Herramientas para la Gestión y la Toma de Decisiones

Jorge Víctor Pilar

Herramientas para la Gestión y la Toma de Decisiones

EDITORIAL HANNE
~2012~

Pilar, Jorge Víctor
Herramientas para la Gestión y la Toma de Decisiones
2ª ed. - Salta: Editorial Hanne, 2011.
160 p.; 20x20 cm.
ISBN 978-987-1578-80-1
1. Economía. 2. Administración. I. Título
CDD 658

Diseño de Tapa: **Claudia A. Pilar**

Alvarado 2049 - (4400) Salta – Rep. Argentina
Teléf. (0387) 422 9473
Correo electrónico: vmhanne@arnet.com.ar
Impreso en Argentina – Printed in Argentina
Hecho el depósito de ley.

“Si supiera que el mundo se acabara mañana,
hoy todavía plantaría un árbol”
Martin Luther King

A Marisa,
mi presente de felicidad.

A Josefina y Ludmila,
mis esperanzas para el futuro.

A la memoria de mi abuela Lidia (nuestra "Babi"),
una inmigrante ucraniana que siempre creyó
en el poder libertario de la educación.

Índice

Prólogo

Me complace presentar a la sociedad de la región y especialmente a la comunidad de la Universidad Nacional del Nordeste, este libro de autoría del actual Decano de la Facultad de Ingeniería, Dr. Ing. Jorge Pilar, que se suma a la interesante producción literaria técnica y científica de nuestra Universidad.

Hoy, la temática de este libro ya se ha transformado en casi imprescindible para los jóvenes -y los no tan jóvenes- que transitan una carrera ejecutiva, y aún para los que en cargos de gestión de importancia comprenden la necesidad de seguir formándose, reconociendo que la formación académica resulta una constante de nuestro tiempo.

Aunque el autor haya escrito en el primer capítulo que este libro no es ni pretende ser un manual de gestión, estoy convencido que será un elemento de consulta para los tomadores de decisiones, ya sea para nutrirse de técnicas y herramientas de apoyo a la decisión, o bien como material para contrastar sus propias experiencias.

La contracción al trabajo y al estudio de los diferentes y variados temas que presupone la gestión, y pese a la incertidumbre de los diferentes caminos posibles de recorrer, y de cómo obran las circunstancias en cada momento, existe una rara y compleja combinación que nos permite lograr nuestros objetivos con éxito.

Los que tenemos la responsabilidad de hacer gestión sabemos del equilibrio dinámico que implica esa tarea y la necesidad de tomar decisiones permanentemente, tal cual lo describe Jorge Pilar en su texto.

Para sortear con perspectivas de éxito ese sinuoso camino, estimo que este libro constituye un valioso aporte y por ello, en lo personal, celebro esta iniciativa, que a lo largo de once capítulos conjuga, en un equilibrio adecuado (utilizando la propia terminología del libro), teorías científicas y experiencias personales de su autor en la siempre compleja tarea de hacer gestión.

Ing. Eduardo E. del Valle
Rector de la UNNE

1. Introducción

Sobre las decisiones

Tomar decisiones es una actividad tan cotidiana y tan antigua que pocas veces nos detenemos a reflexionar sobre ella. Cuando tenemos que decidir sobre situaciones futuras, desconocidas e inciertas, muchas veces lo hacemos al azar y “que la suerte nos ayude”. Esa actitud, que si bien nos resulta muy familiar, no es más que poner el carro delante de los caballos.

Dos elementos que distinguen lo que llamamos tiempos modernos del resto de los millares de años de historia de la humanidad, son el estudio y el dominio del riesgo. Su cronología está estrechamente vinculada con la Teoría de las Probabilidades y el nacimiento de esta última algunos autores la fijan en el momento en que un noble francés desafió a Blaise Pascal a resolver un problema conocido como “Enigma de Paccioli”; corría el año 1654. Antes de esta época, la solución de situaciones inciertas era hecha con el auxilio de oráculos y adivinos (Bernstein, 1997).

La evolución posterior de esta ciencia, con la “Teoría de los Grandes Números” de Jacob Bernoulli, el “Teorema de Bayes”, los postulados de Daniel Bernoulli (sobrino de Jacob), la estructura de la distribución normal expuesta por De Moivre (a la que conocemos como la distribución de Gauss, aunque éste sólo desarrolló la ecuación de la curva que hoy lleva su nombre) y los trabajos de Galton sobre regresión a la media, son las semillas de la moderna teoría de las decisiones y del planeamiento científico.

La formulación objetiva de un problema de toma de decisiones es complicada por las imprecisiones e incertidumbres inherentes, que crean un ambiente difuso para el tomador de decisiones.

El riesgo y la incertidumbre suelen estar presentes en todo acto de tomar decisiones, desde la asignación de recursos económicos, hasta en la elaboración de programas de prevención de una política de salud pública; desde sembrar algodón hasta en la elaboración de campañas publicitarias para vender prendas confeccionadas con su fibra (Ventsel, 1983).

Algunas personas imaginan que riesgo e incertidumbre son la misma cosa. Sin embargo, son conceptos totalmente diferentes. Si algún fenómeno futuro nos es totalmente desconocido estaremos ante una situación de incertidumbre. Sin embargo, si conocemos “algo” de él, como por ejemplo la frecuencia con que el mismo se produce, sería posible evaluar y cuantificar el riesgo.

No es poco común escuchar a personas encargadas de tomar decisiones justificar alguna acción que pretenden encarar diciendo que la misma, “sin lugar a dudas”, traerá un beneficio máximo a la sociedad o a la empresa a la que pertenecen. Algunos, inclusive, llegan a asegurar que tal o cual emprendimiento será “bueno, bonito y barato”. Pero, siendo estrictamente realistas, jamás se encontrará algo que sea, simultáneamente, bueno, bonito y barato.

Entonces, antes de aceptar la realización de cualquier acción que, según se promete, producirá un beneficio máximo, tal vez sea mejor evaluar también alternativas que hagan mínima la peor de las consecuencias posibles en el caso que las cosas no salieran según lo planificado. Por lo menos, eso es lo que nos recomienda la moderna **Teoría de las Decisiones**.

Arthur Rudolph, uno de los científicos que desarrolló el cohete Saturno 5 que llevó la primera misión Apolo a la Luna, decía: “Usted proyecta una válvula que no tenga pérdidas. Pero en el mundo real sólo existen válvulas que pierden. Entonces, es necesario determinar el grado de pérdida que está dispuesto a tolerar”.

Por todo ello, luego de ejecutar una actividad previamente planificada, es conveniente evaluar en qué grado fueron alcanzados los objetivos previstos, sobre todo teniendo en cuenta que las personas somos naturalmente optimistas a la hora de planificar. Ello constituye lo que se conoce como **control de gestión**, y es lo que permite hacer los ajustes necesarios en los planes de acción para adecuarlos a las circunstancias reales.

Según la Teoría Prospectiva, de Kahneman y Tversky, dos psicólogos israelíes, y que le valiera el Premio Nobel de Economía 2002 al primero de ellos, las personas reaccionamos de forma muy diferente ante una misma situación que involucra riesgos, dependiendo de si dicha situación es formulada en términos de ganar, de dejar de ganar o de perder (Eppen et al, 2000). Existiendo esta asimetría de comportamiento (o tal vez de percepción de la realidad), se debería tener gran cuidado al juzgar el desempeño de otras personas si es que se busca que ese juicio sea ecuánime.

Algunos, ante un vaso por la mitad, harán un análisis muy simplista y dirán que está “medio vacío”. Otros, con igual simplismo, argumentarán que, en realidad, el vaso está “medio lleno”. Pero, seguramente no muchos serán lo suficientemente objetivos para darse cuenta que, tal vez, el vaso podría haber tenido la mitad del tamaño que tiene.

Estos conceptos que parecen como demasiado “técnicos”, o muy “académicos”, están presentes en la mayoría de las situaciones cotidianas. En realidad, no son muy complicados de entender y algunos hasta parecen (cuasi) intuitivos. Tal vez sea bueno (y provechoso) reflexionar sobre ellos, aunque sea en forma somera, lo que podría redundar en tomar mejores decisiones.

Sobre la gestión

Existen palabras que por el uso cotidiano e indiscriminado van, paulatinamente, perdiendo su significado e importancia. Inclusive llegan a confundirse con otras con las que, originariamente, no tenían ninguna relación. Es, por ejemplo, el caso de los términos **gestión** y **gerenciamiento**.

La gestión es una actividad analítica y creativa, que tiene por meta la formulación de principios, directrices, normas y, también, la estructuración de sistemas gerenciales y de toma de decisiones sobre el presente y futuro de “algo” (una empresa, o una institución, los recursos naturales, la salud pública, etc.).

Como puede verse, la gestión abarca al gerenciamiento y no a la inversa. La gestión tiene una connotación más amplia y general, mientras que el gerenciamiento se restringe a una actividad administrativa y cotidiana.

La gestión está constituida (o por lo menos debería estarlo) por los siguientes elementos (Lanna, 1998):

- **Política:** formada por un conjunto coherente de principios y doctrinas que reflejen los deseos y expectativas de los individuos y grupos de personas a los que está destinada la acción de gestión.
- **Plan Director:** es un estudio prospectivo, orientado a definir prioridades en los pasos que se seguirán, además de adecuar el uso y control de los recursos a invertir, a las expectativas de los individuos y grupos de personas a los que está destinada la acción de gestión, expresadas formal o informalmente (explícita o implícitamente) en la Política. La actividad de elaboración de estos planes se denomina, naturalmente, **Planeamiento**.
- **Gerenciamiento:** es el conjunto de acciones administrativas, normativas y cotidianas destinadas a regular y reglamentar el uso de los recursos que se invierten e invertirán en la puesta en práctica del Plan Director.

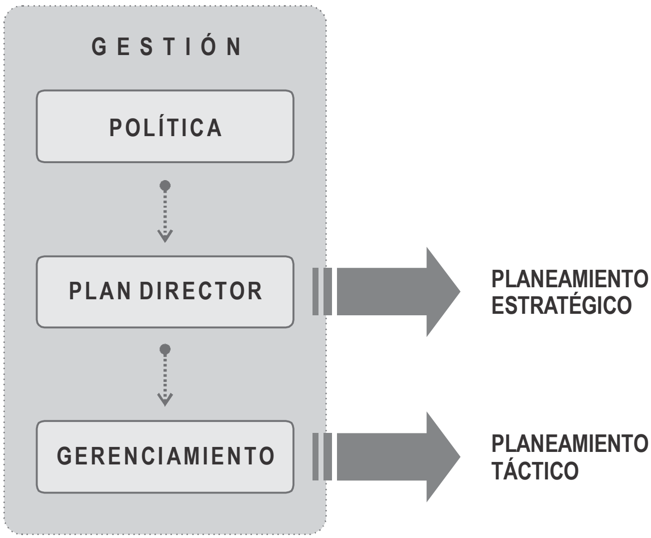


Figura 1.1 Un esquema de gestión

El gerenciamiento es, en definitiva, una acción de gobierno (tanto de instituciones privadas, como de organismos y dependencias estatales) y debería estar constituido por:

- un **modelo de gerenciamiento**, que establezca la organización institucional y/o legal, y
- un **sistema de gerenciamiento**, que reúna los instrumentos para la ejecución de los planes directores.

Este listado de definiciones no tiene como objetivo realizar una disquisición semántica sobre el asunto. Tampoco deben interpretarse como “la verdad revelada”. A lo sumo, son “la verdad” del autor de este libro y servirán de marco conceptual para contextualizar los temas que se desarrollarán en los capítulos que siguen.

Sobre el presente libro y su organización

Este libro no pretende ser –ni es– un manual de métodos de optimización, mucho menos de gestión. Se pretendió volcar en él la visión personal del autor sobre la gestión y el proceso de tomar decisiones, incorporando su experiencia académica y también práctica sobre esos temas.

Está organizado en once capítulos. Los cuatro primeros son de tipo introductorios a la temática de la gestión y la toma de decisiones, abordando tópicos como el riesgo, la relación entre el proceso de tomar decisiones y la Investigación de Operaciones, y los fundamentos de la Teoría de la Decisión.

Los capítulos 5 a 9 son los más “académicos”, en los que se presentan fundamentos de Programación Lineal, Programación Dinámica, planificación por camino crítico (método PERT–CPM), Teoría de Juegos y optimización multiobjetivo / multicriterio. Esos temas –que son técnicas y métodos matemáticos de apoyo a la decisión– se presentaron a través de un lenguaje coloquial, tratando de que ellos sean fácilmente entendibles, con utilización permanente de ejemplos prácticos, aunque sin profundizar demasiado en las bases y fundamentos matemáticos.

El siguiente capítulo, el 10, es una descripción muy somera de los fundamentos de la Lógica Difusa. Finalmente, el último capítulo, el 11, que fue elaborado con la colaboración de Daniel Asulay (Contador Público, Lic. en Economía y Lic. en Administración) y de Horacio González (Periodista), es una suerte de reflexión, basada en experiencias prácticas, sobre el mundo real de la gestión y la toma de decisiones; inclusive, se discute la importancia de la comunicación eficaz y eficiente, un tema muchas veces soslayado y/o subestimado.

2. Reflexiones sobre el riesgo

El riesgo se relaciona con la Estadística

Al encender la radio podemos llegar a reconocer si están pasando música clásica o de los Rolling's. Y, si la música clásica fuese de nuestro interés, no confundiremos Bach con Beethoven.

Tal vez nunca antes hayamos escuchado esos temas, pero hay algo único en los arreglos de sonidos que nos permitirá reconocer el compositor.

Podríamos intentar identificar ese “algo único” por medio de estudios estadísticos. Por ejemplo, podríamos estudiar los intervalos entre notas sucesivas, en particular la frecuencia de esos intervalos, con lo que tendríamos un indicio del compositor.

Podríamos hacer algo similar oyendo y analizando los compases. Se trata del mismo método: el análisis de espectros de frecuencias de repeticiones. O sea, basamos nuestra capacidad de identificación en criterios estadísticos (Ruelle, 1993).

¿Qué es la Estadística?

Cuando tenemos un conjunto de datos, la Estadística nos ayudará a clasificarlos, para luego analizarlos, y nos ofrece formas de resumir sus características. En este caso estamos hablando de **Estadística Descriptiva**.

Si esos datos pertenecen a una población mucho mayor y son una muestra representativa de la misma, la Estadística nos permitirá hacer una estimativa de las características de la población con base en esos datos. Ahora, estamos hablando de **Inferencia Estadística**.

Podríamos decir que la **Estadística Descriptiva** mira (y describe) el pasado, mientras que la **Inferencia Estadística** intenta vislumbrar el futuro, siempre desconocido, por cierto.

Nótese que hemos mencionado muy livianamente, casi como al pasar, que la muestra es representativa de la población, como si ello fuese un dato meramente anecdótico.

Sin embargo, es una cuestión central en la inferencia estadística, aunque –y es importante destacarlo– es muy difícil probar y/o garantizar esa representatividad, entre otros motivos, porque no es posible que una muestra consiga representar exactamente a la población ¡La incertidumbre estará siempre presente!

Y entonces, ¿qué se podría hacer?... Podría intentarse determinar el grado de acierto de la estimativa, o sea la probabilidad de su ocurrencia.

Pero volviendo al tema de la representatividad de una muestra, para garantizarla sería necesario conocer la población. Por ejemplo, cuando alguien va al casino a jugar a (o, mejor dicho, contra la) ruleta, sabe que hay 37 números con posibilidades de salir, incluido el cero (aunque ahora son 38, pues la ruleta hoy tiene 2 ceros).

Sin embargo, hay casos más complejos, como cuando se va a proyectar una importante obra de ingeniería, por ejemplo una red de drenaje pluvial, o las defensas contra inundaciones de una ciudad, en cuyo caso hay que pensar que las mismas deberán servir satisfactoriamente ante la ocurrencia de situaciones críticas de cierta magnitud, inclusive en la contingencia que ocurriese un evento nunca observado ¿Cómo se podría abordar esto?

Diferentes interpretaciones del concepto de probabilidad

La definición tradicional (y hasta intuitiva) de probabilidad es la siguiente: la relación entre el número de eventos favorables y el número de eventos posibles (Lopes, 2000; Triola, 2009).

Por ejemplo, para el caso de la ruleta (no tramposa), la probabilidad de acertar un “pleno” será 1/37 (o 1/38, en caso de las ruletas con doble cero). Esta definición es conocida como **Ley de Laplace**, por haber sido él, Pierre Simón, Marqués de Laplace, el primero en formalizarla. También se la conoce como **probabilidad objetiva** o **a priori**.

Cuando no se conoce con precisión el número de casos posibles la definición tradicional de probabilidad ya no sirve y entonces se recurre a las frecuencias relativas como una analogía de las probabilidades. Ello se sustenta en la **Primera Ley de los Grandes Números** (de Jacob Bernoulli, publicada póstumamente en 1713), que dice: *“Es muy poco probable que si se efectúa un número suficientemente grande de experimentos la frecuencia relativa de un acontecimiento se aparte mucho de su probabilidad”*.

Entonces, para resolver estos casos, lo que se hace es una extensión de la definición de probabilidad, con lo cual se llega a la definición **frecuencista** de probabilidad.

Esa definición **frecuencista** habla de probabilidades sólo cuando existen experimentos aleatorios bien definidos. Según la misma, la probabilidad de un evento es la proporción (frecuencia relativa) con que el mismo aparece cuando se hace un número de experimentos que tiende a infinito.

Si bien no es posible hacer un número infinito de experimentos, puede realizarse un número bastante grande; en ese caso, es común que la frecuencia relativa tienda a estabilizarse.

Hay otra visión de las probabilidades, la **bayesiana**, según la cual se puede asignar probabilidades a cualquier declaración, inclusive cuando ella no se refiere a un proceso aleatorio, como una manera de representar su verosimilitud (subjetivamente, es claro).

En concordancia con esa interpretación, es común que la gente haga estimativas de las posibilidades de eventos futuros ("Dios es argentino...", o "estamos condenados al éxito...", o "asociate conmigo, que hay un 85% de probabilidades que el negocio sea un éxito", etc.). Esas estimativas son **probabilidades subjetivas** (puro "meparezómetro").

El riesgo

Y, ¿cómo se relaciona todo esto con el riesgo? En el caso de los juegos de azar, si la probabilidad objetiva de acertar un número es 1/(N° de eventos posibles), el riesgo de no acertar será (N° de eventos posibles – N° de eventos favorables) / (N° de eventos posibles), o sea (N° de eventos desfavorables) / (N° de eventos posibles).

Pero, cuando no se conoce el número de eventos posibles, el abordaje basado en frecuencias no ayudará mucho... ¿Qué hacer entonces?

Planteemos esta misma pregunta de otra forma: sabemos objetivamente cuál es la probabilidad de ganar en la ruleta (y, simultáneamente, el riesgo de no ganar), pues conocemos el número de eventos posibles. Pero, ¿cómo calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento crítico nunca registrado?

Continuando con las elucubraciones del comienzo del capítulo: ¿cómo podemos tener certeza de una identificación basada en probabilidades?... En realidad, sólo podremos tener una **cuasi certeza.**

Por ejemplo, muchas veces estamos "casi" seguros del sexo de una persona que cruzamos en la calle: los hombres con frecuencia son más altos y robustos, tienen los pies más grandes (fenotipo y genotipo), usan el cabello más corto, etc. Cada una de esas características tomadas aisladamente es poco confiable, pero el conjunto no deja lugar a **dudas razonables** (Ruelle, 1993).

Acaso y caos

$$\text{Entropía} = k \cdot \log\,(\text{N° de historias posibles}) \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1), si bien es una fórmula, encierra un concepto interesante y podría ser una forma de caracterizar el denominador de la Ley de Laplace.

En muchos casos, especialmente en los fenómenos naturales, existe una hipersensibilidad a las condiciones iniciales: cambiando sólo un poco el estado inicial de un sistema, su nueva evolución puede divergir rápidamente (exponencialmente) de otra, hasta que desaparezca cualquier semejanza entre ambas evoluciones. En esas situaciones se habla de **caos**.

La predicción del comportamiento futuro de un sistema caótico es severamente limitada (piense el lector en los pronósticos meteorológicos, por ejemplo), aunque el sistema sea en sí determinístico. ¿Caótico, pero al mismo tiempo determinístico?

Uno de los primeros ecologistas científicos, el físico australiano Robert May, planteó una vez la siguiente pregunta (palabras más, palabras menos): “Dada una superficie de terreno y en ella hay una cierta cantidad de parejas de conejos, ¿cuántos conejos podrían esperarse al cabo de un año?”

Para responder con cierta precisión su pregunta, que parecía casi una broma o una ingenuidad, aplicó un modelo matemático simple, pero **no lineal**. Por ello, era posible obtener una enorme cantidad de soluciones cambiando los parámetros (Mindlin, 2008).

El modelo expresaba, en tiempos discretos, la dinámica de la población, que era representada como una fracción de la máxima carga de individuos que podía albergar la superficie de terreno en función de los alimentos en ella disponibles (pasturas, agua, etc.). La población en un intervalo ($\mathbf{y_n}$) era igual a la población en el intervalo anterior ($\mathbf{y_{n-1}}$), multiplicada por una tasa de reproducción “**r**” y también por un factor de decaimiento, que expresa que cuando la población estuviera cercana al límite de sustentabilidad de ese terreno podría faltar comida y, por lo tanto, o bien la población crecería poco, o bien comenzaría a decaer:

$$y_n = r \cdot y_{n-1} \cdot \left(1 - y_{n-1}\right) \tag{2.2}$$

Ecuaciones como la (2.2) son denominadas **recursivas** y sirven para representar lo que algunos llaman **caos determinístico**. La fig. 2.1 muestra la evolución de esa ecuación para diferentes condiciones iniciales y diferentes tasas de reproducción.

Puede verse que con una población inicial muy por debajo de la capacidad de sustento de esa porción de terreno y una tasa de reproducción relativamente baja (y_0 = 0,1 y r = 2,5), la población tiene posibilidades de prosperar y rápidamente se estabiliza en alrededor del 60% de la máxima capacidad de sustento del terreno. Sin embargo, para una población inicial y_0 = 0,95 y una tasa de reproducción mucho mayor, r = 3,7 , la dinámica de la población sigue un comportamiento que muchos podrían caracterizar, a simple vista, como aleatorio.

Por ello, es imprescindible un análisis previo de los datos y de su dinámica para evitar caracterizar fenómenos determinísticos, aunque caóticos, como simplemente aleatorios. En general, los fenómenos naturales dan lugar a evoluciones temporales caóticas.

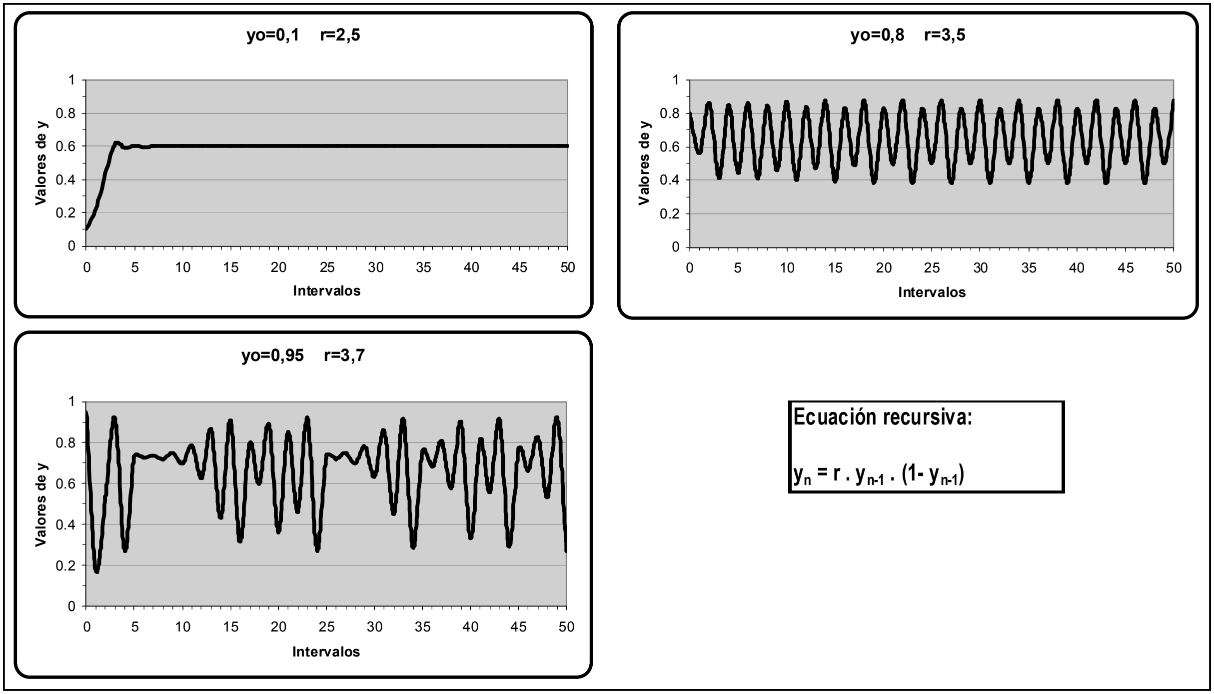


Figura 2.1 Caos determinístico

Aunque un sistema presente el fenómeno de dependencia hipersensible a las condiciones iniciales, ello no implica que no se pueda predecir algo sobre el futuro del mismo. Para abordar este problema estamos limitados, a falta de una mejor opción, al **buen criterio**.

La teoría habitual del caos trata de **evoluciones temporales recurrentes**, o sea, sistemas que retornan incansablemente a estados próximos (semejantes) a otros ya ocurridos en el pasado.

Ese eterno retorno se da, en general, sólo en sistemas moderadamente complejos. (La evolución de los sistemas muy complejos es típicamente sin repetición y, además, hay dependencia hipersensible a las condiciones iniciales.)

¿Qué se puede decir de los ciclos naturales?

¿Es posible aislar evoluciones temporales **moderadamente complejas** en los **ciclos naturales**? Se puede afirmar que los **procesos naturales** evolucionan en el espacio y en el tiempo en forma **moderadamente comple-**

ja. Por eso se dice que son procesos estocásticos: parcialmente predecibles en el espacio y el tiempo, y parcialmente aleatorios (Chow, Maidment y Mays, 1994).

En algunos casos, la variabilidad aleatoria es tan grande que se decide tratar al proceso como si fuese puramente aleatorio y por ello se acepta que el valor de una observación (cantidad medida) no está correlacionado con los valores de observaciones adyacentes (es decir, parecidas en la cantidad).

O sea, se está aceptando que, estadísticamente hablando, las observaciones de una (alguna) variable natural tienen la misma importancia, es decir que esas observaciones son **independientes**.

Es importante tener siempre presente que los métodos estadísticos se focalizan en los valores y no en los procesos físicos que producen esos valores. La Estadística **no** estudia causalidad.

Volvamos a la pregunta que todavía no respondimos: ¿cómo calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento nunca registrado?

Los métodos **frecuencistas** permitirán hacer estimativas probabilísticas dentro del rango de los valores observados (algo así como interpolaciones). Pero, por ejemplo, en el caso de estar proyectándose obras cuya falla involucre la posibilidad de pérdidas de vidas humanas o de bienes materiales por montos importantes es preciso estar preparados para eventos tal vez nunca registrados, pero posibles.

En esos casos, los registros históricos y el procesamiento estadístico de los mismos (con todo el rigor y purismo que exigen estos métodos) permitirán hacer ajustes de distribuciones de probabilidades a esos registros, lo que, a su vez, permitirá asignar un valor de probabilidades a eventos extremos nunca registrados.

Antes de avanzar, analicemos un ejemplo de ajuste de una distribución:

Ejemplo:

Supongamos que tenemos una caja con cuatro bolitas (población conocida en cantidad) y que sólo sabemos que son blancas o negras, pero no sabemos en qué proporción.

*Sea **P(B)** la proporción (desconocida) de blancas. Esta proporción puede ser:*

$$P(B) = \frac{0}{4}, ó \frac{1}{4}, ó \frac{2}{4}, ó \frac{3}{4}, ó \frac{4}{4}$$

Supongamos que hacemos dos muestreos con devolución y que obtenemos 1 blanca y 1 negra ¿Cómo podría estimarse la distribución a partir de esta muestra?

El método de la máxima verosimilitud consiste en admitir que la distribución de la población es la que daría la máxima probabilidad al suceso (muestra) considerado.

Podríamos hacer una tabla colocando las proporciones posibles de blancas y las correspondientes probabilidades de la muestra obtenida según estas presuntas proporciones de blancas:

P(B)	**0/4**	**1/4**	**2/4**	**3/4**	**4/4**
1B + 1N	0	$\frac{1}{4}.\frac{3}{4}.2^{*}=\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}.\frac{2}{4}.2^{*}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}.\frac{1}{4}.2^{*}=\frac{3}{8}$	0

(*) Se multiplica por 2 pues al muestrear se pudo haber obtenido 1 B y 1 N, o 1 N y 1 B.

*Por lo tanto, por este método, la composición de la bolsa más **verosímil** sería de 50% de blancas y 50% de negras.*

Esto puede ser hecho con más o menos bolitas y con muestras de 3 ó más bolitas. La distribución que dé la máxima verosimilitud dependerá de los resultados de la muestra.

La pregunta obligada parecería ser: ¿por qué no abrir la bolsa, mirar lo que hay adentro y asunto terminado?

Si no creemos mucho lo que acabamos de hacer –y eso que conocemos la cantidad de bolitas dentro de la bolsa– ¿por qué deberíamos creer cuando le atribuimos (calculamos) alguna probabilidad de ocurrencia muy baja a un evento extremo observado?

