uno o dos dígitos y así sea divisible por 11 y la situación problemática número 34) donde se debe determinar un número en particular.

- ✓ **Argumentos**

¿Las explicaciones, comprobaciones o demostraciones sobre el contenido divisibilidad de números enteros, son comprensibles?

Las explicaciones y comprobaciones que se pueden observar en diversas partes del contenido, solamente se limitan a mencionar y no detallar sobre un concepto. En particular la factorización de números enteros o la propiedad que determina el cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de números enteros negativos.

A la vez, no es posible encontrar demostraciones formales en el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros, a lo sumo se brinda un ejemplo sobre una propiedad en particular.

¿Se promueven situaciones donde el lector tenga que argumentar?

En la sección de situaciones problemáticas, no se encuentran situaciones que promuevan en el alumno argumentar o realizar una discusión sobre alguna afirmación en particular o solución de una situación problemática.

- ✓ **Relaciones**

Con respecto a este objeto primario, retomamos las relaciones que establecimos entre los objetos primarios de la configuración epistémica del desarrollo del contenido. Estas relaciones que establecimos, permiten responder a la siguiente pregunta:

¿Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) con respecto al contenido divisibilidad de números enteros, se relacionan y conectan entre sí?

Podemos notar que, en la sección de situaciones problemáticas, se debe utilizar una definición de las condiciones que cumple un número entero para dividir a otro número entero, pero sin embargo el desarrollo conceptual del libro no brinda una definición para tal fin. Solamente se brinda un enunciado de las condiciones que cumple un número entero para ser múltiplo de otro número entero y solamente a través de un ejemplo introduce la idea de divisible.

También podemos notar, que en las situaciones problemáticas se solicita aplicar reglas de divisibilidad que no se encuentran en el desarrollo teórico del libro. En particular en el problema 28, solicita aplicar las reglas de divisibilidad por 2,3,4,5,6,9 y 10 siendo que no solamente no es posible encontrar dichas reglas en el desarrollo teórico del libro, sino que, además, la única regla que brinda es la regla de divisibilidad por 11. Destacando que la misma no es posible aplicar en dicho problema.

También debemos destacar que se define que los números 0, 1 y -1 no son primos ni compuestos, sin embargo, en ninguna situación problemática es posible aplicar tal información.

A su vez, es necesario destacar que, si bien el libro brinda un ejemplo sobre el cálculo del mínimo común múltiplo de tres números, nos encontramos que los números difieren de signo, cuestión que no se presenta en las situaciones problemáticas que propone.

4.4.1.3 Tercer libro

Libro:	Matemática II
Editorial:	Santillana.
Edición:	Primera
Reimpresión:	Cuarta
Año:	2011
Autores del libro:	Andrea Berman
	Daniel Dacunti
	Martin M. Perez
	Ana Veronica Veltri

Preguntas descriptivas de la componente epistémica

- ✓ **Situaciones-Problemas**

¿Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación o aplicación respecto al contenido divisibilidad en números enteros?

Si bien las situaciones problemáticas son representativas de los conceptos y propiedades del contenido abordado por el libro, podemos observar que no se evidencian situaciones problemáticas que involucren un contexto de la vida cotidiana en particular o contextos próximos al alumno, sino más bien ejercicios puramente de resolución y aplicación de conceptos o propiedades matemáticas. A su vez, nos encontramos que solamente dos ítems realizan una pregunta a responder y solamente de carácter puramente matemático, siendo los demás ítem problemas de ejercicios de aplicación de teoría matemática.

¿Se proponen situaciones de construcción de problemas (problematización) relacionadas con el contenido divisibilidad de números enteros?

A lo largo de la lectura de todo el capítulo del contenido analizado, no fue posible encontrar situaciones problemáticas que involucren una generación de problemas.

- ✓ **Lenguajes**

¿Se realiza el uso de diferentes modos de expresión matemática, como ser gráfica o simbólica, traducciones y conversiones entre los mismas, con respecto al contenido divisibilidad de números enteros?

Con respecto a esta pregunta, a lo largo del desarrollo del contenido podemos observar lo siguiente:

-Expresión verbal: nos encontramos con expresiones del tipo múltiplo, divisible, número natural, factores, resto, dígitos, reglas, cifras, primos, compuesto, opuesto.

-Expresión simbólica: nos encontramos que se utilizan los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y los signos de las operaciones básicas, como ser la "+" (suma), "-"(resta), "." "x" (Multiplicación) y "/" (división), 24xm, a, -a, axb, =.

-Expresión gráfica: a lo largo del desarrollo del contenido solo es posible encontrar una representación gráfica de la operación división.

¿Se proponen situaciones de interpretación acerca del contenido divisibilidad de números enteros?

A lo largo del desarrollo teórico del contenido por parte del libro, nos encontramos que con respecto a las definiciones, reglas o propiedades que brinda, solamente son analizadas desde un ejemplo en particular. Esto significa que las propiedades o reglas, que pueden ser analizadas desde la definición que brinda, solamente son consideradas desde un ejemplo en particular y nada más, dejando de lado el análisis formal de carácter matemático. También nos encontramos que de todas las definiciones, reglas o propiedades que brinda, solamente para una única definición, se expresa un ejemplo para el cual no cumple con dicho enunciado, en los demás casos solamente se brinda ejemplos de cuando si cumple con lo que se afirma.

- ✓ **Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)**

¿Las definiciones o procedimientos son claros y correctos respecto al contenido?

Con respecto a la definición de cuando un número es múltiplo de otro, se presenta el caso que resulta poco clara. Decimos esto, porque en la definición que brinda el libro, esto es *"un número es múltiplo de otro si este último es uno de sus factores"*, resulta poco claro al determinar a que llama último, como así también a que denomina factor. Además, a partir del ejemplo que brinda: *12 es múltiplo de 3 porque 12 se puede escribir como 3.4 También se dice que 12 es divisible por 3*, da una idea de cuando un número divide a otro, pero sin dar una definición clara, precisa y correcta. Esto es, solo se apoya en un ejemplo particular para dar una idea de cuándo dos números enteros son divisibles.

Con respecto a la propiedad *"si un número a es divisor de un número b, entonces –a también lo es"*. Nos encontramos con el hecho de que en ninguna parte del libro se brinda detalles sobre lo que representa el divisor de un número, además, si leemos con atención a lo que denominamos es una propiedad, no especifica que sucede en el caso que se tenga –b, siendo así que resulta poco claro el enunciado.

También nos encontramos, que en la definición que brinda el libro sobre cuando un número es primo, esto es: *a es primo si tiene solo cuatro divisores, 1, -1 a y -a*, resulta poco claro para el caso de que se tenga el número *–a*, esto es, si se tiene que *a* es un número primo, no brinda mayores detalles sobre si *–a* también es primo. Lo cual resulta fundamental para poder realizar lo solicitado por el ítem 35, en particular para determinar si el número -29 es primo o no. Con lo cual consideramos que no es totalmente correcta la definición brindada.

¿Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales para resolver las situaciones problemáticas qué propone?

Nos encontramos que al realizar una lectura de todo el material no es posible hallar una definición de cuando un número entero es divisor de otro número entero, siendo así que en la situación problemática 36 solicita determinar la unión de un número con su divisor.

También podemos afirmar que, en el desarrollo teórico del libro, no se brinda ninguna definición o procedimiento alguno para la factorización de números enteros, como así tampoco para el cálculo del máximo común divisor o mínimo común múltiplo de números enteros y las propiedades que se derivan de ello.

¿Se proponen situaciones donde el lector tenga que generar definiciones proposiciones o procedimientos?

En la sección de situaciones problemáticas a resolver por parte del lector, se encuentra que se tiene que determinar varios procedimientos para dar con los solicitado por el problema, en particular la situación problemática 22, donde se dan diversos cálculos sin resolver y se deben determinar cuáles dan resto cero al dividirlos por 7.

- ✓ **Argumentos**

¿Las explicaciones, comprobaciones o demostraciones sobre el contenido divisibilidad de números enteros, son comprensibles?

Las explicaciones y comprobaciones son poco comprensibles, encontrándonos que en diversas partes del desarrollo del capítulo solamente se limita a dar una definición o propiedad y nada más. Este es el caso de las reglas de divisibilidad que brinda, donde solamente se las mencionada y no se da ninguna explicación sobre ellas como así tampoco algún ejemplo de las mismas. En el caso de la propiedad *"si un número a es divisor de un número b, -a también lo es"*, no es posible encontrar la demostración de tal propiedad, a lo sumo se brinda un ejemplo de tal propiedad para justificarla y nada más.

No es posible encontrar demostraciones matemáticas de ninguna propiedad en el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros.

¿Se promueven situaciones donde el lector tenga que argumentar?

En la sección de situaciones problemáticas no se encuentran situaciones que promuevan en el lector la argumentación de sus respuestas, como así tampoco se realizan preguntas que fomenten una discusión sobre alguna afirmación en particular o solución de una situación.

- ✓ **Relaciones**

Con respecto a este objeto primario, retomamos las relaciones que establecimos entre los objetos primarios de la configuración epistémica del desarrollo del contenido. Estas relaciones que establecimos, permiten responder la siguiente pregunta:

¿Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) con respecto al contenido divisibilidad de números enteros, se relacionan y conectan entre sí?

A lo largo de la lectura del contenido del capítulo, podemos notar que en la sección de situaciones problemáticas se debe utilizar una definición de cuando un número entero es divisible por otro número entero, pero sin embargo el libro no brinda una definición para tal fin, solamente se enuncia a través de un ejemplo una idea de divisible, pero nada más. También podemos observar que, en determinados ítems de las situaciones problemáticas a resolver por parte del lector, se solicita determinar divisores de un número entero, pero sin embargo, el libro no brinda una definición de cuando un número entero es divisor de otro. En concordancia con lo anterior, podemos notar que en diversos ítems se trabaja con la idea de dividir expresiones y considerar un resto cero, sin realizar una vinculación entre la noción de divisibilidad y resto cero.

A su vez, podemos observar que si bien el libro detalla las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 100 y 1000, en las situaciones problemáticas no se utilizan las reglas de divisibilidad por 100 o por 1000.

Asimismo, el libro brinda una definición de cuando un número es primo y cuando no lo es, llamándose en este caso número compuesto. Sin embargo, a lo largo de las distintas situaciones problemáticas, podemos notar que no se utiliza en ningún lugar la definición de cuando un número es compuesto.

4.4.1.4 Cuarto libro

Libro:	El Libro de la Matemática 7
Editorial:	Estrada
Año:	2011
Autores del libro:	Laura Inés Cantero
	Ana Maria Felissia
	Dilma Fregona

Preguntas descriptivas de la componente epistémica

- ✓ **Situaciones-Problemas**

¿Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación o aplicación respecto al contenido divisibilidad en números enteros?

Consideramos se presenta una muestra representativa y articulada de las diversas situaciones con respecto al contenido divisibilidad de número enteros. En cuanto a problemas de contextualización presenta diversos problemas, tanto de múltiplos y divisibilidad como de cálculo del mcd y mcm. También se presentan problemas de de ejercitación y aplicación de enunciados matemáticos.

¿Se proponen situaciones de construcción de problemas (problematización) relacionadas con el contenido divisibilidad de números enteros?

El libro no propone ninguna situación problemática en la cual se deba generar un contexto que se pueda responder o vincular con el contenido divisibilidad de números enteros.

- ✓ **Lenguajes**

¿Se realiza el uso de diferentes modos de expresión matemática, como ser gráfica o simbólica, traducciones y conversiones entre los mismas, con respecto al contenido divisibilidad de números enteros?

Con respecto a esta pregunta, a lo largo del desarrollo del contenido podemos observar lo siguiente:

-Expresión verbal: número natural, número entero, divisible, divide, múltiplo, divisor común mayor, dcm, divisor positivo, múltiplo común menor, mcm, menores a cero, potencia, exponentes, distinto signo, cifra, factorizarce, primo, compuesto, teorema, aritmética, factores, entero X.

-Expresión simbólica: dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, los signos de las operaciones básicas, como ser la "+" (suma), "-"(resta), "." (Multiplicación) y "/" "÷" (división), el signo "=", los paréntesis (,), <, >.

-Expresión tabular: tablas compuestas por números.

¿Se proponen situaciones de interpretación acerca del contenido divisibilidad de números enteros?

En la propuesta textualizada se proponen expresiones matemáticas de interpretación de igualdades, como ser el caso de la definición de "divide" en el que se aclara que el número a debe ser distintos de cero. También se brinda variados ejemplos de cálculo de números.

- ✓ **Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)**

¿Las definiciones o procedimientos son claros y correctos respecto al contenido?

Con respecto a esta pregunta nos encontramos con cuestiones como ser que define cuando un número divide a otro, sin embargo, los ejemplos dados o problemas por resolver no incluyen a dicho enunciado. A la vez, con respecto al cálculo del mcd y mcm, no se brinda ninguna definición más que un ejemplo de ello. Con respecto a este último, se realizan operaciones de las cuales no se especifica el porqué, como por ejemplo afirmar que el mcd de números positivos son los mismos que de negativos.

¿Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales para resolver las situaciones problemáticas qué propone?

De la lectura de lo desarrollado por el libro respecto al contenido, nos encontramos que en ninguna parte se define las condiciones que debe cumplir un número entero para ser divisor de otro número entero. Lo cual nos resulta sumamente extraño considerando que, en las situaciones a resolver por parte del lector, es necesario saber este concepto para poder dar con un procedimiento que sea respuesta a sales situaciones problemáticas.

También resaltamos, que, si bien se brinda ejemplos del cálculo del mcd y mcm de números enteros, no se observa ninguna definición sobre lo que representa un mcd y mcm, como así tampoco un procedimiento formal.

Podemos resaltar que se presentan criterios de divisibilidad y el teorema fundamental de la aritmética que permiten resolver la mayoría de los problemas.

¿Se proponen situaciones donde el lector tenga que generar definiciones proposiciones o procedimientos?

En el apartado de situaciones problemáticas a resolver por parte del lector, se encuentran situaciones donde el lector tiene que generar un procedimiento para poder dar con lo solicitado por el problema, en particular con respecto al ítem 22 y 23, en los cuales se debe determinar distintos dígitos para que un número sea divisible por otro, también podemos mencionar el problema 33, que tiene un contexto en el que se debe determinar un número en particular que está sujeto a varias condiciones.

- ✓ **Argumentos**

¿Las explicaciones, comprobaciones o demostraciones sobre el contenido divisibilidad de números enteros, son comprensibles?

En la propuesta del contenido, con respecto a la definición y condiciones de cuando un número a divide b, encontramos que no se brinda mayores detalles de tal definición.

También podemos notar con respecto a la definición de divisor común mayor, que el ejemplo que brinda, se realizan operaciones de cálculo que no se fundamentan en algún enunciado matemático. Lo mismo sucede para el caso del mcm. A su vez, en el ejemplo que brinda, se presenta el caso donde ambos números son de signos distintos y no realiza ninguna aclaración si el hecho de ser de signos distintos tiene alguna implicancia e el cálculo de dicho dcm.

Asimismo, destacamos que no es posible encontrar demostraciones formales en el desarrollo del contenido divisibilidad de números enteros, a lo sumo se brinda una explicación de la definición de a divide a b.

¿Se promueven situaciones donde el lector tenga que argumentar?

En la sección de situaciones problemáticas a resolver por parte del lector, se evidencian algunas situaciones que promoverán al lector a la argumentación de sus resoluciones, pero no se especifica que deba justificar todo lo realizado.

- ✓ **Relaciones**

Con respecto a este objeto primario, retomamos las relaciones que establecimos entre los objetos primarios de la configuración epistémica del desarrollo del contenido. Estas relaciones que establecimos, permiten responder a la siguiente pregunta:

¿Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) con respecto al contenido divisibilidad de números enteros, se relacionan y conectan entre sí?

Podemos observar que con respecto a las situaciones problemáticas, en determinados ítems se debe utilizar una definición de cuando un número entero es divisor de otro número entero, pero sin embargo nos encontramos que en la sección del capítulo donde se dan a conocer las definiciones del contenido, no se evidencia ninguna definición de cuando un número entero es divisor de otro número entero.