Hay que ser muy objetivos y honestos al analizar los resultados de los análisis probabilísticos. Si consideramos que la situación actual sería un “promedio entre lo que fue y lo que será”, luego, con “**N**” años de datos sólo podríamos hacer predicciones razonablemente creíbles de eventos con una probabilidad no menor a **1/N**.

¿Y, si según nuestro análisis, un evento observado presentara una probabilidad de, digamos, 1/1.000?... Si es que no se cuenta con una serie de, por lo menos, 500 valores, lo máximo que se podría (debería) afirmar es que **el evento es poco probable**. En ese caso sería lógico presuponer que, tal vez, se cuenta con un exceso de registros de valores bajos y medios de la variable analizada.

¿Cómo se planifica? ¿Cómo se debería planificar?

El análisis y la gestión del riesgo es un insumo importante de la **planificación** moderna.

Los criterios tradicionales de planificación persiguen:

- seguridad ante la falla;
- maximizar garantías (¿riesgo cero?).

Los criterios modernos son más realistas, pues buscan:

- evaluar las consecuencias de una falla en vez de preocuparse por la ocurrencia o no de la propia falla;
- que el sistema sea seguro en la falla.

La sensibilidad popular se orienta más por un criterio minimax (minimizar el máximo daño posible, es decir, lo mejor de lo peor) y no por maximizar garantías.

En vez de preocuparse por la ocurrencia de una falla, podría ser más pertinente (y conducente) hacerse las siguientes preguntas:

- ¿Con qué frecuencia se produce la falla?
- ¿Cuál es la rapidez con que el sistema retorna al estado satisfactorio?
- ¿Son significativas las consecuencias de la falla?

Esas cuestiones de interés se corresponden con los conceptos de (Sahuquillo, 1993):

- Riesgo / Garantía.
- Resiliencia.
- Vulnerabilidad.

Riesgo: probabilidad de que el sistema falle. (La **garantía** es su complemento.)

Resiliencia: probabilidad media de recuperación del sistema.

Vulnerabilidad: es el valor esperado de las pérdidas asociadas a una falla.

Por ejemplo, los cultivos necesitan de agua, en especial durante la época de floración. Son vulnerables a la falta de agua. Hasta cierto punto, las plantas se recuperan una vez que el agua llega. Pero, pasado este límite, no se recuperarán más, la marchitez es irreversible y la resiliencia desaparece.

Por eso, a la hora de planificar y tomar decisiones, es importante hacer un adecuado balance entre el riesgo, la vulnerabilidad y la resiliencia.

Aunque el riesgo de falla de una central atómica sea tan bajo como uno en muchos millones, difícilmente alguien en su sano juicio comprará un lote de terreno al lado de una de esas usinas, por más barato que sea su precio, pues las consecuencias de una falla son intolerables, a pesar de ser muy poco probable.

Continuando con este razonamiento, las probabilidades de ganar la lotería son muy bajas. De todas formas, las consecuencias de no ganarla no pasan de perder los pocos pesos que costó el billete. Por ello, por lo menos los fines de año, yo también me juego un numerito.

Las definiciones dadas arriba NO deben ser tomadas como una verdad absoluta; a lo sumo, son la verdad del autor.

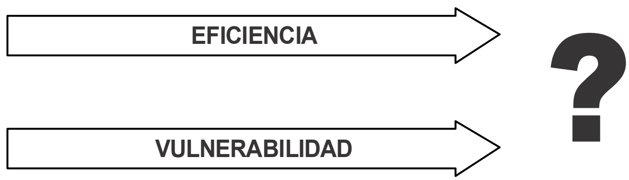


Figura 2.2 Eficiencias vs. Vulnerabilidad

En la Fig. 2.2 se intentó representar que la eficiencia y la vulnerabilidad crecen en el mismo sentido: a medida que un sistema es más eficiente, al mismo tiempo es más vulnerable.

Por ejemplo, si se concentran todos los efluentes cloacales de una ciudad en una única planta de tratamiento, una falla del sistema podría causar un verdadero desastre (en salud pública, ambiental, etc.). Siguiendo con los ejemplos, si invertimos todos nuestros ahorros en depósitos a plazo fijo de un banco que da intereses muy altos, la eventualidad de la quiebra de ese banco nos haría perder todo nuestro dinero (los argentinos entendemos algo de esto...).

Parecería que la realidad es un poco injusta: premia al “culpable” y castiga al “inocente”.

Desde una óptica estrictamente matemática el riesgo de falla de, por ejemplo una obra, es la probabilidad que las condiciones de diseño “**X**” sean superadas:

$$\text{Riesgo de falla} = \text{Probab (X)} = \frac{1}{TR} \tag{2.3}$$

En la ecuación (2.3), **TR** es el tiempo de recurrencia, o sea, el tiempo que, en promedio debe transcurrir para que un evento sea igualado o superado (se resalta en promedio). O sea, **NO** debe medirse con un almanaque, ni con un reloj; es un valor promedio, de referencia.

Pero la adopción de eventos críticos de diseño con muy baja probabilidad, o, simultáneamente, tiempo de recurrencia alto, nos pone frente a un dilema como el presentado renglones arriba. Si, por ejemplo, la cota de coronamiento de una presa para defensas contra inundaciones fue definida teniendo en cuenta un evento con muchos cientos de años de TR, una falla de la misma en oportunidad de una inundación provocará consecuencias muy dramáticas para la población protegida.

Entonces, teniendo en cuenta lo recién expresado, una presa con un coronamiento "alto", ¿disminuye el riesgo de inundaciones?

Tal vez esa pregunta no sea pertinente ni conducente y correspondiera otro tipo de razonamiento. En todo caso, una población protegida de inundaciones fluviales por una presa con un coronamiento "alto" tendría **tiempo**: tiempo para tomar decisiones sin apresuramientos, como por ejemplo organizar la evacuación ordenada de la población en caso de producirse una crecida similar a la provocada por el evento de diseño, en vez de ponerse a rezar para que la presa no falle.

Pronósticos probabilísticos

¿Qué se entiende cuando el pronóstico meteorológico anuncia: "la probabilidad de lluvias para el próximo sábado es 75%"?

- Si el sábado lloviera, ¿el pronóstico habrá acertado?... Sí.
- ¿Y si no lloviera?... ¡También habrá acertado! (pues está dentro del 25% de probabilidades de que no llueva).

¿Y entonces?... En principio, es importante resaltar:

No debe contrastarse un pronóstico probabilístico contra un hecho observado.

Volviendo a la pregunta: ¿qué significa 75% de probabilidades de lluvia? ¿Que en el observatorio meteorológico hay 4 observadores y 3 opinan que va a llover, mientras que el restante opina que no va a llover?...

Aunque parezca jocoso, lo expresado no está muy lejos de la realidad. Gran parte del conocimiento meteorológico es sistematizado en un programa computacional de predicción meteorológica. Se lo carga con las condiciones y datos actuales y se lo hace trabajar, digamos, 1.000 veces. Entonces, el programa arroja 750 resultados "lluvia para el sábado" y los restantes 250 resultados, "sin lluvia el sábado".

Esta predicción en formato "riesgo", en realidad está dando algo así como una cuantificación de nuestra **incertidumbre** sobre la lluvia del próximo sábado (Ruelle, 1993), pues el sábado, o lloverá, o no lloverá; no existe el evento "llovió 75%".

Y entonces, ¿para qué sirven los pronósticos probabilísticos?... Para ponderar situaciones.

Pero, ¿cómo se hace para ponderar situaciones?[1] Primero, hay que elaborar lo que se denomina matriz de contingencias (Taha, 1995; Eppen et al, 2000):

	75 %	***25 %***
Futuros / **Decisiones**	**SI Llueve**	**NO Llueve**
D1: SÍ llevo paraguas	$ 0	$ 25
D2: NO llevo paraguas	$ 40	$ 0

Figura 2.3 Matriz de contingencias

Las matrices de contingencias reflejan cómo el decisor valora las situaciones, sea positiva o negativamente. La matriz de la Fig. 2.3 fue llenada por el autor, según su percepción de la situación (arriba de los futuros posibles se indica su respectiva probabilidad de ocurrencia). El razonamiento seguido para rellenarla fue el siguiente:

> *"El sábado en cuestión deberé asistir a una fiesta, que exige llevar traje. Entonces, si llevo paraguas y lloviera no tendré consecuencias negativas; pero si no lloviera perderé el paraguas (por lo menos eso es lo que indica mi experiencia) y su reposición me costará $ 25. A su vez, si no llevo paraguas y lloviera, deberé mandar el traje a una tintorería, que me cobrará $ 40 por el servicio (la que yo utilizo es bastante barata, por cierto); y si no lloviera, no pasaría nada".*

Evidentemente, la matriz se ha llenado con las consecuencias negativas (costos) de las diferentes decisiones que podrían ser tomadas en casos como el planteado. O sea, las decisiones del autor están más influenciadas por las consecuencias negativas que por las positivas, mientras que para otro tomador de decisiones la percepción del problema podría ser una totalmente diferente.

1 Este tema será desarrollado en detalle más adelante, en el Capítulo 4, "Fundamentos sobre Teoría de la Decisión".

Como se conocen las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los futuros posibles se podrá calcular el valor esperado de las consecuencias de cada decisión, multiplicando la matriz de contingencias por el vector de las probabilidades de los futuros posibles (Fig. 2.4):

	75 %	***25 %***
Futuros / Decisiones	**SI Llueve**	**NO Llueve**
D1: SÍ llevo paraguas	\$ 0	\$ 25
D2: NO llevo paraguas	\$ 40	\$ 0

$$\times \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$\ 3{,}75 \\ \$\ 30 \end{bmatrix}$$

Figura 2.4 Ponderación de la matriz de contingencias

Como la matriz de contingencias fue rellenada con las consecuencias negativas asociadas a cada decisión posible, el último vector (el de la derecha) indicará los valores esperados de las consecuencias negativas de cada decisión posible de ser tomada. Por lo tanto, si la matriz de contingencias reflejara razonablemente la percepción sobre la situación del tomador de decisiones, en este caso el autor, le convendría adoptar la **decisión 1**, es decir, llevar paraguas, que tiene el menor valor esperado de consecuencias negativas ($ 6,25 contra $ 30).

3. La ciencia de las decisiones

La Investigación de Operaciones

La ciencia que estudia las decisiones y las herramientas para que las mismas sean, en algún sentido, las mejores, es la **Investigación de Operaciones**. Ella estudia formalmente la mejor manera de asignar recursos escasos entre actividades que compiten por ellos

Las primeras noticias que se tienen sobre aplicaciones de esta ciencia se remontan a la Antigua Grecia: cuenta una historia que las autoridades de Siracusa pidieron a Arquímedes que estudiara la mejor forma de posicionar los barcos de guerra de la ciudad para que estos pudieran hacerse a la mar lo más rápidamente posible en caso de un ataque.

El término Investigación de Operaciones se utilizó por primera vez durante la Segunda Guerra Mundial, cuando las fuerzas armadas de los “aliados” formaron grupos especiales, constituidos por científicos de las más variadas ramas del saber (físicos, matemáticos, ingenieros, biólogos, entre otros), que tenían por misión preparar proyectos de decisiones para **operaciones** militares (Taha, 1995).

Los problemas típicos de la Investigación de Operaciones consisten en que, dadas ciertas condiciones que caracterizan una situación (disponibilidad de recursos, por ejemplo), se requiere tomar una decisión de forma tal que la actividad que se está programando (**operación**) resulte ser la más beneficiosa desde algún punto de vista o criterio (**objetivo**).

La Investigación de Operaciones trata de la aplicación de métodos matemáticos cuantitativos para argumentar **decisiones** orientadas hacia alguna **finalidad** (Taha, 1995; Eppen et al 2000; Ventsel, 1983).

La necesidad de tomar decisiones es tan antigua como la humanidad. Hasta cierto punto, en cualquier esfera práctica, las decisiones se toman sobre la base de la experiencia y del sentido común, sin efectuar cálculos especiales. Pero existen situaciones que requieren tomar decisiones muy importantes y que pueden afectar las vidas (o bienes) de muchas personas.

En esos casos, ¿sería admisible una decisión arbitraria o voluntarista? En realidad, ante casos así, también es posible escoger una decisión de forma intuitiva, con base en la experiencia previa y el sentido común, tal como sucede frecuentemente. Sin embargo, ¿no sería más razonable hacer algún tipo de cálculo matemático previo? Esos cálculos podrían evitar largas y costosas búsquedas “a ciegas” de una buena solución (y la correspondiente decisión).

En ese contexto, el aporte de la Investigación de Operaciones es una ponderación matemática previa de las consecuencias futuras de las decisiones que podrían ser tomadas, lo que permitirá ahorrar tiempo, esfuerzos personales y materiales, y/o evitar errores graves, los que a veces pueden ser irreversibles.

Insistir en basarse en la experiencia previa puede ser muy audaz y, tal vez, una negligencia, pues siempre quedará la duda de si las decisiones anteriores fueron o no las mejores, o simplemente funcionaron bien (o no) por una cuestión fortuita.

La tecnología avanza tan rápido que es imposible adquirir la experiencia previa necesaria a ese ritmo, sin contar que, en la actualidad, es necesario tomar decisiones sobre actividades hasta el presente únicas en su género y que no tienen precedentes.

En esos casos la experiencia no tendrá posibilidades de aportar gran cosa y el sentido común hasta podría jugar una mala pasada y conducir a engaños si las decisiones no se apoyan en los debidos cálculos previos.

Nociones generales

Se define una **operación** como una actividad orientada hacia una determinada finalidad. Una decisión se considera óptima si es mejor que cualquiera de las decisiones factibles y según algún criterio de comparación.

La finalidad de la Investigación de Operaciones consiste en argumentar, previa y cuantitativamente, las decisiones óptimas. La Investigación de Operaciones no incluye al proceso de adoptar soluciones (tomar decisiones), tarea que le corresponde al **decisor**, que puede ser una persona o un grupo de personas. El decisor tiene la facultad de aplicar las soluciones propuestas y es responsable de sus consecuencias.

Es importante destacar que el propio proceso de crear un modelo de apoyo a la decisión y la elección de las variables y de los parámetros constituyen, también, decisiones muy importantes.

Los parámetros y variables que configuran una decisión se denominan **elementos de decisión**, y pueden ser escalares, vectores, funciones, funcionales, índices físicos o económicos, “ratios”, etc.

Las situaciones problemas, además, suelen poseer condiciones preestablecidas y que no pueden ser alteradas ni soslayadas. Éstas se denominan **restricciones**.

Las soluciones que satisfacen (todas) las restricciones conforman el conjunto de las **soluciones viables**. La solución viable más eficiente se denomina **solución óptima**.

Para comparar las eficiencias de las soluciones viables es preciso utilizar algún criterio cuantitativo o índice de eficiencia, o función finalidad, o función criterio, o **función objetivo**, término que será utilizado en este texto.

Muchas veces, la realización de una operación está asociada a factores aleatorios (lluvias, cambios en los precios, cambios en la oferta-demanda, etc.). En esos casos es imposible pensar en optimizar alguna función de variables aleatorias, por lo que se recurre a optimizar, por ejemplo, un **valor esperado** (esperanza matemática).

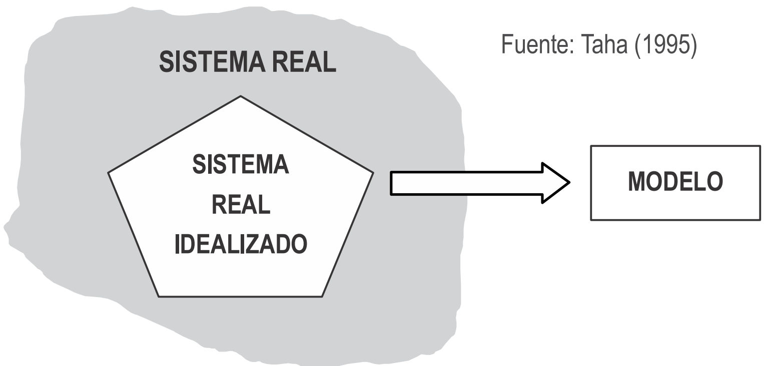
La elección de la función objetivo es un punto central en la Investigación de Operaciones. Por eso es necesario, ante todo, elegir algún índice natural de eficiencia a ser optimizado. Desgraciadamente, para la mayoría de los problemas que tienen algún sentido práctico, no es sencilla la elección de este índice o función objetivo.

Peor aún, existen casos en los cuales no existe un único índice que refleje el espíritu de la operación (es el conocido caso de la búsqueda de algo bueno, bonito y barato). Estos casos se conocen como problemas de **optimización multiobjetivo.**

Los modelos matemáticos

Para aplicar métodos cuantitativos en la Investigación de Operaciones es preciso contar con algún **modelo matemático**.

Todo modelo es una representación, siempre limitada, de la realidad. Es una abstracción del sistema real (problema) y donde se identifican las principales relaciones a través de la explicitación de una función objetivo (o más de una) y de una serie de restricciones.



Fuente: Taha (1995)

Figura 3.1 El problema real y el modelo

En la Fig. 3.2 el sistema real aparece “nebuloso”, sin límites claros. Dentro de él se intenta delimitar, con una visión sistémica, el problema a través de un modelo conceptual (el pentágono de la figura); posteriormente, aplicando ecuaciones se transforma ese modelo conceptual en un modelo matemático (el rectángulo). Sin embargo, nótese que en cada una de las dos transformaciones se perdió “algo” (el rectángulo es la expresión matemática del pentágono, que a su vez es la representación del problema, que pertenece al mundo real, inconmensurable y difícil de delimitar).

Luego, aplicando algún método o técnica matemáticos se resuelve el modelo, pero ello no necesariamente implica resolver el problema. Sólo se resolvió el modelo matemático, que tal vez refleje razonablemente el modelo conceptual, que tal vez refleje razonablemente el problema real.

Entonces, al resolver un problema se está resolviendo una abstracción (el modelo) y no el problema real. Por tanto, la solución será buena sólo si el modelo utilizado representa razonablemente el problema real.

Para elaborar los modelos no existen "recetas de cocina", especialmente para realizar las abstracciones necesarias. La reducción del total de las variables que controlan el sistema real a un número manejable tiene mucho de ciencia, pero también de arte.

Sin embargo, es posible afirmar que para lograr un modelo "bastante" bueno, es necesario conjugar: 1) una precisión razonablemente buena, y 2) la cantidad y confiabilidad de la información necesaria.

Es absolutamente ocioso (y a veces hasta resulta en errores groseros) utilizar modelos muy detallados cuando los datos de entrada no son confiables o suficientes. Es el caso de aplicar modelos que requieren intervalos horarios cuando sólo se cuenta con datos diarios.

En fin, en la construcción de modelos existen dos riesgos: 1) llenarse de detalles y 2) generalizar demasiado. Por eso, siempre es bueno dudar de cualquier modelo y comparar los resultados de varios. Si los resultados no difieren mucho, ello será un buen argumento a favor de la solución obtenida.

La elaboración del modelo matemático constituye la mitad de la parte más importante de la Investigación de Operaciones. El mejor modelador es, normalmente un profesional que conoce muy bien el fenómeno o proceso que está modelando y que ha perfeccionado su conocimiento de matemática. La otra mitad corresponde a saber interpretar los resultados y con ellos elaborar recomendaciones para los tomadores de decisiones.

Tipos de problemas con los que trata la Investigación de Operaciones

Los problemas con los que trata la Investigación de Operaciones se dividen en dos tipos: a) los **directos** y b) los **recíprocos** (Ventsel, 1983).

Los directos buscan dar respuesta a la pregunta "qué sucedería si..." (en determinadas circunstancias se adoptase cierta solución), lo que se evalúa a través de la función objetivo. Por su parte, los recíprocos responden a la pregunta "cómo..." (escoger una solución para maximizar/minimizar la función objetivo).

Los primeros son abordados y resueltos a través de la **simulación,** mientras que los otros, son los problemas de **optimización**.

En los modelos de **simulación** la relación entre entrada y salida del modelo no es explícita, dividiéndose al problema en varios módulos interligados por relaciones lógicas del tipo “si..., entonces”.

En los modelos de **optimización** la relación entre la función objetivo y las restricciones del problema se expresan como funciones de las variables de decisión.

Sin embargo, en algunos problemas, puede ocurrir que no sea posible una representación matemática adecuada de esas relaciones, ya sea por existir demasiadas variables, o por existir demasiadas restricciones, etc. Para salvar ello, a veces (y equivocadamente) se simplifica bastante el problema real, lo que lleva a que los modelos de optimización tiendan a considerar al problema de una forma poco detallada, inclusive muy alejada de la realidad.

Además, aunque el problema pueda ser adecuadamente formulado, nada garantiza que él tenga solución. En los casos en los que no tuviera, los modelos de simulación son más recomendables, por ofrecer mayor flexibilidad. Esa facilidad radica en que esos modelos enfocan al problema desde un nivel básico elemental: en la simulación se tiene la seguridad que siempre se encontrará una solución al problema (aunque a veces de forma muy demorada).

Pero entiéndase bien, si el problema consiste en encontrar la mejor solución, el camino es la optimización. Si se recurriera a la simulación, el resultado obtenido será sólo el mejor de entre las pocas (o no tan pocas) alternativas que fueron chequeadas.

Matemáticamente hablando, la optimización produce soluciones que revisten el carácter de **óptimos globales**, mientras que la simulación sólo producirá soluciones que son **óptimos locales**, o **subóptimos**.

Los modelos de optimización

Los modelos de optimización constan de una función objetivo (maximizar un beneficio, o minimizar un costo), más una serie de restricciones, que normalmente tienen forma de inecuaciones, todo ello función de las variables de decisión.

En formato matemático, ello quedaría expresado como:

Función Objetivo: máx / mín $F(X_1, X_2, ..., X_n)$

Sujeto a (ST): $G(X_1, X_2, ..., X_n)$ [con i = 1, 2, ..., m]

Para resolver los problemas de optimización existen dos formas de abordaje (Ventsel, 1983):

a) el **indirecto**, o analítico (que sigue la secuencia de lo que se enseña en Cálculo: el análisis de las derivadas primeras, luego de las segundas, etc.);

b) el **directo**, o numérico, muy apropiado para aquellos casos en que se tienen cientos (o miles) de variables de decisión y un número similar de restricciones.

La complejidad algorítimica y las heurísticas

Desde el punto de vista de la complejidad algorítmica, se puede verificar si un algoritmo de optimización es eficiente o no, según si su tiempo de solución es del tipo polinomial (algoritmo eficiente) o exponencial (algoritmo ineficiente). Los test de eficiencia algorítmica sólo indican que existe un límite superior finito al número de iteraciones, pero no expresan cuán alto puede ser ese límite (Ruelle, 1993).

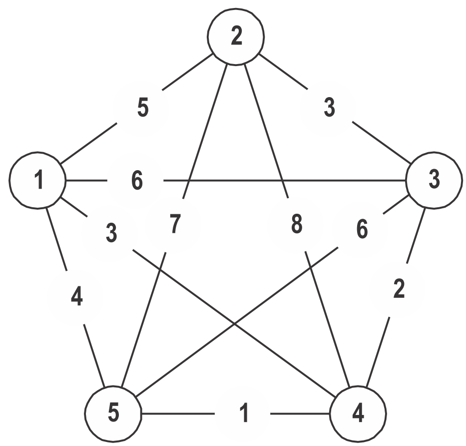
Si las iteraciones se detuvieran prematuramente, la calidad de la solución obtenida no podrá ser evaluada.

Como la simulación es una especie de observación del comportamiento del modelo, el tiempo de procesamiento es controlado por el analista pero, como ya se dijo, esos modelos producen soluciones subóptimas y no es posible garantizar que ellas tengan el carácter de óptimos globales.

Para salvar las dificultades expuestas han surgido otros métodos de cálculo, llamados métodos **heurísticos**, porque su lógica se basa en reglas prácticas. Esos métodos son también iterativos y no garantizan la optimidad de la solución final (Figura 3.2).

Fuente: Taha (1995)

Sea el problema conocido como “problema del vendedor viajero”, en el cual un vendedor debe recorrer 5 ciudades y finalizar en la que comenzó. ¿Cuál es el recorrido más corto?



*Solución heurística: Comenzar en **1** e ir al punto más cercano en cada iteración.*
*Solución heurística obtenida: 1**, 4, 5, 3, 2, 1** ⟶ **distancia: 3+1+6+3+5= 18 km***
*Esta solución es peor que hacer el recorrido **1, 2, 3, 4, 5, 1,** de sólo 15 km*

Figura 3.2 Solución heurística del problema del vendedor viajero

Tal vez, la mejor forma de encarar la solución de problemas reales y concretos sea la utilización combinada de modelos de optimización, junto con modelos de simulación y/o heurísticos. P/ej., se podrían buscar las mejores soluciones a través de la optimización y verificar si esas soluciones tienen o no algún sentido físico real a través de la simulación.

Problemas semánticos: la necesidad de un vocabulario común

Desde los inicios formales de la Investigación de Operaciones surgieron conflictos originados en las denominaciones utilizadas. Esos problemas fueron y son de naturaleza puramente semántica (Barbosa, 1997).

Entonces, para no caer en la trampa semántica, seguidamente serán enunciadas algunas definiciones que serán utilizadas en el resto del libro (tomando como base los trabajos de Braga y Gobetti, 1997; Barbosa, 1997; Nijkam y Voogd, 1994?):

- **Objetivos:** son aspectos relacionados, o con una maximización económica, o con una minimización de impactos (por ejemplo, ambientales, costos, etc.). Representan ideales o metas globales de los individuos y grupos de personas a los que está destinada la acción de gestión, sobre los cuales existe consenso en un dado momento histórico.
- **Propósitos:** son elementos que contribuirían o ayudarían a alcanzar los objetivos y caracterizan una utilidad inmediata.

Observación: algunos autores prefieren considerar que cada medida cuantitativa para definir la eficacia y/o eficiencia de una acción es un objetivo.

- **Meta:** es una intención u objetivo muy genérico, atendible a través de objetivos más específicos.
- **Atributos (o criterios, o aspectos):** son los elementos que permiten cuantificar en qué medida son alcanzadas las metas (o, eventualmente, los objetivos).
- **Analista:** es la persona que evalúa en profundidad los problemas y elaboran los modelos para representarlos.
- **Decisor:** es la persona (o grupo de personas) que directa o indirectamente define las restricciones de los problemas y especifica los objetivos y los propósitos a ser alcanzados, además de aceptar aplicar o no las propuestas de solución.

La orientación de las decisiones

Según la **Teoría de la Decisión**, las decisiones (valga la repetición) se pueden orientar en dos direcciones (Barredo Cano, 1996):

a) la positiva o descriptiva, y

b) la normativa o prescriptiva.

La primera orientación es analizada y abordada por la Sicología y la Sociología. Estas ciencias tratan de explicar y predecir el comportamiento de los decisores (Romero y Eastman et al, apud Barredo Cano, 1996).

La otra orientación trata de deducir cómo y cuál debería ser el comportamiento óptimo de los decisores, partiendo del presupuesto de que su comportamiento es racional. Para ello se desarrollan y aplican técnicas, principalmente lógico-matemáticas, para ayudar a la tarea de los tomadores de decisiones. Este libro se orienta, justamente, en este último sentido.

Fases de un estudio de Investigación de Operaciones

Las fases de un estudio de Investigación de Operaciones son (Andreu Álvarez, 1993a):

- Definición del problema
- Construcción del modelo
- Solución del modelo
- Validación del modelo
- Puesta en práctica de las soluciones obtenidas.

El problema quedará **definido** si se identifican el o los objetivos del estudio, las restricciones y/o las limitaciones del sistema, y las alternativas de solución.

La **construcción** del modelo requerirá que sean expresados cuantitativamente el o los objetivos del problema y sus relaciones con las restricciones.

Los modelos de optimización proporcionarán **soluciones** óptimas, mientras que en los de simulación o en los heurísticos, las soluciones serán subóptimas, es decir, en el mejor de los casos serán las mejores entre las soluciones testeadas.

La **validación** consiste en verificar si la solución obtenida tiene o no sentido real. Es común utilizar modelos de simulación para validar los resultados de los modelos de optimización. Otra forma de validación comúnmente utilizada es aplicar el modelo a situaciones pasadas conocidas.

La fase de **puesta en práctica** de las soluciones consiste en traducir los resultados en recomendaciones para los tomadores de decisiones.

Podría decirse, parafraseando a Thomas Saaty, que la Investigación de Operaciones es el arte de dar malas recomendaciones, siendo que de cualquier otra forma éstas serían aun peores.

4. Fundamentos de Teoría de la Decisión

Comentábamos en un capítulo anterior que tomar decisiones es una actividad tan cotidiana y tan antigua que pocas veces nos detenemos a reflexionar sobre ella.

En cada instante de nuestras vidas están presentes las decisiones. Por ejemplo, antes de salir de nuestras casas decidimos si abrigarnos o no, o si llevamos o no el paraguas. Ya afuera, debemos decidir qué calle tomar para ir al trabajo, etc.

En estas situaciones triviales, las decisiones se toman con base en el sentido común, sin mucho análisis previo. Al fin y al cabo, si la decisión es equivocada, las consecuencias no pasarán de un resfriado o un atraso al llegar al trabajo.

Sin embargo, antes de tomar una decisión cuyas consecuencias afecten a personas o sus bienes (inclusive de forma irreversible), sería importante detenerse un momento a reflexionar

¿Qué deberíamos entender por “detenerse a reflexionar”? Por supuesto que ello no debe ser asociado a paralizarse por el pánico. Lo que haría cualquier ser racional es contrastar el abanico de las posibles decisiones que se puedan tomar, contra las situaciones posibles de suceder en el futuro. Es decir, elaboraría una tabla o **matriz de contingencias** (Tabla 4.1).

Tabla 4.1 Matriz de contingencias

Decisión	Estados futuros posibles			
	1	2	...	m
d_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1m}
d_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
d_n	r_{n1}	r_{n2}	...	r_{nm}

En la matriz de la Tabla 4.1 "$\mathbf{r_{ij}}$" es el resultado (costo o beneficio) de tomar la decisión "**i**" en caso que ocurriera el futuro (posible) "**j**".

Modelos de decisión

Existen, por lo menos, tres tipos de modelo de decisión, que difieren en el tipo de información disponible (Eppen et al, 2000):

a. decisiones bajo certeza absoluta;

b. decisiones bajo riesgo y

c. decisiones bajo incertidumbre.

a. Decisiones bajo certeza absoluta:

Supongamos que vivimos en el piso 8° de un edifico de departamentos y que afuera está lloviendo. Supongamos además que, dado que se cortó la luz, bajamos a la planta baja por las escaleras. Llegados a la puerta nos damos cuenta que nos olvidamos el paraguas: ¿qué hacer?, ¿subir las escaleras a buscar uno?, ¿salir sin paraguas, mojar nuestro traje y saber que tendremos que mandarlo a la tintorería a un costo de, digamos, $ 40?, ¿salir sin paraguas y comprar uno a, digamos, $ 25, a algún vendedor ambulante? En este caso, no hay una situación futura desconocida: está lloviendo y eso es un hecho. Para tomar la decisión lo único que deberemos tener en cuenta son las consecuencias, que son bastante bien conocidas de antemano.

b. Decisiones bajo riesgo:

Siguiendo con los ejemplos hipotéticos, imaginemos que la empresa que estamos administrando debe conseguir dinero para realizar una expansión que no puede demorarse más. La empresa hace un tiempo invirtió en acciones, como una forma de ahorro ¿En qué momento vender las acciones? (las cotizaciones están fluctuando mucho) ¿Qué hacer?, ¿expandirse?, ¿cuánto?

Primeramente, vale la pena recordar rápidamente el concepto de riesgo (explicado en el Capítulo 2) Cuando escogemos entre cara o cruz al lanzar una moneda al aire, el riesgo de equivocarnos será de 1 en 2, o al escoger un número antes de lanzar un dado, el riesgo de no acertar será de 5 en 6, pues la probabilidad de acertar es de 1 en 6.

O sea, para que el riesgo pueda ser perfectamente cuantificado, es necesario que exista cierta **estabilidad estadística**: la moneda sólo tiene dos caras y el dado seis, es decir que las alternativas posibles son perfectamente conocidas y no existe cualquier otra. En definitiva, el riesgo se calcula como la relación entre la cantidad de eventos desfavorables y la cantidad de situaciones posibles (Ventsel, 1983).

Muchas veces, las probabilidades de que algo ocurra no están perfectamente cuantificadas pero, de todas formas, suponemos que el conocimiento aproximado de este “algo” es mejor que nada e, igualmente, encaramos esta situación como una decisión bajo riesgo.

Supongamos otra situación hipotética (que es una variante de un ejemplo presentado por Eppen et al, 2000): que la empresa para la que trabajamos fabrica zapatos femeninos y existe la posibilidad de fabricar 1, 2 ó 3 lotes de zapatos, o no fabricar ninguno (agotar el stock disponible), a un costo de $ 40 mil por lote, los que serán vendidos a $ 60 mil cada uno. Supongamos, además, que no existe posibilidad que la demanda supere los 3 lotes (dato arrojado por un reciente estudio de mercado) y que, en caso de no satisfacer una demanda, cada comercio distribuidor insatisfecho pueda decidir comenzar a comercializar otra marca y que esta pérdida de “exclusividad” ha sido evaluada en $ 45 mil por lote (el propietario ha observado que, en general, las mujeres, cuando deciden comprar zapatos para ellas, también compran zapatos para el resto de la familia) ¿Qué decisión tomar?

Entonces, lo primero que debemos hacer es elaborar la matriz de contingencias (Tabla 4.2):

Tabla 4.2 Matriz de contingencias del problema de la fábrica de zapatos

Decisión (Fabricar...)	**Demandas posibles**			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	-45	-90	-135
1	-40	20	-25	-70
2	-80	-20	40	-5
3	-120	-60	0	60

La matriz de la Tabla 4.2 fue montada considerando los beneficios netos de cada decisión, en miles de pesos, según cada una de las demandas posibles.

Por ejemplo el valor “$\mathbf{r_{21}}$” (resultado de fabricar dos lotes de zapatos, siendo que la demanda fue de tan sólo uno) fue calculado como:

$$r_{21} = 1 \cdot \$60 - 2 \cdot \$40 - 0 \cdot \$45 = -\$20$$

Es decir, 1 lote vendido a $ 60 mil, 2 fabricados, a $ 40 mil cada uno y ninguna demanda insatisfecha.

¿Y cómo se sigue? Supongamos que el antes mencionado estudio de mercado que hemos contratado indicó, además, que las probabilidades de las distintas demandas son:

P_0 = Probabilidad (demanda=0) = 5% P_2 = Probabilidad (demanda=2) = 40%

P_1 = Probabilidad (demanda=1) = 35% P_3 = Probabilidad (demanda=3) = 20%

Disponiendo de esa información, una buena forma de orientar una decisión (lo que no significa que la decisión tomada sea la mejor) podría consistir en evaluar el valor esperado[2] de los beneficios para cada decisión posible y elegir la que maximice ese valor esperado:

$$VE_0 = 0 \cdot (0{,}05) - 45 \cdot (0{,}35) - 90 \cdot (0{,}40) - 135 \cdot (0{,}20) = \$ \ -78{,}75$$

$$VE_1 = -45 \cdot (0{,}05) + 20 \cdot (0{,}35) - 25 \cdot (0{,}40) - 70 \cdot (0{,}20) = \$ \ -19{,}00$$

$$VE_2 = -80 \cdot (0{,}05) - 20 \cdot (0{,}35) + 40 \cdot (0{,}40) - 5 \cdot (0{,}20) = \$ \ 4{,}00$$

$$VE_3 = -120 \cdot (0{,}05) - 60 \cdot (0{,}35) + 0 \cdot (0{,}40) + 60 \cdot (0{,}20) = \$ \ -15{,}00$$

Dado que el valor esperado de los beneficios es mayor para la decisión de fabricar dos lotes de zapatos (VE_2), ésta sería, según este criterio, la decisión a adoptar, de acuerdo a la óptica del tomador de decisiones que elaboró la matriz de contingencias de la Tabla 4.2, en la suposición que esa matriz refleje adecuadamente su percepción y parecer sobre el problema.

c. Decisiones bajo incertidumbre:

Siguiendo con el ejemplo, supongamos que no hemos contratado un estudio de mercado y que, por lo tanto, nada sabemos respecto a las demandas posibles. Esta es una situación típica de **incertidumbre**.

¿Qué hacer en estos casos? A priori, existen por lo menos, cuatro formas de abordar este tipo de problemas: i) criterio de Laplace, ii) criterio maximin, iii) criterio maximax y iv) arrepentimiento minimax.

i) Criterio de Laplace:

Según este criterio, si nada se conoce respecto al futuro, todas las situaciones posibles tienen las mismas probabilidades de ocurrir. O sea, se admite que la distribución de probabilidades de las demandas posibles es "uniforme".

Entonces, al calcular el valor esperado de los beneficios asociados a cada decisión, el ponderador de cada uno de los "**j**" "$\mathbf{r_{ij}}$" posibles (donde "**i**" representa la decisión que se está analizando) será el mismo. O sea, el valor esperado buscado se obtendrá tan sólo sumando cada uno de los "$\mathbf{r_{ij}}$" de cada línea de la tabla de contingencias (Tabla 4.3).

2 Recuérdese que el valor esperado, o esperanza matemática (que se representa con el operador E[.]) se calcula como la sumatoria de las "consecuencias" por sus probabilidades.

Tabla 4.3 Criterio de Laplace

Decisión (Fabricar...)	Demandas posibles				E [.]
	0	1	2	3	
0	0	-45	-90	-135	-270
1	-40	20	-25	-70	-115
2	-80	-20	40	-5	-65
3	-120	-60	0	60	-120

Siguiendo este criterio, la decisión que debería adoptarse sería fabricar dos lotes de zapatos, pues el valor esperado (E[.]) de esa decisión es el "mejor" de todos, una pérdida de $ 65.

A modo de comentario es necesario decir que:

1°) NADIE trabaja a pérdida;

2°) no es razonable esperar que las demandas sean equiprobables (igualmente probables), a no ser que el fabricante sea un productor "marginal", según los conceptos económicos de David Ricardo.

ii) Criterio maximin:

Este es un criterio extremadamente conservador para tomar decisiones: se evalúa para cada decisión la peor de las consecuencias (en el caso de nuestro ejemplo, el beneficio mínimo) y luego, de la lista de las peores consecuencias, se elige la menos mala (el máximo de los mínimos). En la Tabla 4.4 se representa este análisis para el caso de la fábrica de zapatos que estamos analizando.

Tabla 4.4 Criterio maximin

Decisión	Beneficios mínimos
0	-135
1	**-70**
2	-80
3	-120

Como dijimos antes, éste es un criterio muy pesimista, que aplicado sin un análisis profundo y objetivo puede inducir a decisiones lamentables: considérese, por ejemplo, la tabla de contingencias mostrada en la Tabla 4.5, que representa beneficios hipotéticos:

Tabla 4.5 Limitaciones del criterio maximin

Decisión	Estados futuros posibles				Beneficios mínimos
	1	2	3	4	
a	100	9	100	100	9
b	10	10	10	10	**10**

Evidentemente, la decisión "**b**" no es la más acertada, porque la "**a**" la supera en todos los estados futuros posibles, excepto en el 2, donde la diferencia entre ambas decisiones posibles es muy pequeña.

iii) Criterio maximax:

Este criterio es tan optimista como es pesimista el maximin. Considera como mejor decisión aquella que proporciona el mayor de los beneficios máximos. Para el caso de la fábrica de zapatos, la parte matriz de contingencias correspondiente a los beneficios máximos es mostrada en la Tabla 4.6:

Tabla 4.6 Criterio maximax

Decisión	Beneficios mínimos
0	0
1	20
2	40
3	**60**

De nuevo, este criterio aplicado sin un análisis profundo y objetivo puede inducir a decisiones lamentables. Considérese, por ejemplo, la matriz de contingencias de la Tabla 4.7, rellenada con beneficios hipotéticos:

Tabla 4.7 Limitaciones del criterio maximax

Decisión	Estados futuros posibles				Beneficios máximos
	1	2	3	4	
a	100	100	100	100	100
b	10	10	101	10	**101**

Al igual que en el caso anterior, la aplicación estricta y no razonada del criterio maximax puede conducir a decisiones equivocadas, pues, salvo la contingencia que produce el beneficio 101, la decisión "**a**" es mucho mejor que la "**b**", que es la que aconseja este criterio.

Como puede verse, si este es un criterio que se considera optimista, la elección de la decisión "**b**" no haría ninguna gala de optimismo.

iv) Criterio del arrepentimiento minimax:

Para aplicar este criterio se trabaja por columnas: consiste en tomar como referencia, para cada futuro posible, la mejor de las consecuencias. Para evaluar el arrepentimiento que surgiría de adoptar la decisión que no maximice los beneficios, en cada celda de cada columna se resta a ese valor de referencia (o sea, el máximo resultado asociado a cada futuro) el "$\mathbf{r_{ij}}$" de esa celda. Para el caso del ejemplo de los zapatos (Tabla 4.3), la matriz de "arrepentimientos" es mostrado en la Tabla 4.8.

El "arrepentimiento" podría ser evaluado como la diferencia entre el máximo beneficio que podría haber sido obtenido, menos el beneficio que se obtuvo.

Para la columna correspondiente a la demanda futura "0" lotes, el máximo beneficio que podría esperarse es $ 0, mientras que para las demandas posibles "1", "2" y "3" lotes, los máximos beneficios que podrían esperarse son, respectivamente, $ 20, $ 40 y $ 60 (valores expresados en miles y resaltados en negritas en la Tabla 4.8).

Tabla 4.8 Matriz de "arrepentimientos"

Decisión	Demandas posibles				Máximo Arrepentim.
	0	1	2	3	
0	**0** - 0 = **0**	**20** - (-50) = **70**	**40** - (-100) = **140**	**60** - (-150) = **210**	210
1	**0** - (-40) = **40**	**20** - 35 = **-15**	**40** - (-15) = **55**	**60** - (-65) = **125**	125
2	**0** - (-80) = **80**	**20** - (-5) = **25**	**40** - 70 = **30**	**60** - 20 = **40**	**80**
3	**0** - (-120) = **120**	**20** - (-45) = **65**	**40** - 30 = **10**	**60** - 105 = **-45**	120

Según este criterio, se debería eligir la decisión que minimiza el arrepentimiento máximo, o sea fabricar dos lotes de zapatos, correspondiente a un potencial arrepentimiento de $ 80.

¿Qué decisión adoptar?

En el caso de conocerse la probabilidad de ocurrencia de los futuros posibles (situación de riesgo), el mejor de los valores esperados de las consecuencias podría ser una buena orientación respecto a la decisión a adoptar.

En ese caso, ¿podría garantizarse que esa sea la mejor decisión? Ni siquiera se podría garantizar que sea una buena decisión.

Sería válido afirmar que:

a) si la matriz de contingencias refleja adecuadamente la problemática de la situación;

b) si las probabilidades de ocurrencia de los futuros posibles fueran correctas (lo que constituye la hipótesis más débil);

sólo así la recomendación ofrecida sería una buena recomendación.

Analicemos ahora los resultados para la situación de incertidumbre. Dos de los cuatro criterios analizados produjeron la misma recomendación: fabricar dos lotes de zapatos (los otros dos criterios dieron dos resultados diferentes de éste y diferentes entre sí).

Esa convergencia podría ser un buen indicio a favor de recomendar adoptar la decisión de fabricar dos lotes de zapatos.

Finalmente, hay que tratar de no perder de vista el objetivo de la Investigación Operativa, que es argumentar previa y cuantitativamente las decisiones que, en algún sentido, son óptimas. Además, hay que recordar que la Investigación Operativa no incluye el propio proceso de adoptar las decisiones, tarea que corresponde a los tomadores de decisiones o decisores.

5. Fundamentos de Optimización Lineal

Modelos lineales de optimización[3]

En algunos casos de la vida práctica es posible representar un problema a través de un modelo lineal (aunque a veces de forma aproximada y/o simplificada).

Se dice que un modelo es lineal cuando todas las ecuaciones que lo conforman son lineales, es decir que las variables aparecen elevadas a la primera potencia (Ventsel, 1983; Taha, 1995; Goldbarg & Luna, 2000; Eppen et al., 2000; Hillier & Lieberman, 2007).

Seguidamente, se realizará una formalización matemática de estas situaciones "lineales".

Los modelos lineales de optimización responden al esquema general:

Función Objetivo:	maximizar / minimizar $F(X_1, X_2, ..., X_n)$
Sujeto a las restricciones:	$G_i(X_1, X_2, ..., X_n)$ [con $i= 1, 2, ..., m$]

donde $F(.)$ y $G_i(.)$ son funciones lineales. En particular, las restricciones son, generalmente, inecuaciones.

Si se representase en forma cartesiana uno de esos modelos lineales, asignando a cada variable de decisión un eje coordenado, la región de las soluciones viables quedaría delimitada a un polígono, o a un poliedro, o a un hiperpoliedro con un número de vértices igual a (Hillier & Lieberman, 2007):

$$\text{Nº de vértices} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \qquad (5.1)$$

De todas las soluciones viables, la mejor es la **solución óptima**. Si esa región que delimita las soluciones viables es un espacio convexo[4], la solución tendrá carácter de **óptimo global.**

3 Para no apartarse del objetivo de este libro se obviarán definiciones específicas de términos como "modelo lineal". Para obtener definiciones conceptual y matemáticamente estrictas de, en particular ese término, debería recurrirse a textos de, por ejemplo, Álgebra Lineal.

4 Un espacio es convexo cuando cualquier segmento que se pueda trazar en él se encuentre completamente dentro de ese espacio. (Por ejemplo, un círculo es un espacio convexo, mientras que la circunferencia que lo delimita no, pues si se unieran dos puntos de ella se tendría una "cuerda", ajena a la circunferencia.)

La Programación Lineal (PL)

El término “programación” no se refiere a la elaboración de programas computacionales (aunque hoy, para resolver los modelos de optimización, se utilicen computadoras y programas específicos). El término tiene una connotación de planificación (Ventsel, 1983).

En el resto de este capítulo se utilizarán las siguientes siglas y/o abreviaturas:

FO Función objetivo

ST “Subject to...”, o, en castellano, sujeto a... (las siguientes restricciones...)

Entonces, los modelos de PL se expresan como:

$$\text{Fo:} \quad \text{maximizar} \quad (\text{o minimizar - Z}) \tag{5.2}$$

$$\text{ST:} \quad \begin{cases} A \cdot X \leq B \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

donde:

Z: Es una familia de rectas (donde el valor de “Z” actuaría como parámetro).

CT: matriz línea de los beneficios unitarios (de dimensión 1 x n).

X: vector (matriz columna) de las variables de decisión “x_i” (de dimensión n x 1).

A: matriz tecnológica (de dimensión m x n).

B: vector (matriz columna) de recursos disponibles (de dimensión m x 1).

Un sistema de ecuaciones lineales tendrá solución y ella será única si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. Sin embargo, si el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones, el sistema, tendrá infinitas soluciones. A su vez, si el número de ecuaciones “**m**” es mayor al número de incógnitas “**n**” y el sistema es coherente, ello significa que hay “**m – n**” ecuaciones que son una combinación lineal de las otras, es decir, son superfluas.

Para poder resolver el sistema de inecuaciones planteado será necesario transformarlo en un sistema de ecuaciones:

$$A \cdot X \leq B \longrightarrow A \cdot X + Y = B \tag{5.3}$$

donde “**Y**” es un vector de **variables de holgura** (de dimensión **m** x 1). Esas variables de holgura son las que hacen que, en las inecuaciones, los miembros de la izquierda sean menores que los de la derecha.

Entonces, el problema se transformó de un sistema de “**m**” ecuaciones y “**n**” incógnitas, en otro de “**m**” ecuaciones y “(**n + m**)” incógnitas (“**n**” incógnitas “$\mathbf{x_i}$” y “**m**” incógnitas “$\mathbf{y_j}$”)

Algunas consideraciones sobre Álgebra Lineal

Si se tiene la recta: A • X + B • Y = C, la distancia de la misma al origen se calcula como (Hillier & Lieberman, 2007):

$$\text{Dist. al origen} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{5.4}$$

Entonces, por analogía, si se tiene una **FO:** $Z = C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2$, su distancia al origen se calcularía de la siguiente manera:

$$\text{Dist. al origen} = \frac{Z}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \tag{5.5}$$

Siendo "$\mathbf{C_1}$" y "$\mathbf{C_2}$" constantes, maximizar una función $\mathbf{Z\ (x_1, x_2, ..., x_n)}$ equivale, entonces, a maximizar su distancia al origen (Fig. 5.1).

Supóngase, por ejemplo que, además de la FO $\mathbf{Z\ (x_1, x_2)}$, existiera una restricción $\mathbf{g\ (x_1, x_2) \le C}$ (o sea, n = 2 y m = 1). La Fig. 5.1 muestra el proceso de maximizar la distancia de "**Z**" al origen.

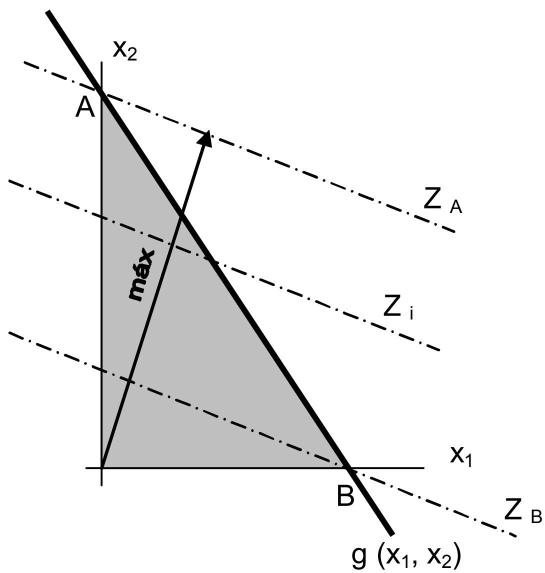


Figura 5.1 Interpretación geométrica de la optimización

De acuerdo a lo que puede verse en el gráfico de la Fig. 5.1, el punto de la región viable en el que la distancia al origen de coordenadas de la recta **Z (x_1, x_2)** se hace máximo está sobre uno de los ejes. O sea, en el punto óptimo una de las variables es nula.

Se puede afirmar (la demostración no será realizada pues escapa al objetivo de este libro) que, si “**n > m**”, en el óptimo sucederá que “**n – m**” variables serán nulas.

Programación Lineal: formas de solución

Para la solución de problemas de programación lineal existen métodos algorítmicos y no algorítmicos. Los no algorítmicos se basan en la búsqueda por tanteos, probando en todos los vértices de la región de las soluciones viables. En los algorítmicos se sigue una secuencia preestablecida de operaciones no ambiguas, tal como lo indica el concepto de algoritmo.

a) Métodos no algorítmicos:

- solución gráfica (limitado a problemas con sólo dos variables);
- solución por enumeración.

b) Métodos algorítmicos

- Algoritmo Diferencial Generalizado (desarrollado por Jacobi);
- Algoritmo Simplex (presentado por George Dantzig, en 1946);
- Algoritmo de los Puntos Interiores.

A continuación se explicarán, someramente, los métodos no algorítmicos y el algoritmo “Simplex”. Los otros dos algoritmos pueden ser consultados en manuales de Investigación de Operaciones y de

Solución gráfica

Supóngase el siguiente problema lineal:

FO: maximizar

ST:
$$\begin{cases} 1)\ X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 6 \\ 2)\ 2 \cdot X_1 + X_2 \leq 8 \\ 3)\ -X_1 + X_2 \leq 1 \\ 4)\ X_2 \leq 2 \end{cases}$$

La representación gráfica del mismo es la mostrada en la Fig. 5.2.

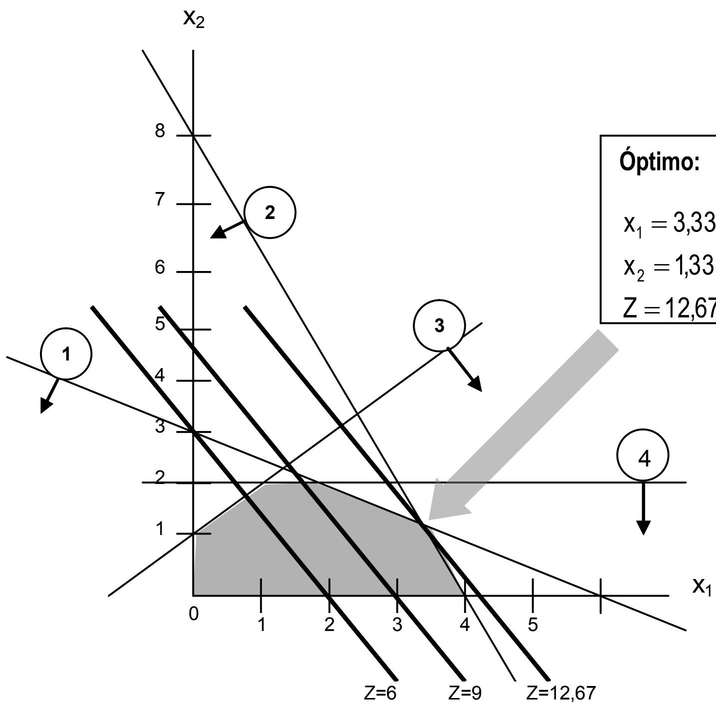


Figura 5.2 Solución gráfica

Este tipo de solución, que está restringido sólo a problemas con dos variables de decisión, consiste en graficar las restricciones (en la Fig. 5.2 se graficaron las restricciones del modelo matemático; se indicó con un número encerrado en un círculo a qué restricción corresponde cada recta, más una flecha que representa cuál de los dos subespacios es el válido para la restricción, el que queda por arriba, o el que queda por debajo de la recta).

Posteriormente, se grafica la FO, adoptando un valor cualquiera para "**Z**" (Ventsel, 1983; Taha, 1995; Goldbarg & Luna, 2000; Eppen et al., 2000; Hillier & Lieberman, 2007). Seguidamente, siguiendo procedimientos geométricos, se traza una paralela a esta última por el vértice de la región de soluciones válidas más alejado del origen de coordenadas (máxima distancia al origen), vértice que se detecta por tanteos.

En el caso de la Fig. 5.2 están dibujadas las rectas correspondientes a **Z = 6**; **Z = 9** y, finalmente, para **Z = 12,67**, que corresponde a la tangente al vértice más alejado del origen. Finalmente, se deben determinar los valores de las variables de decisión correspondientes al vértice mencionado, que para el caso del ejemplo son **x_1 = 3,33** y **x_2 = 1,33**.

Solución por enumeración

Siguiendo con la utilización de ejemplos para explicar el procedimiento, considérese el modelo lineal siguiente:

FO: maximizar $Z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3$

$$
\text{ST:} \quad \left.\begin{array}{l} X_1 \leq 20 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 30 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 \leq 40 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{llllll} X_1 + & & & X_4 & & = 20 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + & & & & X_5 & = 30 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + & & & & X_6 & = 40 \end{array}
$$

Primeramente, hay que transformar las inecuaciones de las restricciones en ecuaciones, a través de la introducción de 3 variables de holgura: $\mathbf{x_4}$, $\mathbf{x_5}$ y $\mathbf{x_6}$.

Entonces, el sistema de restricciones original queda transformado en uno de 3 ecuaciones (m = 3), con 6 variables (n = 6), que delimitará una región de soluciones viables con un número de vértices igual a:

$$
\text{N° de vértices} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = 20
$$

¿Por qué la preocupación por los vértices? Porque, como ya se expresó algunos párrafos antes, la solución óptima estará en uno de esos vértices.

En este método lo que se hace es listar exhaustivamente todos los vértices y chequear en cada uno de ellos la FO. Como la cantidad de variables (en este caso 6) es superior al número de ecuaciones (3 en el ejemplo), en cada vértice ocurrirá que (6 – 3) variables serán nulas (condición para la existencia de un vértice).

Para ello, se utilizará una tabla como la presentada a continuación (Tabla 5.1). Nótese que en la última columna de la derecha aparece la pregunta sobre si la solución es coherente o no. Ella es pertinente porque, por ejemplo, en la segunda línea, si simultáneamente x_1, x_2 y x_4 son nulas, no es posible cumplir la primera de las restricciones.

Tabla 5.1 Solución por enumeración

Nº	**Var. Nulas**			**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**Z**	**Coherente ¿?**
1	X_1	X_2	X_3	—	—	—	20	30	40	0	Si
2	X_1	X_2	X_4	—	—		—			—	No
3	X_1	X_2	X_5	—	—			—		—	No
4	X_1	X_2	X_6	—	—	10	20	30	—	10	Si
5	X_1	X_3	X_4	—		—	—			—	No
6	X_1	X_3	X_5	—	15	—	20	—	10	30	Si
7	X_1	X_3	X_6	—		—			—	—	No
8	X_1	X_4	X_5	—			—	—		—	No
9	X_1	X_4	X_6	—			—		—	—	No
10	X_1	X_5	X_6	—	15	2,5	20	—	—	32,5	Si
11	X_2	X_3	X_4	20	—	—	—	10	20	60	Si
12	X_2	X_3	X_5		—	—		—		—	No
13	X_2	X_3	X_6		—	—			—	—	No
14	X_2	X_4	X_5		—		—	—		—	No
15	X_2	X_4	X_6	20	—	5	—	10	—	65	Si
16	X_2	X_5	X_6		—			—	—	—	No
17	X_3	X_4	X_5	20	5	—	—	—	10	70	Si
18	X_3	X_4	X_6			—	—		—	—	No
19	X_3	X_5	X_6			—		—	—	—	No
20	X_4	X_5	X_6	20	5	2,5	—	—	—	72,5	Si

Solución Óptima

Al ser un método no algorítmico es necesario chequear todos y cada uno de los vértices, cuyo número crece muy rápidamente al aumentar el número de variables de decisión.

Nótese que en el ejemplo, la solución óptima recién apareció en el vértice que fue revisado por último.

Algoritmo Simplex

Desde el punto de vista de la complejidad algorítmica, este algoritmo sería ineficiente, pues su tiempo de solución es de tipo exponencial. Sin embargo, en los problemas prácticos, este tiempo es tolerable, especialmente con el uso de computadoras.

Para explicarlo se utilizará el mismo modelo del método anterior:

FO: maximizar $Z = 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3$

$$\text{ST:}\quad \left.\begin{array}{l} X_1 \le 20 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 \le 30 \\ X + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 \le 40 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} X_1 + X_4 = 20 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_5 = 30 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + X_6 = 40 \end{array}$$

El algoritmo Simplex consiste en iniciar las iteraciones en el origen de coordenadas (lo que se conoce como "**solución trivial**") y luego saltar al vértice siguiente según una regla preestablecida (Ventsel, 1983; Taha, 1995; Goldbarg & Luna, 2000; Eppen et al., 2000; Hillier & Lieberman, 2007).

La optimidad de la solución es garantizada por el concepto de convexidad explicado anteriormente en una nota al pie.

¡Es necesario partir de una solución viable!

Entonces, la 1ª solución básica de partida es una solución con holgura en todas las restricciones (la solución trivial, lo que representaría en el problema real "no hacer nada"). O sea, en la primera iteración sólo las variables de holgura son distintas de cero.