También podemos observar que, en diversas situaciones problemáticas, se debe utilizar una definición y procedimiento para el cálculo del divisor común mayor (dcm) y mínimo común múltiplo (mcm) de número enteros, como ser los problemas 25, 26, 29 y 31, pero sin embargo nos encontramos que el libro solamente brinda un ejemplo sobre el cálculo del divisor común mayor y mínimo común múltiplo de dos o números, pero no un enunciado matemático formal para determinarlo. A su vez, los ítems solicitan el cálculo del dcm y mcm de números enteros, tanto positivos como negativos, pero en la propuesta solo se determina una igualdad para el caso del mcm pero no para el mcd.

4.4.2 Observaciones generales a las respuestas de las preguntas descriptivas de la componente epistémica

Las preguntas propuestas por Godino (2009), para determinar la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje, permitieron realizar un análisis más detallado y profundo del contenido escrito en cada libro. Propiciando una reflexión sobre el aporte de cada uno de ellos.

A continuación, resaltamos aquellas cuestiones que nos resultaron más relevantes.

Con respecto a las ***situaciones-problemas***, podemos resaltar que en su mayoría, plantean situaciones de ejercitación y aplicación de teoría matemática con poca o casi ninguna relación con un contexto real próximo al alumno, siendo este el caso de Matemática II-Logo Nautas y Matemática II-Santillana para resolver problemas. Si bien en el caso del libro Matemática II y Matemática 7 se presentan problemas con un contexto real, también se aprecian en su mayoría situaciones de ejercitación y aplicación. Cabe destacar, que, en ninguno de los libros, se evidencian situaciones de generación de problemas. Razón por la cual concluimos que ningún libro presenta una muestra representativa y articulada en su totalidad con respecto al contenido desarrollado.

En cuanto al plano ***lenguajes***, nuestra observación del contenido en cada uno de los libros nos permite afirmar que todos utilizan expresiones verbales y simbólicas, siendo estas básicamente los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, los signos de las operaciones básicas, como ser la "+" (suma), "-"(resta), "." (Multiplicación) y "/" (división), el signo "=", los paréntesis (,), a=2.k, a=2.k+1, a=2.q, $q \in Z$, a=b.q+r, $0 < r < b$, Sin embargo, con respecto al libro Matemática II-Santillana para resolver problemas, resaltamos que es el único que brinda un caso de representación gráfica de la operación división.

En lo que respecta al vocabulario que utilizan los libros, es necesario destacar que en determinadas secciones del desarrollo del contenido, se utilizan palabras que no son definidas, como ser en el caso del libro Matemática II-Logo Nautas, donde se utiliza la palabra "divisor", pero no esgrime ninguna definición de lo que representa. A su vez, en el libro Matemática II-para resolver problemas, en determinas definiciones podemos observar que es poco claro el sentido que se le da a lo definido, específicamente en la oración "un número es múltiplo de otro si este último es uno de sus factores".

En cuanto a la propuesta de situaciones de expresiones matemáticas e interpretación acerca del contenido divisibilidad, nos encontramos que en general los libros brindan ejemplos sobre lo que definen, pero no brindan ningún ejemplo para el cual lo que definen no es posible aplicarlo, solo en el libro Matemática 7 se menciona porque un número no puede ser 0 para que pueda ser divisor. Como así tampoco, se realiza un análisis formal de lo que definen, dando la idea de ser más que nada recetas para aplicar.

Considerando las preguntas respecto a las ***reglas***, la mayoría de los libros introducen definiciones que resultan poco claras al momento de leerlas o se utilizan palabras que no se definieron, como ser el caso del libro Matemática II-Logo Nautas, donde se introduce una definición de divisible, pero en la misma se hace alusión a valores absolutos de números. En el caso de Matemática II-para resolver problemas, nos encontramos que brinda un ejemplo de cuando un número es múltiplo y divisible por otro, siendo que en ningún lugar del desarrollo conceptual se define a que se denomina divisible. A su vez, en dicho libro se brinda una definición de cuando un número es divisible por 11, pero sin embargo, solo es aplicable a determinados números y no a todos los números que son en realidad divisibles por 11. También otorga una definición de factorización de un número entero, pero que resulta poco clara. En el caso del libro Matemática 7 se brinda una definición de número primo, pero la misma resulta poco clara debido a que menciona cuatro divisores, pero no especifica cuáles pueden ser.

En cuanto a enunciados y procedimientos fundamentales en los libros se evidencian determinados enunciados propios de la divisibilidad en el conjunto de números enteros, en general no brindan todos los enunciados y procedimientos para resolver las situaciones problemáticas que proponen.

Con respecto a la pregunta de si se generan situaciones en las cuales se daba generar definiciones, en el libro Matemática II para resolver problemas se pueden identificar situaciones para tales casos. No obstante, si bien cada libro propone situaciones, es sumamente escasa, siendo en algunos casos de una sola situación problemática.

Si observamos ahora las preguntas respecto a los ***argumentos***, la que se refiere a si las explicaciones, comprobaciones y demostraciones sobre el contenido son comprensibles, pudimos observar que en los libros analizados no se evidencian explicaciones formales o de índoles matemáticas de las definiciones que brindan, a lo sumo en algunos casos a través de un ejemplo, como ser en el caso del libro Matemática II-Logo Nautas cuando brinda una definición de divisor común mayor. Con respecto a las comprobaciones de lo que se definen, en la mayoría de los casos los libros brindan un ejemplo de lo definido, siendo en este caso en general de una valoración media. Pero en cuanto a las demostraciones, en ninguno de los libros se evidencian demostraciones de aquellas propiedades que define, siendo en este caso de una valoración baja.

Con respecto a la pregunta de si se promueven situaciones en las cuales el lector debe argumentar sus respuestas, en los casos de los libros Matemática II-Logo

Nautas, Matemática II- para resolver problemas y Matemática II-Santillana, no es posible dar con alguna situación problemática que promueva argumentar.

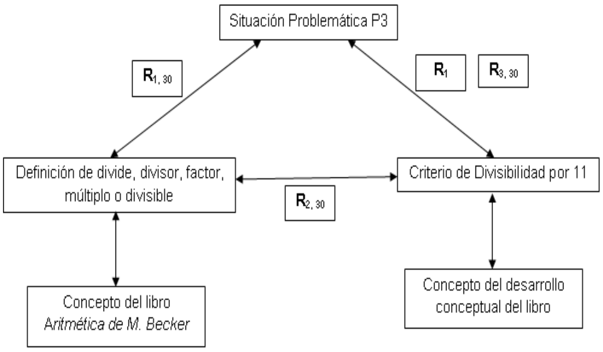
Finalmente, en cuanto a las preguntas que refiere a las ***relaciones***, nos encontramos que en la mayoría de los las situaciones problemáticas que proponen los libros Matemática II-Logo Nautas, Matemática II- para resolver problemas, Matemática II-Santillana y Matemática 7, se deben utilizar definiciones matemáticas que el desarrollo conceptual de los mismos no brinda o son poco claras. Como ser que en los problemas se solicita divisores y en la propuesta teórica no se brinda tal definición. Es decir, no es posible vincular directamente las situaciones problemáticas y las definiciones y/o propiedades propuestas por dichos libros.

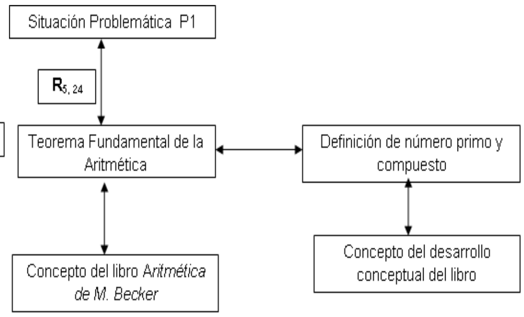
4.5 Conclusiones

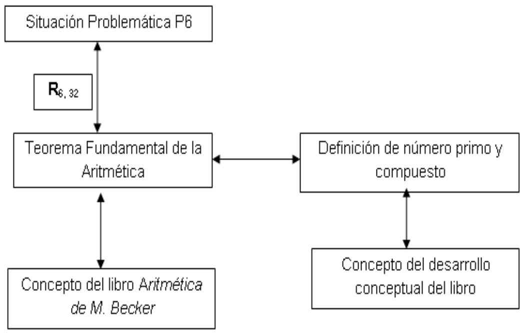
En este capítulo fue posible observar con respecto a la red de relaciones conceptuales establecidas entre los objetos primarios de la propuesta teorica textualizada del contenido divisibilidad de números enteros en los libros seleccionados, que las mismas fueron pocas y en algunos casos lo que llamamos forzadas. Siendo esta última aquella que, si bien en el desarrollo teórico del libro se esgrime un enunciado relacionado con la resolución de una situación problemática, no obstante, dicho enunciado es poco claro o no pertinente, por sí mismo, para elaborar un sistema de prácticas de resolución del problema. Esto pudo observarse en la resolución de la situación problemática 23 del libro Matemática II de Andrea Berman y la situación problemática 13 del libro Matemática 7 de Laura Inés Canteros. Percibiéndose que en el desarrollo teórico se esgrimen reglas de divisibilidad, pero que aun así no se brinda una definición de divisibilidad clara, siendo necesaria la introducción de un enunciado más claro y preciso, con respecto al problema 13 se debe utilizar una definición de número rimo, sin embargo, la propuesta del libro no determina que forma tienen los números primos, solo hace alusión a que debe tener cuatro divisores, pero no quienes. Estas dificultades también se observaron en las situaciones problemáticas 32, 33, 36, 37 y 38 del libro Matemática II de María Dolores Álvarez y 32, 33 y 37 del libro Matemática II de Andrea Berman.

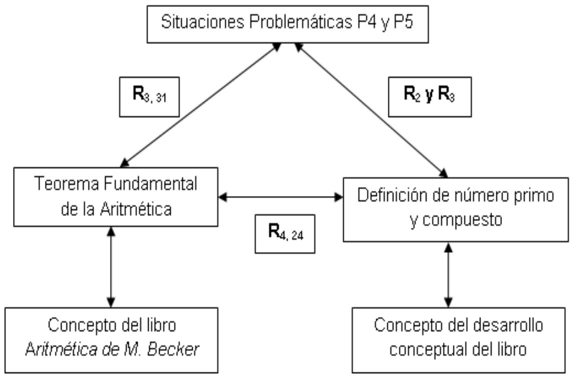
Con respecto a las relaciones establecidas con los objetos primarios del desarrollo teórico y las relaciones involucradas y emergentes de los objetos primarios de las resoluciones de las situaciones problemáticas, se pudo evidenciar en algunos casos la existencia de una vinculación entre las mismas. Éstas se vieron reflejadas en las situaciones problemáticas 24, 30, 32, 33 del libro Matemática II de María Dolores Álvarez, 22, 23, 32, 33, 34, 35, 36 y 37 del libro Matemática II de Andrea Berman y 1, 2, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31 y 33 del libro Matemática 7 de Laura Inés Canteros

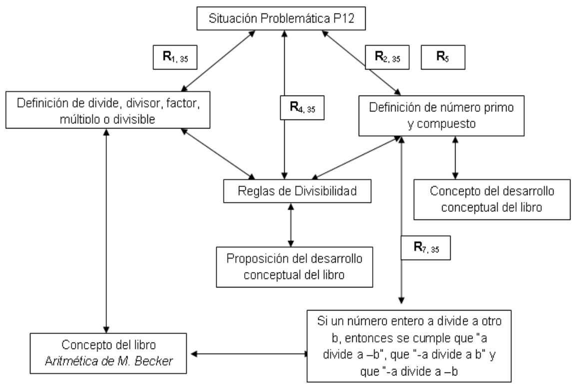
Como puede observarse en las gráficas de la figura 1, se resalta con rectángulos los objetos primarios y con flechas de doble sentido las relaciones más pertinentes que se establecen para la construcción del sistema de prácticas de las resoluciones de los problemas. Siendo que, en aquellas fechas con doble etiquetado, representan una vinculación en las relaciones establecidas.

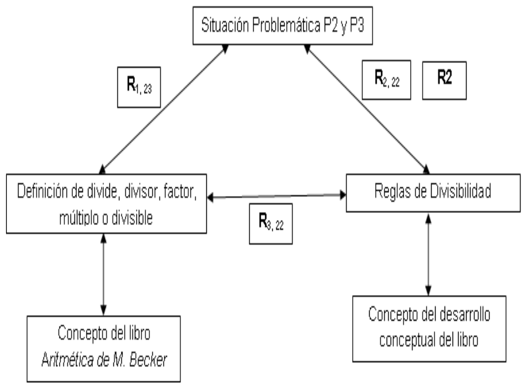




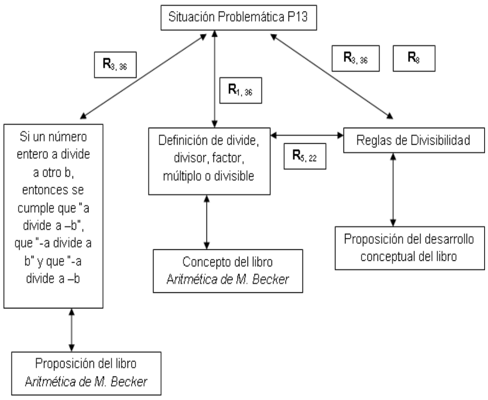


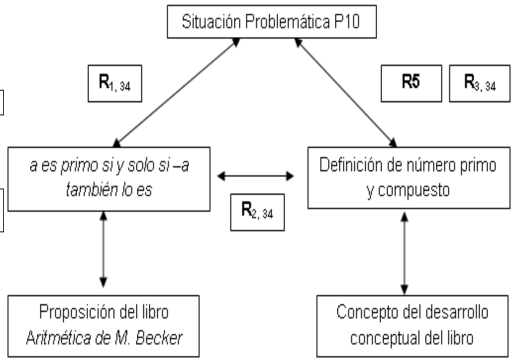


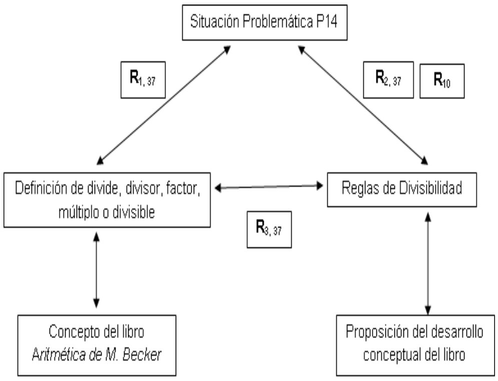


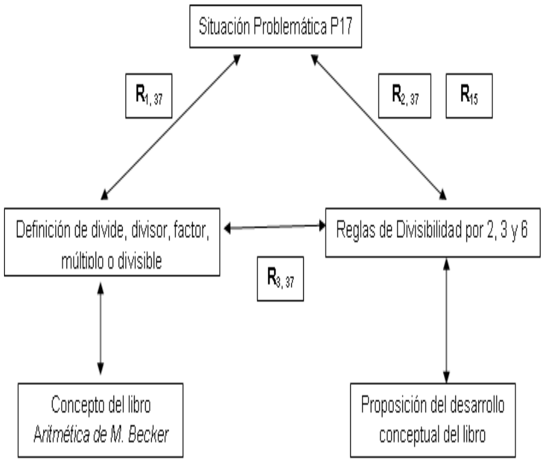


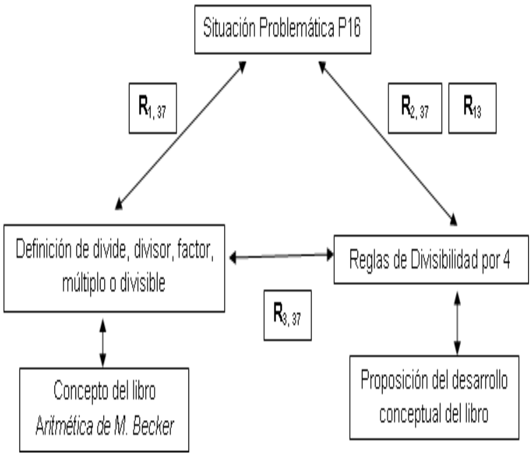
Libro Matemática II de María Dolores Álvarez

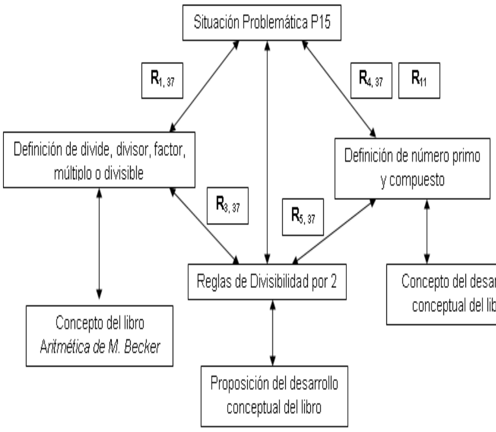

Situación Problemática P13
$R_{3,36}$
$R_{1,36}$
$R_{3,36}$
R_8
Si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que "a divide a –b", que "-a divide a b" y que "-a divide a –b
Definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible
$R_{5,22}$
Reglas de Divisibilidad
Concepto del libro *Aritmética de M. Becker*
Proposición del desarrollo conceptual del libro
Proposición del libro *Aritmética de M. Becker*

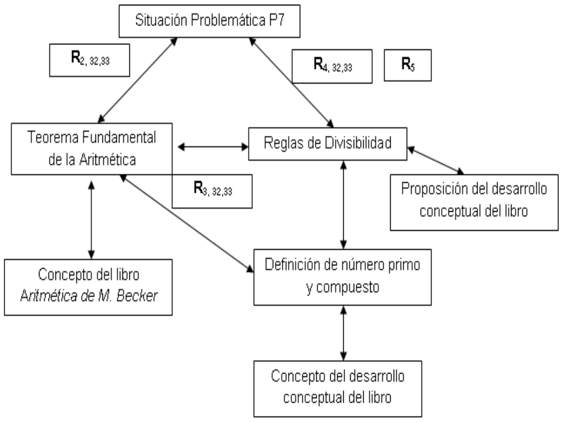

Situación Problemática P10
$R_{1,34}$
R5
$R_{3,34}$
a es primo si y solo si –a también lo es
Definición de número primo y compuesto
$R_{2,34}$
Proposición del libro *Aritmética de M. Becker*
Concepto del desarrollo conceptual del libro


Situación Problemática P14
$R_{1,37}$
$R_{2,37}$
R_{10}
Definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible
Reglas de Divisibilidad
$R_{3,37}$
Concepto del libro *Aritmética de M. Becker*
Proposición del desarrollo conceptual del libro

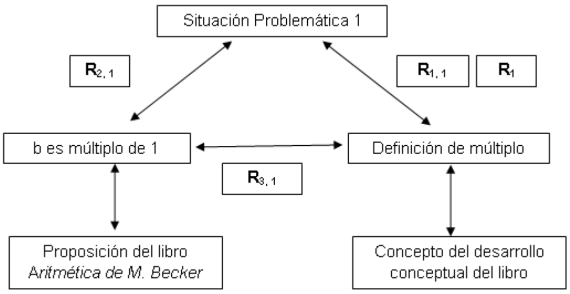

Situación Problemática P17
$R_{1,37}$
$R_{2,37}$
R_{15}
Definición de divide, divisor, factor, múltiolo o divisible
Reglas de Divisibilidad por 2, 3 y 6
$R_{3,37}$
Concepto del libro *Aritmética de M. Becker*
Proposición del desarrollo conceptual del libro

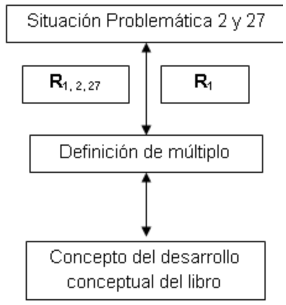

Situación Problemática P16
$R_{1,37}$
$R_{2,37}$
R_{13}
Definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible
Reglas de Divisibilidad por 4
$R_{3,37}$
Concepto del libro *Aritmética de M. Becker*
Proposición del desarrollo conceptual del libro

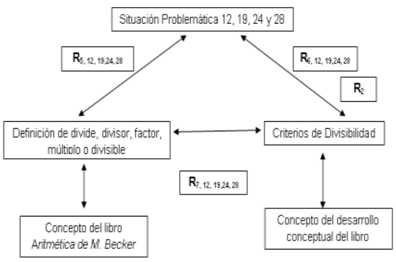


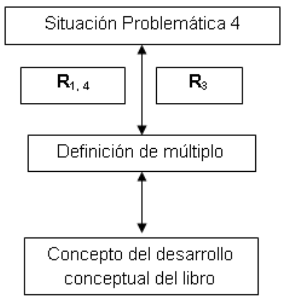


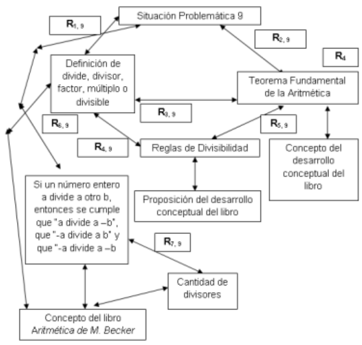
Libro Matemática II de Andrea Berman

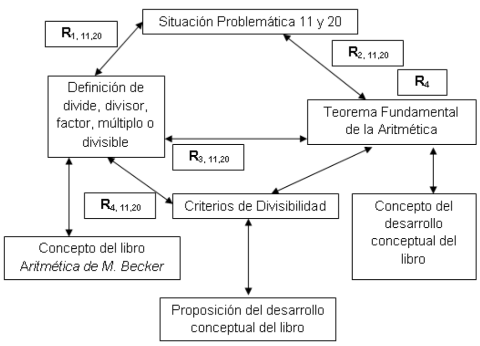


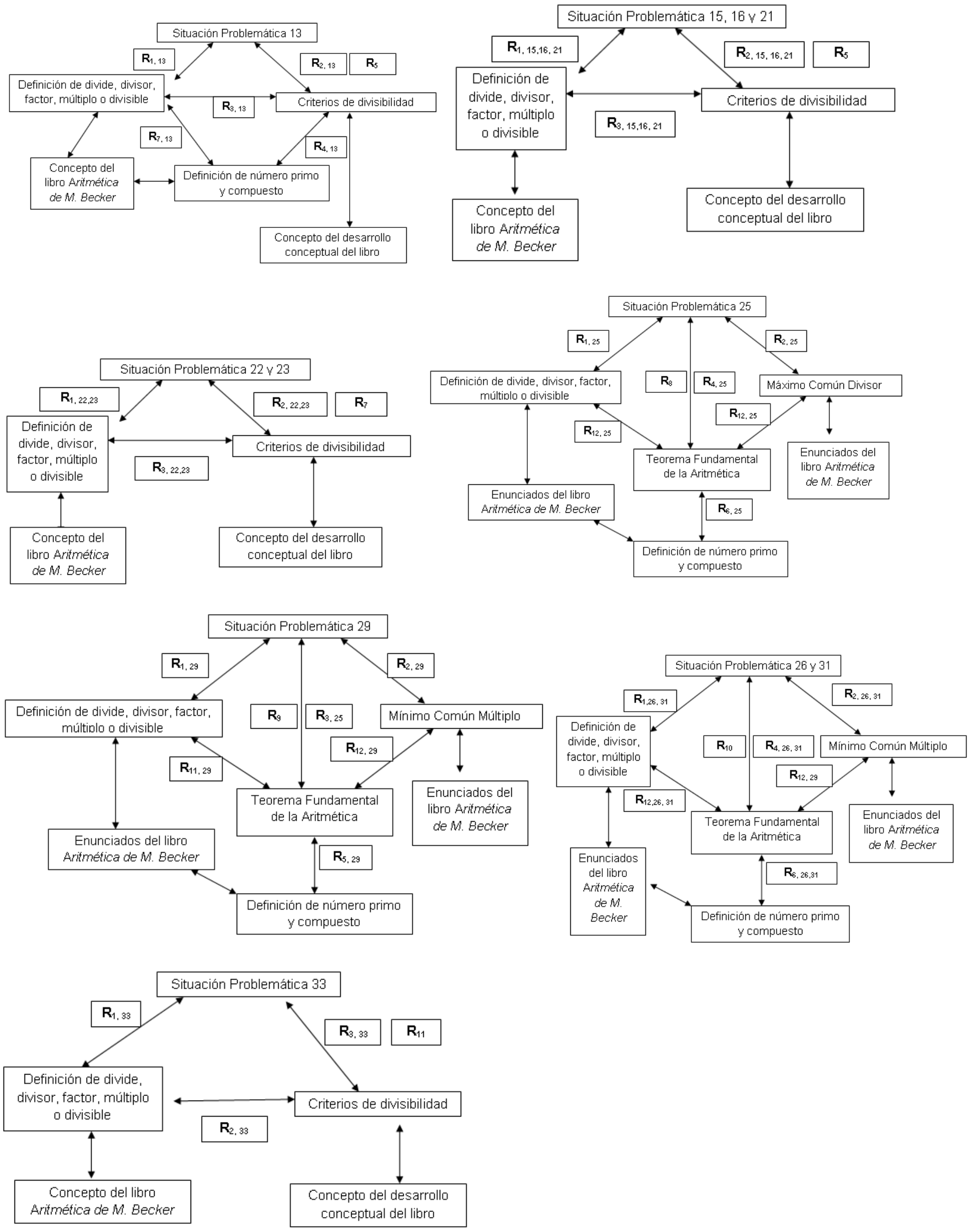












Libro Matemática 7 de Laura Inés Cantero

Figura 1

En lo que respecta al libro Matemática II de María Dolores Álvarez, la vinculación que se pudo establecer fue a través de la definición de número primo y las reglas de divisibilidad por 11. Resaltando que en el caso del libro Matemática II de Andrea Berman la vinculación que con mayor frecuencia se presentó fue la establecida entre la situación problemática y las reglas de divisibilidad, siendo en menor medida aquellas en las que solamente intervenía la definición de número primo y las que relacionaban ambos enunciados. En cuanto a la regla de divisibilidad por 11 brindada en el desarrollo teórico del libro Matemática II de María Dolores Álvarez, es necesario resaltar que, si bien dicha regla es suficiente para resolver la situación problemática

30, se puede evidenciar que dicho enunciado sólo es verdadero para un conjunto finito de números enteros. En el mismo se afirma que un número es divisible por 11 siempre y cuando la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares es 0, 11 o -11. Sin embargo, al aplicarse dicha regla al número 81.818, esto es 8+8+8-1-1=22, da la impresión de no ser divisible por 11 por no obtener como resultado 0, 11 o -11. No obstante, el número 22 puede escribirse de la forma 22=11.2, resultando el número 8.818 divisible por 11. Como lo demuestra la igualdad 81818=11.7438.

Cabe resaltar que en el libro Navegantes del Conocimiento de Pablo Amster no fue posible determinar una vinculación entre las relaciones que se establecen entre los objetos primarios del desarrollo teórico del libro y aquellas involucradas y emergentes del sistema de prácticas de la resolución de los problemas propuestos. Siendo notable que en algunas situaciones problemáticas se solicitara determinar divisores, sin embargo, el desarrollo teórico del libro no brindaba ningún enunciado sobre ellos.

En cuanto a las semejanzas y diferencias entre los procedimientos y argumentos brindados en el desarrollo teórico del libro y aquellos necesarios para la resolución de las situaciones problemáticas propuestas, es posible observar que al momento de la elaboración del sistema de prácticas propias de una situación problemática se manifiestan diferencias entre lo que se necesita al momento de construir dicho sistema y lo brindado por el libro para su construcción. Algunos de los ejemplos que se destacan son la *situación problemática 75* del libro Navegantes del Conocimiento de Pablo Amster, la *situación problemática 24*, del libro y Matemática II de María Dolores Álvarez, *situación problemática 36* del libro Matemática II de Andrea Berman, *situación problemática 6,7, 12,del* Libro Matemática 7 de Laura Inés Cantero en los que se solicita determinar divisores de números, pero no obstante en el desarrollo conceptual de los libros no se esgrime una definición como así tampoco un procedimiento para tal resolución. A su vez, en las situaciones problemáticas 15, 16, 21, 23 y 24 del libro Matemática 7, se solicita determinar números que sean divisibles por otros, sin embargo, en la propuesta teórica no se brindaba ninguna definición de divisible para números enteros En cuanto a las situaciones problemáticas 78 y 79 del libro Navegantes del Conocimiento, en los cuales se debía utilizar un argumento y procedimiento para el cálculo del máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros cualesquiera y dado el mcd y mcm de dos números cualesquiera determinar tales números, es notable la diferencia sustancial que se observa entre lo brindado por el desarrollo teórico del libro y lo realizado para determinar la práctica matemática que permita resolverlos.

Con respecto a la situación problemática 32 del libro Matemática II de María Dolores Álvarez, es notable el procedimiento utilizado para elaborar lo solicitado en dicho problema y aquello brindado en el desarrollo teórico del libro. Siendo que solicitaba de una lista de números determinar uno o dos dígitos faltantes, según correspondiera, para que sean divisibles por 11 y que, en el caso de dos dígitos, lo realizado y considerado excede a lo brindado en el desarrollo del contenido teórico del libro.

En cuanto a las situaciones problemáticas 35 y 37 del libro Matemática II de Andrea Berman, se evidencia que los argumentos y procedimientos utilizados difieren de los brindados por el desarrollo teórico del libro. Siendo que en el caso del problema 35, se deben determinar los divisores de una lista de números sin embargo no se brinda una definición para tal fin. En relación al problema 37, los argumentos y procedimientos utilizados para determinar la verdad o falsedad de las afirmaciones defieren en gran medida a los brindados por el desarrollo teórico del libro.

Con respecto al libro Matemática 7 de Laura Inés Cantero, es notable resaltar que en las situaciones problemáticas 25, 26, 29 y 31 se solicitaba el cálculo del mcd y mcm de números enteros, sin embargo, en la propuesta teórica solo se brinda un ejemplo sobre los mismo, mas no una definición matemática formal para su cálculo.

En lo que se refiere a la faceta epistémica analizada se destaca que dependiendo del indicador las valoraciones coinciden. Este es el caso del lenguaje utilizado en el desarrollo del contenido, siendo en todos los libros acorde al nivel del destinatario. Las diferencias sustanciales se presentan en cuanto a las situaciones problemáticas, observándose que en los 3 primeros libros la mayoría de los problemas son de aplicación y ejercitación de la teoría. Diferenciándose el libro Matemática II de María Dolores Álvarez que brinda situaciones problemáticas en un contexto real, como ser el caso de los problemas 34, 35 y 38 y el Libro Matemática 7, donde se brindan problemas con un contexto, tanto de divisibilidad como de mcm y mcd. También con respecto a las reglas, las definiciones, proposiciones y procedimientos, las valoraciones son diferentes, radicando en el hecho que en el libro la teoría desarrollada es muy poco en comparación con lo desarrollado en los demás libros.

A cerca de las relaciones conceptuales que se pueden establecer, las diferencias y semejanzas establecidas entre los argumentos y procedimientos utilizados para elaborar el sistema de prácticas que permita resolver las situaciones problemáticas y la valoración de la faceta epistémica realizada, concluimos que las discrepancias entre las relaciones necesarias y las brindadas por la propuesta teorica, pueden ser variadas y de diversas razones, siendo estas de índoles externas, como las limitaciones propuestas por una editorial para la cantidad de páginas a utilizar por cada contenido desarrollado en conjunto con el valor monetario, ocasionando un recorte en el contenido teórico y situaciones problemáticas propuestas, como así también, razones internas que tienen que ver con el autor del libro, considerando éste que la propuesta teórica textualizada y situaciones problemáticas propuestas son las más pertinentes para lo abordado.