Este algoritmo se resuelve a través de una tabla, la tabla Simplex (Tabla 5.2), que representa matricialmente al conjunto de restricciones del modelo matemático (indicadas como líneas L_1, L_2 y L_3 en la tabla), más una restricción adicional (que denominaremos **FO^**).

Las primeras columnas corresponden a las variables de decisión y la tabla se rellena de la siguiente manera: cada celda representa el coeficiente de la variable de decisión, a la que corresponde la columna, en la restricción a la que corresponde la línea.

Tabla 5.2 Tabla Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Val	
L_1	1			1			20	20
L_2	1	2			1		30	30
L_3	1	2	4			1	40	40
FO^	-3	-2	1				0	
L_1	1			1			20	∝
L_2		2		-1	1		10	5
L_3		2	4	-1		1	20	10
FO^		-2	-1	3			60	
L_1	1			1			20	∝
L_2		1		-1/2	1/2		5	∝
L_3			4		-1	1	10	2,5
FO^			-1	2	1		70	
L_1	1			1			20	
L_2		1		-½	½		5	
L_3			1		-1/4	1/4	2,5	
FO^				2	3/4	1/4	72,5	

No hay variables a ser mejoradas
$\Longrightarrow$ **Solución Óptima**

La restricción adicional (la última línea de la tabla) corresponde a una ecuación conformada por la FO, menos la propia FO en el punto óptimo, a la que llamaremos FO^. Por lo tanto, los valores consignados en la tabla son los coeficientes de las variables de decisión en la FO, pero con signo cambiado.

La tabla consta de dos columnas adicionales, una que hemos denominado "**Val**" (valores), donde se escriben los valores de los términos independientes de cada restricción, más otra columna, que servirá para indicar los resultados de cálculos propios del algoritmo.

A continuación se explicará la lógica y los pasos del algoritmo, que se basa en la solución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de la triangulación de Gauss - Jordan:

1) Primero hay que elegir qué variable de decisión será mejorada (recuérdese que todas ellas comenzaron como siendo nulas). Para ello, se analiza la línea de la tabla que denominamos **FO^** y se escoge la variable cuya variación representará el mayor crecimiento de la FO, o sea la que presenta el coeficiente "más negativo". En el caso del ejemplo, la variable "$\mathbf{x_1}$".
2) Seguidamente, se dividen los valores de la columna "**Val**", por los valores de la columna seleccionada en el paso anterior (para nuestro ejemplo, la de "$\mathbf{x_1}$"). La lógica de esta operación es que las restricciones, que son líneas rectas, cortan al eje "$\mathbf{x_1}$" a una distancia al origen igual a su término independiente (indicado en la col "Val"), dividido por el coeficiente de la variable (esa intersección con el eje se denomina raíz). Los resultados de las divisiones son consignados en la columna de la derecha de la tabla.
3) De todos los valores de esa columna de la derecha se escoge el menor de todos, porque lo que se está buscando es un vértice de la región viable: cada restricción tendrá su raíz sobre el eje de la variable analizada y la menor de ellas corresponderá al vértice buscado. En el caso del ejemplo, el correspondiente a la línea L1.
4) La celda localizada en la intersección de la línea identificada en el paso anterior y de la columna de la variable analizada (L_1 y X_1 en el ejemplo) será la que servirá de pivote de la triangulación de Gauss - Jordan.
5) Luego, a través de combinaciones lineales y "pivoteando" sobre la celda identificada en el paso anterior, hay que lograr que en la columna correspondiente a la variable sobre la que se está trabajando aparezca el valor "1" en correspondencia con la línea identificada en el 3er paso, y valores "0" en el resto de la columna. Con ello finaliza la primera **iteración**.
6) Se continúa con las iteraciones hasta que no existan más variables de decisión a ser mejoradas.

Observación: si en la línea correspondiente a la FO^ final hubiera una o más variables no básicas con coeficiente cero, ello indicará que hay más de una solución óptima, o sea, hay infinitas soluciones óptimas (lo que corresponde a los denominados "problemas degenerados", o mal formulados).

Simplex bifásico

Hay casos en los que el origen de coordenadas (la solución trivial) no es parte de la región de soluciones viables. Ello ocurre cuando hay, simultáneamente, restricciones de "≥" y de "≤". Simplemente para ilustrar, se presenta a continuación un ejemplo de lo expresado:

FO: maximizar $Z = 4 \cdot X_1 + X_2$

$$\text{ST:} \quad \begin{cases} 3 \cdot X_1 + X_2 = 3 \\ 4 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 \geq 6 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 4 \end{cases}$$

Para resolver esos casos se recurre a lo que se denomina "Simplex bifásico": luego de la introducción de una serie de variables "artificiales", se resuelve un primer Simplex, optimizando una FO también "artificial", a los efectos de encontrar una primera solución básica viable.

A partir de esa solución se continuará, en una segunda fase, con otra aplicación el método Simplex, pero optimizando la FO original.

Como el espíritu de este texto no es ser un manual de técnicas matemáticas de optimización, no se explicará en detalle el "Simplex bifásico", sugiriéndose a los interesados en profundizar el tema consultar un manual de Investigación de Operaciones o de PL.

Programación Lineal "entera"

Una situación que presenta especial interés corresponde a los problemas de PL, pero en los cuales los valores de las variables de decisión sólo pueden adoptar valores enteros (por ejemplo cuando se deben asignar personas a un proceso productivo, o decidir sobre la fabricación de productos, etc.) o, inclusive, valores binarios (sólo ceros o unos), cuando la opción es por "sí" o por "no".

Siguiendo con el esquema de utilizar ejemplos para ilustrar los métodos, considérese el siguiente problema:

$$\text{FO:} \quad \text{maximizar} \qquad Z = 5 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2$$

$$\text{ST:} \quad \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 5 \\ 10 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 \geq 45 \\ X_1 \text{ y } X_2 \quad \text{positivos enteros} \end{cases}$$

¡NOVEDAD!

La solución "relajada" de este problema, es decir sin considerar la restricción de solución con "enteros" es:

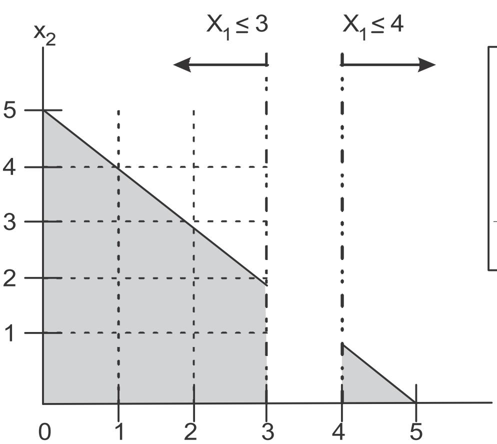
$$\left.\begin{matrix} X_1 = 3{,}75 \\ X_2 = 1{,}25 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow Z = 23{,}75$$

Evidentemente, esta solución viola la restricción que exige que x_1 y x_2 sean enteros. Sin embargo, la solución óptima no debería estar lejos de este punto (¿será ello cierto?).

Es posible percibir que la solución óptima deberá satisfacer las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x_1 \leq 3 \quad \text{ó} \quad x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 1 \quad \text{ó} \quad x_2 \geq 2 \end{cases}$$

En el caso de incluirse el primer "par" de nuevas restricciones, el problema original se dividirá en dos subproblemas (la región viable será subdividida):



Nota: dado que $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$ son mutuamente excluyentes, el problema original fue, de hecho, dividido en dos subproblemas que deben ser tratados separadamente.

→ a este procedimiento se lo conoce como **RAMIFICACIÓN.**

Figura 5.3 Interpretación geométrica de la PL entera

Supongamos que escogemos aleatoriamente trabajar primero con el problema de la izquierda de la Fig. 5.3, en cuyo caso su expresión formal será:

FO: maximizar $Z = 5 \bullet x_1 + 4 \bullet x_2$

$$\text{ST:} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10 \bullet x_1 + 6 \bullet x_2 \leq 45 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \text{ y } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solución de ese problema es:

$$\begin{cases} X_1 = 3 \\ X_2 = 2 \\ Z = 23 \end{cases}$$

que es una solución entera. Pero, ¿será la solución del problema original?

El valor obtenido, Z = 23, es un límite inferior del problema original. O sea, ZÓPTIMO ≥ 23. Pero, en la solución relajada del problema, es decir sin las restricciones "enteras", se obtuvo Z = 23,75, que deberá ser el límite superior de la solución.

Por la propia formulación de la FO, que es una combinación lineal de variables enteras, multiplicadas por coeficientes enteros, es posible imaginar que Z deberá ser también un entero. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} Z: \text{ entero} \\ Z \geq 23 \\ Z \geq 23{,}75 \end{array}\right\} \Longrightarrow Z = 23 \text{ es la } \textbf{solución óptima entera} \text{ buscada}$$

Pero, ¿qué hubiese pasado en caso de haber elegido trabajar con el problema de la "derecha"? (Fig. 5.4)

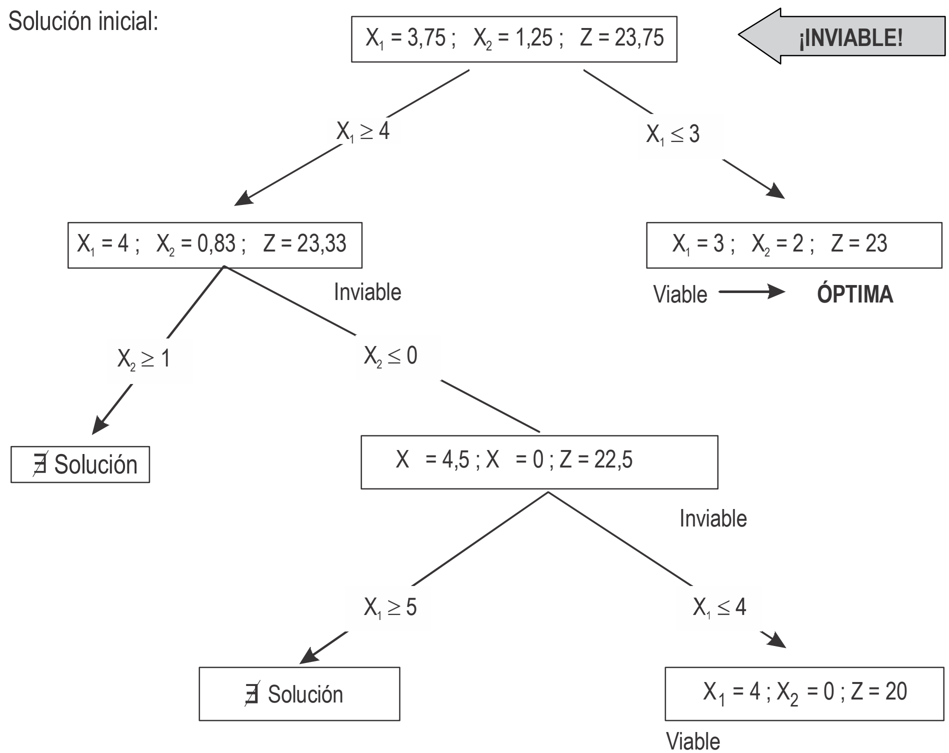


Figura 5.4 Algoritmo "branch-and-bound"

Por lo tanto, la mejor solución viable y entera es:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = 3 \\ X_2 = 2 \\ Z \ = 23 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{ÓPTIMA}$$

Este algoritmo es conocido como "**branch-and-bound**" o, alternativamente, "**branch-and-prune**", algo así como "**ramificación y corte**" (Taha, 1995; Eppen et al., 2000; Hillier & Lieberman, 2007). Su solución puede ser muy demorada, por lo menos en comparación a los modelos que no requieren soluciones enteras.

Programación Lineal: Formato “MPS”

El formato “MPS” (Mathematical Programing System) fue desarrollado en la década de 1950 por la IBM. Permitía escribir sistemas de ecuaciones lineales de una forma “entendible” por las computadoras digitales de esa época (que dicho sea de paso, utilizaban tarjetas perforadas para la introducción de datos).

Sea el problema:

$$\text{FO:} \quad \text{maximizar } Z = 3 \bullet x_1 + 2 \bullet x_2 + x_3.$$

$$\text{ST:} \quad \begin{cases} x_1 \leq 20 \\ x_1 + 2 \bullet x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2 \bullet x_2 + 4 \bullet x_3 \leq 40 \end{cases}$$

El mismo problema escrito en formato “MPS” (por lo menos una de las formas de escribirse) es el mostrado en la Fig. 5.5:

```
name
rows
 n  funobj
 l  1
 l  2
 l  3
columns
    x1         funobj       3
    x1         1            1
    x1         2            1
    x1         3            1
    x2         funobj       2
    x2         2            2
    x2         3            2
    x3         funobj       1
    x3         3            4
rhs
    rhs1       1            20
```

Columna 25
Columna 15
Columna 5
Columna 1

Figura 5.5 Archivo en formato “MPS”

Algunas observaciones:

1) Los archivos en formato “MPS” son de tipo ASCII (o sea, de texto puro), con entrada formateada (o sea, hay que respetar las columnas).
2) No comenzar con una nueva variable de decisión antes de haber agotado totalmente la anterior.

Este formato, si bien fue pensado para introducir datos a través de tarjetas perforadas, es reconocido por todos los programas computacionales de optimización disponibles y es muy útil para escribir modelos de grandes dimensiones (por ejemplo, en su tesis de maestría, el autor, en caso de haber tenido que explicitar la FO de uno de los modelos utilizados, hubiera necesitado 45 páginas de papel de tamaño A4).

Análisis posóptimo (análisis de sensibilidad)

Posteriormente a la resolución de un problema de optimización es conveniente y recomendable realizar un análisis de sensibilidad (Taha, 1995; Eppen et al, 2000; Hillier & Lieberman, 2007).

Ese análisis tiene por finalidad verificar los efectos de cambios en los parámetros (coeficientes y términos independientes) del modelo sobre la solución óptima. Le da al modelo una característica dinámica.

Consiste en hacer variaciones muy pequeñas de los parámetros y coeficientes en torno al punto óptimo, sin que éste se modifique, o sin que se modifiquen los límites de la región viable, o hasta que las restricciones “activas” (no superfluas) dejen de serlo.

Considérese el siguiente problema:

$$\text{FO:} \quad \text{maximizar} \;\; Z = 1 \bullet x_1 + 1 \bullet x_2 \qquad\qquad Z = C_1 \bullet x_1 + C_2$$

$$\text{ST:} \quad \begin{cases} 2 \bullet x_1 + 1 \bullet x_2 \leq 8 \\ 1 \bullet x_1 + 2 \bullet x_2 \leq 7 \\ x_{21} \leq 3 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{Algebraicamente}} \quad \begin{cases} A_{11} \bullet x_1 + A_{12} \bullet x_2 \leq B_1 \\ A_{12} \bullet x_1 + A_{22} \bullet x_2 \leq B_2 \\ A_{13} \bullet x_1 + A_{23} \bullet x_2 \leq B_3 \end{cases}$$

Los valores C_1 y C_2 representan (en forma genérica) beneficios unitarios. Para entender qué pasaría si esos coeficientes variaran analícese el gráfico de la Fig. 5.6.

Salida del programa computacional GLP

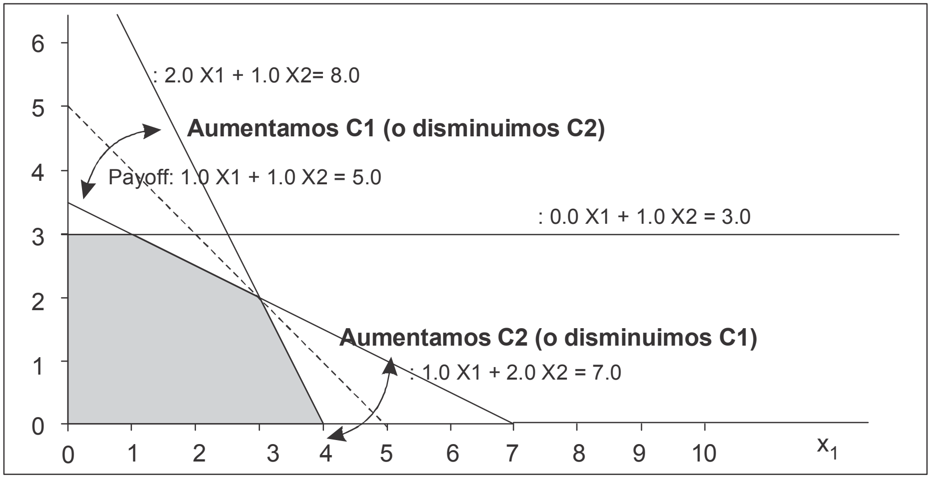


Figura 5.6 Análisis de sensibilidad: variación de los coeficientes de la FO

En el análisis de sensibilidad mostrado en la Fig. 5.6 la recta que representa la FO oscila, modificando su pendiente, pero siempre apoyada en el vértice correspondiente al óptimo. La idea es analizar de hasta qué magnitud podría ser esa oscilación sin que se modifique el óptimo. Los límites, para el caso del problema, son hasta superponerse, o con la primera restricción, o bien con la segunda. (Al alcanzarse ambos casos límites el ejemplo se transformaría en un “problema degenerado”, pues la FO sería paralela a una restricción activa.)

Otra verificación que se suele hacer es analizar y evaluar cuánto representaría una pequeña variación en los coeficientes de la matriz de recursos (Fig. 5.7.):

Salida del programa computacional GLP

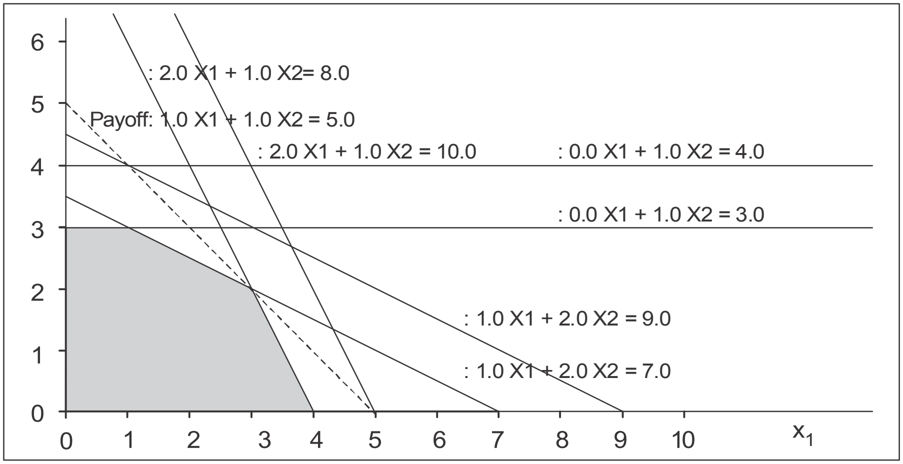


Figura 5.7 Análisis de sensibilidad: variación de los coeficientes de la matriz de recursos

También se debería analizar hasta qué punto serían admisibles variaciones en esos coeficientes sin que ello transforme esas restricciones en superfluas. La Fig. 5.8 muestra esquemáticamente el análisis mencionado considerando la segunda restricción.

Salida del programa computacional GLP

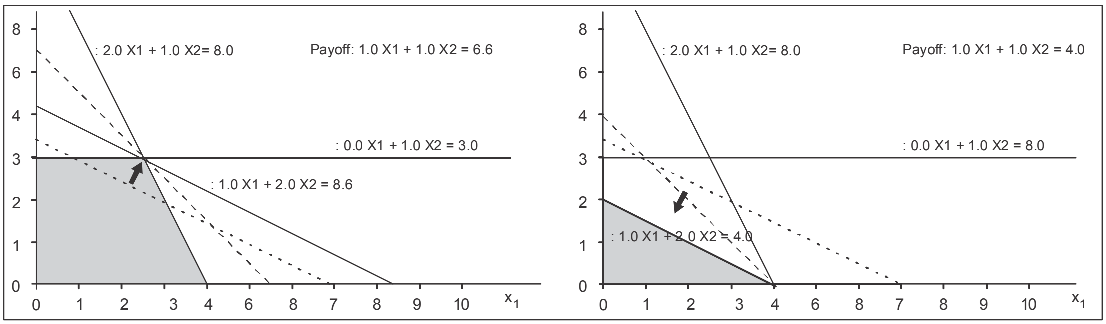


Figura 5.8 Análisis de sensibilidad de las restricciones activas

6. Fundamentos de optimización dinámica

Los problemas de optimización dinámica

Existen situaciones o problemas relacionados con el planeamiento y gestión y que poseen una estructura especial: las decisiones deben ser tomadas en forma secuencial, en el tiempo y/o en el espacio. O sea, esos problemas pueden descomponerse en varias **etapas**, las que pueden ser completadas de una o más formas, según el **estado** de los recursos disponibles. Pero, a pesar de que las decisiones son tomadas de a una, ellas son altamente interdependientes.

Se podría definir una **etapa** como la parte de un problema que posee un conjunto de alternativas mutuamente excluyentes y que caracterizan el estado de esa etapa. A su vez, el **estado** refleja las restricciones que vinculan las **etapas** (Ventsel, 1983; Wagner, 1986).

Para resolver este tipo de problemas surgió la **Programación Dinámica** (PD), que fue desarrollada por Richard Bellman a mediados de la década del 50. La palabra “dinámica” puede dar la sensación de decisiones relacionadas con el tiempo; sin embargo, la metodología puede ser también utilizada (y de hecho es así) en situaciones donde el tiempo no es un factor importante. Por tal motivo, tal vez un nombre más apropiado sería el de **programación de etapas múltiples** (Taha, 1995).

El planeamiento y la gestión presentan innumerables situaciones caracterizadas por una secuencialidad espacial y/o temporal en la toma de decisiones y la PD aparecería como especialmente adecuada para encarar las mismas. La ventaja de este abordaje es que problemas de gran porte pueden ser descompuestos en otros más pequeños y fáciles de resolver.

La PD no está limitada por requerimientos de linealidad, covexidad, o continuidad, como la programación lineal. Sin embargo, sí está limitada a problemas donde la FO es función de una (o más) variables de decisión y no proporcional a ellas (Hall y Dracup, 1974). Esta función puede, inclusive, ser discontinua, al punto de estar definida solamente para valores discretos de las variables de decisión (Barros, 1997; Cifres, 1993).

En pocas palabras, la solución de problemas de PD consiste en buscar la decisión óptima “paso a paso”, teniendo en consideración las futuras consecuencias de cada decisión: la decisión “**i**” debe ser la mejor, no solamente considerando esa etapa, sino también todas las etapas restantes, incluyendo la propia etapa “**i**”.

Tipos de problemas abordados por la PD

En general, existen dos tipos de problemas relacionados al planeamiento y la gestión que requieren una solución secuencial:

1) aquellos donde el espacio de solución tiene, al menos, dos dimensiones: “etapas” y “estados” (las dimensiones aumentan según aumenta el número de variables de estado);
2) aquellos donde el espacio de solución es un espacio geográfico y el problema consiste en buscar el camino de menor costo entre dos puntos.

Los problemas del primer tipo son abordados con técnicas de PD clásica. Los que corresponden al segundo tipo son conocidos como problemas de “camino de mínimo costo” (o, como se los menciona en la literatura específica, “least-cost-path”) y son abordados actualmente a través de los llamados sistemas de información geográfica (Collischonn & Pilar, 2000).

Los problemas de PD clásica

A continuación, será presentada la formalización matemática de los problemas de PD y de la forma de resolverlos, siguiendo los lineamientos presentados por Pilar (1999).

La Fig. 6.1 esquematiza una “**etapa**” de un proceso secuencial de toma de decisiones, por ejemplo la asignación de recursos.

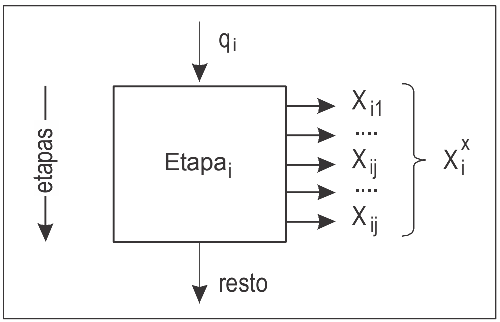


Figura 6.1 Esquema de una etapa de un problema de PD

En la Fig. 6.1, que corresponde a un proceso de “**N**” etapas, el significado de los términos utilizados es el siguiente:

$\mathbf{q_i}$ variable de estado en la etapa “**i**”, faltando todavía “**N-i**” etapas

$\mathbf{x_{ij}}$ uno de los “J+1” valores que puede adoptar la variable de decisión “$\mathbf{x_i}$” en la etapa “**i**”

x_i * decisión "óptima" en la etapa "**i**".

Para explicar el procedimiento matemático de solución de un problema clásico de PD serán definidos los siguientes términos:

R_i (x_{ij}) el resultado (costo o beneficio) de la decisión "**j**" para la variable "**xi**", en la etapa "**i**"

f_i (q_i) el beneficio "óptimo" de las etapas **i**, **i+1**, ..., **N**, para el valor "**q**" de la variable de estado en la etapa "**i**".

Entonces, la solución del problema en el paso "**i**" será:

$$f_i(q_i) = \textit{ÓPTIMO} \quad [\mathrm{R}_i(x_{ij}) \oplus f_{i+1}(q_i - x_{ij})] \tag{6.1}$$

con la condición que:

$$\sum_{i=1}^{J} x_{ij} \leq q_i \tag{6.2}$$

siendo "**J**" el grado de discretización de la variable de estado. En otras palabras, ello significa que la variable de decisión puede adoptar un valor entre "**J+1**" valores posibles (son "**J**" valores discretos, más la opción de adoptar el valor "cero") sin sobrepasar el límite del recurso. Ese límite, en la etapa "**i**", es definido por el valor de la variable de estado. El símbolo "$\oplus$" indica una operación cualquiera, normalmente una suma o un producto.

Para resolver problemas de PD es preciso definir en cada etapa una ecuación de estado. Esta ecuación puede ser expresada como:

$$q_{i+1} = q_i - x_i^* \tag{6.3}$$

Se introducirá otro término para ayudar en la formulación del algoritmo de solución de problemas de PD: "**J_i (q_i)**", que es la decisión que produce "**f_i (q_i)**" (esa decisión es "**x_j*** ", la mejor de todas las "**x_{ij}**").

Teniendo en cuenta todo lo anterior, pueden ser realizadas dos observaciones:

1) la decisión "**j**" depende de "**q**" y de la etapa "**i**"; y

2) la solución total del problema es construida por etapas.

Del análisis de la ecuación (6.1) se puede concluir que, en la etapa "**i**" deben ser comparadas todas las combinaciones entre las "**J+1**" decisiones posibles para el estado "**q_i**", faltando todavía "**N-i**" etapas hasta el final. Ese número de combinaciones en cada etapa es igual a $\{[(J^2 + 3 \bullet J) / 2] + 1\}$ y, si cada etapa fuese igualmente discretizada, para las "**N**" etapas, serán necesarias $\langle \mathbf{N} \bullet \{[(J^2 + 3 \bullet J) / 2] + 1\} \rangle$ (Hall y Dracup, 1974).

El proceso completo de solución de problemas de PD puede ser esquematizado como lo mostrado en la Fig. 6.2:

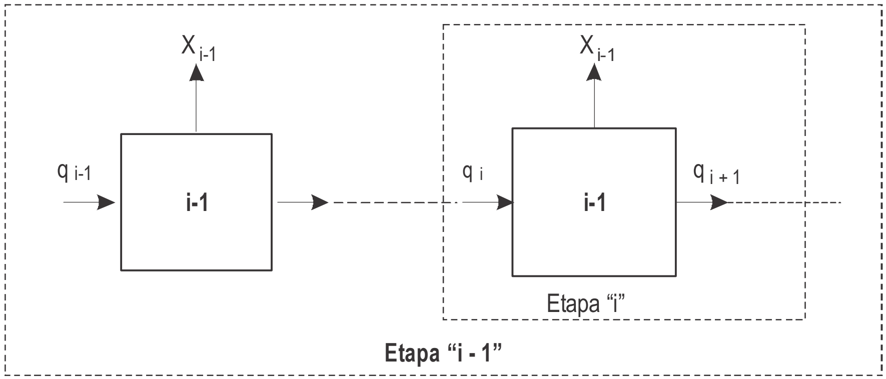


Figura 6.2 Proceso de solución de un problema de PD

Pero, ¿cómo puede ser resuelto este problema en una etapa intermedia "**i**" si la decisión a ser tomada depende, a su vez, de las decisiones tomadas en las etapas siguientes?

Aparentemente, el problema se presenta como indefinido. No obstante, existe una etapa en la cual el problema queda totalmente definido. Esta etapa es la última, o sea la etapa "**N**".

Entonces, resuelto el problema para "**i = N**", será fácil resolverlo, sucesivamente, para "**i = N-1**", hasta "**i= 1**".

Esta técnica va generando su propio progreso. Por eso, a esta forma de resolución se la denomina "procedimiento recursivo" o "algoritmo de recursión" y a las ecuaciones "fórmulas recursivas" (Barros, 1997; Bronson, 1996; Cifres, 1993; Hall y Dracup, 1974; Taha, 1995; Ventsel, 1982; Wagner, 1986). Evidentemente, resulta más fácil resolver repetidamente un problema relativamente fácil que resolver de una sola vez un problema complejo (Ventsel, 1983).

Podría decirse que la resolución de problema de optimización dinámica constan de dos fases: 1) del final hacia el inicio, reconociendo las mejores decisiones para cada etapa, y 2) del inicio hasta el final, leyendo las recomendaciones óptimas surgidas de la fase anterior.