Capítulo 5

Síntesis y Conclusiones

Este trabajo tuvo como objetivo fundamental determinar la vinculación existente entre la red de relaciones desplegadas en el planteamiento teórico del contenido divisibilidad en números enteros, en libros de matemática destinados al nivel medio de los Colegios de la Ciudad de Corrientes, y la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en los mismos, como así también analizar si las relaciones conceptuales establecidas en el planteamiento teórico son suficientes para resolver las situaciones problemáticas que proponen o si, por el contrario, aparecen como necesarias otras nuevas relaciones emergentes; se centró especialmente en la realización de un minucioso estudio epistémico sobre dichas relaciones. Al momento de las resoluciones de las situaciones problemáticas, capítulo 4, se evidenció que, si bien en diversos casos algunas relaciones conceptuales pudieron establecerse sin mayores dificultades, en otros fue necesaria la formulación de diversas relaciones conceptuales que permitieran tales prácticas matemáticas

En la construcción del sistema de prácticas para la resolución de los problemas, se manifestaron diversas dificultades al presentarse la exigencia de establecer una relación conceptual específica que permitiera dar respuesta a lo solicitado en el problema. Dificultad expuesta tanto por la no pertinencia de la definición, proposición, procedimientos o argumentos que se encontraban en los libros analizados, como por la carencia de los mismos en dichos libros.

Para concretar la investigación y lograr el objetivo fundamental, se intentó dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el capítulo 1 y así lograr los objetivos específicos propuestos. Dichas preguntas fueron: a) ¿Qué vinculación se establece entre la red de relaciones establecidas de la propuesta teórica, respecto a la red de relaciones involucradas o emergentes de la resolución de las situaciones problemáticas? b) ¿Qué red de relaciones se establecen entre los objetos primarios de la propuesta teórica del contenido Divisibilidad de números enteros y en las resoluciones de las situaciones problemáticas que se proponen en los libros? c) ¿Qué semejanzas y diferencias se establecen entre los procedimientos y argumentaciones propuestas en los libros y aquellos necesarios para resolver las situaciones problemáticas que proponen? Y d) ¿El desarrollo teórico textualizado del contenido

Divisibilidad de números enteros en libros de nivel secundario de la ciudad de Corrientes, permite resolver todas las situaciones problemáticas qué propone?

Enmarcados en la línea teórica y metodológica que se explicitó en el tercer capítulo, se elaboró un sistema de prácticas en calidad de "expertos" (cuarto capítulo) que representaron las resoluciones de las situaciones problemáticas que cada libro propone para su resolución por parte del lector.

A través del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática y de la utilización de sus herramientas conceptuales y metodológicas, se evidenció que del análisis de las relaciones conceptuales establecidas entre los objetos primarios del desarrollo conceptual del contenido divisibilidad de números enteros de los libros, y de las relaciones conceptuales involucradas y emergentes de las resoluciones de las situaciones problemáticas, se pueden realizar las siguientes afirmaciones:

a) Dependiendo de la situación problemática por resolver se evidencia que en algunas de ellas es posible establecer una vinculación, en otros casos no, entre la red de relaciones conceptuales del desarrollo teórico del libro y la red de relaciones conceptuales involucradas y emergentes de las resoluciones de tales situaciones. Observando que en el caso de existir una vinculación la misma puede ser de carácter directa, fuerte o débil.

Para el caso de una *vinculación directa (capitulo 3)* entre ambas redes de relaciones, ésta se manifestó en aquellas situaciones problemáticas en las cuales la propuesta teórica del libro brindaba un enunciado que permitía resolver la situación problemática de forma directa. Un ejemplo de esto es la resolución de la situación problemática 2 del Libro Matemática 7, desarrollado en el capítulo 4. En el que se formaron las relaciones $R_{1,\,2}$: Entre la situación problemática y la definición de múltiplo y R_1: Entre la situación problemática $P_{2,\,2,}$ y la definición de múltiplo de un número.

En la figura 1, puede observarse en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones más pertinentes entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a la flecha no etiquetada, ésta expresa el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que, en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema. Observando una *vinculación directa* que se pone de manifiesto en la flecha que tiene una doble etiqueta, expresando que la relación $R_{1,\,2,}$ corresponde a la construida en el sistema de prácticas de la resolución del problema y la $\mathbf{R_1}$ a la construida con el desarrollo teórico del libro. Vinculación manifiesta en cuanto a que ambas relaciones incluyen los mismos objetos primarios

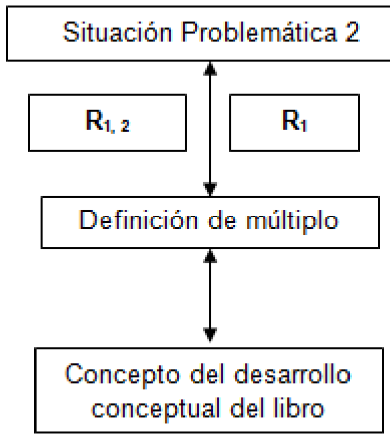


Figura 1

Para el caso de una *vinculación fuerte* entre ambas redes de relaciones, ésta se manifestó en aquellas situaciones problemáticas en las cuales el desarrollo conceptual del libro brindaba un enunciado que en relación con otro introducido permitió la resolución del problema. Un ejemplo de esto es la resolución de la *situación problemática 35* del libro Matemática II, desarrollado en el capítulo 4. En el que se formaron las relaciones $\mathbf{R_7}$: Entre la situación problemática P12 y la definición de número primo del desarrollo conceptual del libro y las relaciones emergentes $\mathbf{R_{1,\,35}}$: Entre la situación problemática y la definición de divide, divisor, factor, múltiplo o divisible, $\mathbf{R_{2,\,35}}$: Entre la situación problemática y la definición número primo, $\mathbf{R_{4,\,35}}$: Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad y $\mathbf{R_{7,\,35}}$: Entre la definición de número primo y la propiedad que indica que si un número entero a divide a otro b, entonces se cumple que “a divide a –b”, que “-a divide a b” y que “-a divide a –b”.

En la figura 2, puede observarse que los rectángulos representan los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido se representan las relaciones más pertinentes entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que, en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema. Observando una vinculación fuerte que se pone de manifiesto en la flecha que tiene una doble etiqueta, expresando que la relación $\mathbf{R_{2,35}}$ corresponde a la construida en el sistema de prácticas de la resolución del problema y la **R**$_7$ a la construida con el desarrollo teórico del libro. Vinculación manifiesta en cuanto a que ambas relaciones incluyen los mismos objetos primarios.

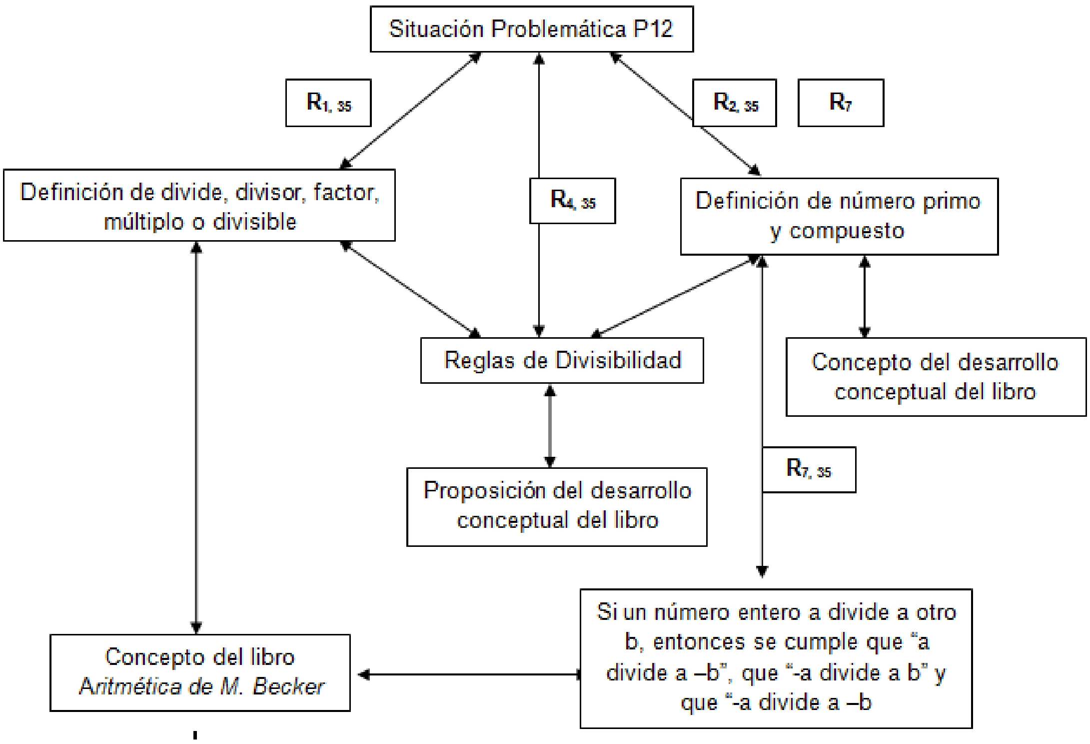


Figura 2

Otro ejemplo es lo que acontece en las relaciones de las situaciones problemáticas 32 y 33. En estas las relaciones que se presentaron fueron **R**$_5$**:** Entre la situación problemática P7 y los criterios de divisibilidad, **R**$_{2,\ 32,\ 33}$**:** Entre la situación problemática y el Teorema Fundamental de la Aritmética, **R**$_{3,\ 32,\ 33}$: Entre Teorema fundamental de la Aritmética y la definición de número primo, **R**$_{4,\ 32,\ 33}$**:** Entre la situación problemática y los criterios de divisibilidad y **R**$_{5,\ 32,\ 33}$: Entre las reglas de divisibilidad y el Teorema Fundamental de la Aritmética. En la figura 3 puede observarse nuevamente en los rectángulos los objetos primarios que intervienen en la resolución de la situación problemática y con las flechas de doble sentido las relaciones entre dichos objetos, etiquetando a las mismas con la relación correspondiente. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado. Cabe destacar que, en dicho gráfico, puede observarse de forma clara y precisa aquellos objetos primarios indispensable que indefectiblemente permiten construir el sistema de prácticas de resolución del problema. Observando una vinculación fuerte que se pone de manifiesto en la flecha que tiene una doble etiqueta, expresando que la relación **R**$_{4,\ 32,\ 33}$ corresponde a la construida en el sistema de prácticas de la resolución del problema y la **R_5** a la construida con el desarrollo teórico del libro. Vinculación manifiesta en cuanto a que ambas relaciones incluyen los mismos objetos primarios.

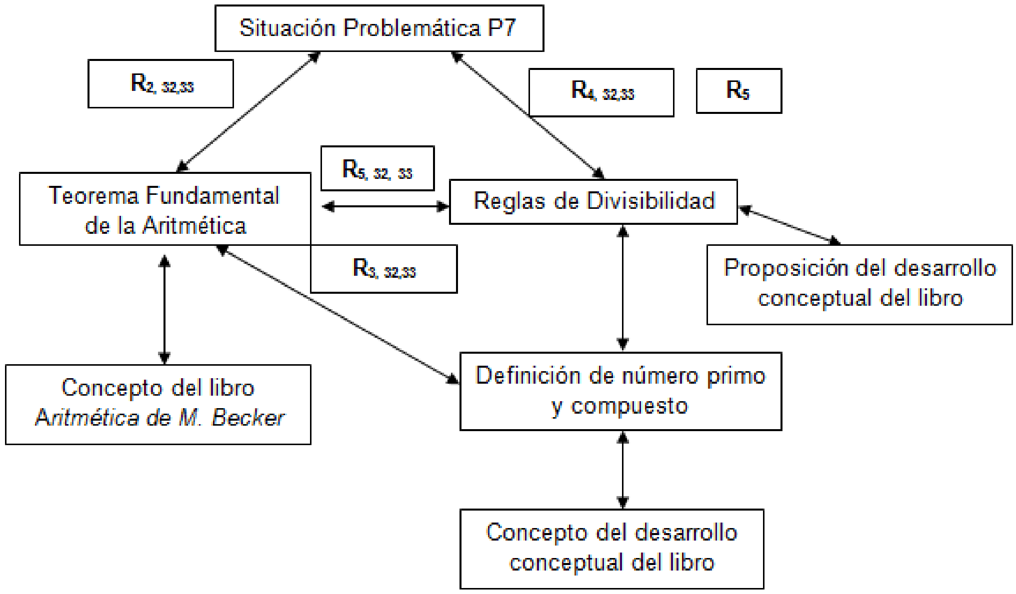


Figura 3

Con respecto a una *vinculación débil,* la misma se manifestó para los casos en los cuales al momento de resolver una situación problemática fue necesaria la inserción de un enunciado que permitiera tal resolución. Esta introducción estaba apoyada en el hecho de no ser posible encontrar en el desarrollo teórico del libro un enunciado claro o pertinente para tal fin, no obstante, se brindaba un enunciado que guardaba relación con el introducido más no directamente con la situación problemática. Un ejemplo de esto es la *situación problemática* 32 del libro Matemática II, en el cual se solicitaba determinar la factorización de un grupo de números. Para su resolución se incluyó el enunciado del Teorema Fundamental de la Aritmética y siendo que en su desarrollo utiliza una definición de números primos equivalente a la que brinda el desarrollo teórico del libro, se estableció una vinculación entre ambos enunciados, como se observa en la figura 4. Observándose que existe una flecha de doble sentido entre el objeto primario introducido y el brindado por el libro más no con el problema, como podía observarse en el gráfico de las figuras 1 y 2. Las relaciones $R_{6, 32}$ y $R_{6, 33}$ corresponden a las relaciones entre los objetos primarios del sistema de práctica correspondiente a la resolución del problema. Con respecto a las flechas no etiquetadas, estas expresan el origen del enunciado utilizado.

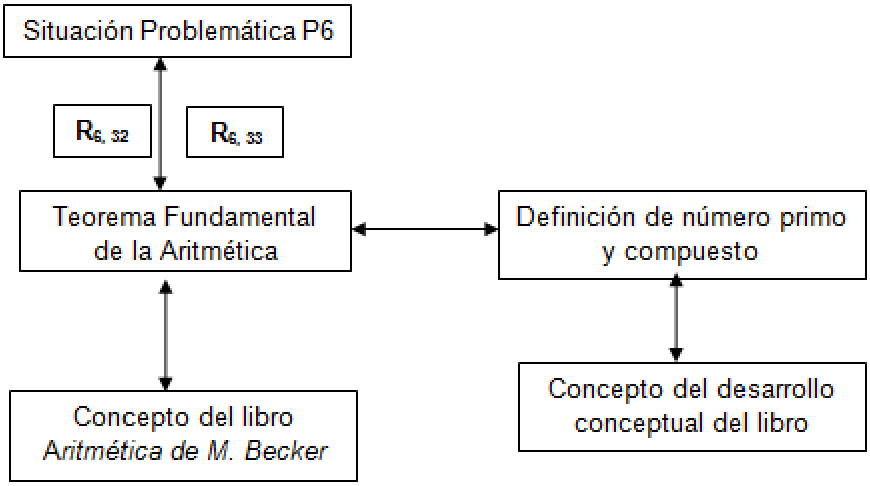


Figura 4

En cuanto a la *no vinculación*, es notable destacar el caso de las resoluciones de las situaciones problemáticas del libro Logonautas del Conocimiento, siendo que en el mismo no fue posible establecer una vinculación entre las relaciones del desarrollo teórico del libro y las involucradas y emergentes de las resoluciones. En gran medida se debió a que el desarrollo teórico no resultaba claro o pertinente para la resolución los problemas, siendo necesaria la inclusión de otros conceptos que lo permitieran. Un ejemplo de esto fue el caso de solicitar el cálculo de divisores de números enteros y no dar una definición sobre el mismo.

En algunos casos se pudo evidenciar que, si bien quizás era posible establecer una relación entre los objetos primarios del desarrollo del contenido las mismas eran de carácter forzadas. Un ejemplo de esto es la situación problemática 37 del libro Matemática II de María Dolores Álvarez, en el cual se solicitaba el cálculo del mcd y mcm de números enteros que, si bien en el desarrollo teórico se brinda un enunciado sobre el mcd y mcm de números enteros, no obstante, solo se observan cuentas y procedimientos de los cuales no se especifica de una forma clara y argumentativa las razones de las mismas.

A sí mismo, en los libros de Matemática II se brinda un enunciado sobre las condiciones que cumplen dos números para ser múltiplos entre sí. Sin embargo, en dicho enunciado se utiliza la palabra “factores” sin expresar mayores detalles sobre su significado.

También se pudo observar que en la definición de número primo del libro Matemática 7, hace mención a cuatro divisores, pero no brinda mayores detalles de las características de los mismos.

En cuanto a la regla de divisibilidad por 11 brindada en el desarrollo teórico del libro Matemática II de María Dolores Álvarez, es necesario resaltar que, si bien dicha regla es suficiente para resolver la situación problemática 30, se puede evidenciar que dicho enunciado sólo es verdadero para un conjunto finito de números enteros. En el mismo se afirma que un número es divisible por 11 siempre y cuando la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares es 0, 11 o -11. Sin embargo, al aplicarse dicha regla al número 81818, esto es 8+8+8-1-1=22, da la impresión de no ser divisible por 11 por no obtener como resultado 0, 11 o -11. No obstante, el número 22 puede escribirse de la forma 22=11.2, resultando el número 8.818 divisible por 11. Como lo demuestra la igualdad 81818=11.7438.

b) Es notable la falta de relaciones conceptuales entre los objetos primarios del desarrollo teórico del libro al momento de resolver las situaciones problemáticas propuestas al lector. Tanto por la no pertinencia o claridad de las definiciones, proposiciones, procedimientos o argumentaciones que se esgrimen como así también por la carencia de los mismos.

Con respecto a la no pertinencia, esta se pudo observar en aquellas situaciones problemáticas en la que se solicitaba determinar el mcm y mcd de números enteros. En las *situaciones problemáticas 76 y 78* del libro Navegantes del Conocimiento, fue necesario un enunciado que permitiera determinar el máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm) de números enteros. Enunciado que no fue posible encontrar en el desarrollo teórico del dicho libro. Encontrándose solo un enunciado de lo que representa un mcd y mcm, pero no como determinarlo de una forma clara tanto para el caso de números positivos como negativos. Situación que se volvió a repetir al momento de resolver las situaciones problemáticas 32 y 36 del libro Matemática II. Si bien en el desarrollo teórico de este último se brindaba un enunciado sobre el cálculo del mcd y mcm de números enteros, no obstante, se presentaban cálculos de los cuales no se justificaban del porqué de los mismos. Con respecto a la claridad, puede observarse que en el enunciado “un número es múltiplo si este último es uno de sus factores” no se aclara en ningún lugar del desarrollo teórico a que se llama factor, como así tampoco se esgrime un lenguaje simbólico que clarifique lo enunciado. También se resalta que en el libro matemática 7 se brinda el enunciado “se llama número primo a todo número entero que tenga exactamente cuatro divisores”, sin embargo, no brinda mayores detalles sobre las características de dichos divisores, como así tampoco la forma de los mismos. Destacando que utiliza la palabra divisor pero sin brindar una definición del mismo.

En cuanto a la carencia, se manifestó en el caso de la situación problemática 75 del libro Navegantes del Conocimiento, la situación problemática 24, del libro Matemática II; situación problemática 36 del libro Matemática II de Santillana y situaciones problemáticas 3, 5, 6, 7 10 y 12 del libro Matemática 7 del Estrada en los cuales dada una lista de números enteros se solicitaba determinar sus divisores. Observándose que, en el desarrollo teórico del contenido en dichos libros, no se esgrimía ninguna definición sobre lo que representa un divisor en el conjunto de números enteros, sino a lo sumo cuando un número es divisible o múltiplo de otro. Encontrándose solamente, en el libro Matemática 7, el caso de cuando un número divide a otro. También destacamos la carencia de una definición o concepto formal de máximo común divisor y mínimo múltiplo en el libro Matemática 7, siendo que solamente brinda un ejemplo de cálculo, para posteriormente proponer diversos problemas.

Con respecto al problema 75 del Libro Navegantes del Conocimiento, en el mismo también se debía brindar un par de números coprimos, sin embargo, en el desarrollo teórico del libro no se observó ningún enunciado sobre lo que son los números coprimos y como determinarlos. Siendo necesaria la introducción de tales definiciones para poder dar con lo solicitado en dicho problema. Cabe resaltar que algunos números de la lista resultaban ser relativamente grandes, propiciando la posibilidad de tener muchos divisores (más de uno), generando la necesidad de incluir la propiedad que determina la cantidad de divisores que tiene un número.

Se debe remarcar que en determinadas situaciones problemáticas fue necesaria la introducción de criterios de divisibilidad que permitieran resolver tales problemas, esto debido en gran medida a que en el desarrollo teórico del libro no se esgrimía tales criterios, como ser en el caso particular de la *situación problemática 75* del libro Navegantes del Conocimiento y en las del libro Matemática II de María Dolores Álvarez.

c) Se resalta que existen demasiadas diferencias y pocas semejanzas entre los procedimientos y argumentos que se encuentran en el desarrollo teórico del libro y aquellos necesarios para resolver las situaciones problemáticas propuestas. Con respecto a las diferencias, estas pudieron observarse en la búsqueda de los divisores de un número, en la determinación de si un número era primo o no, en aplicación de criterios de divisibilidad y en el cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de números enteros. Como ejemplo puede destacarse la situación problemática 76 del libro Logonauta, en el mismo se solicitaba determinar si un número era divisor de otro, sin embargo, en la propuesta teórica no se esgrimía ningún procedimiento para su cálculo como así tampoco ningún enunciado conceptual sobre lo que representa un divisor. Esto también pudo observarse en las situaciones problemáticas 3 y 7 del libro Matemática 7, en los cuales se solicitaba el cálculo de divisores, siendo que en la propuesta teórica no se esgrime ninguna definición sobre ello en el conjunto de números enteros. A la vez, en los problemas 15, 16 y 21, se solicitaba determinar números que sean divisibles por otros, sin embargo, en la propuesta teórica no se brindaba ninguna definición sobre lo que significa que un número sea divisible por otro.

También puede destacarse la situación problemática 28 del libro Matemática II, en el que se solicitaba aplicar reglas o criterios de divisibilidad, sin embargo, en la propuesta teórica no se esgrimía dichos criterios. A su vez, puede destacarse la situación problemática 37 del libro Matemática II de María Alvarez, en el que se solicitaba determinar el máximo común divisor (mcd) o divisor común mayor de números enteros, observándose que en la propuesta teórica textualizada no se brindaba ningún enunciado matemático sobre lo que representaba el mcd de números enteros, como así tampoco su determinación.

Con respecto a las semejanzas en las argumentaciones, estas pueden observarse en los conceptos de número primo y criterios de divisibilidad. Como ejemplo destacable, en la resolución de la situación problemática 31 se utiliza el concepto de número primo de la propuesta teórica textualizada del libro Matemática II de María Álvarez. También se destaca la situación problemática 23 del libro Matemática II de Andrea Berman, en el que se utilizó los criterios de divisibilidad de la propuesta teórica textualizada. En estos ejemplos puede observarse, que no es tarea sencilla elaborar las relaciones conceptuales necesarias para resolver los problemas solamente desde el conocimiento teórico desarrollado en tales libros. A su vez, se destaca la utilización reiterada del Teorema Fundamental de la Aritmética y los criterios de divisibilidad del libro Matemática 7

d) De acuerdo a las afirmaciones realizadas anteriormente y a todo lo desarrollado en el cuarto capítulo, se evidencia que en general la propuesta teórica textualizada que se brinda en los libros seleccionados no es lo suficientemente exhaustivo para resolver todas las situaciones problemáticas propuestas. Se considera necesaria en la mayoría de los problemas la introducción de enunciados matemáticos que permitan establecer las relaciones conceptuales necesarias para el sistema de prácticas de las resoluciones problemáticas. Pudiéndose observar que, con respecto a las vinculaciones, las de carácter directa solo se presentaron en tres situaciones problemáticas y correspondientes solo al 4to libro. Las de vinculación fuerte se presentaron en la gran mayoría de los problemas por resolver y en cuanto a la vinculación débil solamente en tres problemas.

En todos los libros, el enunciado matemático más necesario fue la definición de divisor de números enteros. En los libros de Logonautas y Matemática II de María Álvarez los más necesarios fueron los criterios de divisibilidad y la definición de mínimo común múltiplo y máximo común divisor. En el libro Matemática 7 también fue necesario un enunciado con respecto a las condiciones que cumplen dos números enteros para ser divisibles, como así también una definición formal sobre mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Como se puede observar en el capítulo 4, al momento de construir el sistema de prácticas de las resoluciones de las situaciones problemáticas, existieron relaciones incompletas en la propuesta teórica textualizada de cada libro. Si bien se considera que el desarrollo conceptual del libro no necesariamente tiene que brindar todas las herramientas conceptuales para resolver todos los problemas, sí se considera conveniente que brinde aquellas que permitan establecer una vinculación directa o fuerte entre lo necesario y lo utilizado para resolver los problemas.

La falta de exhaustividad en el desarrollo de los enunciados en la propuesta textualizada podría deberse a razones muy variadas y diversas. Una de ellas puede ser a las condiciones de publicación que impone la editorial, ocasionando una limitación el número de hojas destinada para cada contenido. Esto último puede derivarse de las respuestas a las preguntas descriptivas de la componente epistémica, desarrollado en el capítulo 4. En dicho análisis con respecto a las definiciones, proposiciones y procedimientos que se desarrollaba en el libro, se observó una cantidad mínima de teoría que guardaba relación con algunas situaciones problemáticas propuestas.

En el caso de los libros Navegantes del Conocimiento de Pablo Amster y Matemática II de María Dolores Álvarez se planteaban básicamente situaciones de ejercitación y aplicación de teoría matemática, con poca o casi ninguna relación con un contexto real próximo al alumno. Con respecto al libro Matemática 7, también pudo observarse mayormente problemas de cálculo y pocos con un contexto real.

Otra cuestión importante de señalar como posible razón es aquella relacionada con el autor del libro. Éste pudo reflexionar como pertinente lo expresado en el desarrollo teórico, considerando tal vez que aquello que fuera necesario para resolver las situaciones problemáticas puedan o deban abordarse por parte del lector o profesor, no obstante, no se pudo evidenciar en ninguno de los libros algún comentario respecto a esto último.

Como aportes a la enseñanza y/o investigación se resalta que el establecimiento de una red de relaciones entre los distintos objetos primarios de un contenido en pos de la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen para resolver, permitirá no sólo determinar si es necesario o no la introducción de un enunciado en particular sino, además, plantear nuevas actividades que tengan como objetivo un trabajo pertinente con la temática involucrada en el mismo.

En relación con la importancia de este estudio para la formación inicial y permanente de un profesor en matemática, se considera que es indispensable que en este ámbito se estudie en profundidad los contenidos del Nivel Medio a partir de la elaboración de minuciosos análisis didácticos y semióticos, pues la comprensión de la complejidad conceptual involucrada en una tarea de aprendizaje de los alumnos y de las dificultades que conlleva coloca al docente (o futuro docente) en una mejor posición para poder plantear y gestionar procesos de construcción de conocimientos.

Bibliografía

Alzate Piedrahita, M. V. (1999). El texto escolar como instrumento pedagógico: Partidarios y detractores. *Revista de Ciencias Humanas, 21*(Septiembre), 110--118.

Batanero, C; Diaz, C y Mayén, S (1.999). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. Statistics Education Research Journal, 8(2), 74 – 93. Disponible en http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

Becker, María Elena. Pietracola, Norma y Sánchez, Carlos. (2001). Aritmética. Editorial Red Olímpica.

Bodi, Samuel David. (2008). Tesis Doctoral: Análisis de la comprensión de la Divisibilidad en el conjunto de los números Naturales. Universidad de Alicante. Facultad de Educación.

Cabero, J., Duarte, A. & Barroso, J. (1989). La formación del profesorado en nuevas tecnologías: retos hacia el futuro. En J. Ferrés & P. Marqués (Eds.), *Comunicación educativa y nuevas tecnologías*. Barcelona: Praxis.

Cabero, J., Duarte, A., & Romero, R. (1995). Los libros de texto y sus potencialidades para el aprendizaje. En J. Cabero & L. M. Villar (Eds.), *Aspectos Críticos de una Reforma Educativa*. Sevilla: Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones.

Cañada Ordoñez, Carmen. (2018). Tesis Doctoral: La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en álgebra superior mediada por un entorno informático. Universidad de Jaén. Facultad de humanidades y ciencias de la educación departamento de didáctica de las ciencias. Presentada el 16 de julio de 2018.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockroft*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación.* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/16309/1/Tesis854-160226.pdf

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 51-71.

Espinoza, Ricardo Fabián. (2007). Tesis de licenciatura en didáctica de la matemática: Divisores: determinación de prácticas asociadas. Universidad Nacional Del Nordeste. Facultad De Ciencias Exactas Y Naturales Y Agrimensura.

Etchegaray, Silvia. (1998). Tesis de maestría en didáctica de la Matemática: *Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de la teoría de números.* Universidad nacional de río cuarto. Facultad De Ciencias Exactas Físico-Químicas Y Naturales.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to

Font, V. planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje 33, 89-105.

Font, V. y Godino, J. D. (2.007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educao Matemática Pesquisa, 67-98.

García Mateos, A., & Caballero García, P. A. (2005). *La tecnología digital en el aula: un instrumento al servicio de los procesos de enseñanza---aprendizaje*. Madrid: Universidad Camilo José Cela.

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática. Monografía de Investigación para el Concurso a Cátedra de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperable en: http://www.ugr.es/

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada.Disponibleen,http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24 agosto14. pdf

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas.

Godino, J. D. (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Jornada Internacional del estudio en Matemática.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221–252

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Nardoni, Marta Graciela; Pochulu, Marcel David (2013). La enseñanza de los números racionales en la escuela secundaria ¿Qué proponen los textos escolares? Universidad Nacional del Litoral (Argentina) - Universidad Nacional de Villa María (Argentina). VII CIBEN. Comunicación breve. Montevideo Uruguay del 16 al 20 de septiembre

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18* (1), 49-76.

Nardoni, Marta Graciela. (2014). Tesis de Maestría “La comprensión que tienen los alumnos referida a números racionales, como objeto matemático, al terminar la escuela secundaria”. Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias.

Ordoñez Montañez, Candy Clara. (2014). Tesis De Magíster En Enseñanza De Las Matemáticas: La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria. Pontifica Universidad Católica del Perú

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? Synthese, 134.

Quintana, A. y Montgomery, W. (Eds.) (2006). Metodología de Investigación Científica Cualitativa. Lima: UNMSM.

Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(2), 233-265.

Samaja, Juan. (2004). Epistemología y Metodología: Elementos para una teoría de la investigación científica. Cuarta reimpresión. Editorial Universitaria de Bs. As.

Sergi Bermejo. (2003). Desarrollo de robots basados en el comportamiento. Ediciones UPC the general in mathematics education. Educational Studies in Mathematics 69, 33-52. Para la parte de niveles de análisis

Sirvente María Teresa, Rigal Luis, Sarle Patricia y Liosa Sandra. (2011) La investigación cualitativa como modo de generación conceptual Ponencia para el

Primer Coloquio Internacional de Investigación Cualitativa, CEIL – PIETTE – CONICET.

Tamayo y Tamayo Mario, 1999, Serie aprender a Investigar. Edición: (corregida y aumentada).

Torres, J. (1991), *El curriculum oculto*, Madrid, Morata.