Es necesario hacer una aclaración: algunos autores afirman que existen casos en los que la primera fase mencionada anteriormente podría ser realizarla desde el principio hasta el final. Ello es verdadero sólo para algunos casos, en los cuales el inicio y el fin son "intercambiables", como en el caso de una ruta: para quien "va" el punto de partida será el inicio, pero para quien "viene" será el final. Otra situación donde esto es válido es cuando cada etapa corresponde a un proyecto diferente, en cuyo caso es indiferente escoger cualquiera de ellos como el primero, o el segundo, etc. (Taha, 1995).

Parece un poco complicado, ¿no? Ciertamente, la formulación matemática es un tanto complicada. Sin embargo, el fondo conceptual no lo es tanto.

La PD: Simplificando el proceso de solución

Las ecuaciones anteriores corresponden a la formulación matemática estrictamente formal de los problemas de PD. Quien nunca vio ese tipo de formulación hallará la notación matemática extraña y, probablemente, confusa. Según Wagner (1986) la mayoría de los principiantes en PD sienten deseos de comenzar a trepar por las paredes cuando se enfrentan con este tipo de notación, que parece más complicada que la utilizada en Estadística, que ya es bastante “difícil”.

Leer textos referidos a PD puede ser lento, casi tedioso. Sin embargo, si se persevera, de repente las cosas comenzarán a encajar como las piezas de un rompecabezas y todo empezará a tener sentido. Es lo que los psicólogos llaman fenómeno “AH-HA”.

A continuación se presentarán dos formas simplificadas de solución de problemas de PD: uno matricial y otro gráfico.

a. Proceso de solución matricial

Para explicarlo se utilizará un ejemplo muy simple de PD, que será resuelto aplicando un esquema de solución matricial que simplifica y sistematiza lo explicado anteriormente en este capítulo, y que está basado en una idea presentada por Wagner (1986).

Supóngase que la empresa que provee agua para una ciudad prevé que su capacidad actual, de 10 hm^3/año, debe evolucionar en el tiempo según:

- Capacidad año 4º: 20 hm^3/año
- Capacidad año 8º: 30 hm^3/año
- Capacidad año 12º: 40 hm^3/año

Los costos de las diferentes alternativas de expansión, en millones de alguna unidad monetaria y a “valor presente” son indicados en el siguiente esquema (Tabla 6.1):

Tabla 6.1 Problema de la planta de producción de agua

		Capacidad Final (hm^3/a)		
		20	**30**	**40**
Capacidad inicial (hm^3/a)	**10**	3,8	5,9	7,5
	20	0	1,3	2,3
	30	---	0	1,5
	40	---	---	0

La pregunta es: ¿cuál es la política de expansión de menor costo?

En primer lugar, es necesario representar el problema en el espacio de decisión etapas-estados. Evidentemente, las etapas serán los horizontes de expansión, o sea, los años 4º, 8º y 12º, y los estados quedarán caracterizados por las capacidades de producción (Fig. 6.3).

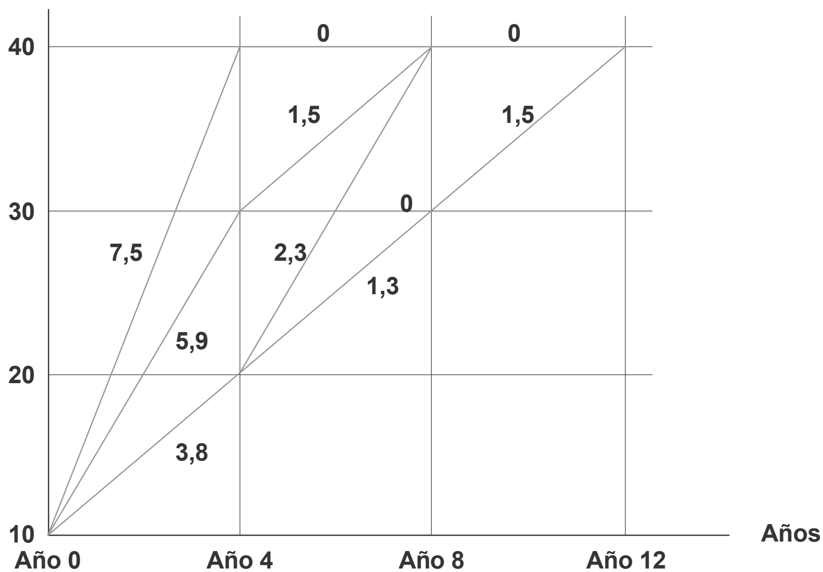


Figura 6.3 Presentación del problema en un espacio de decisión etapas - estados

Primeramente, vamos a numerar los nudos viables en orden creciente (en el caso del ejemplo, los nudos son siete). Esos nudos estarán unidos por arcos, que representan los costos para cambiar de estado (Fig. 6.4).

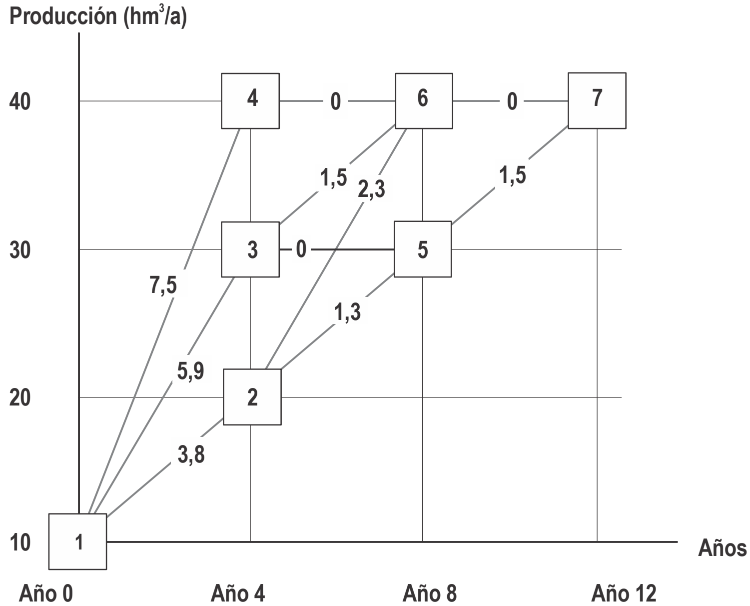


Figura 6.4 Numeración de los nudos viables

A continuación serán elaboradas algunas matrices:

1) Matriz de control:

La primera matriz que se montará es la que denominaremos "matriz de control". Ella servirá solamente para mostrar visual y en forma rápida las combinaciones viables de nudos origen y nudos destino.

En esa matriz se indicarán los arcos viables: un "**1**" indicará viabilidad y un "**0**" inviabilidad. La columna final indicará las etapas que todavía faltan para llegar hasta el final. La matriz de control del ejemplo es presentada en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2 Matriz de control

		Destino						Etapas Faltantes
		7 *(N)*	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	
Origen	**6** *(N-1)*	**1**	0	0	0	0	0	**1**
	5	**1**	0	0	0	0	0	**1**
	4	0	**1**	0	0	0	0	**2**
	3	0	**1**	**1**	0	0	0	**2**
	2	0	**1**	**1**	0	0	0	**2**
	1	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**3**

Esa matriz tiene "**N-1**" líneas, siendo "**N**" el número de nudos viables (o sea, 7). La línea superior corresponde al nudo "**N-1**" y la última al nudo "**1**". La primera columna corresponde al nudo "**N**" y la última al nudo "**2**".

2) Matriz de costos (o de beneficios):

Seguidamente, se montará otra matriz, también del tipo origen-destino, con los costos (o beneficios, según el problema) para cambiar de un estado a otro (Tabla 6.3).

Tabla 6.3 Matriz de costos

		Destino					
		7 (N)	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
Origen	**6** (N-1)	**0,0**					
	5	**1,5**					
	4		**0,0**				
	3		**1,5**	**0,0**			
	2		**2,3**	**1,3**			
	1				**7,5**	**5,9**	**3,8**

3) Matriz de los cálculos dinámicos:

Esa matriz también contará con "**N**" líneas y "**N+1**" columnas. Las dos últimas columnas corresponden, respectivamente, a la decisión óptima para cambiar de estado, que es denominada "**J**" (según la notación del inicio de este capítulo), mientras que la contribución asociada con la FO, es llamada "**f**" (tabla 6.4).

Tabla 6.4 Matriz de cálculos dinámicos

		Destino						Decisión	Contribución con la FO
		7 (N)	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**j**	**f**
Origen	**6** (N-1)	0,0						**7**	**0**
	5	1,5						**7**	**1,5**
	4		0+0=0					**6**	**0**
	3		1,5+0=1,5	0+1,5=1,5				**6**	**1,5**
	2		2,3+0=2,3	1,3+1,5=2,8				**6**	**2,3**
	1				7,5+0=7,5	5,9+1,5=7,4	3,8+2,3=6,1	**2**	**6,1**

La matriz mostrada en la Tabla 6.4 se rellena "dinámicamente", iniciando en la primera línea, que corresponde a uno de los nudos de la última etapa donde debe ser tomada una decisión. Por lo tanto, faltando solamente una etapa por delante, ésta deberá ser, necesariamente, el nudo "**N**".

La columna "**j**" debe ser rellenada con el valor de "**N**" y la columna "**f**" con el costo asociado para ir desde el nudo "**N-1**" al nudo "**N**".

Para el ejemplo, el primer par origen-destino será el "**6-7**" y los valores de "**j**" y "**f**", "**7**" y "**0**" respectivamente.

El mismo proceso debe ser repetido para todas las líneas que representan los nudos de la última etapa (en el ejemplo, el nudo "**5**").

Seguidamente, deben ser analizados los nudos correspondientes a la penúltima etapa (cuando faltan todavía dos decisiones a ser tomadas). Para explicar cómo funciona el procedimiento será analizado el nudo "**2**" del ejemplo. Los destinos viables para él son los nudos "**6**" y "**5**". El costo para ir desde "**2**" hasta "**5**" es 1,30 y el valor de "**f**" para el nudo "**5**" como origen es 1,50. Por lo tanto, el valor de "**f**" en el nudo "**2**", en el caso de "**j = 5**" será 1,30 + 1,50 = 2,80.

A su vez, el costo para hacer la secuencia "**2-6**" es 2,30 y el valor de "**f**" para el nudo "**6**" como origen es cero, o sea que el valor de "**f**" en "**2**" para "**j = 6**" será de 2,30 + 0 = 2,30.

Como el problema es de minimización, el valor de "**f**" asociado al nudo "**2**" deberá ser el menor valor entre 2,80 y 2,30. O sea, es 2,30, que corresponde a la decisión "ir al nudo **6**".

Este cálculo dinámico prosigue hasta el nudo "**1**". En este punto el valor de "**f**" será el valor de la FO.

El camino óptimo se encuentra leyendo ordenadamente los valores de "**j**" desde la etapa "**1**" hasta la última: se lee primero cuál es la mejor decisión para el nudo "**1**"; seguidamente se entra en la matriz de los cálculos dinámicos con ese valor de "**j**" como origen y se lee el próximo "**j**". Se continúa así hasta completar todas las etapas.

Para el caso del ejemplo, la mejor decisión para el nudo "**1**" es ir al nudo "**2**" (ampliación de 10 a 20 hm^3/año al cabo de los primeros 4 años); luego, desde el nudo "**2**", ir al "**6**" (ampliación de 20 a 30 hm^3/año, con lo que se completaría la expansión total buscada) y, finalmente, desde el "**6**", ir al nudo "**7**". O sea, la mejor secuencia de decisiones es la **1-2-6-7** (indicada en la Tabla 6.4 con casillas sombreadas), siendo el valor de la FO obtenido 6,10 (el costo de la expansión total, en millones de unidades monetarias).

b. Solución gráfica

El esquema de solución que se explicará a continuación está basado en las ideas presentadas en el libro de Elena Ventsel (1983). Una vez más, para explicarlo se utilizará un ejemplo.

La Fig. 6.8 que representa esquemáticamente algunas calles de un barrio. Los puntos **A** y **B** son, respectivamente, el origen y el final de un trayecto de interés (por ejemplo, ir de la casa al trabajo) y los valores indicados en los arcos (que representan las calles) los tiempos aproximados (impedancia), en segundos para recorrerlos.

El problema consiste en encontrar el camino que demore el menor tiempo para ir desde **A** hasta **B**, avanzando siempre de izquierda a derecha, sin retroceder.

Éste es un problema típico de PD, pues la decisión a ser tomada en un punto intermedio cualquiera (una esquina del barrio, por ejemplo) mantiene relación estrecha con las decisiones siguientes.

Existen dos puntos en los que el problema está claramente definido: los puntos **O** y **P**, en los cuales las únicas decisiones posibles son "ir al punto **B**", gastando un tiempo de 8 y 9 segundos, respectivamente.

Esas decisiones óptimas serán indicadas con flechas en el diagrama de calles y los tiempos mínimos para ir desde **O** y **P** hasta **B** serán colocados dentro de círculos (Fig. 6.9). Esos círculos y las flechas sintetizan todo el proceso para escoger el camino óptimo desde esos puntos hasta el final.

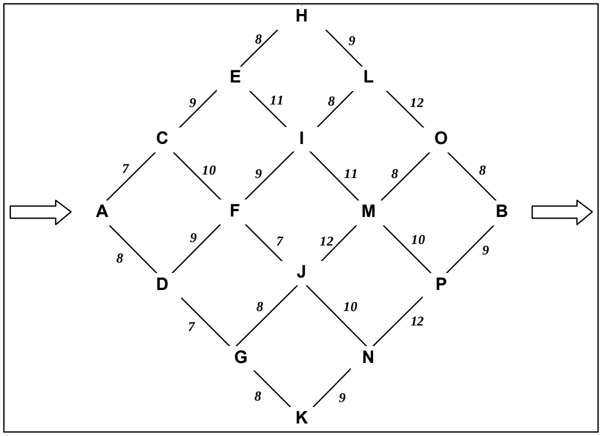


Figura 6.8 Un problema de PD: recorrido de calles de un barrio

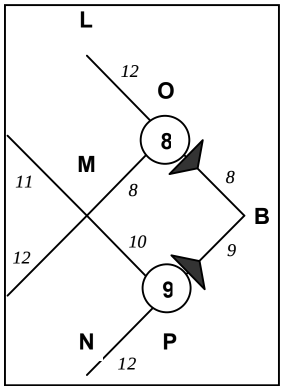


Figura 6.9 Detalle de los trechos finales del recorrido desde **A** hasta **B**

Siguiendo este razonamiento podrían ser evaluadas las mejores decisiones a ser tomadas en los puntos **L**, **M** y **N**.

En el punto **L** la mejor decisión a ser tomada es única (pues no está permitido retroceder): ir para el punto **O**. Luego, el menor tiempo para ir desde el punto **L** hasta el final será el tiempo para ir de **L** hasta **O**, más el menor tiempo para ir desde **O** hasta el final, ya evaluado y mostrado en la Fig. 6.9 en el círculo. Un razonamiento similar podría ser hecho en el punto **N**.

En el punto **M** hay dos alternativas de solución: ir al punto **O**, o ir al punto **P**. Los menores tiempos para ir desde **O** y **P** hasta el final son ya conocidos y están indicados en círculos en la Fig. 6.9. Por lo tanto, la mejor decisión en **M** corresponderá al camino que proporciones el menor resultado entre los tiempos para ir de **M** hasta **O**, más el tiempo mínimo para ir desde **O** hasta el final, en este caso 8 + 8 = 16, y el tiempo para ir de **M** hasta **P**, más el tiempo mínimo para ir desde **P** hasta el final, o sea, 10 + 9 = 19. Por lo tanto, la mejor decisión en **M** será ir hacia el punto **O**. En la Fig. 6.10 son presentados estos últimos resultados.

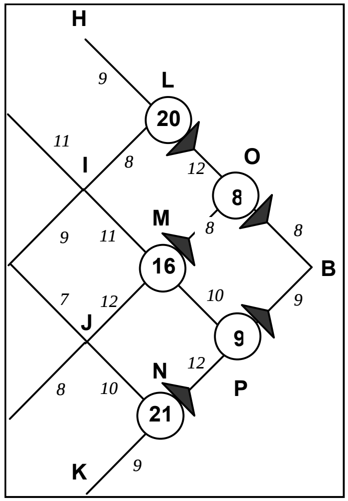


Figura 6.10 Nuevo detalle de los trechos finales del recorrido desde **A** hasta **B**

Siguiendo el razonamiento explicado se llegará hasta el punto **A** de inicio. Todo el procedimiento desarrollado es lo que, anteriormente, en este capítulo, caracterizamos como procedimiento recursivo. Al final de todo el procedimiento cada vértice contará con un círculo y una flecha: el número indicado en el círculo representará el menor tiempo desde ese vértice hasta el final, y la flecha la dirección óptima a seguir en ese vértice. Luego, todo se reduce a “seguir las flechas”.

En la Fig. 6.11 se muestra en trazos más gruesos el camino que demanda el menor tiempo para ir de A hasta B.

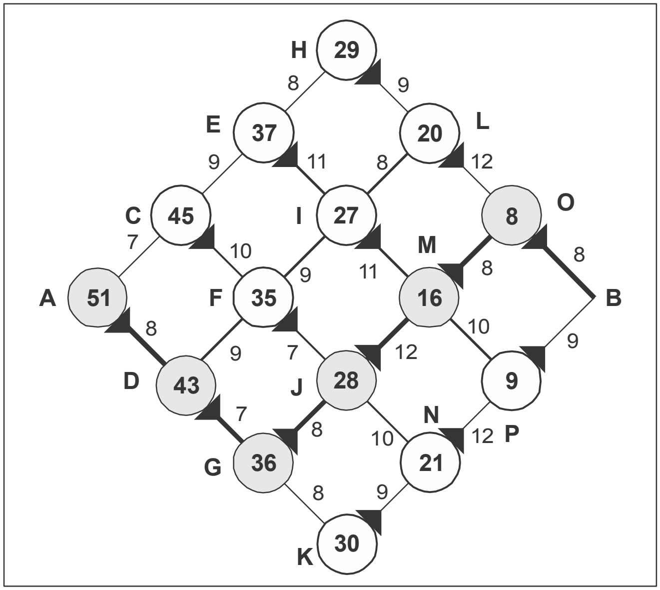


Figura 6.11 Camino que demanda el menor tiempo para ir desde **A** hasta **B**

Ventajas características de la PD

Para cerrar este capítulo mencionaremos algunas características de la PD, que la hacen atractiva para problemas en los que se busca una decisión secuencial. Esas características son (Cifres, 1993):

a) no es necesario ningún requisito de linealidad, ni en la FO, ni en las restricciones, lo que sí es necesario en los problemas de programación lineal, por ejemplo;

b) la FO ni siquiera precisa se tal, pudiendo, inclusive, estar compuesta por valores discretos;

c) comúnmente, la solución de los problemas no resulta en una única política óptima, sino en un conjunto de soluciones óptimas en función del estado del sistema, lo que es especialmente atractivo para resolver problemas de recursos hídricos en tiempo real.

7. Planificación y control de proyectos: Método PERT-CPM

Un poco de historia

Los relatos ancestrales están llenos de historias que cuentan que tal o cual gran emprendimiento no pudo concretarse porque algún dios (o dioses) molesto, o enojado, o celoso, intervino e impidió la empresa... Parecería que es una costumbre muy arraigada echarle la culpa a los designios divinos por los fracasos humanos en la planificación y concreción de proyectos.

Los proyectos modernos suelen ser extremadamente grandes, complejos y costosos, y por ello se requiere una gran cantidad de años de uso satisfactorio para amortizar la inversión. Terminarlos en los plazos establecidos y dentro de los presupuestos no es tarea fácil. Las actividades involucradas son interdependientes, al punto que es imposible realizar algunas de ellas antes de haber acabado otras (lo que se conoce como relaciones de precedencia).

Una de las primeras herramientas utilizadas para la planificación fue el diagrama de barras, en el que se utiliza una barra para representar cada actividad y se indica en la misma el momento de inicio y de finalización. A veces, se colocaba sobre esas barras las cantidades de recursos que demandaría cada actividad. Ese tipo de diagramas es conocido como gráficos de Gantt (desarrollados por Henry Gantt en 1918).

En la programación de actividades complejas, esa herramienta tiene una gran limitación: no refleja las interrelaciones mencionadas ni las relaciones de precedencia.

Entre 1956 y 1958 se desarrollaron dos nuevos métodos de planificación, que hoy se conocen como PERT (Program Evaluation Review Technique) y CPM (Critical Path Method). A pesar de lo similar de ambos métodos, sus respectivos desarrollos fueron totalmente independientes y, si hoy existen diferencias entre ambos, éstas son apenas históricas (Eppen et al, 2000; Taha, 1994; Hillier & Lieberman, 2007).

PERT →	**Oficina Naval de Proyectos Especiales Bozz, Allen & Hamilton** →	**Proyecto misil POLARIS**
CPM →	**Du Pont - Remington Rand** →	**Proyectos propios**

Para explicar el método utilizaremos, una vez más, un ejemplo. Se trata de una empresa hipotética de consultoría comercial, que desea instalarse en la ciudad de Resistencia y decidió planificar el proyecto aplicando la metodología PERT-CPM.

Los encargados de la tarea detectan ocho actividades importantes para completar el proyecto. Ellas son:

1) elaboración del organigrama;
2) selección del local;
3) definición del personal necesario;
4) diseño arquitectónico de las instalaciones;
5) remodelación propiamente dicha (incluida la instalación del equipamiento);
6) selección y contratación del personal;
7) capacitación de ese personal; y
8) realización de acuerdos financieros.

Varias de estas actividades requerirán que otras estén concluidas para poder iniciarse (es lo que hemos definido como relaciones de precedencia).

En la Tabla 7.1 se presentan las actividades, las relaciones de precedencia y las duraciones esperadas de esas tareas.

Tabla 7.1 Listado de actividades para concretar el proyecto

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	ACTIVIDADES PRECEDENTES	DURACIÓN ESPERADA (semanas)
A	Elaborar organigrama	---	4
B	Seleccionar el local	---	3
C	Definir personal necesario	A	3
D	Diseño arquitectónico de instalaciones	B-C	4
E	Remodelación	D	7
F	Contratación de personal	C	3
G	Capacitación personal	F-E	5
H	Acuerdos financieros	A	4

Si elaborásemos el gráfico de Gantt de este proyecto se tendría algo semejante a lo mostrado en la Fig. 7.1.

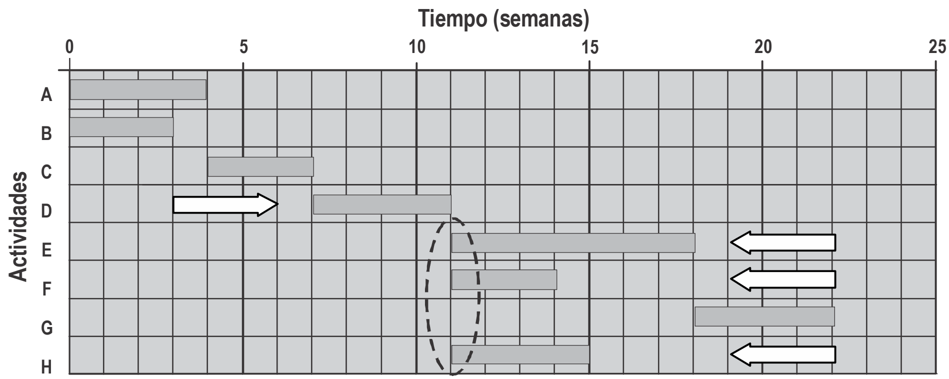


Figura 7.1 Diagrama de Gantt

Al observar el gráfico de la Fig. 7.1 podríamos imaginarnos que, tanto las actividades **E**, **F** y **H**, recién podrían comenzar una vez finalizada la **D**, siendo que solamente la **E** tiene a esa actividad como relación de precedencia.

Intentando solucionar esos conflictos: el diagrama de red

Hay varias formas de encarar la resolución de problemas relacionados a PERT-CPM. Sin embargo, la base conceptual es, básicamente, la misma. En la forma de resolución que describiremos, cada actividad está representada por una flecha (rama o arco). El principio y fin de cada actividad es indicada por un círculo que se llama nodo. La palabra evento es utilizada para indicar la terminación de las actividades que llegan a un nodo. Con esos arcos y nodos se esquematiza la concatenación de actividades, obteniéndose un **diagrama de red**.

El método PERT-CPM podría ser considerado como una evolución de la programación dinámica (PD). Siendo así, habría que tratar de organizar el diagrama de red como una secuencia de etapas (algo parecido a lo que se hace en PD en un espacio etapas-estados).

El diagrama de red para este problema, ordenado en etapas, es el mostrado en la Fig. 7.2.

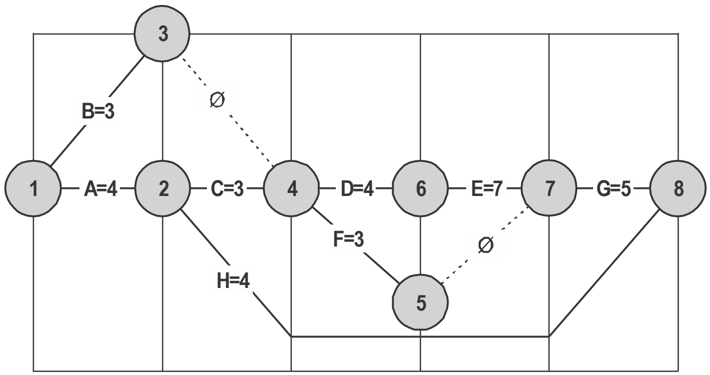


Figura 7.2 Diagrama de red

Nótese que hay actividades, como la **D** y la **G**, que tienen como actividades precedentes a las **B** y **F**, respectivamente, pero ello no queda reflejado en la red graficada. Para resolver ese inconveniente y respetar las relaciones de precedencia se pueden definir actividades "ficticias", de duración nula, que cumplen la única finalidad de completar el entramado de secuencias de actividades (Fig. 7.1).

Es bastante claro que el proyecto sólo estará terminado cuando se hayan completado todas las cadenas de secuencias de actividades, desde la que menos tiempo demore, hasta la que lleve más tiempo completar. Entonces, el camino crítico será, justamente, la cadena que más tiempo demorará para realizarse.

Para este ejemplo, para determinar el camino crítico se utilizará la metodología de resolución gráfica explicada en el Capítulo 6. El resultado es mostrado en la Fig. 7.3.

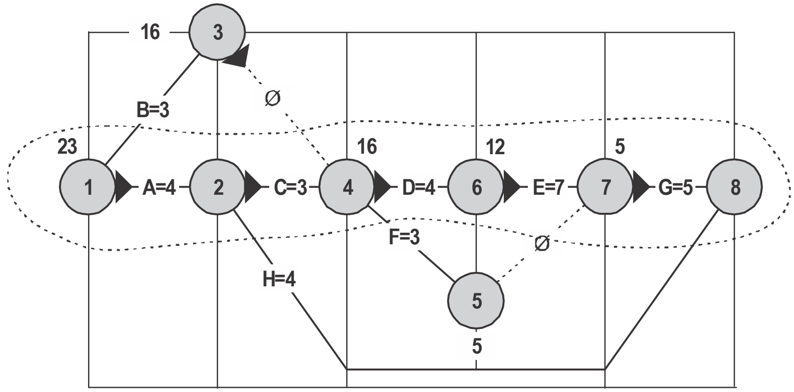


Figura 7.3 Cálculo del camino crítico

Habrá actividades cuyo inicio podría adelantarse, o bien diferirse en el tiempo, sin que ello implique un retraso en la concreción del proyecto. Entonces, a continuación analizaremos los tiempos más próximos y más lejanos (del inicio) para iniciar y finalizar cada actividad.

Tiempos de inicio y de terminación más "próximos"

Comencemos definiendo algunos valores:

TIP: tiempo de inicio más próximo

TTP: tiempo de terminación más próximo

t: tiempo esperado de una actividad

los que se vinculan de la siguiente manera:

$$TTP = TIP + t \qquad (7.1)$$

El TIP para una actividad que sale de un nodo es el mayor de los TTP de todas las actividades que llegan (entran) a ese nodo.

El último enunciado es un verdadero teorema, pero no vamos a demostrarlo.

¿Cómo se calculan los TIPs y los TTPs? Una forma sería hacer la resolución gráfica de los problemas de PD, pero comenzando desde el inicio y yendo hacia el final (a la inversa de lo que hacíamos en PD). Sobre cada arco, teniendo en cuenta la (10.1) y el teorema presentado, escribiremos un par de valores que representarán: (TIP, TTP).

Para el problema que estamos analizando el diagrama resultante es mostrado en la Fig. 7.4

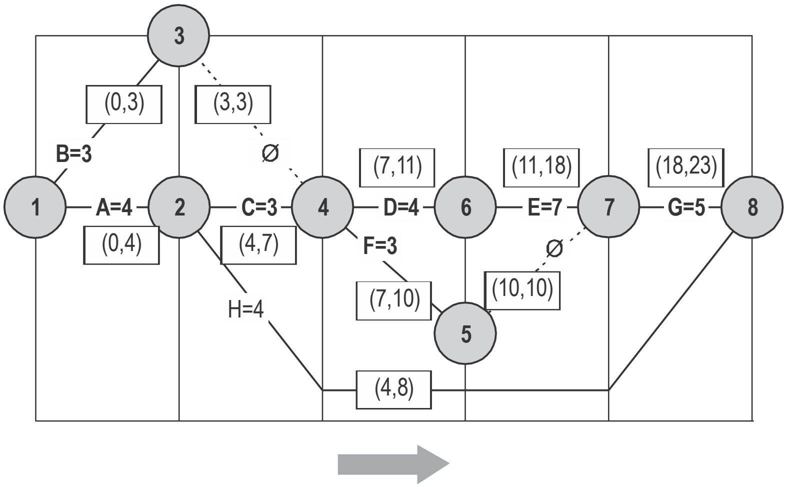


Figura 7.4 Tiempos de inicio y de finalización más próximos

Tiempos de inicio y de terminación más “lejanos”

Como en el caso de los tiempos más próximos, comenzaremos con la definición de algunos valores:

TIL: tiempo de inicio más lejano

TTL: tiempo de terminación más lejano

t: tiempo esperado de una actividad

Estos valores se relacionan de la siguiente manera:

$$TIL = TTL - t \tag{7.2}$$

El TTL para una actividad que entra a un nodo es el menor de los TIL de todas las actividades que salen de ese nodo.

El último enunciado también es un teorema y que no será demostrado.

Para calcular los TILs y TTLs volveremos a utilizar la solución gráfica de la PD. En este caso, la secuencia de cálculo será ir desde el final hacia el inicio y también escribiremos sobre los arcos pares de valores que representarán: (TIL, TTL).

El diagrama correspondiente al problema que estamos resolviendo es mostrado en la Fig. 7.5.

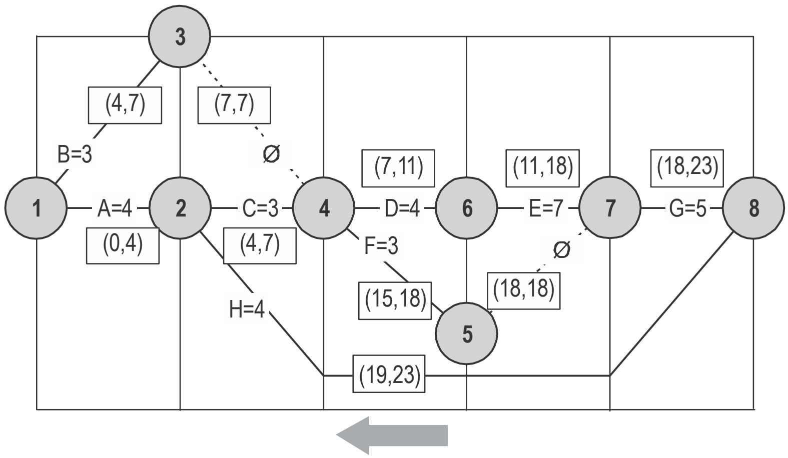


Figura 7.5 Tiempos de inicio y de finalización más lejanos

Holgura y camino crítico

Se denomina holgura a la diferencia entre el TIL y el TIP, o, equivalentemente, la diferencia entre el TTL y el TTP. Es el tiempo que podemos adelantar o diferir cada actividad para no afectar la duración del proyecto.

$$\text{Holgura} = \text{TTL} - \text{TTP} = \text{TIL} - \text{TIP} \tag{7.2}$$

Sin embargo, las actividades que integran el camino crítico no podrán, ni adelantarse, ni posponerse, pues cualquier variación afectará la duración del proyecto. Se puede comprobar matemáticamente que la holgura se hace nula para las actividades ubicadas sobre el camino crítico. En la Fig. 7.6 se indica, sobre el diagrama de red del problema las holguras de cada una de las actividades, según lo indicado en la ecuación (7.2).

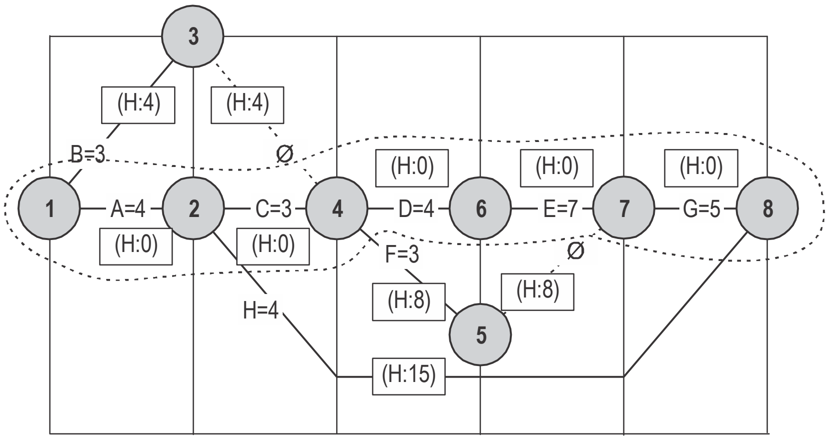


Figura 7.6 Holguras de las diferentes actividades

El diagrama PERT-CPM como herramienta de negociación

Está claro que mientras no se toquen las actividades que conforman el camino crítico, y manteniéndose dentro de la holgura, es posible negociar el adelanto o atraso de las demás actividades.

También, en caso de necesitarse disminuir el tiempo de ejecución de un proyecto, deberá ponerse atención en las actividades del camino crítico, haciendo un análisis estratégico y/o táctico (Eppen et al, 2000).

El análisis estratégico consiste en evaluar las relaciones de precedencia definidas, para ver si es factible realizar algunas de las tareas paralelamente y no secuencialmente.

Por su parte, el análisis táctico consiste en analizar la conveniencia de asignar más recursos a las actividades del camino crítico, para que puedan ser ejecutadas en un tiempo menor. Éste es un análisis que requiere mucho cuidado, pues podría ocurrir que al disminuir el tiempo de una cadena de actividades críticas, otra secuencia pase a ser un nuevo camino crítico.

Ambos análisis y otros más que podrían hacerse (el abordaje PERT-CPM es una herramienta muy rica para la planificación y el control de procesos) no serán desarrollados en este texto, por escapar a sus objetivos. De todas maneras, existe mucha bibliografía específica sobre este tema.

8. Fundamentos de Teoría de Juegos

Mucho más que un simple juego

En la Teoría de la Decisión (vista en el Capítulo 4) el tomador de decisiones se enfrenta contra la naturaleza y los estados futuros que naturalmente podrían ocurrir. En ese caso, la naturaleza es ajena (neutra) a los resultados de las decisiones posibles de ser tomadas.

Sin embargo, hay situaciones en la que se compiten dos (o más) tomadores de decisiones, que sí están interesados en maximizar sus respectivos lucros (o minimizar sus costos). Estas situaciones son estudiadas por la **Teoría de Juegos**.

En ese contexto un **juego** es una situación competitiva entre dos o más personas, o grupos de personas, denominados **jugadores**, que se desarrolla siguiendo un conjunto de reglas previamente establecidas.

Las reglas definen las actividades elementales, o **movimientos**, del juego. En los tipos de juegos que vamos a ver a continuación, cada jugador conoce el conjunto de movimientos de que dispone el contrincante. En particular, veremos los denominados **juegos de dos jugadores, de suma cero**, pues participan sólo dos jugadores y lo que gana uno de ellos es pagado por el otro, que obviamente lo pierde. Estos juegos se denominan **juegos matriciales**.

Las estrategias

Una **estrategia pura** es un plan previamente determinado, que establece la secuencia de movimientos y contramovimientos que un jugador realizará durante el juego completo.

Para ejemplificar esto consideremos un juego en el que los jugadores muestran simultáneamente 1, 2 ó 3 dedos, uno al otro. Si la suma de los dedos es par, el jugador **B** pagará al **A** ese valor en pesos (o en cervezas, o lo que sea), mientras que si es impar, el **A** pagará esta suma al **B**. La matriz de las consecuencias de dicho juego y desde la óptica del jugador **A** (siempre será ese jugador el que estamos asesorando, al que de ahora en más denominaremos “nuestro jugador”) es la mostrada en la Tabla 8.1:

Tabla 8.1 Matriz de las consecuencias del juego de mostrar dedos

		Jugador B		
		1	2	3
Jugador A	1	2	-3	4
	2	-3	4	-5
	3	4	-5	6

En este juego, las estrategias puras (jugadas) para cada jugador están identificadas como 1, 2 y 3.

Entonces, si el jugador **A** muestra siempre 3 dedos, el jugador **B** podrá vencer esta estrategia mostrando siempre dos dedos. Si el **A** utiliza la secuencia fija de estrategias 3-3-2-3, el **B** podrá vencerla utilizando la secuencia 2-2-3-2.

Juegos estables

Imaginemos otro juego cualquiera, cuya matriz de consecuencias es mostrada en la Tabla 8.2. En esa matriz se agregaron una línea, denominada “Max”, y una columna, denominada “Min”.

Tabla 8.2 Matriz de un juego estable

		Jugador B			
		1	2	3	Mín.
Jugador A	1	6	5	8	*5*
	2	7	6	8	***6***
	3	2	4	3	*2*
	Máx.	7	***6***	8	

En la línea “Máx” se consignarán los valores máximos de sus posibles ganancias de nuestro jugador para cada una de las tres jugadas posibles jugadas del contrincante.

A su vez, en la columna “Mín”, indicaremos los valores mínimos de los resultados de nuestro jugador para cada una de las jugadas que puede realizar, lo que representa, entonces, las consecuencias menos malas para el contrincante.

A continuación vamos a identificar dos valores:

- $\mathbf{m_A}$ valor máximo de la ganancia mínima del jugador **A** (valor **maximin**)
- $\mathbf{m_B}$ valor mínimo de la pérdida máxima del jugador **B** (valor **minimax**)

El jugador **A**, adoptando la estrategia que da $\mathbf{m_A}$ ganará, como mínimo este valor $\mathbf{m_A}$, mientras que si el **B** adoptase la que da $\mathbf{m_B}$, su pérdida no superará dicho valor.

Se puede demostrar (pues es un teorema) que $\mathbf{m_A} \leq \mathbf{m_B}$, para cualquier juego matricial.

En caso que $\mathbf{m_A = m_B}$, como es el caso del juego de la Tabla 8.2, el jugador **A** sólo empeoraría su situación al apartarse de la estrategia **maximin**, lo mismo que el **B** si se apartase de la estrategia **minimax**.

En ese caso, se dice que estamos ante un juego **estable** y las estrategias maximin y minimax son **estrategias óptimas**, mientras que el valor $\mathbf{G\hat{} = m_A = m_B}$ se denomina **valor del juego** (valor que pagará el jugador **B** al **A** cuando ambos hayan empleado estrategias óptimas).

Ejemplo1:

Para mostrar la potencial trascendencia práctica de la Teoría de Juegos utilizaremos un ejemplo, que es una variante del presentado por Bronson (1996).

Imaginemos que las cadenas de supermercados **Sol** y **Luna** han decidido instalarse en una ciudad del NEA y han fijado su atención en los tres barrios de mayor poder adquisitivo de esa ciudad: Amistad (**A**), Bella Vista (**B**) y Centro (**C**). El **A** concentra **50%** de la población total de los tres (o sea, del mercado potencial de esos tres barrios), el **B** el **35%** y el **C** el **15%**.

La cadena **Sol**, que ha requerido nuestros servicios, es la más grande, la más antigua y con un prestigio ganado, por lo que, a igual distancia, la gente la escogerá en mayor medida.

Cada empresa contrató su propio análisis de mercado, pero los resultados de ambos fueron similares:

- Si ambas se ubican en un mismo barrio (o equidistante de él), la cadena **Sol** controlará **60%** de los negocios del barrio.
- Si **Sol** está más cerca de un barrio que **Luna**, controlará **80%** de los negocios del barrio.
- Aunque **Sol** se localice más lejos de un barrio que **Luna**, de todas formas atraerá **35%** de los compradores de ese barrio.

Por una política de **Sol**, nunca se instalan en barrios pequeños, como el **C**.

Por todo ello, la cadena **Sol** nos requirió un análisis y una sugerencia de cuál sería la mejor localización para su nueva sucursal.

La posición relativa entre los barrios es la mostrada en la Fig. 8.1.

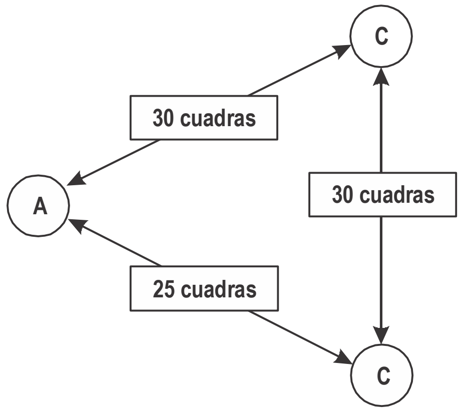


Figura 8.1 Esquema del problema de los supermercados

En este caso, los supermercados **SOL** tienen dos posibilidades de estrategias puras:

S_A: instalarse en el barrio **A**

S_B: instalarse en el barrio **B**

En cambio, los supermercados **Luna** pueden elegir entre 3 estrategias puras:

LA: instalarse en el barrio **A**

LB: instalarse en el barrio **B**

LC: instalarse en el barrio **C**

En estas circunstancias, y desde la óptica de **Sol**, las consecuencias del juego serán (**rmn** es el resultado, desde la óptica de **Sol**, en caso de instalarse esa cadena en **m** y **Luna** en **n**):

$$r_{AA} = 0{,}60 \cdot 0{,}50 + 0{,}60 \cdot 0{,}35 + 0{,}60 \cdot 0{,}15 = 0{,}60$$

$$r_{AB} = 0{,}80 \cdot 0{,}50 + 0{,}35 \cdot 0{,}35 + 0{,}60 \cdot 0{,}15 = 0{,}6125$$

$$r_{AC} = 0{,}80 \cdot 0{,}50 + 0{,}80 \cdot 0{,}35 + 0{,}35 \cdot 0{,}15 = 0{,}7325$$

$$r_{BA} = 0{,}35 \cdot 0{,}50 + 0{,}80 \cdot 0{,}35 + 0{,}60 \cdot 0{,}15 = 0{,}545$$

$$r_{BB} = 0{,}60 \cdot 0{,}50 + 0{,}60 \cdot 0{,}35 + 0{,}60 \cdot 0{,}15 = 0{,}60$$

Para explicar cómo se calcularon los valores recién presentados analizaremos el valor **rac**, que es el resultado para **Sol** de instalarse en el barrio **A**, en caso que **Luna** se instale en el barrio **C**:

*Como **Sol** se instalaría en el barrio **A**, captaría el 80% de los clientes de ese barrio, que concentra a 50% de la población total. A su vez, quedaría más cerca del barrio **B** que **Luna**, por lo que capturaría a 80% de sus clientes del barrio, que representan el 35% del total. Con respecto al barrio **C**, que concentra al 15% de la población, los supermercados Sol atraerían a 35% de los clientes de ese barrio.*

Como el cálculo de los valores $\mathbf{r_{nm}}$ se realizó sumando consecuencias por sus probabilidades de ocurrir, ello implica que representan valores esperados, o esperanzas matemáticas de los resultados.

La matriz de esta situación de juego es la mostrada en la Tabla 8. 3:

Tabla 8.3 Matriz del problema de los supermercados

		Sol			
		L_A	L_B	L_C	**Mín.**
Sol	S_A	60	61,25	73,25	***60***
	S_B	54,50	60	73,25	54,50
	Máx.	***60***	61,25	73,25	

Como el **minimax = maximin**, ello significa que estamos ante la presencia de una situación de **juego matricial estable**, es decir con un óptimo que permite la aplicación de **estrategias** puras: para ambas cadenas de supermercados, lo más beneficioso sería instalarse en el barrio **Amistad**.

Juegos inestables y estrategias mixtas

Consideremos el juego matricial mostrado en la Tabla 8.4:

Tabla 8.4 Matriz de un juego inestable

		Jugador B				
		1	**2**	**3**	**4**	**Mín.**
Jugador A	**1**	5	-10	9	0	-10
	2	6	7	8	1	1
	3	8	7	15	2	***2***
	4	3	4	-1	4	-1
	Máx.	8	7	15	***4***	

Como el minimax > maximin, ello implica que no se obtendrá un óptimo aplicando estrategias puras. Entonces, se dice que el juego es **inestable**.

En esos casos es recomendable utilizar **estrategias mixtas**: los jugadores aplicarán sus conjuntos de estrategias de acuerdo a un criterio probabilístico.

Para entender esto vamos a definir lo siguiente:

$\mathbf{x_i}$: frecuencia relativa de la jugada de la fila **i**

$\mathbf{y_j}$: frecuencia relativa de la jugada de la columna **j**

siendo: $\sum_{i=1}^{m} X_i = 1$ y $\sum_{j=1}^{n} y_i = 1$

Entonces, la matriz del juego quedará expresada como se muestra en la tabla de la Tabla 8.4:

Tabla 8.5 Uso de estrategias probabilísticas

		Jugador B			
		y_1	y_2	...	y_n
Jugador A	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

En esa tabla, el término $\mathbf{a_{mn}}$ es la consecuencia del juego (según la óptica del jugador **A**) cuando el **A** hace la jugada **m** y el **B** la jugada **n**.

Entonces, el **jugador A** escogerá $\mathbf{x_i}$ de tal forma que:

$$\max_{x_i}\left\{ \text{mín}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\cdot x_i \;;\; \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\cdot x_i \;;\; \ldots \;; \sum_{i=1}^{m} a_{in}\cdot x_i \;; \right)\right\} \tag{8.1}$$

mientras que el **jugador B** escogerá **yj** de forma tal que:

$$\min_{y_j}\left\{ \max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot y_j \;;\; \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\cdot y_j \;;\; \ldots \;; \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot y_j \;; \right)\right\} \tag{8.2}$$

Estos valores se denominan pagos **maximin y minimax esperados**, respec-ti-vamente. En este caso también se verifica que:

$$\textbf{pago esperado minimax} \geq \textbf{pago esperado maxmin} \tag{8.3}$$

Cuando $\mathbf{x_i}$ e $\mathbf{y_j}$ corresponden a la solución óptima se verifica la igualdad y el valor resultante es el **valor esperado óptimo** del juego.

Si $\mathbf{x_i^*}$ e $\mathbf{y_j^*}$ son los óptimos, cada elemento de pago $\mathbf{a_{ij}}$ estará asociado a la probabilidad ($\mathbf{x_i^*}$; $\mathbf{y_j^*}$). Entonces, el valor esperado óptimo del juego será:

$$v^{*} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i^{*} \cdot y_j^{*} \tag{8.4}$$

Solución aplicando Programación Lineal

Todo juego finito de dos jugadores y suma cero puede expresarse como un problema de optimización lineal (Bronson, 1996).

Las estrategias mixtas óptimas de **A** satisfacen:

$$\max_{x_i}\left\{ \text{mín}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot x_i \;;\; \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot x_i \;;\; \dots \;; \sum_{i=1}^{m} a_{in} \cdot x_i \right)\right\} \tag{8.5}$$

siendo que: $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$.

Vemos que esto puede expresarse como el siguiente problema de PL:

$$\text{FO: MAXIMIZAR } \mathbf{v} \tag{8.6}$$

siendo:

$$v = \text{mín}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i1} \cdot x_i \;;\; \sum_{j=1}^{m} a_{i2} \cdot x_i \;;\; \dots \;; \sum_{j=1}^{m} a_{in} \cdot x_i \right) \tag{8.7}$$

ST:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i \geq v \qquad \text{con } j = 1 ; 2 ;....; n \qquad [\text{ n restricciones }] \\ &\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad [\text{ 1 restricción }] \end{aligned} \tag{8.8}$$

Si dividimos las n+1 restricciones por **v** tendremos:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\cdot\frac{x_1}{v}+a_{21}\cdot\frac{x_2}{v}+\ldots+a_{m1}\cdot\frac{x_m}{v}\geq 1\\
&a_{12}\cdot\frac{x_1}{v}+a_{22}\cdot\frac{x_2}{v}+\ldots+a_{m2}\cdot\frac{x_m}{v}\geq 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{1n}\cdot\frac{x_1}{v}+a_{2n}\cdot\frac{x_2}{v}+\ldots+a_{mn}\cdot\frac{x_m}{v}\geq 1\\
&\frac{x_1}{v}+\frac{x_2}{v}+\ldots+\frac{x_m}{v}=\frac{1}{v}
\end{aligned}\tag{8.9}$$

Haremos, a continuación, el siguiente cambio de variables: $X_i=\frac{x_i}{v}$, siendo i=1,2,...,m

$$\Rightarrow \max v \equiv \min \frac{1}{v}=\min\{X_1+X_2+\ldots+X_m\}\tag{8.10}$$

Entonces, el problema, desde la óptica del **jugador A**, queda como:

$$\text{MINIMIZAR}\left(Z=X_1+X_2+\ldots+X_m\right)\tag{8.11}$$

ST:

$$\begin{cases}
a_{11}\cdot X_1+a_{21}\cdot X_2+\ldots+a_{m1}\cdot X_m\geq 1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{1n}\cdot X_1+a_{2n}\cdot X_2+\ldots+a_{mn}\cdot X_m\geq 1\\
\\
\text{condición de no negatividad}
\end{cases}\tag{8.12}$$

Por su parte, desde la óptica del **jugador B** , el problema quedaría planteado de la siguiente manera:

$$\text{MAXIMIZAR}\left(W = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n\right) \tag{8.13}$$

ST:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot Y_1 + a_{12} \cdot Y_2 + \ldots + a_{1n} \cdot Y_n \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot Y_1 + a_{m2} \cdot Y_2 + \ldots + a_{mn} \cdot Y_n \geq 1 \\ \\ \text{condición de no negatividad} \end{cases} \tag{8.14}$$

siendo:

$$W = \frac{1}{v} \qquad y \qquad Y_j = \frac{y_j}{v} \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

Ejemplo 2:

Para ilustrar lo recién visto sobre juegos inestables y estrategias mixtas, considérese el juego que se presenta a continuación. En una tarde lluviosa y aburrida, dos amigos, Aníbal (**A**) y Beto (**B**), deciden jugar una especie de "desconfío". Como no tienen naipes colocan en una bolsa oscura **igual cantidad** de bolitas **rojas** y **azules**. Comienza Aníbal (**A**), que saca una bolita (que luego devolverá a la bolsa) y sin mostrársela a **B** anuncia en voz alta su color. Si es **roja** y **A** dice que es **roja**, **A** le cobra a **B** $ 1. En cambio, si es **azul** y dice que es **azul**, **A** le paga a **B** $ 1.

Cada vez que **A** afirma haber sacado una bolita **roja**, **B** podrá pagar el peso sin chistar, o bien desconfiar y desafiarlo. Si en realidad es **roja**, **B** le deberá pagar a **A** $ 2 (el $ 1 original, más una multa de $ 1), mientras que si no lo es, será **A** quien deberá pagar a **B** los $ 2.

¿Cuál debería ser el abordaje estratégico de ambos jugadores?

Aníbal (**A**) sólo tiene **dos** estrategias puras[5]:

A_1: declarar el color verdadero

A_2: declarar siempre que es **roja**, aunque no lo sea

5 Declarar siempre que es azul, y pagar siempre, no es una estrategia razonable a ser considerada por un jugador inteligente.

Por su parte, Beto (**B**) también tiene sólo **dos** estrategias puras:

$\mathbf{B_1}$: creerle a **A**

$\mathbf{B_2}$: creerle a **A** cuando declara que es **azul** y desafiarlo si **A** dice que es **roja**.

Como, en promedio, la mitad de las veces saldrá una bolita azul, mientras que la otra mitad de las veces aparecerá una roja, la matriz de las consecuencias del juego (las posibles ganancias que obtendría **A**, que es el jugador al que estamos asesorando) será:

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} = \frac{1}{2}\cdot(1) + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0 \\[2em] g_{12} = \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot(2) = 0{,}50 \\[2em] g_{21} = \frac{1}{2}\cdot(1) + \frac{1}{2}\cdot(1) = 1 \\[2em] g_{22} = \frac{1}{2}\cdot(2) + \frac{1}{2}\cdot(-2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	0	0,50
$\mathbf{A_2}$	1	0

Si aplicamos el esquema de cálculo deducido antes, el modelo lineal que solucionará el problema desde la óptica de **A** será:

MINIMIZAR Z = X1 + X2

ST:

$$0\cdot Y1 + 0{,}50\cdot Y2 \le 1$$
$$1\cdot Y1 + 0\cdot \quad Y2 \le 1$$

Al resolver el modelo obtenemos:

$$Z = 3 \quad , \quad X1 = 2 \ , \ X2 = 1$$

Como $\quad v = \dfrac{1}{Z} \Rightarrow v = \dfrac{1}{3} \quad , \ x_1 = X1 \cdot v = \dfrac{2}{3} \quad , \quad x_2 = X2 \cdot v = \dfrac{1}{3}$

Desde la óptica de **B**, el modelo será:

MAXIMIZAR: $\{W = Y1 + Y2\}$

ST:

$$0 \cdot \quad X1 + 1 \cdot X2 \geq 1$$

$$0{,}50 \cdot X1 + 0 \cdot X2 \geq 1$$

La solución de este modelo es:

$$W = 3 \quad , \quad Y1 = 1 \ , \ Y2 = 2$$

Como $\ v = \dfrac{1}{W} \Rightarrow v = \dfrac{1}{3} \quad , \ y_1 = Y1 \cdot v = \dfrac{1}{3} \quad , \quad y_2 = Y2 \cdot v = \dfrac{2}{3}$

¿Cómo se debe interpretar el resultado? Aníbal (**A**) debería decir la verdad 2/3 de las veces y mentir el tercio restante (y que no se malentienda: no debería considerarse a esta sugerencia una apología de la mentira pues, recordemos que se trata de un simple juego). Por su parte, Beto (**B**) debería creerle a Aníbal (**A**) 1/3 de las veces y deberá desafiarlo los 2/3 restantes. Por lo menos, esas estrategias serán las que maximicen el valor esperado de las respectivas ganancias de ambos jugadores.

9. Fundamentos de optimización multiobjetivo / multicriterio

Presentación

Supongamos que queremos comprar un equipo de computación (una PC, por ejemplo). Tenemos para escoger tres alternativas comparables entre sí. Sin embargo, existen diferencias notables en el precio, la velocidad de procesamiento, la capacidad de almacenamiento y el servicio posventa o garantía. ¿Cómo hacemos para escoger el equipo?

Elegir una sola opción entre varias posibles y teniendo en cuenta varios criterios simultáneamente puede transformarse en una tarea complicada, además de una fuente de potenciales conflictos. Según las circunstancias y las consecuencias futuras, el proceso decisorio puede llegar a ser sumamente difícil.

Este tipo de situaciones, a veces denominadas jocosamente como la búsqueda de lo simultáneamente "bueno, bonito y barato" ("las tres B"), viene siendo estudiado desde el último cuarto del siglo XX por la Investigación de Operaciones, que desarrolló técnicas para abordar estos problemas de optimización multiobjetivo/ multicriterio. Ellas son una importante herramienta de apoyo a la decisión, en especial en problemas de interés público (Barbosa, 1997; Cohon, 1978; Eppen et al, 2000).

Sobre la optimización multiobjetivo

La optimización multiobjetivo tiene sus orígenes en los trabajos de Edgenworth y Pareto, de finales del siglo XIX (NEOS Guide, 1996). Otros antecedentes que se le reconocen son, entre otros, la Teoría de la Utilidad, de Daniel Bernoulli, la Teoria del Bienestar Social, creada a finales del siglo XVIII sobre la base de los trabajos del Marqués de Condorcet; la Teoría de la Medición Psicosensitiva; la Investigación de Operaciones, especialmente la Programación Matemática, que tuvo desde siempre el problema de necesitar definir a priori una función objetivo a ser optimizada (Jacquet-Lagrèze, 1994?).

La formulación objetiva de un problema que requiere tomar decisiones es complicada por las imprecisiones e incertidumbres inherentes, que crean un ambiente difuso para el decisor.

Los conceptos y definiciones asociados a la optimización multiobjetivo, acertados o equivocados, buscan objetivar de alguna manera el subjetivo proceso de decisión, rompiendo con el mito de la decisión óptima en el más puro y abstracto sentido matemático. Algunos autores definen a estos métodos como una tercera alternativa a la eterna dicotomía entre el pragmatismo y el purismo académico (Barredo Cano, 1996).

Diferentemente de la optimización tradicional, con una única función objetivo a maximizar o minimizar, en la multiobjetivo se debe optimizar un vector y ello es imposible en teoría: en realidad, no existe una única solución óptima, sino un conjunto de soluciones que satisfacen en grado y forma diferentes los objetivos escogidos (Andreu Álvarez, 1993b).

Éste es el principio de los óptimos "paretianos". Para definirlos es necesario presentar las soluciones viables en un espacio de decisión diferente, en el cual cada dimensión es caracterizada por uno de los objetivos. Ello permitirá visualizar las soluciones denominadas **dominantes** (o no dominadas) y las que no lo son, conocidas como **dominadas**.

Se dice que una solución es dominante cuando, para mejorarla según alguno de los objetivos, se la empeora según alguno de los otros (Braga e Gobetti, 1997; Cohon, 1978; Zionts, 1994?; Duckstein e Szidarovski, 1994).

Um problema de optimización multiobjetivo puede ser expresado formalmente de la siguiente manera (Barbosa, 1997):

$$\begin{cases} \text{Max } F(y) \\ ST: \\ y \in Y \end{cases} \qquad (9.1)$$

donde:

Y: es el conjunto de alternativas de solución;

y: es una alternativa particular;

F: es la función (o funcional) que refleja las preferencias de los decisores.

El analista investiga el conjunto "**Y**", mientras el decisor se manifiesta o pronuncia sobre la función "**F**".

En síntesis, los objetivos reflejan las aspiraciones de los decisiores en relación a alcanzar alguna meta (ver Capítulo 3). Los atributos serán los elementos que permitan evaluar en qué medida están siendo alcanzados los objetivos, o sea, son las variables cuantitativas que caracterizan una decisión.

Ocurre que, la mayoría de las veces, los decisores reales son personas ajenas al ambiente académico y no poseen conocimientos profundos de matemática, lo que origina cierto rechazo por este tipo de abordaje. ¿Qué se podría hacer para amenizar esta situación?

A pesar de las críticas que pudieran hacérseles, los modelos y técnicas de decisión multiobjetivo/multicriterio ofrecen la oportunidad de realizar un análisis equilibrado de todas las facetas de un problema de planeamiento, especialmente de las intangibles, como las sociales o ambientales (Nijkamp y Van Delft, apud Barredo Cano, 1996).