ANEXO

■ Gerente de ediciones
Daniel M. Arroyo

■ Editor
Gabriel H. Lagoa

■ Autores
Adriana B. Berio
Graciela C. Mancini
Silvana N. Mastucci
Miryam J. Mazzitelli
María Gabriela Prandini
Federico L. Sciotti
Graciela L. Tajes
Susana A. Vázquez
Logonautas en el tiempo:
Pablo Amster
Leonardo Moledo
Irene Zapico

■ Corrector de estilo
Gabriel Valeiras

■ Jefe del Departamento de Arte y Diseño
Lucas Frontera Schällibaum

■ Diseño de tapa
Natalia Udrisard

■ Diseño y diagramación
Paola Burniego

■ Coordinadora de imágenes y archivo
Samanta Méndez Galfaso

■ Tratamiento de imágenes y documentación
Máximo Jiménez
Tania Meyer
Pamela Donnadío

■ Ilustraciones
Cecilia B. Mur Ríos

■ Fotografías
Latinstock

■ Gerente de Diseño y Producción Editorial
Carlos Rodríguez

Berio, Adriana
Logonautas matemática 2 / Adriana Berio ; Graciela Mancini ; Silvana Mastucci. - 1a ed. 1a reimp. - San Isidro: Puerto de Palos, 2011.
256 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-547-340-9

1. Matemática. I. Mancini, Graciela II. Mastucci, Silvana III. Título
CDD 372.7

¿Quiénes escribieron Logonautas en el tiempo?

Pablo Amster

Es doctor en Matemática de la Universidad de Buenos Aires, en la cual es actualmente profesor adjunto del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Es investigador del CONICET. Es autor de numerosos trabajos de investigación científica en el área de ecuaciones diferenciales, y colabora en diferentes proyectos con universidades argentinas y extranjeras. Además, dicta con frecuencia conferencias y seminarios de divulgación, y escribe textos destinados a un público amplio. Ha publicado, entre otros trabajos, La matemática como una de las bellas artes (Editorial Siglo XXI, 2004), Mucho, poquito, nada. Un pequeño paseo matemático (Editorial Norma, 2007), y Fragmentos de un discurso matemático (Fondo de Cultura Económica, 2007).

Leonardo Moledo

Es escritor, matemático y periodista científico. Autor de numerosos libros de divulgación científica, novelas y obras de teatro.
Se desempeña como editor de Ciencias del diario Página 12 y es director del suplemento de ciencias Futuro, del mismo diario. Entre los años 2000 y 2007 fue director del Planetario Galileo Galilei de la Ciudad de Buenos Aires. Es profesor de periodismo científico en la Universidad Nacional de Quilmes, en la Universidad de Buenos Aires y en la Universidad Nacional de Entre Ríos.

Irene Zapico

Es profesora de Matemática. Se desempeña como Profesora de Historia de la Matemática en el I. S. P. "Dr. Joaquín V. González" y como jefa de trabajos prácticos de la cátedra de matemática del CBC de la UBA. Coordina proyectos de investigación y es capacitadora docente en educación matemática.
Ha participado en diversos congresos y jornadas de educación matemática, en calidad de conferencista y de invitada, tanto en el país como en el exterior.
Colabora en revistas de educación y es autora de libros de texto.
Miembro de las comisiones directivas de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM) y de la Asociación de Matemática y Diseño (M & D).

ÍNDICE

9 Radicación y propiedades

$\sqrt[n]{a} = b$, si $b^n = a$

n es el índice · *a es el radicando* · *b es la raíz*

$b = 8$
$a = 56$
División

$\sqrt{144} = 12$ $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt{1} = 1$

Las **raíces** de índice par y radicando negativo no tienen solución en el conjunto de los números enteros.

Propiedades de la radicación

	Ejemplos	En símbolos
o Simplificación de índices y exponentes	$\sqrt{6^2} = \sqrt[4]{6^4} = 6$ $\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[15]{5^{15}} = 5$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot b]{a^{m \cdot b}}$ con $b \neq 0$
o Propiedad distributiva	$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ $\sqrt{100 : 25} = \sqrt{100} : \sqrt{25}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

10 Divisibilidad. Operaciones combinadas

Un número entero *a* es **divisible** por otro *b* (distinto de cero), cuando la división entera entre sus valores absolutos tiene resto 0. También se dice que *a* es múltiplo de *b*.
El **divisor común mayor** (dcm) entre dos o más números es el mayor divisor positivo que tienen en común esos números.

dcm (–30;12) = 6

El **múltiplo común menor** (mcm) entre dos o más números es el menor múltiplo positivo que tienen en común esos números.

mcm (–10;15) = 30

Para resolver un cálculo combinando todas las **operaciones** estudiadas, pueden seguir este orden:

- Se separa en términos (los signos + y – separan términos).
- Se resuelven las potencias y raíces.
- Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
- Se resuelven las sumas y restas.

ACTIVIDADES 10 DIVISIBILIDAD. OPERACIONES COMBINADAS

75. Resuelvan.

a) Completen la tabla

Número	Divisores
[illegible]	
3	
[illegible]	
5	
[illegible]	

Número	Divisores
−35	
−212	
125	
28	
[illegible]	

b) Escriban algunos pares de números coprimos.

76. Escriban V (Verdadero) o F (Falso).

a) −5 es un divisor es de −415. ☐

b) −415 es divisible por −5. ☐

c) 121 es un múltiplo de 11. ☐

d) −126 es un múltiplo de 36. ☐

e) −81 es un múltiplo de 27. ☐

f) −81 es divisible por −27. ☐

77. Resuelvan los cálculos usando la multiplicación 18 . (−7) = −126

a) $-126 : (-7) = \square$

b) $-126 : 7 = \square$

c) $-126 : 6 = \square$

d) $-126 : 3 = \square$

Nombre y apellido: *Curso:* *Fecha:* / /

ACTIVIDADES 10 DIVISIBILIDAD. OPERACIONES COMBINADAS

78. Completen la tabla.

a	b	dcm (a;b)	mcm (a;b)
[illegible]	[illegible]		
−80	16		
−14	−20		
30	40		

79. Escriban, en cada caso, un par de números enteros que verifiquen las siguientes condiciones.

a) mcm (r;s) = 60 y dcm (r;s) = 1

b) mcm (a;b) = 10 y dcm (a;b) = 5

c) mcm (u;x) = 60 y dcm (u;x) = 20

80. Resuelvan.

a) $3 + (2 - 6)^3 - \sqrt[3]{-125} =$

b) $[(-2)^5 : (-2)^2]^3 - (2 - 3 . 4) =$

c) $\sqrt{18} . \sqrt{12} + (-3 - 4 . 2) . (-1) =$

d) $\sqrt{3} . \sqrt{3} + \sqrt[3]{-216} + (-16)^0 =$

e) $2 . (5 - 9) + \sqrt[3]{3 . 40 + 5} =$

f) $\sqrt{(-6) . (-8) - 4 . 3} + (-8 - 3)^2 =$

Nombre y apellido: *Curso:* *Fecha:* / /

La edición de **Matemática II – Santillana Prácticas** es una obra colectiva creada y diseñada en el Departamento Editorial de Ediciones Santillana S.A. a partir de **Matemáticas 2** ESO – Proyecto **La Casa del Saber** por el siguiente equipo:

María Dolores Álvarez · Joaquín Hernández · Raquel S. Kalizsky · Alicia E. López · Ana Yolanda Miranda
María Rosario Moreno · Susana Parra · Gustavo E. Piñeiro · Manuela Redondo · Raquel Redondo
María Teresa Sánchez · Teresa Santos · Esteban Serrano.

Edición: Raquel S. Kalizsky

Jefa de edición: María Laura Latorre

Gerente de gestión editorial: Mónica Pavicich

Dirección editorial: Herminia Mérega

La realización artística y gráfica de este libro ha sido efectuada por el equipo de EDICIONES SANTILLANA S.A., integrado por:

Jefa de arte: Claudia Fano.

Diagramación: Sergio Israelson.

Tapa: María Mercedes Mayans.

Corrección: Juan Sosa.

Ilustración: Pablo Feliz.

Gráficos matemáticos: Pablo J. Kaczor.

Documentación fotográfica: Ariadna Demattei, Leticia Gómez Castro, Teresa Pascual y Nicolás Verdura.

Preimpresión: Miriam Barrios, Marcelo Fernández, Gustavo Ramírez y Maximiliano Rodríguez.

Gerencia de producción: Gregorio Branca.

Matemática II / María Dolores Álvarez ... [et.al.]. - 1a ed. 4a reimp. - Buenos Aires : Santillana, 2011.
144 p. ; 28x22 cm. - (Santillana Prácticas)

ISBN 978-950-46-2155-3

1. Matemática. 2. Enseñanza Secundaria. 3. Libros de Texto. I. Álvarez, María Dolores
CDD 510.712

Av. L. N. Alem 720 (C1001AAP),
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

ISBN: 978-950-46-2155-3
Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723.
Libro de edición argentina.
Impreso en China. *Printed in China.*
Primera edición: septiembre de 2009.
Cuarta reimpresión: noviembre de 2011.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de noviembre de 2011, en Bookbuilders, China.

DIVISIBILIDAD

23 **a.** Escribí los múltiplos de 7 comprendidos entre –40 y 40.

b. ¿Qué relación hay entre los múltiplos positivos y los negativos?

24 Mariana dice que para averiguar todos los divisores de un número trabaja como con los naturales, pero ahora tiene en cuenta que cada divisor puede ser positivo o negativo. Así, resulta que:

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \cdot 24 = (-1) \cdot (-24) \\ &= 2 \cdot 12 = (-2) \cdot (-12) \\ &= 3 \cdot 8 = (-3) \cdot (-8) \\ &= 4 \cdot 6 = (-4) \cdot (-6) \end{aligned}$$

¡y ya está! No hay otros pares de factores.

Escribí todos los divisores de 42, 63 y 90:

De 42: ±1; ±2; ___; ___; ___; ±14; ___ y ±42.

De 63: ___

De 90: ___

25 **a.** Escribí todos los múltiplos de –5, del –30 al 15.

b. ¿Cuáles son múltiplos también de 3?

26 En la actividad anterior fijate que los múltiplos de 3 y de 5 también lo son de 15. ¿Qué podemos afirmar de un número que es múltiplo de 2 y de 3? ¿Y de uno que lo es de 2 y de 5?
Comprobá con algunos ejemplos si se cumple lo que pensás.

2 Números enteros II

Los miembros de una banda de música siempre desfilaron formados en filas de 4. Sin embargo, este año no lo podrán hacer porque con los nuevos ingresantes la última fila no se completa.
Tampoco pueden desfilar formados de a 3 ni de a 2, por la misma razón. No obstante, si todas las filas fueran de 2 menos la última, donde iría uno solo, habría el doble de filas que si se formaran de a 4 y tuvieran la última fila incompleta.
¿Cuántos miembros componen la banda, sin son más de 25 y menos de 35? Justificá tu respuesta.

Usando las reglas de divisibilidad, determiná si estos números son divisibles por 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10.

a. 145 ___

b. –2.120 ___

c. 12.624 ___

Mirá lo que ocurre con las cifras de estos múltiplos de 11:

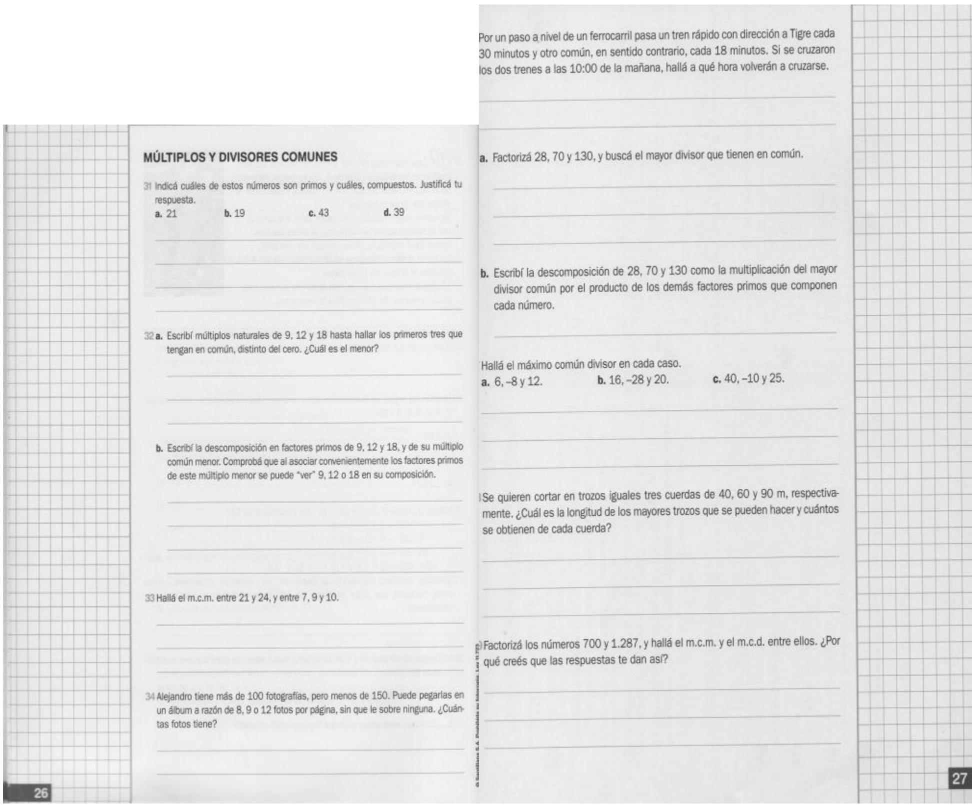
143 → 3 + 1 – 4 = **0**
5.236 → 6 + 2 – (3 + 5) = **0**
60.159 → 9 + 1 + 6 – 5 = **11**
536.492 → 2 + 4 + 3 – (9 + 6 + 5) = **–11**

¿Podrías inventar, siguiendo la regla de los números anteriores, otros cinco números que sean múltiplos de 11? Comprobá que lo son con una calculadora.

a. Completá los espacios con cifras apropiadas para que cada número sea divisible por 11.

3__6 4.3__8 8__.1__5

b. ¿Cuántas respuestas posibles hay para cada número?



MÚLTIPLOS Y DIVISORES COMUNES

31 Indicá cuáles de estos números son primos y cuáles, compuestos. Justificá tu respuesta.
a. 21 **b.** 19 **c.** 43 **d.** 39

32 **a.** Escribí múltiplos naturales de 9, 12 y 18 hasta hallar los primeros tres que tengan en común, distinto del cero. ¿Cuál es el menor?

b. Escribí la descomposición en factores primos de 9, 12 y 18, y de su múltiplo común menor. Comprobá que al asociar convenientemente los factores primos de este múltiplo menor se puede "ver" 9, 12 o 18 en su composición.

33 Hallá el m.c.m. entre 21 y 24, y entre 7, 9 y 10.

34 Alejandro tiene más de 100 fotografías, pero menos de 150. Puede pegarlas en un álbum a razón de 8, 9 o 12 fotos por página, sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas fotos tiene?

26

Por un paso a nivel de un ferrocarril pasa un tren rápido con dirección a Tigre cada 30 minutos y otro común, en sentido contrario, cada 18 minutos. Si se cruzaron los dos trenes a las 10:00 de la mañana, hallá a qué hora volverán a cruzarse.

a. Factorizá 28, 70 y 130, y buscá el mayor divisor que tienen en común.