Métodos de optimización multiobjetivo/multicriterio

Existen al menos media centena de métodos y técnicas de optimización multiobjetivo/multicriterio (Barbosa, 1997). Esos métodos podrían ser clasificados, a priori, en tres grandes grupos (Cohon, 1978; Barbosa, 1997; Cohon & Marks, 1975; Braga & Gobetti, 1997):

a) técnicas que generan un conjunto de soluciones no dominadas:

- el método de las ponderaciones;
- el método de las restricciones;
- el método NISE, o de estimativa de un conjunto no inferior;
- la Programación Lineal Multiobjetivo;

b) técnicas que incorporan las preferencias a priori de los decisores (no interactivas):

- técnicas que utilizan funciones de utilidad multiatributo;
- técnicas que atribuyen pesos o ponderaciones a priori;
- los métodos Electre (1 a 3 y las variantes 4 a 6);
- el método Promethee;
- el método del Valor Sustitutivo de Intercambio;
- el método del Análisis Jerárquico;
- el método Macbeth;

c) técnicas que utilizan una articulación progresiva de preferencias: podría decirse que se basan en un procedimiento de prueba y error para alcanzar la solución de mejor compromiso. Pertenecen a este grupo los métodos que utilizan trade-offs. Requieren una interacción permanente entre analista y decisor.

Según la opinión del autor (Pilar, 2003), podría incorporarse una cuarta categoría:

d) técnicas basadas en "distancias".

- la Programación de Metas;
- la Programación de Compromiso.

Algunos comentarios sobre los métodos multiobjetivo

Para no escapar al espíritu de este libro, no haremos una descripción de las técnicas y métodos multiobjetivo mencionados anteriormente. Solamente serán presentados a continuación unos breves comentarios y reflexiones sobre algunos de esos métodos, que son los más mencionados en la bibliografía específica.

El método Electre (en todas sus versiones) aparece como el más utilizado en trabajos científicos de investigación sobre planeamiento y gestión, tal vez por la seducción que provoca la elegancia de su lógica. Sin embargo, utiliza unos indicadores a los que el autor del método denominó índices de concordancia y de discordancia, que no son fáciles de entender por personas ajenas a los ambientes académicos, especialmente los políticos encargados de tomar decisiones, lo que motiva que esas personas tengan tendencia a rechazar el método.

El método Promethee, una especie de hijo del Electre, tendría condiciones para superar la reacción negativa antes mencionada, sobre todo por el hecho que no utiliza los mencionados índices de concordancia y de discordancia. Pero, aunque su lógica también sea impecable, utiliza los denominados flujos de superación, positivos, negativos y netos, que complican el entendimiento y aceptación del método.

Por su parte, el método del **Análisis Jerárquico** presenta una robustez conceptual y matemática, además de una semejanza con medidas tradicionales de eficiencia económica (relación beneficio/costo, o beneficio neto), todos ellos factores positivos para que sea un método con gran posibilidad de aplicación en el mundo del planeamiento y la gestión reales.

En ese sentido, la **Programación de Compromiso**, al basarse en el concepto tradicional de "distancia" también es de fácil comprensión por los políticos tomadores de decisiones y, por lo tanto, con grandes posibilidades de ser aplicado en la vida práctica.

Finalmente, vale la pena resaltarlo, mientras que la mayoría de las técnicas y métodos enunciados requieren, para ser aplicados, programas computacionales especiales, no siempre gratuitos, la utilización de los dos últimos (método del **Análisis Jerárquico** y la **Programación de Compromiso**) puede hacerse utilizando solamente planillas de cálculo electrónicas, como por ejemplo la Excel.

A continuación, se expondrán someramente los fundamentos de estos dos últimos métodos.

El método del Análisis Jerárquico (MAJ)

Cuando en un proceso de toma de decisión se estén considerando varias alternativas, los tomadores de decisiones, en principio, intentarán desarrollar un juicio sobre la importancia relativa de esas opciones.

Una analogía válida sería suponer que esos juicios son, de alguna manera, el resultado de comparar medidas físicas muy precisas, como por ejemplo pesos (Saaty, 1991). Pero encontrar esos “pesos” no es trivial y, por lo tanto, no es una tarea fácil: comparar al mismo tiempo todas las alternativas entre sí, para establecer cada uno de esos pesos, es una tarea prácticamente imposible; pero sí es posible y más fácil realizar comparaciones “paritarias” entre ellas, o sea de dos en dos (de a pares).

Si el resultado de esas comparaciones se presentase en forma de matriz se tendrá algo parecido a lo mostrado en la Fig. 9.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & ..... & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 9.1 Matriz de las comparaciones paritarias entre alternativas

En la matriz “A” de la figura anterior, “a_{12}” representa la importancia relativa entre la alternativa “1” y la “2”. Por lo tanto, esa matriz “A” será recíproca, o sea que los valores que están por arriba de la diagonal principal será recíprocos de los que están por debajo de ella. Además, esa diagonal principal, estará integrada por “unos”.

Para expresar esas importancias relativas, Thomas Saaty, el autor del método, recomienda la utilización de una escala de puntuación que varía entre 1 y 9, según la siguiente valoración subjetiva (Saaty, 1991):

- puntuación 1: es lo mismo;
- puntuación 3: es un poco más importante;
- puntuación 5: es mucho más importante;
- puntuación 7: es fuertemente más importante;
- puntuación 9: es absolutamente más importante;

pudiendo ser utilizadas puntuaciones intermedias.

Si reemplazamos cada elemento "a_{ij}" de la matriz "A" por lo que representa, es decir la relación entre el peso (la importancia) de la alternativa "i" sobre el peso de la alternativa "j", se obtendrá una nueva expresión de la matriz "A", tal como lo mostrado en la Fig. 9.2.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots\cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots\cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots\cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

Figura 9.2 Interpretación de la matriz de las comparaciones paritarias

Nadie en sus cabales esperará que un ecuacionamiento semejante se realice cada vez que alguien vaya a tomar una decisión. Sin embargo, si se espera que el juicio sea ecuánime, el proceso de decisión no debería apartarse mucho de ese esquema.

Continuando con el razonamiento, consideremos la línea "i" de la matriz "A": a_{i1}; a_{i2}; .... ; a_{ij}; .... ; a_{in}. En el caso ideal y utópico, si se multiplicara el primer elemento de la línea por "w_1", el segundo por "w2", y así en más, se tendrá:

$$\frac{w_i}{w_1} \cdot w_1 = w_i \quad \frac{w_i}{w_2} \cdot w_2 = w_i \ \ldots\ldots \ \frac{w_i}{w_j} \cdot w_j = w_i \ \ldots\ldots \ \frac{w_i}{w_n} \cdot w_n = w_i \tag{9.2}$$

Si eso mismo se hiciera con los juicios reales (ya no con los ideales), se obtendría una línea (vector línea) cuyos elementos representarían la dispersión estadística del juicio elaborado sobre el valor de "w_i". Luego, parecería válido utilizar como estimativa del peso "w_i" de la alternativa "i" al promedio de estos valores (Saaty, 1991).

Caso ideal: $w_i = a_{ij} \cdot w_j$ (para "i" y "j" variando de 1, hasta n) (9.3)

Caso más real: $$w_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot w_j \tag{9.4}$$

Entonces, suponiendo que se tiene una matriz “A”, que consiste en juicios “precisos” y otra matriz “A´”, que sea una estimativa aproximada de “A”, se podrá escribir lo siguiente:

$$A' \cdot w = \lambda_{MAX} \cdot w \qquad (9.5)$$

Se podría demostrar que, en el caso de que la “A´” sea una matriz consistente (con juicios o ponderaciones coherentes), la ecuación anterior tiene solución única y en ella “$\lambda_{MÁX}$” es el mayor autovalor de “A´”, mientras que “w” es su autovector. Este autovector será el “vector de prioridades” de las alternativas que se están analizando, según el criterio utilizado en la elaboración de las comparaciones.

Matemáticamente hablando, cuanto más parecido sea “$\lambda_{MÁX}$” al número de alternativas que están siendo comparadas (n), más consistente será el juicio de valor que se elaboró.

El autor del método, Thomas Saaty, definió un “índice de consistencia” para verificar, justamente, la consistencia de la matriz de comparaciones paritarias (Saaty, 1991; Romero, 1996), que no será explicado.

Por su parte, el autor de este libro, en su tesis de doctorado presentó una metodología bastante simple para elaborar matrices de comparaciones paritarias que sean estrictamente consistentes (Pilar, 2003). Además, presentó una propuesta de relajamiento difuso de las puntuaciones adoptadas (el concepto de relajamiento difuso será presentado en el capítulo siguiente de este libro).

Ejemplo 1:

Simplemente para ejemplificar el método, volvamos al problema de selección del equipo de computación con el que comenzamos el capítulo.

Supongamos que en el comercio nos ofrecen 3 tipos de PCs, comparables entre sí, pero que difieren en precio (aspecto “P”), velocidad de procesamiento (aspecto “V”), capacidad de almacenamiento (aspecto “C”) y garantía (aspecto “G”), siendo estos 4 aspectos los que, según nuestro parecer, influirán en la elección que hagamos (los aspectos relevantes deben ser listados en forma exhaustiva, pero evitando las repeticiones).

Lo primero que debemos preguntarnos es: ¿qué importancia le damos a cada uno de estos aspectos? Para dar una respuesta a esta cuestión es necesario elaborar una matriz en la que compararemos los aspectos relevantes de a pares (Tabla 9.1):

Tabla 9.1 Matriz de comparaciones paritarias entre los aspectos relevantes

	Precio	**Velocidad**	**Capacidad**	**Garantía**
Precio	1	5	3	4
Velocidad	1 / 5	1	1 / 2	1 / 2
Capacidad	1 / 3	2	1	2
Garantía	1 / 4	2	½	1
Suma	1,78	10	5	7,50
K=1 / Suma	0,56	0,10	0,20	0,13
K normalizado	***0,56***	***0,11***	***0,20***	***0,13***

Analicemos la primera línea, es decir las comparaciones del aspecto “precio” con los otros tres: para los responsables de tomar esta decisión, es decir nosotros, el precio es “mucho” más importante que la velocidad de procesamiento (puntaje 5), un “poco” más importante que la capacidad de almacenamiento (puntaje 3) y algo más importante que la garantía (puntaje 4). A su vez, la comparación de estos tres aspectos con el precio están indicados en la primera columna de la matriz y los valores allí consignados son, lógicamente, recíprocos de la primera línea, es decir 1/5, 1/3 y 1/4, respectivamente.

Las últimas 3 líneas de la matriz de arriba representan el cálculo aproximado -pero con suficiente precisión- del autovector (el asociado al mayor autovalor) de la matriz de comparaciones paritarias, denominado “K normalizado”.

¿Qué significa ese autovector? Que si la matriz de la Tabla 9.1 refleja razonablemente nuestra percepción del problema, el precio influiría 56% en nuestra decisión, la velocidad 11%, la capacidad 20% y la garantía 13% (0,56+0,11+0,20+0,13=1).

A continuación, es necesario elaborar otras 4 matrices, en las que compararemos entre sí los tres equipos de computación que nos ofrecen, según cada uno de los aspectos mencionados.

- Comparaciones según el precio:

Comparando las tres PCs sólo por el precio, la PC-1 es más cara que la PC-2, que a su vez es más cara que la PC-3. Como lo deseado es pagar el menor valor, la primera línea tiene sólo valores iguales a 1 (comparación de la PC-1 con ella misma) y menores que 1 (1/3 y 1/5).

Tabla 9.2 Matriz de comparaciones paritarias de las PCs según el precio

	PC-1	**PC-2**	**PC-3**
PC-1	1	1 / 3	1 / 5
PC-2	3	1	1 / 2
PC-3	5	2	1
Suma	9	3,33	1,70
K=1 / Suma	0,11	0,30	0,59
K normalizado	***0,11***	***0,30***	***0,59***

La última línea de la Tabla 9.2, que es el autovector de la matriz, nos indica que, considerando sólo el precio, la PC-1 se lleva el 11% de nuestra atención, la PC-2 el 30%, mientras que la PC-3 el 59%.

- Comparaciones según la velocidad de procesamiento:

Tabla 9.3 Matriz de comparaciones paritarias de las PCs según la velocidad

	PC-1	**PC-2**	**PC-3**
PC-1	1	5	7
PC-2	1/5	1	2
PC-3	1/7	1/2	1
Suma	1,34	6,50	10
K=1 / Suma	0,74	0,15	0,10
K normalizado	***0,75***	***0,15***	***0,10***

Del análisis de la primera línea de la matriz de la Tabla 9.3 se puede deducir que la PC-1 tiene más velocidad de procesamiento que la PC-2, que a su vez tiene mayor velocidad que la PC-3.

- Comparaciones según la capacidad de almacenamiento:

Comparando las tres PCs según la capacidad de almacenamiento, la PC-1 supera a la PC-2, que a su vez supera a la PC-3. Por ello las puntuaciones 4 y 6 adoptadas en la matriz de la Tabla 9.4

Tabla 9.4 Matriz de comparaciones paritarias de las PCs según la capacidad

	PC-1	**PC-2**	**PC-3**
PC-1	1	4	6
PC-2	1/4	1	2
PC-3	1/6	1/2	1
Suma	1,42	5,50	9
K=1 / Suma	0,71	0,18	0,11
K normalizado	***0,71***	***0,18***	***0,11***

- Comparaciones según la Garantía:

Como la PC-1 tiene mucho mejor garantía que la PC-2, se adoptó la puntuación 6 para la comparación entre ambas según este aspecto. Además, su servicio de garantía es muchísimo mejor que la PC-3, por lo que el puntaje para la comparación entre ambas es 8.

Tabla 9.5 Matriz de comparaciones paritarias de las PCs según la garantía

	PC-1	**PC-2**	**PC-3**
PC-1	1	6	8
PC-2	1/6	1	2
PC-3	1/8	1/2	1
Suma	1,29	7,50	11
K=1 / Suma	0,77	0,13	0,09
K normalizado	***0,78***	***0,13***	***0,09***

- Selección de la mejor opción:

Finalmente, hay que hacer una integración de todas estas matrices para atribuir una valoración final a cada uno de los equipos de computación que estamos considerando, teniendo en cuenta la importancia que le atribuimos a los aspectos que juzgamos relevantes en esta decisión.

Para ello, construiremos una nueva matriz (Fig. 9.3), en la que colocaremos como columnas las cuatro últimas líneas de las últimas cuatro matrices que elaboramos. Esta nueva matriz deberá ser multiplicada (ponderada) por el autovector de la matriz de comparación de los aspectos considerados:

	Precio	**Veloc.**	**Capac**	**Garant.**		0,56			***Ranking***
PC-1	0,11	0,75	0,71	0,78		0,11		**0,39**	***1ro.***
PC-2	0,30	0,15	0,18	0,13	**x**	0,20	**=**	**0,24**	***3ro.***
PC-3	0,59	0,10	0,11	0,09		0,13		**0,37**	***2do.***

Figura 9.3 Integración de las matrices de comparaciones paritarias

Podemos ver que, según nuestro análisis, la PC-2 es menos preferible que la 1 y la 3. Sin embargo, las puntuaciones de estas dos últimas difieren muy poco -en el orden del 5%-, lo que podría considerarse un "empate técnico".

No es raro que ocurran situaciones de empate como la que se dio en este caso. De todas maneras, la aplicación del método permitió descartar una opción, la PC-2, que aparece en nuestro análisis como claramente menos preferible que las otras dos, lo que, según la situación analizada, puede transformarse en un importante avance en el proceso decisorio.

Para completar el ejemplo, correspondería la verificación de las consistencias de las matrices. Sin embargo, como no hemos explicado la metodología de esa verificación, el paso será obviado. (Se aclara que las matrices del ejemplo superaron la verificación.)

La Programación de Compromiso

El método, desarrollado por Zeleny, en 1973, se basa en que existiría una alternativa ideal, comúnmente inalcanzable, que conjugaría los mejores resultados según los objetivos planteados.

Si ella fuese alcanzable sería la solución óptima. Sin embargo, como normalmente no lo es, la solución de "mejor compromiso" (la más eficiente) será aquella que se localice a menor distancia del punto ideal, lo que es conocido como axioma de Zeleny (Romero, 1996).

Entonces, para cada objetivo es necesario calcular la distancia al punto ideal:

$$d_j = [f_j^* - f_j(\bar{x})] \qquad (9.6)$$

La diferencia encerrada entre corchetes en la última ecuación indica el grado de proximidad entre el objetivo j-ésimo ($f_j(x)$), para un vector "$\bar{x}$" de las variables de decisión, y su valor ideal f_j*, siendo $f_j^* = \text{Máx}\, f_j(\bar{x})$.

Dependiendo de las variabilidades que pudieran existir entre las diferentes funciones objetivo, las diferencias calculadas aplicando la ecuación anterior deberían ser "normalizadas", por ejemplo dividiéndolas por la diferencia entre el valor ideal (f_j*) y el antiideal (f_{*j}).

$$d_j = \frac{[f_j^* - f_j(\bar{x})]}{[f_j^* - f_{*j}]} \tag{9.7}$$

Si se denomina "w_j" a la importancia que el decisor atribuye al objetivo j-ésimo, la solución de mejor compromiso surgirá del siguiente problema de optimización (Romero, 1996):

$$\text{Mín } \bar{x}_\pi = \left[\sum_{j=1}^{n} w_j^{\ \pi} \cdot \left(\frac{[f_j^* - f_j(\bar{x})]}{[f_j^* - f_{*j}]} \right)^\pi \right]^{1/\pi} \tag{9.8}$$

El parámetro "π" establece la métrica que define la familia de funciones de distancia, o sea, para cada valor de "π" se tendrá una distancia (además de un "tipo" de distancia). La distancia tradicional euclidiana es un caso particular de la ecuación anterior, en la cual $\pi = 2$.

En caso que los pesos "w_j" fuesen iguales, el espacio de decisión sería un cuadrado, o un cubo, o un hipercubo, según la cantidad de aspectos (dimensiones) considerados como relevantes.

Pero, si esos pesos fuesen diferentes entre sí, esas figuras o cuerpos regulares se deformarían, transformándose en un rectángulo, un poliedro, o un hiperpoliedro, respectivamente. La Fig. 9.4 muestra esa deformación para un espacio de decisión de tres dimensiones.

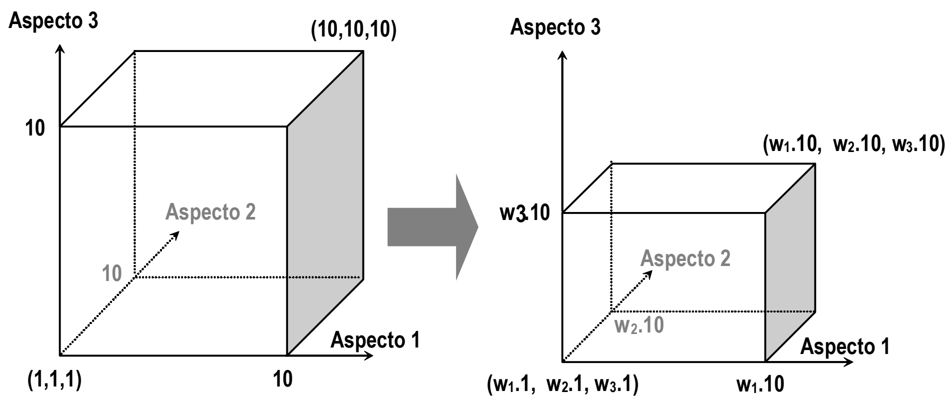


Figura 9.4 Deformación del espacio de decisión

Hasta ahora sólo hemos mencionado que el método consistía en minimizar la distancia al punto ideal. Sin embargo, vale la pena aclarar, que podría también considerarse la maximización de la distancia al punto antiideal.

Y aquí sería importante hacer una aclaración: es común suponer que los conceptos “estar cerca del punto ideal” y “estar lejos del punto antiideal” son complementarios y equivalentes y que, por lo tanto, deberían producir resultados compatibles y semejantes. Sin embargo, ello **no** es así, lo que será explicado a continuación con un ejemplo muy simple.

En la Fig. 9.5 se presenta un espacio de decisión hipotético, con sólo dos aspectos relevantes e igualmente importantes ($w_1 = w_2$).

En ese espacio existen dos puntos de interés: el caracterizado por las coordenadas (10,10), que representa el más deseable o punto ideal, y el que posee las coordenadas (1,1), el punto antiideal, del cual sería deseable apartarse lo más posible. En esa figura, los arcos de circunferencia mostrados representan curvas de equidistancia (igual distancia) a esos puntos.

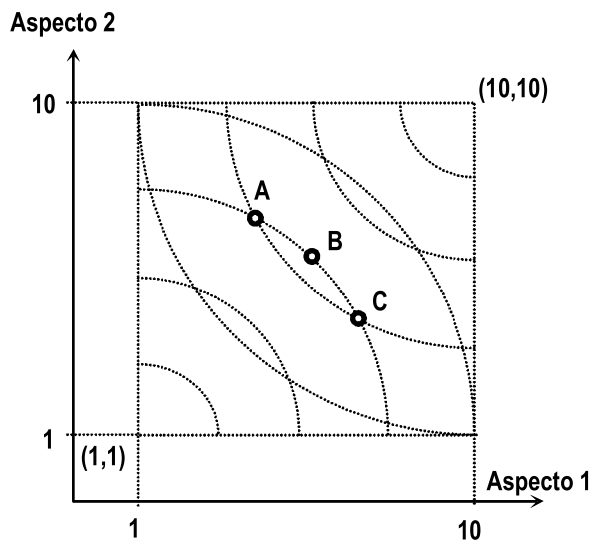


Figura 9.5 Diferencia entre los conceptos “estar cerca de” y “estar lejos de”

Los puntos “A”, “B” y “C” de la Fig. 9.5 están a la misma distancia del punto antiideal (1,1), pero, sin embargo, el “B” está más cerca del ideal (10,10). Entonces, el punto “B” tiene mejores cualidades que el “A” y el “C” y, por lo tanto, debería ser preferido antes que los otros.

10. Fundamentos de lógica difusa[6]

Introducción

La clasificación de cosas o elementos siempre genera sensaciones de duda, sobre todo cuando estamos en cercanías de los límites de esas clasificaciones. Ello ocurre porque, según la lógica booleana, sobre la que se basa la Teoría de Conjuntos que nos enseñan en los cursos elementales de Álgebra, un elemento, o bien pertenece a un conjunto, o bien **no** pertenece a él.

Esta definición "binaria" presenta algunas complicaciones en la vida cotidiana. Por ejemplo, una vez, durante una clase, le pedí a una alumna que me definiera "un hombre alto". Ella me respondió con bastante rapidez que, según su parecer, un hombre es alto si mide 1,80m o más.

Le comenté a esa alumna que, según la lógica booleana y como consecuencia de la definición que ella había dado, si un hombre midiese 1,79m sería "bajo"... ¡No!, me respondió inmediatamente.

Para tratar de amenizar la situación de confusión y perplejidad que se había suscitado le pedí, entonces, que definiera "un hombre bajo". Dubitativamente me respondió que, si tuviese que definir un límite, sería 1,60m: todo hombre de 1,60m de estatura o menos sería, para ella, bajo.

Entonces, según su parecer, con 1,80 m de estatura, o más, la pertenencia de un hombre al conjunto de los hombres altos sería total, mientras que con una altura de 1,60 m o menos, la pertenencia sería nula. Entre ambos límites, habrá una situación de pertenencia parcial, con una variación gradual, que podría seguir cualquier ley, por ejemplo lineal. ¡Qué interesante idea!

En la figura 10.1 se muestra un esquema que grafica la clasificación difusa, con pertenencia parcial, recién discutido.

Un **conjunto difuso** tiene una particularidad que lo hace diferente de un conjunto clásico: sus elementos pueden tener una pertenencia parcial.

El **grado de pertenencia** es la certeza que se tiene respecto a que un elemento pertenezca a ese conjunto difuso. Es definido como un número real, que varía entre 0 y 1: cuando existe certeza de pertenencia total se usa el "1"; en

6 También llamada lógica borrosa (fuzzy logic), o imprecisa.

el otro extremo, cuando se tiene la certeza de que un elemento no pertenece al conjunto, entonces se usa el “0” (Pedrollo, 2000, Galvão, 1999, Vieira, 1996, Sakawa, 1993).

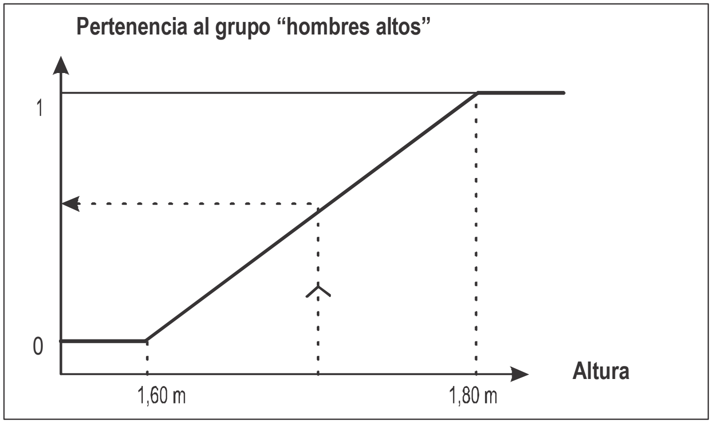


Figura 10.1 Un esquema de clasificación difusa

Las bases teóricas de la lógica difusa fueron enunciadas en 1965 por el profesor de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de California en Berkeley, Lotfi A. Zadeh, quien más tarde presentó la teoría básica de los controladores borrosos, en 1973. Como toda nueva teoría, al principio tuvo una aceptación muy tibia, casi fría, pero luego, gradualmente, comenzaron a desarrollarse trabajos de investigación y aplicaciones prácticas, hasta llegar a la época actual, en la que la gran cantidad de procesos de control (incluidos los de las lavadoras de ropas, o de vajilla) se basan en estos conceptos (Martín del Brío & Sanz Molina, 2007).

Estas características de los conjuntos difusos los vuelven especialmente aptos para describir expresiones que representan situaciones o condiciones comunes y que mal podrían ser definidas con una variable numérica. Estas expresiones son comúnmente denominadas **variables lingüísticas** (o imprecisas).

A continuación serán presentados algunos conceptos muy básicos (según Vieira, 1996) de la lógica difusa:

- **Conjunto difuso**: Si “X” es una colección de elementos “x”, la definición matemáticamente formal de un conjunto difuso “$\tilde{A}$” es la siguiente:

$$\tilde{A} = \left\{ \left[x, \mu_{\tilde{A}}(x) \right] \mid (x \in X) \right\} \qquad (10.1)$$

En la ecuación (10.1), "$\mu_{\tilde{A}}(x)$" es la función de pertenencia de "x" en "$\tilde{A}$", que normalmente tiene como límite inferior "0", y como límite superior "1". Con estos límites, el conjunto es denominado normalizado o normal.

- **Conjunto difuso convexo**: Si la función de pertenencia "$\mu_{\tilde{A}}(x)$" es convexa, el conjunto será un conjunto difuso convexo.
- **Número difuso**: Un número difuso es un conjunto difuso normal y convexo. Es la función que define la pertenencia parcial antes mencionada. Podría ser entendido como una generalización del intervalo de confianza.

Un número difuso es un dato subjetivo e impreciso y no debería ser entendido como una variable aleatoria. Es una estimativa y no una medida (Kaufman y Gupta, apud Vieira, 1996). Por tal motivo, algunos definen a los métodos relacionados con la lógica difusa como "posibilísticos" (Galvão, 1999).

Sin embargo, los métodos difusos deberían ser entendidos como complementarios y no como sustitutivos de los métodos probabilísticos. Estos métodos (los difusos) permiten manejar un tipo de incertidumbre cuya naturaleza es diferente de la incertidumbre de origen.

Número difuso triangular

Una situación típica que suele producir cierto desconfort a los tomadores de decisiones es cuando deben calificar algo o a alguien. Por ejemplo, imaginemos la siguiente circunstancia: fuimos a cenar a un buen restaurante (caro, por supuesto) y a la salida nos solicitan que califiquemos, con una escala de 1 a 10, la comida, el servicio, el lugar, etc. La verdad es que todo estuvo muy bueno, pero el servicio..., mmm..., no nos satisfizo del todo, aunque, para ser justos, tampoco estuvo tan malo. Nos parece que su calificación podría ser, digamos un 8... Pero, si lo pensamos un poco más, tal vez podríamos estirarnos hasta un 9, aunque también demoraron mucho en atendernos, en traer los platos, etc., por lo cual, podríamos bajar la puntuación hasta 7. Sin embargo, nos parece que un 8 sería lo más, digamos, ecuánime.

En ese caso, estamos ante una situación cuya calificación más apropiada podría ser hecha recurriendo a la lógica difusa. La variable lingüística sería "calificación adecuada del servicio" que, como se dijo antes, podría variar entre una puntuación 8, con grado de pertenencia máximo (o valor más probable, sin que ello implique una asociación con alguna distribución de probabilidades), hasta 7, en un extremo inferior, y 9 en un extremo superior, con grados de pertenencia nulos en ambos casos.

Situaciones como la que estamos analizando pueden ser bastante bien caracterizadas con lo que se denomina **número difuso triangular** (Vieira, 1996), que está representado en la Fig. 10.2.

La variación +/- 1 de la puntuación adoptada podrá ser diferente (o más de1, o menos de 1) para otro caso o problema.