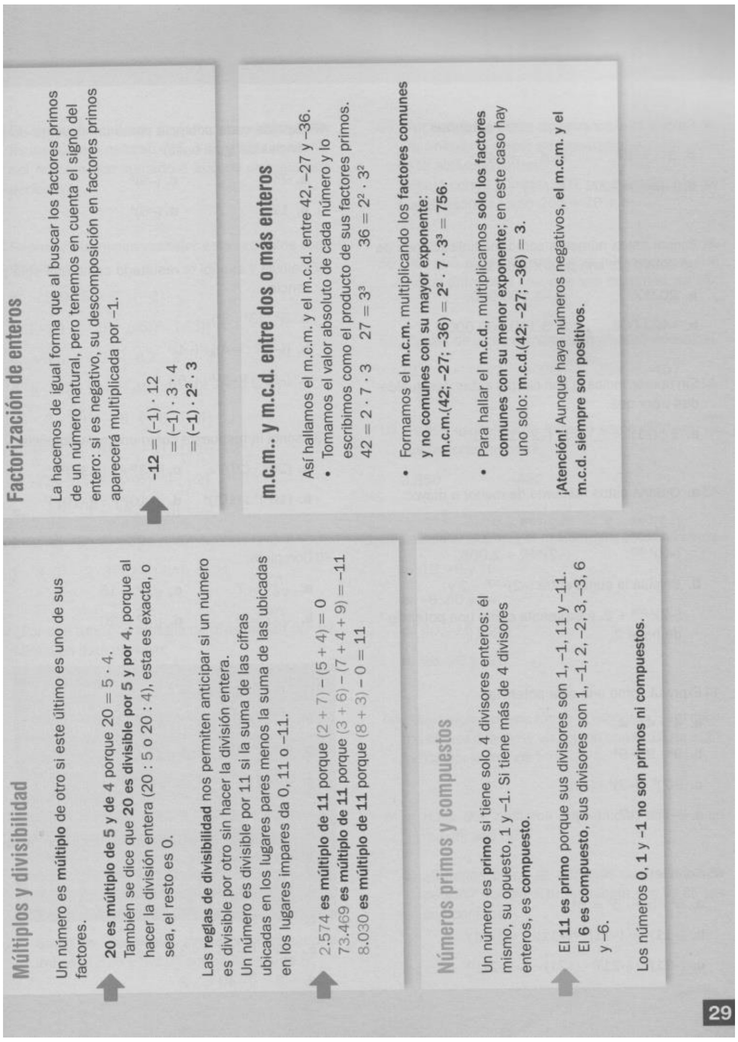
b. Escribí la descomposición de 28, 70 y 130 como la multiplicación del mayor divisor común por el producto de los demás factores primos que componen cada número.

Hallá el máximo común divisor en cada caso.
a. 6, –8 y 12. **b.** 16, –28 y 20. **c.** 40, –10 y 25.

Se quieren cortar en trozos iguales tres cuerdas de 40, 60 y 90 m, respectivamente. ¿Cuál es la longitud de los mayores trozos que se pueden hacer y cuántos se obtienen de cada cuerda?

Factorizá los números 700 y 1.287, y hallá el m.c.m. y el m.c.d. entre ellos. ¿Por qué creés que las respuestas te dan así?

27



Múltiplos y divisibilidad

Un número es **múltiplo** de otro si este último es uno de sus factores.

20 es múltiplo de 5 y de 4 porque $20 = 5 \cdot 4$.
También se dice que **20 es divisible por 5 y por 4**, porque al hacer la división entera ($20 : 5$ o $20 : 4$), esta es exacta, o sea, el resto es 0.

Las **reglas de divisibilidad** nos permiten anticipar si un número es divisible por otro sin hacer la división entera.
Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras ubicadas en los lugares pares menos la suma de las ubicadas en los lugares impares da 0, 11 o –11.

2.574 **es múltiplo de 11** porque $(2 + 7) - (5 + 4) = 0$
73.469 **es múltiplo de 11** porque $(3 + 6) - (7 + 4 + 9) = -11$
8.030 **es múltiplo de 11** porque $(8 + 3) - 0 = 11$

Números primos y compuestos

Un número es **primo** si tiene solo 4 divisores enteros: él mismo, su opuesto, 1 y –1. Si tiene más de 4 divisores enteros, es **compuesto**.

El **11 es primo** porque sus divisores son 1, –1, 11 y –11.
El **6 es compuesto**, sus divisores son 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 y –6.

Los números **0, 1 y –1 no son primos ni compuestos.**

Factorización de enteros

La hacemos de igual forma que al buscar los factores primos de un número natural, pero tenemos en cuenta el signo del entero: si es negativo, su descomposición en factores primos aparecerá multiplicada por –1.

$$\mathbf{-12} = (-1) \cdot 12$$
$$= (-1) \cdot 3 \cdot 4$$
$$= \mathbf{(-1) \cdot 2^2 \cdot 3}$$

m.c.m.. y m.c.d. entre dos o más enteros

Así hallamos el m.c.m. y el m.c.d. entre 42, –27 y –36.

- Tomamos el valor absoluto de cada número y lo escribimos como el producto de sus factores primos.
$42 = 2 \cdot 7 \cdot 3$ $\quad 27 = 3^3$ $\quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$
- Formamos el **m.c.m.** multiplicando los **factores comunes y no comunes con su mayor exponente:**
m.c.m.(42; –27; –36) = $\mathbf{2^2 \cdot 7 \cdot 3^3 = 756}$.
- Para hallar el **m.c.d.**, multiplicamos **solo los factores comunes con su menor exponente;** en este caso hay uno solo: **m.c.d.(42; –27; –36) = 3.**

¡Atención! Aunque haya números negativos, **el m.c.m. y el m.c.d. siempre son positivos.**

29

MATEMÁTICA II

MATEMÁTICA II
es una obra colectiva, creada y diseñada en el
Departamento Editorial de Ediciones Santillana S.A.,
bajo la dirección de Herminia Mérega,
por el siguiente equipo:

Andrea Berman
Daniel Dacunti
Martín M. Pérez
Ana Verónica Veltri
Leonardo Moledo (sección Dar la nota)

Editora: Laura Spivak
Editora sénior: María Laura Latorre
Coordinación editorial: Mónica Pavicich
Subdirección editorial: Lidia Mazzalomo

Nuevamente Santillana

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

La realización artística y gráfica de este libro ha sido efectuada por el equipo de EDICIONES SANTILLANA S.A., integrado por:

Coordinación de arte:	Mariana Valladares.
Tapa:	Mariana Valladares.
Diagramación:	Darío Dip.
Ilustración:	Muriel Frega y Douglas Wright.
Gráficos matemáticos:	Pablo J. Kaczor.
Documentación fotográfica:	Macarena Ayestarán, Patricio Calvo y Ariadna Demattei.
Fotografía:	Archivo Santillana y Daniel Jurjo.
Corrección:	Juan Sosa.
Preimpresión:	Miriam Barrios, Marcelo Fernández, Gustavo Ramírez, Maximiliano Rodríguez y Nicolás Verdura.
Subgerencia de producción industrial:	Gregorio Branca.

Números naturales y enteros Pág. 7

ISBN: 978-950-46-1863-8

Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723.
Impreso en Argentina. Printed in Argentina.
Primera edición: octubre de 2007.
Cuarta reimpresión: enero de 2011.

Matemática II / Andrea Mónica Berman... [et.al.]. - 1a ed. 4a reimp. - Buenos Aires : Santillana,
2011.
160 p. ; 28x22 cm. (Nuevamente)

ISBN 978-950-46-1863-8

1. Matemática. 2. Educación Secundaria Básica.
CDD 510.071 2

Este libro se terminó de imprimir en el mes de enero de 2011, en World Color Pilar, calle 8 y 3, Parque Industrial Pilar, Buenos Aires, República Argentina.

Multiplicación y división de enteros. Divisibilidad

20. Con 6 cuadraditos se pueden armar dos rectángulos diferentes.

¿Cuántos se pueden armar con 8 cuadraditos? ¿Y con 9? ¿Y con 11?

21. ¿Qué número natural puede ir en cada casilla? En cada caso indicá si hay más de una posibilidad.

$$\begin{array}{r|l} \square & 9 \\ \hline 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \square & 4 \\ \hline \square & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \square & 5 \\ \hline 3 & \square \end{array}$$

22. Sin hacer ninguna cuenta, rodeá los cálculos cuyos resultados tienen resto cero al dividirlos por 7.

$28 \cdot 9$ $\quad 123 \cdot 7 + 7$ $\quad 439 \cdot 7 + 2$ $\quad 19 \cdot 3 - 7$

23. Con los dígitos **4**, **0**, **5** y **9** formá, si es posible, un número de cuatro cifras que cumpla la condición.

a) Es múltiplo de 5, pero no de 2.
b) Es múltiplo de 10 y es divisible por 4.
c) No es divisible por 5 ni por 2.
d) Es múltiplo de 6, pero no de 10.
e) No es múltiplo de 9.

24. Mirá los ejemplos: $2 + 3 = 5$ $\;2 + 5 = 7$ $\;2 + 11 = 13$
¿Sucederá siempre que al sumar dos números primos se obtiene otro número primo? Mostrá ejemplos.

25. En la siguiente división:

$$\begin{array}{r|l} 24 \times \mathbf{m} & 3 \\ \hline \end{array}$$

a) Encontrá, si es posible, un valor para el número natural **m** de manera tal que el resto de la división sea 0.
b) Encontrá, si es posible, algún valor de el número natural **m** para el cual el resto no sea 0.

Múltiplos y divisores

- Un número es **múltiplo** de otro si este último es uno de sus factores. Por ejemplo, 12 es múltiplo de 3 porque 12 se puede escribir como $3 \cdot 4$.
También se dice que 12 es **divisible** por 3.

Reglas de divisibilidad

Un número es divisible por...
...**2** si termina en 0, 2, 4, 6 u 8.
...**3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
...**4** si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4.
...**5** si termina en 0 o en 5.
...**6** si es a la vez múltiplo de 2 y de 3.
...**9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
...**10, 100, 1 000,** si termina en 0, 00, 000, respectivamente.

Números primos y compuestos

- Un número es **primo** si tiene únicamente dos divisores naturales: **él mismo y 1**. Por ejemplo, 13 es primo, ya que solo es divisible por 13 y por 1.
- Un número es **compuesto** si tiene **más de dos divisores naturales**. Por ejemplo, 9 es compuesto, ya que es divisible por 9 y por 1, pero también por 3.
- Los números **0** y **1** **no son primos ni compuestos**.

16. Buscá un número que multiplicado por 4 dé por resultado −12. Podés usar la calculadora.

17. Completá las siguientes tablas de multiplicar:

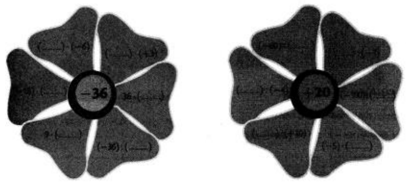
5	10
4	8
3	
2	
1	
0	
−1	
−2	

$\times 2$

4	−8
3	−6
2	
1	
0	
−1	
−2	
−3	

$\times (-2)$

18. Completá el cálculo de cada pétalo para que todos den el resultado del centro de la flor.



29. Rodeá con verde los cálculos que dan +24 y con rojo los que dan −24.

$(-3)\cdot(+8)$ $\quad (+4)\cdot(-6)$ $\quad (+2)\cdot(+12)$ $\quad (-1)\cdot(+24)$

$(+48):(-2)$ $\quad (-48):(-2)$ $\quad (-24):(-1)$ $\quad (-48):(+2)$

30. Completá.

a) $(+28):(-7) =$ ____ **c)** $(+32):$ ____ $= -8$ **e)** $(-13):$ ____ $= +13$

b) $(-16):(-8) =$ ____ **d)** ____ $:(-4) = +9$ **f)** $[(+20):(-5)]:(-2) =$ ____

31. Decidí si cada afirmación es correcta o no.
- El producto entre dos números enteros es positivo si los dos números tienen signos opuestos.
- El producto entre dos números enteros es positivo si los números son del mismo signo.

32. Encontrá, si es posible, números enteros **a** y **b** tales que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 24$. ¿Cuántos pares de números cumplen la condición pedida?

____

33. Encontrá, si es posible, números enteros **a** y **b** tales que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -24$. ¿Cuántos pares de números cumplen la condición pedida?

____

Ya viste que los divisores naturales de 6 son 1, 2, 3 y 6.
También viste que $(-2)\cdot(-3) = 6$ y que $(-1)\cdot(-6) = 6$; entonces, en $\mathbb{Z}$, los **divisores** de 6 son −6, −3, −2, −1, 1, 2, 3 y 6. O sea, los divisores enteros de un número entero son sus divisores naturales y sus opuestos.

En el conjunto $\mathbb{N}$ un número es primo si tiene solo dos divisores (1 y el mismo número).
Al trabajar en $\mathbb{Z}$, se extiende el concepto: un número entero **a es primo** si tiene **solo cuatro divisores** (1, −1, **a** y −**a**).
Por ejemplo: −7 es primo, ya que tiene solo estos cuatro divisores: 1, −1, 7 y −7. En cambio, −9 no es primo, ya que tiene seis divisores: 1, −1, 3, −3, 9 y −9.

Si un número **a** es di
de un número **b**, en
ces −**a** también lo e

−1, **0** y **1** no son pri
ni compuestos.

34. ***En equipo***

Completen con verdadero (V) o falso (F).

a) Los divisores de −20 son los mismos que los de su opuesto. ____
b) El 1 es el único número entero que es divisor de cualquier entero. ____
c) Si un número es primo, su opuesto también lo es. ____
d) Un número entero puede tener una cantidad impar de divisores. ____

35. Rodeá los números primos.

−35 $\quad$ +17 $\quad$ −29 $\quad$ −14

+51 $\quad$ −33 $\quad$ −39 $\quad$ −19

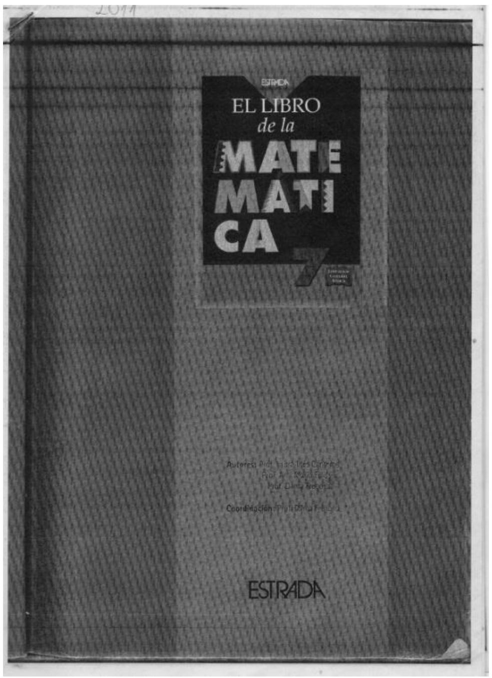
36. Uní cada número verde con aquellos números ana dos que sean divisores de él.

−21 $\quad$ +18 $\quad$ 25 $\quad$ −10

−4 $\quad$ +2 $\quad$ −5 $\quad$ −3

37. Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si se multiplican dos múltiplos de 3 el resultado es un múltiplo de 6.
b) Todos los números primos son impares.
c) Si un número es divisible por 4 entonces también es divisible por 8.
d) Si a un múltiplo de 3 se lo divide por 2 y se obtiene cero de resto, entonces ese número es múltiplo de 6.



Múltiplos y divisores

Los números que aparecen como solución del problema 2 son: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Estos números **dividen** a 12, es decir, son *divisores* de 12. También se dice que 12 es *múltiplo* de cada uno de esos números.

Así, 3 divide a 12 porque existe un entero **c** que multiplicado por 3 da 12. En este caso, **c** vale 4. Para expresar que 3 divide a 12 escribimos: 3 | 12. Del mismo modo, 2 | 12 significa que 2 divide a 12.

CUESTIÓN: ¿CUÁL ES EL VALOR DE **c** PARA CADA UNO DE LOS DIVISORES DE **12**? EN PARTICULAR, ¿CUÁNTO VALE **c** PARA EL DIVISOR **12**?

Definición:
Dados dos números enteros **a** y **b** donde **a** ≠ **0**, decimos que **a divide a b** (y lo escribimos para abreviar **a|b**), si existe un número entero **c** tal que **a · c = b**

En nuestro ejemplo,
1 es divisor de 12, porque existe un número entero, el 12, tal que **1 · 12 = 12**
2 es divisor de 12, porque existe un número entero, el 6, tal que **2 · 6 = 12**
3 es divisor de 12, porque existe un número entero, el 4, tal que **3 · 4 = 12**
4 es divisor de 12, porque existe un número entero, el 3, tal que **4 · 3 = 12**
6 es divisor de 12, porque existe un número entero, el 2, tal que **6 · 2 = 12**
12 es divisor de 12, porque existe un número entero, el 1, tal que **12 · 1 = 12**

¿Son estos todos los divisores de 12? **No**, porque, por ejemplo, para −2, también es verdadera la siguiente expresión:
−2 es divisor de 12, porque existe un número entero, el −6, tal que −2 · (−6) = 12

CUESTIÓN: ¿CUÁLES SON TODOS LOS DIVISORES DE 12, CONSIDERANDO TAMBIÉN LOS ENTEROS NEGATIVOS? ¿POR QUÉ EN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2 SOLO APARECIERON LOS DIVISORES POSITIVOS?

Los divisores positivos de 28, diferentes al mismo 28, son: 1, 2, 4, 7 y 14. Si suman esos números, obtienen 28... Hay muy pocos números que tienen esa propiedad, por eso los griegos los llamaron "números perfectos".

Atención: ¿Por qué, según la definición, **a** debe ser distinto de cero?
Porque si **b** ≠ **0**, no existe un entero **c** tal que **0 · c** dé **b**.
Y si **b = 0**, entonces cualquier valor que pongamos para **c** hace verdadera la expresión **0 · c = 0**

2 → divisor
8 8 |2
0 4

ESTA ES LA MARCA PARA LOS EJERCICIOS MÁS DIFÍCILES

ejercicios

1 Dados los siguientes números enteros: −2 , 3, 5, −10, −20, −1, elijan uno de ellos y distingan tres múltiplos que estén en esa lista. Hagan lo mismo con otro de esos números.

2 Escriban todos los enteros positivos de dos cifras que sean múltiplos de 14.

3 Escriban dos números enteros distintos tales que cada uno de ellos sea divisor del otro.

4 Escriban los números enteros x, múltiplos de 25, tales que $x < 10$ y, a la vez, $x > -130$.

5 "Los números 1 y −1 son divisores de cualquier número entero." ¿Cómo justifican esta afirmación?

6 ¿Cuántos divisores tienen el 1 y el −1?

7 De las siguientes expresiones, distingan las verdaderas (V) y las falsas (F) y justifiquen.
Por ejemplo:
2 es divisor de 20 — V, porque existe un número entero, el 10, tal que 2 · 10 = 20
−4 es divisor de 10 — F, porque **no existe** un entero **c** tal que **c** · (−4) dé 10
3 es divisor de 18
2 es divisor de −18
3 es divisor de −9
−1 es divisor de 7

8 En **a = b · c**, ¿qué pueden decir del signo de **c** en cada caso?
Sugerencia: piensen en la regla de los signos de la multiplicación de números enteros.
Si **a** y **b** son dos números enteros positivos, **c** es ....
Si **a** y **b** son dos números enteros negativos, **c** es...............
Si **a** y **b** son números enteros de distinto signo, **c** es ....

Números primos

Consideren los divisores de los siguientes números enteros: −3, 5, 10, 8. ¿Están de acuerdo con que los divisores de −3 son 3, −3 ,1, −1? ¿Y que los divisores de 5 son 5, −5, 1, −1? ¿Y que los de 10 son 10, −10, 5, −5, 2, −2, 1, −1? ¿Y, finalmente, que los divisores de 8 son −8, 8, −4, 4, −2, 2, 1, −1?

Algunos números enteros tienen la propiedad de tener cuatro divisores, que son: el mismo número, el opuesto, 1 y (−1). Ese es el caso, en nuestros ejemplos, de los números 5 y −3; a ese tipo de números se los llama *números primos*.

Se llama número primo a todo número entero que tenga exactamente cuatro divisores.

Atención: **1 no es primo** porque posee solo dos divisores: 1 y −1.
−1 no es primo porque posee solo dos divisores: 1 y −1.
0 no es primo.
Los divisores de 2 son: −2, 2, −1, 1. Entonces **2 es primo**, ¡aunque es par!
¿Les convence esto? ¿O les parece muy artificial? ¿O demasiado tonto? ¿O interesante?
¿O, tal vez, curioso?

CUESTIÓN:
EL PRODUCTO DE DOS NÚMEROS PRIMOS, ¿ES PRIMO?

¿Cómo encontrar los números primos?

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
¿Cuál es el que sigue? El 19. Cuando los números son "chicos", se hacen los cálculos para buscar los divisores; actualmente, con la ayuda de computadoras, se pueden calcular números primos que no son "chicos".

Cualquier entero positivo distinto de 1 y que no sea primo puede descomponerse en un producto de factores primos; por eso se llaman *números compuestos*.
Por ejemplo, el número 90 es compuesto. ¿Por qué? Es par, entonces es el resultado de una multiplicación de 2 por cierto número **c**. ¿Cómo encontramos ese número **c**?

Al dividir 90 por 2, hallamos 45. Entonces: **90 = 2 · 45**
Podemos seguir descomponiendo 45, y obtenemos: **90 = 2 · 5 · 9**
De los tres factores, 2 y 5 son primos, pero 9 se puede expresar como un producto.
Así, **90 = 2 · 5 · 3 · 3**
Observen que 90 = 2 · 5 · 3 · 3 = 3 · 5 · 2 · 3 = ... ¿Por qué?
Podemos empezar la descomposición con cualquier factor, sin embargo, obtendremos los mismos factores primos. Ya volveremos sobre esta importante propiedad.

¿Les parece que hay muchos primos? Euclides (aproximadamente, 350 a.C.) dio a conocer una demostración sobre la existencia de infinitos primos en el conjunto de los enteros. Se sabe que el 257 es primo, lo mismo que el 65 537 o que el 122 921... Con ayuda de computadoras, se pudieron determinar números primos aún más grandes.

¿Para qué sirven los números primos? Teorema fundamental de la aritmética

Este título da idea de algo importante y tal vez difícil. Veamos de qué se trata. Dos páginas atrás definimos los números compuestos, y mostramos una descomposición del número 90 en sus factores primos. Empezamos por hacer la división por 2, luego por 5, y finalmente por 3. Así expresamos 90 como:

90 = 2 · 5 · 3 · 3

¿Es única esta descomposición de 90? No, podemos intentar hacer una descomposición diferente, por ejemplo:
Uno de los divisores primos de 90 es 2, entonces podemos escribir: 90 = 2 · 45
El 45 no es primo, pero tiene un divisor primo, el 3. Entonces: 90 = 2 · 3 · 15
El 15 no es número primo, pero podemos dividirlo por 5. Obtenemos:

90 = 2 · 3 · 5 · 3

La descomposición se acaba aquí porque todos los factores son primos.

CUESTIÓN: ¿EN QUÉ SE DIFERENCIAN LOS DOS PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS PARA OBTENER LA DESCOMPOSICIÓN DEL 90 EN FACTORES PRIMOS?

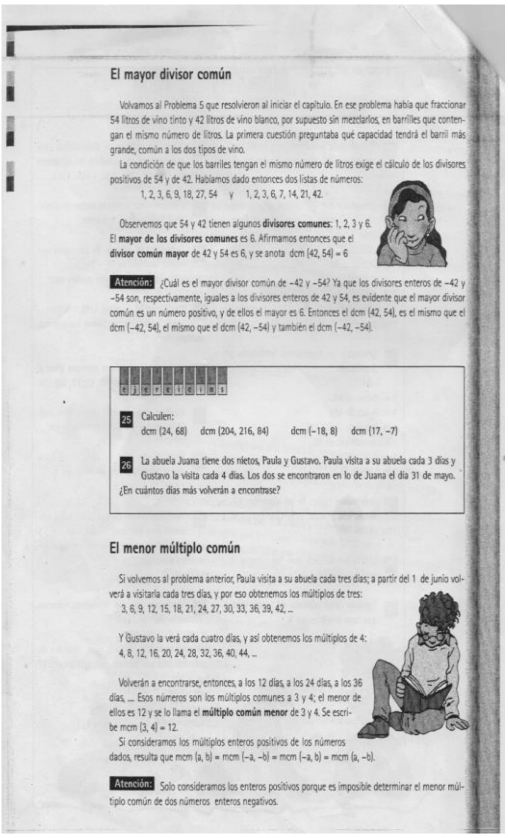
Otra forma de descomponer el 90, si consideramos también los divisores negativos, es:
Dividimos por −5, entonces: 90 = (−5) · (−18)
Luego descomponemos −18, y nos queda: 90 = (−5) · (−2) · 9
Finalmente, el único factor compuesto es 9,
entonces:

90 = (−5) · (−2) · 3 · 3

CUESTIÓN: BUSQUEN AL MENOS OTROS TRES PROCEDIMIENTOS QUE PERMITAN EXPRESAR 90 COMO PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS. ¿HAY SOLO TRES MÁS?

Ya habrán observado que aún cuando el procedimiento que seguimos en cada caso no es exactamente el mismo, obtuvimos **la misma** descomposición de 90 como producto de factores primos. ¿En qué sentido es la misma? Es la misma en el sentido que aparecen los mismos números primos, o sus opuestos. (Como el producto es conmutativo, no es necesario esperar el mismo orden.)
Esta propiedad que nosotros verificamos para un número particular, el 90, se verifica para cualquier número entero compuesto. Y es sobre eso que trata *el teorema fundamental de la aritmética*.

Todo entero distinto de 0 puede descomponerse como el producto de (+1) o (−1) por factores primos positivos. Esta descomposición es única, salvo el orden y los signos de los factores.



El mayor divisor común

Volvamos al Problema 5 que resolvieron al iniciar el capítulo. En ese problema había que fraccionar 54 litros de vino tinto y 42 litros de vino blanco, por supuesto sin mezclarlos, en barrilles que contengan el mismo número de litros. La primera cuestión preguntaba qué capacidad tendrá el barril más grande, común a los dos tipos de vino.

La condición de que los barriles tengan el mismo número de litros exige el cálculo de los divisores positivos de 54 y de 42. Habíamos dado entonces dos listas de números:

1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54 y 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

Observemos que 54 y 42 tienen algunos **divisores comunes**: 1, 2, 3 y 6. El **mayor de los divisores comunes** es 6. Afirmamos entonces que el **divisor común mayor** de 42 y 54 es 6, y se anota dcm (42, 54) = 6

Atención: ¿Cuál es el mayor divisor común de −42 y −54? Ya que los divisores enteros de −42 y −54 son, respectivamente, iguales a los divisores enteros de 42 y 54, es evidente que el mayor divisor común es un número positivo, y de ellos el mayor es 6. Entonces el dcm (42, 54), es el mismo que el dcm (−42, 54), el mismo que el dcm (42, −54) y también el dcm (−42, −54).

ejercicios

25 Calculen:
dcm (24, 68) dcm (204, 216, 84) dcm (−18, 8) dcm (17, −7)

26 La abuela Juana tiene dos nietos, Paula y Gustavo. Paula visita a su abuela cada 3 días y Gustavo la visita cada 4 días. Los dos se encontraron en lo de Juana el día 31 de mayo. ¿En cuántos días más volverán a encontrase?

El menor múltiplo común

Si volvemos al problema anterior, Paula visita a su abuela cada tres días; a partir del 1 de junio volverá a visitarla cada tres días, y por eso obtenemos los múltiplos de tres:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, ...

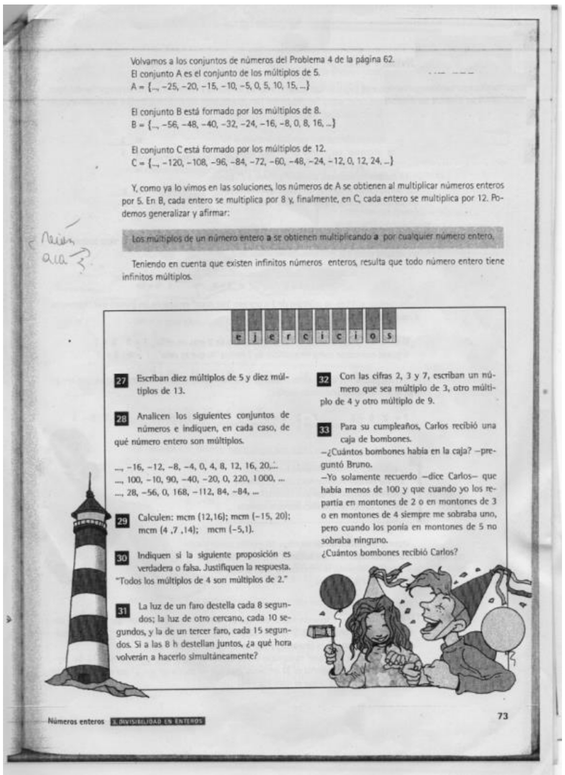
Y Gustavo la verá cada cuatro días, y así obtenemos los múltiplos de 4:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, ...

Volverán a encontrarse, entonces, a los 12 días, a los 24 días, a los 36 días, ... Esos números son los múltiplos comunes a 3 y 4; el menor de ellos es 12 y se lo llama el **múltiplo común menor** de 3 y 4. Se escribe mcm (3, 4) = 12.

Si consideramos los múltiplos enteros positivos de los números dados, resulta que mcm (a, b) = mcm (−a, −b) = mcm (−a, b) = mcm (a, −b).

Atención: Solo consideramos los enteros positivos porque es imposible determinar el menor múltiplo común de dos números enteros negativos.



Volvamos a los conjuntos de números del Problema 4 de la página 62.
El conjunto A es el conjunto de los múltiplos de 5.
A = {..., −25, −20, −15, −10, −5, 0, 5, 10, 15, ...}

El conjunto B está formado por los múltiplos de 8.
B = {..., −56, −48, −40, −32, −24, −16, −8, 0, 8, 16, ...}

El conjunto C está formado por los múltiplos de 12.
C = {..., −120, −108, −96, −84, −72, −60, −48, −24, −12, 0, 12, 24, ...}

Y, como ya lo vimos en las soluciones, los números de A se obtienen al multiplicar números enteros por 5. En B, cada entero se multiplica por 8 y, finalmente, en C, cada entero se multiplica por 12. Podemos generalizar y afirmar:

Los múltiplos de un número entero **a** se obtienen multiplicando **a** por cualquier número entero.

Teniendo en cuenta que existen infinitos números enteros, resulta que todo número entero tiene infinitos múltiplos.

ejercicios

27 Escriban diez múltiplos de 5 y diez múltiplos de 13.

28 Analicen los siguientes conjuntos de números e indiquen, en cada caso, de qué número entero son múltiplos.

..., −16, −12, −8, −4, 0, 4, 8, 12, 16, 20,...
..., 100, −10, 90, −40, −20, 0, 220, 1000, ...
..., 28, −56, 0, 168, −112, 84, −84, ...

29 Calculen: mcm (12,16); mcm (−15, 20); mcm (4 ,7 ,14); mcm (−5,1).

30 Indiquen si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justifiquen la respuesta. "Todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 2."

31 La luz de un faro destella cada 8 segundos; la luz de otro cercano, cada 10 segundos, y la de un tercer faro, cada 15 segundos. Si a las 8 h destellan juntos, ¿a qué hora volverán a hacerlo simultáneamente?

32 Con las cifras 2, 3 y 7, escriban un número que sea múltiplo de 3, otro múltiplo de 4 y otro múltiplo de 9.

33 Para su cumpleaños, Carlos recibió una caja de bombones.
−¿Cuántos bombones había en la caja? −preguntó Bruno.
−Yo solamente recuerdo −dice Carlos− que había menos de 100 y que cuando yo los repartía en montones de 2 o en montones de 3 o en montones de 4 siempre me sobraba uno, pero cuando los ponía en montones de 5 no sobraba ninguno.
¿Cuántos bombones recibió Carlos?

Números enteros 3. DIVISIBILIDAD EN ENTEROS 73

Curriculum Vitae

Breve Sintesis

Mi titulo de grado es Profesor en Matematica y me inicié en la docencia universitaria como ayudante en el Curso de Nivelación y Ambientación 2005. A partir de allí, fui adscripto en diversas asignaturas, Análisis Matemático III y Matemática Financiera para el Profesorado y Licenciatura en Matemática, en ALGEBRA para Agrimensura, adscripto por concurso en dicha asignatura con el cargo de Auxiliar Docente de Primera.

Fui Auxiliar Docente de Primera Simple y Jefe de Trabajos Prácticos simples en diversas asignaturas, en todas ellas por concurso público de títulos, antecedentes y oposición. Finalicé y completé el plan de estudio de la carrera de posgrado "Especialización En Docencia Universitaria", con la aprobación del trabajo final.

Correo de contacto: adrian1475@gmail.com