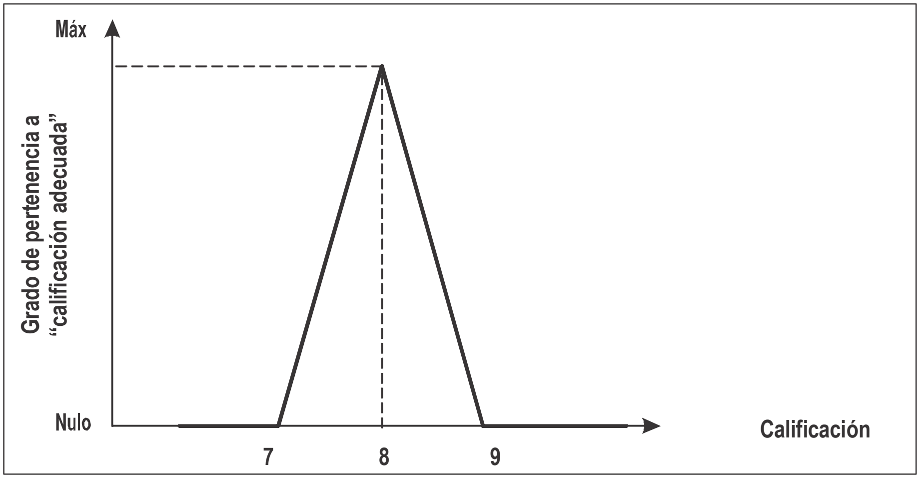


Figura 10.2 Número difuso triangular

Reflexiones finales

Si profundizáramos más en este tipo de abordaje nos estaríamos escapando al espíritu del libro. Vale la pena aclarar que, en la actualidad, hay mucha y buena literatura sobre lógica difusa, que podría ser consultada por los lectores interesados en el tema.

Sin embargo, a modo de reflexión final, se podría decir que la utilización de este tipo de lógica es un abordaje alternativo, según el cual se realiza un relajamiento difuso de calificaciones y valores que, al ser parámetros que caracterizan una situación problema, en el abordaje tradicional, basado en la lógica booleana, adoptan un valor único, rígido e inamovible. Por eso, en el abordaje tradicional es importante realizar el análisis posóptimo, o análisis de sensibilidad.

Entonces, el relajamiento difuso podría ser considerado como el análisis de sensibilidad incluido en el propio proceso de optimización y es posible aplicarlo a todas las técnicas de optimización antes vistas, desde la Programación Lineal, hasta la Programación Multiobjetivo/Multicriterio. Además, como ya dijimos antes, la lógica difusa está presente en gran cantidad de procesos de control, desde los que regulan fábricas muy complejas, hasta los utilizados en las lavadoras de ropas y de vajilla modernas.

11. Reflexiones sobre la gestión: de la visión académica a la gestión real

Las decisiones y la gestión

¿Alguien conoce algún libro sobre cómo andar en bicicleta? Difícilmente exista ese libro... Para aprender a andar en bicicleta es necesario subirse a una y experimentar el equilibrio dinámico que implica.

De igual manera, no sería razonable teorizar demasiado sobre la gestión, que se desarrolla en un marco de equilibrio dinámico, no siempre estable, que requiere tomar decisiones permanentemente.

Las decisiones se toman siempre en un contexto de **información incompleta**. Es más, es muy difícil (y tal vez sea imposible) definir qué es lo que podría considerarse **información completa**. Hay una frase atribuida a Eráclito de Efeso, uno de los grandes sabios de la antigüedad, de la escuela jónica de filosofía, que reza: "Nadie entra dos veces en un río"; una alusión a los cambios naturales y permanentes ¿Y qué significa esto? Que la información, igual que los ríos, no es estática, sino que evoluciona permanentemente y si no se utiliza en el momento oportuno puede perder validez.

Además, es común que la información que uno consiga no sea, estrictamente, la que necesita, o que conseguir esa información necesaria sea muy costoso o demorado. Lo importante, entonces, es conocer y manejar la información disponible y saber justipreciarla (aprehenderla) para poder utilizarla adecuadamente.

Vivimos en una época de permanentes transformaciones. Desde el último cuarto del siglo XX nuestro mundo, globalización mediante, se transformó en menos estable, en menos rígido y en menos previsible que en el pasado. Ningún paradigma sobrevive mucho tiempo. Éste es el gran desafío de los tomadores de decisiones.

Existe un aditamento: las decisiones se toman **en soledad**, lo que implica que la responsabilidad por las consecuencias de esas decisiones recaerá sobre el decisor, y esa responsabilidad no es transferible ni delegable.

¿Saber o estar informados?

En el prefacio de su libro "The science of water. The foundation of modern hydraulic" (La ciencia del agua. Las bases de la hidráulica moderna), el profesor Enzo Levy, quien en vida fuera catedrático de la UNAM (México), escribió la siguiente frase: “El peor enemigo de la humanidad no parece ser el holocausto nuclear sino la ignorancia; la ignorancia de algunos de nosotros, que fuimos educados y presumimos de conocer. Este es un extraño tipo de ignorancia, resultante, tal vez, de un exceso de información”.

Hay una gran diferencia entre saber y estar informado. Saber implica una tarea intelectual de procesamiento y asimilación, mientras que para estar informado sólo hace falta tener acceso a la información. La abundancia de esta última nos apabulla. Aparece y fluye a una velocidad que supera nuestra capacidad para procesarla, lo que nos lleva, a veces, a creernos verdaderos conocedores cuando tal vez ni siquiera alcanzamos la calidad de bien informados.

Reflexiones sobre “el poder”

El poder debería ser entendido como “poder hacer”. O sea, bien entendido sería más una carga (¿pesada?) que una prebenda.

Alguien dijo una vez que para realizar cualquier transformación son imprescindibles ideas y poder. Las ideas sin poder generan utopías, mientras que el poder sin ideas, tiranías.

Pero no es necesario –y hasta tal vez sea imposible– que ideas y poder se conjuguen en la misma persona. El poder se construye a través de la política, mientras que las ideas se generan a partir de la investigación y el estudio.

¡Qué bueno sería que los responsables de realizar gestión y tomar decisiones tuvieran la suficiente permeabilidad a las ideas y resultados de los trabajos de los científicos e investigadores!

Reflexiones sobre el proceso de tomar decisiones

¿Cuál es la secuencia más común en el proceso de tomar decisiones? Tal vez sea:

1) definir el problema;

2) definir las causas;

3) enunciar soluciones posibles y realizables;

4) decidirse por una y ponerla en práctica.

Éste es el modelo que tradicionalmente se enseña en las universidades. A ese modelo algunos lo llaman “**primero pensar**”.

El profesor James March (Stanford University), no sin una cuota de sarcasmo, describe el proceso de tomar decisiones como: “una colección de alternativas en busca de problemas; dilemas y sentimientos en busca de situaciones de decisión en las que puedan ventilarse; soluciones en busca de cuestiones para las cuales podrían ser una respuesta, y tomadores de decisiones en busca de trabajo".

Pero existen, además, otros modelos:

- **"Primero ver":** La secuencia sería:
    1) preparación (conocimiento profundo);
    2) incubación (reflexión);
    3) iluminación (efecto "¡Eureka!") y
    4) verificación de resultados (reflexión lógica a posteriori).

Una frase atribuida a Luis Pasteur dice así: "El azar sólo favorece a la mente preparada".

- "**Primero actuar**":
    1) representación (análisis profundo y objetivo de la situación);
    2) selección de alternativas de acción, y
    3) retención (probar varias opciones, determinar cuál funciona, tratar de entender el por qué y luego repetir el comportamiento exitoso).

- ¿Qué destaca cada modelo?

Primero Pensar	Primero Ver	Primero Actuar
- la ciencia - lo verbal - la planificación	- el arte - lo visual - la imaginación	- la experiencia - el aprendizaje - lo visceral

- ¿Cuándo convendría utilizar cada modelo?

Primero Pensar	Primero Ver	Primero Actuar
- el problema está claro - hay datos y son confiables - el contexto es estructurado	- son necesarias soluciones creativas	- situaciones nuevas y confusas - situaciones de crisis

En síntesis, el modelo “primero pensar” sería aplicable a la gestión planificada, el “primero ver” a la gestión de la innovación e invención, mientras que el “primero actuar” es el que debería utilizarse en situaciones de crisis.

“Esperamos que ocurra lo mejor, pero también estamos preparados por si ocurriese lo peor” podría ser un buen lema de los responsables de hacer gestión.

Reflexiones sobre la planificación

Planificar consiste, en última instancia, en distribuir (asignar) recursos escasos entre actividades que compiten por ellos. ¿Y con qué criterios realizar es distribución y asignación de recursos?

Los estudiosos e investigadores de la planificación científica (en general, relacionados a la Investigación de Operaciones) resuelven este dilema a través de funciones de eficiencia (la función objetivo), es decir, plantean situaciones de **competición**.

Sin embargo, en el mundo real, especialmente en cuestiones relacionadas con la política, más que situaciones de competición, existe **oposición**. Esa oposición surge por la existencia de conflictos de hecho entre la lógica sistémica versus la lógica de los actores sociales, en general corporaciones (en la bibliografía específica se los suele denominar “stakeholders”).

Esa oposición no siempre es racional, inclusive, hasta puede ser dogmática: “eso está mal porque lo hizo el ´otro´ (por ejemplo el gobierno anterior)”. Los discípulos de Aristóteles cortaban de cuajo las discusiones que se ponían difíciles con la famosa frase “ipsi dixit” (él lo dijo)…, y fin de la cuestión.

El abordaje académico de la “oposición por la oposición misma” genera dilemas de todo tipo en los investigadores, que están acostumbrados a la modelación matemática y al uso de algoritmos. Tal vez, especialistas en Sicología y Sociología estén mejor entrenados para ello, aunque sus trabajos suelen orientarse más en la dirección descriptiva: explicar y predecir el comportamiento de los decisores.

- Un ejemplo real:

Para ejemplificar lo antes expresado, permítaseme contar un hecho que sucedió durante la época que me tocó administrar los recursos hídricos de la Provincia del Chaco.

Cierto día, leí en uno de los diarios que el intendente de una localidad del interior, perteneciente a un partido político diferente del gobierno provincial que yo integraba, cuestionaba muy duramente la ejecución de una obra reclamada desde hacía tiempo. Entonces, lo llamé, coordinamos un encuentro, en el que le planteé los potenciales beneficios de esa obra. Me pareció que al final de la reunión nos habíamos puesto de acuerdo. Sería difícil para mí explicar el asombro que me provocó cuando leí al día siguiente, en el mismo diario, otra vez las críticas.

Yo, que estaba "prestado" de la Universidad en el Gobierno, no conocía los "códigos" de la política, pero sí la Teoría de Juegos No Cooperativos de Nash (el personaje de la famosa película "Una mente brillante"). Así que decidí analizar la situación suscitada a través de esa teoría, por lo que intenté montar la matriz de esta suerte de juego, y lo que surgió es lo mostrado en la Tabla 11.1.

Tabla 11.1 Matriz de una situación de no cooperación

		Mi "adversario"	
	Estrategias	**Atacar**	**No atacar**
Yo	**Atacar**	R- ; R-	B ; M
	No atacar	M ; B	R+ ; R+

En esa matriz, que representa simplemente un juego, "atacar" debe ser entendido como expresar críticas a través de los medios. A su vez, mi "adversario" sería el intendente (que, dicho sea de paso, hoy es un gran amigo personal). Los cuatro pares de valores allí mostrados deben ser entendidos de la siguiente manera: el valor de la izquierda representa el resultado que yo obtendría, mientras que el de la derecha, el resultado que obtendría mi adversario.

Los posibles resultados de ese juego serían:

- si yo atacaba y mi adversario también, a ambos nos iría regular "menos" ante la opinión pública (R- ; R-);
- si él atacaba y yo no respondía, a mí me iría mal y a él bien (M ; B);
- recíprocamente, si yo atacaba y él no respondía, a mí me iría bien y a él mal (B ; M);
- y si ninguno de los dos nos atacábamos y nos dedicábamos cada uno a sus tareas, a ambos nos iría, digamos, regular "más" (R+; R+).

Analicemos ahora las opciones:

- si mi adversario eligiese atacarme, sus opciones de resultado serían "B" o "R-"; como yo tendría por opciones de resultado "R-" o "M", mi respuesta sería la asociada con la mejor de ellas, "R-", o sea atacar;
- si en cambio él decidiese no atacarme, sus opciones de resultado serían "R+" o "M", mientras que las mías "B" o "R+", por lo que mi respuesta sería, nuevamente, atacar;

Por lo tanto, se ve que este juego tiene un punto de equilibrio estable, (R- ; R-), correspondiente a la decisión (estrategia) de atacar por parte de los dos jugadores: parecería que, en cuestiones políticas, el nombre del juego es, entonces, atacar.

Sin embargo, ese punto de equilibrio estable es subóptimo, pues existe un resultado mejor para ambos, (R+ ; R+), que corresponde a las decisiones simultáneas de no atacar. Pero mientras no existiese confianza ni vocación de colaboración mutua, ese punto verdaderamente óptimo, no será un punto de equilibrio estable[7].

Entonces, a partir de habernos dado cuenta que existía un resultado mejor para ambos, comenzamos a trabajar más cooperativamente con ese intendente, al punto de entablar una relación de amistad que perdura en la actualidad.

Reflexiones sobre la acción

Los principios deseables de la acción serían (Lanna, 1998):

- prevención: siempre será más fácil y barato prevenir que curar;
- realismo: los objetivos y cronogramas planteados deberían ser posibles de cumplir;
- simplicidad: los problemas y conflictos que pudieran surgir como consecuencias de esa acción deberían ser fáciles de resolver, rápidamente, sin necesidad de recurrir a instancias burocráticas o judiciales de niveles muy altos;
- pragmatismo: los instrumentos de control a ser implementados deben ser adecuados a las condiciones tecnológicas, institucionales y, sobre todo, culturales locales.

La evaluación de los efectos y consecuencias de las acciones realizadas en un contexto de gestión no pueden ser abordados con precisión matemática, pues, en general, es necesario tener en cuenta contextos y condicionantes políticos, socioeconómicos, legales, institucionales, que limitan, restringen o, eventualmente, inviabilizan algún plan de acción. Caracterizar matemáticamente esos contextos y condicionantes es una tarea, mínimamente, difícil.

Este tipo de escenarios no muy bien definidos, donde se conjugan incertidumbres y falta de conocimiento, se transforma en el principal argumento de un reclamo tradicional:

La existencia de una brecha entre el abordaje teórico o académico y la gestión real.

¿Actuar? ¿Qué hacer? ¿Cómo hacerlo? ¿Cuándo hacerlo? Son preguntas pertinentes y conducentes en la vida diaria de los responsables de hacer gestión.

Muchos de nosotros conocemos ambientes de trabajo en los que casi siempre es posible esperar hasta mañana para tomar una decisión o ejecutar algo… Como conclusión, todo (o casi todo) espera hasta mañana.

7 Ese punto de equilibrio estable, pero subóptimo, se denomina “equilibrio de Nash”.

Sin embargo, en otros ámbitos, por ejemplo los relacionados al manejo de recursos hídricos, si a las 6 de la mañana aparece un problema, si no se ensayó una solución para las 9, el problema puede transformarse en un desastre.

Para encarar los desafíos del presente y del futuro no hay que temer a las crisis, ni protestar contra ellas y, sobre todo, no inventarlas. El miedo a enfrentar una crisis puede transformarla en una verdadera catástrofe.

> En el día a día de la gestión, esperar puede transformarse en un narcótico:
> placentero, adictivo e, inclusive, fatal.

En términos generales, el responsable de hacer gestión deberá tomar decisiones permanentemente. Sin embargo, habrá situaciones que no ameriten su intervención, y en esos casos será importante que no intervenga: por ejemplo, no es sensato que el presidente de una compañía decida la marca de café que se tomará en la misma; no delegar esos menesteres intrascendentes y ocupar su tiempo valioso en esas decisiones menores provocará que desatienda cuestiones realmente importantes.

El riesgo en la gestión

Sería deseable seguir la secuencia mostrada en la Fig. 11.1 para pasar a la acción:

Figura 11.1 Secuencia deseable para pasar a la acción

Los datos se obtienen de mediciones (en lo posible sistemáticas); son sólo números con sus unidades. La información resulta de procesar los datos (verificación de consistencia, correlaciones, tendencias, etc.).

En la Fig. 11.1 las flechas representan la necesidad de incorporación de materia gris (o inteligencia) para pasar de un estadio al siguiente, y su tamaño refleja la cantidad requerida de este insumo indispensable (aunque no siempre abundante). Sin embargo, en la práctica de la gestión, puede ocurrir que exista gran presión para pasar sin escalas a la acción…, “y que la suerte te acompañe”.

La gestión del riesgo es verdaderamente controversial. “El riesgo es una opción, no un destino” es una frase que escribió Peter Berstein en su libro “Desafio aos deuses: a fascinante história do risco” (Desafío a los dioses: la fascinante historia del riesgo). Significa que no existe el riesgo intrínseco; sólo hay riesgo cuando se toma una decisión.

En el Capítulo 2 se discutió sobre el riesgo, y se comentó que ese concepto se relaciona con la Estadística y las Probabilidades. Sin embargo, mientras académicamente la Estadística es muy respetada y ocupa un lugar destacado, la sociedad es un tanto escéptica y descreída (¿por qué debería creer y confiar en algo tan complicado de calcular?), por lo que es bastante común percibir la existencia de una brecha entre el riesgo y la percepción social del riesgo. (Lo de la percepción social del riesgo tendría relación con el concepto “bayesiano” de probabilidad, también discutido en el Capítulo 2.)

¿Se planifica utilizando métodos científicos?

Para la elaboración del presente capítulo se consultó a personas que están o que estuvieron vinculadas directamente con la gestión real, tanto de entidades privadas, como públicas.

Aunque esa muestra no fue seleccionada con rigor científico, se notó que no es común la planificación de mediano y largo plazo (planificación estratégica) y que la gestión está fuertemente asociada a situaciones coyunturales, por lo menos en los casos consultados.

Sin embargo, aunque hayan sido los menos, sí se encontraron casos de planificación estratégica, aunque con poca utilización de métodos y herramientas científicos.

Un ejemplo de utilización de una metodología con base científica aplicada a la planificación estratégica, relacionado con la gestión del riesgo, es la selección de la traza de la obra de control ubicada en cercanías de la desembocadura del río Negro, integrante del sistema de defensas contra inundaciones del Área Metropolitana del Gran Resistencia (Chaco).

Esa región constituye un núcleo urbano con una población de cerca de 390.000 habitantes y sufría con cierta frecuencia inundaciones provocadas por las crecidas de los ríos Paraná y Paraguay. Por tal motivo, y como estrategia de gestión del riesgo, las autoridades provinciales decidieron la construcción de un sistema de defensas.

El costo de este tipo de obras es verdaderamente alto, tanto desde el punto de vista económico y financiero, como también ambiental.

En noviembre del año 2000 se inició el proyecto de la mencionada obra. La empresa proyectista propuso tres alternativas de trazas en la fase de anteproyecto (Pilar et al, 2002), una de las cuales sería ejecutada.

El problema que se planteó fue que ninguna de las trazas propuestas se mostró, ni absolutamente mejor, ni absolutamente peor que las otras. Utilizando la terminología definida en este libro, ninguna constituyó una solución dominante ni dominada: por ejemplo, una de esas alternativas aparecía como más eficiente en términos de bombeo, pues poseía un mayor reservorio; sin embargo, se mostraba muy vulnerable a una ocupación de ese cuenco. La selección de la traza que finalmente se construiría se presentaba como una tarea difícil y conflictiva para las autoridades de la Administración Provincial del Agua del Chaco - APA.

Para resolver la localización de la obra se realizó un abordaje de optimización multiobjetivo, basado en el Método del Análisis Jerárquico – MAJ, presentado en el Capítulo 9, estableciéndose que eran seis los aspectos relevantes a ser considerados. Solamente para ilustrar, esos aspectos fueron:

a) geotécnicos;

b) grado de exposición al río Paraná;

c) vulnerabilidad ante la ocupación del reservorio;

d) vulnerabilidad ante el corte del servicio eléctrico;

e) costo;

f) impacto ambiental.

De la aplicación del modelo montado al efecto, y según las ponderaciones efectuadas por los decisores (las autoridades de la APA), resultó que dos de las alternativas aparecieron en un mismo nivel de preferencia (una diferencia de puntuación de 5% entre ambas, que podría considerarse dentro de los errores y tolerancias del método), mientras que la restante se mostró bastante menos preferible que las anteriores. Luego, a través de un análisis posterior más detallado, se escogió la alternativa que finalmente se proyectó y ejecutó.

Vale la pena destacar que la aplicación del MAJ, que tiene una sólida base matemática y lógica, fue fácilmente entendida por los encargados de tomar esta difícil decisión, lo que permitió su utilización para dirimir el problema.

El ejemplo mostrado no fue el único, por lo que se puede inferir que deben existir muchos más. La suerte de encuesta realizada no fue diseñada ni diagramada como tal (por ejemplo, no se puede afirmar que la muestra sea representativa del universo al que pertenece) y lo que se estaba buscando (por mero “tanteo a ciegas”) era, simplemente, experiencias del uso de métodos científicos aplicado a la planificación y a la gestión real.

Reflexiones sobre la comunicación

El tema de la comunicación es sumamente trascendente en toda organización, tanto la interna (hacia adentro de la institución), como la que se hace hacia afuera (que incluye la de difusión y la de propaganda). Ello constituye lo que podríamos denominar **comunicación institucional**. Esa comunicación institucional debe tener un contenido cierto, preciso, entendible y comprobable.

Pero, ¿qué es la comunicación? Podría decirse que es el intercambio de sentimientos, opiniones o cualquier otro tipo de información mediante un sistema de señales (lenguaje oral, escrito, gestual, etc.).

- **La comunicación interna:**

Para ilustrar la importancia de la comunicación interna considérese el siguiente ejemplo. Cuenta una vieja historia que, una vez, un viajero vio un hombre que con martillo y cincel golpeaba rocas hasta dejarlas muy regulares. El viajero le preguntó qué estaba haciendo. La respuesta del picapedrero no se hizo esperar: “Estoy construyendo una catedral”, dijo muy orgulloso de su trabajo.

Ese humilde trabajador estaba perfectamente conciente del objetivo de su labor; se sabía y sentía un eslabón muy importante en una organización muy compleja, que tenía como meta ejecutar algo realmente ambicioso.

La comunicación bien utilizada es un gran estimulador, dado que permite construir un buen ambiente laboral. En general, la gente que trabaja cómoda, respetada e informada produce más, pues sabe qué está haciendo y por ello desarrolla un sentimiento de compromiso con los objetivos de la institución. Es lo que vulgarmente se define con la frase “Tiene bien puesta la camiseta de la organización…”.

Además, los integrantes de una organización en la que se practica una adecuada comunicación interna se transforman en responsables y garantes de los objetivos institucionales; dejan de ser meros e indiferentes vendedores de tiempo para transformarse en reales actores de esa institución.

Hoy estamos viviendo una revolución de las comunicaciones. Como consecuencia de las facilidades que ofrecen las TICs (tecnologías de la información y la comunicación) la comunicación es algo que se realiza en tiempo real y para ello contribuyeron la Internet, la telefonía celular, las redes sociales, entre otros.

Las modalidades de comunicación no deberían competir entre ellas; más bien, deben complementarse. Hay cosas que se pueden escribir y otras que deben manejarse en forma más reservada, verbalmente, por ejemplo. Hay situaciones que podrían resolverse con una simple llamada telefónica y para las cuales la circulación de notas escritas y memorandos podría ser inconveniente y hasta contraproducente.

Así como es importante elegir la o las modalidades de comunicación más adecuadas, también es importante manejar la oportunidad, tanto en lo referido al momento, como al lugar.

En el tema de comunicación también hay que realizar un control de gestión: verificar que se haya cerrado el círculo esperado de la comunicación. La comunicación también es responsabilidad indelegable del encargado de realizar gestión.

- **La comunicación en situaciones de crisis:**

En situaciones de crisis no hay tiempo para planificar; hay que actuar. Para evitar que las personas interfieran entre sí, los roles de los que deben actuar (en la atención de las crisis) deben ser definidos en momentos en que reina la calma.

Especialmente en coyunturas de crisis es fundamental mantener una comunicación fluida, precisa, pero adecuada a las condiciones socioculturales, tanto con los encargados de actuar, como con los afectados por esas situaciones.

En esos casos, la centralización de la comunicación puede ser clave en el éxito de la acción; inclusive, puede transformarse en una cuestión de “vida o muerte”.

No todos están capacitados para comunicar (por falta de conocimientos, por no poseer la jerarquía necesaria, etc.); por ende, no todos deben ponerse a comunicar en situaciones de crisis.

La comunicación centralizada y precisa permitirá que todos y cada uno de los responsables de actuar estén haciendo lo que deben hacer y no reunidos largas horas en salas de situación, o despachos de funcionarios, a la espera de instrucciones o de las últimas novedades.

La comunicación ambigua y/o dubitativa será el caldo de cultivo para la pérdida de credibilidad, fuente potencial de situaciones de caos. Por ejemplo, gracias a esquemas de comunicación centralizados, precisos, confiables y entendibles, el Área Metropolitana del Gran Resistencia sobrellevó exitosamente las grandes inundaciones de los años 1982-83 (la más grande del siglo XX y que duró 11 meses) y de 1998.

La comunicación en situaciones de crisis no es, necesariamente, una cuestión relacionada con la comunicación científica. Básicamente, el lenguaje científico es frontal, erudito, pero tal vez oscuro para el público masivo.

Concretamente, una comunicación eficiente y responsable traerá como efecto rebote una mayor participación de los integrantes de la institución, especialmente en situaciones coyunturales poco favorables. Por el contrario, si lo que se busca es utilizar los esquemas de comunicación sólo para propagandas personales y/o individuales, ello generará confusión, desconfort y pérdida de acompañamiento en los integrantes de la institución.

A modo de epílogo

Se podría afirmar que, hasta ahora, las investigaciones académicas y científicas sobre gestión se enfocaron a desarrollar algoritmos y/o heurísticas para abordar y auxiliar en cuestiones sobre decisiones, utilizando problemas más o menos reales para ilustrar su aplicabilidad (deductivismo). Tal vez ya sea tiempo de comenzar con investigaciones orientadas a problemas reales y concretos.

Parafraseando al Profesor Eduardo Lanna (UFRGS – Brasil), parecería que las investigaciones buscan desarrollar remedios genéricos, para después buscar las enfermedades que sean curadas con esos remedios; ya sería hora de apostar un poco más fuerte al desarrollo de remedios a la medida de enfermedades reales.

Mientras tanto, y como recomendación:

- medir es necesario (para tener datos);
- estudiar es necesario (para conocer métodos y alternativas);
- tomar decisiones adecuadas y oportunas es necesario;
- hacer un control de gestión es necesario (para hacer cambios de rumbo oportunamente); y
- comunicar adecuadamente es necesario.

Jawarharlal Nehru dijo una vez, “La vida es como un juego de cartas. La mano que te ha tocado representa el determinismo; la forma en que tú la juegas es tu libre albedrío”. Fue el anhelo del autor (mi anhelo) al comenzar la redacción de este libro aportar ideas y experiencias a los responsables de hacer gestión y tomar decisiones para que utilicen su libre albedrío para hacer jugadas magistrales con las “cartas” que les toca en suerte.

Referencias Bibliográficas

ANDREU ÁLVAREZ, J. 1993. Análisis multiobjetivo. In: **Conceptos y métodos para la planificación hidrológica**. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. p.239-248.

BARBOSA, P.S.F. 1997. O emprego da análise multiobjetivo no gerenciamento dos recursos hídricos. **A água em revista,** Belo Horizonte, v.5, n.8, p.42-46.

BARREDO CANO, J.I. 1996. **Sistemas de información geográfica y evaluación multicriterio**. Madrid: RA-MA. 264p.

BARROS, M.T.L. 1997. A programação dinâmica aplicada à engenharia de recursos hídricos. In: TÉCNICAS quantitativas para gerenciamento de recursos hídricos. Porto Alegre: Ed. da Universidade/UFRGS: ABRH. p.239-277.

BERNSTEIN, P.L. 1997. **Desafio aos deuses**: a fascinante história do risco. Rio de Janeiro: Campus. 389p.

BRAGA JÚNIOR, B.; GOBETTI, L. 1997. Análise multiobjetivo. In: TÉCNICAS quantitativas para o gerenciamento de recursos hídricos. Porto Alegre: Ed. da Universidade/UFRGS:ABRH. p.361-420.

CHOW, V.T.; MAIDMENT, D.; MAYS, L. 1994. **Hidrología aplicada**. Bogotá: McGraw-Hill. 584p.

CIFRES GIMÉNEZ, E. 1993. Programación dinámica y aplicaciones. In: ANDREU ALVAREZ, J. (Ed.). **Conceptos y métodos para la planificación-hidrológica.** Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. p.227-238.

COHON, J.; MARKS, D.H. 1975. A review and evaluation of multiobjective programming techniques. **Water Resources Research,** Washington, v.11, n.2, p.208-220.

COHON, J.L. 1978. **Multiobjective programming and planning**. New York: Academic Press. 333p.

COLLISCHONN, W.; PILAR, J.V. 2000. A direction dependent least-cost-path algorithm for roads and canals. **International Journal of Geographical Information Science**, London, v.14, n.4, p.397-406.

DUCKSTEIN, L.; SZIDAROVSZKI, F. 1994. Distance based techniques in multicriterion decision making. In: BOGARDI, J.J., NACHTNEBEL, H.P. **Multicriteria decision analysis in water resources management**. Wageningen: Unesco. p.86-112.

EPPEN, G.D.; GOULD, F.J.; SCHMIDT, C.P.; MOORE, J.H.; WEATHERFORD, L.R. 2000. **Investigación de operaciones en la_ciencia administrativa**. México: Prentice-Hall. 792p.

GALVÃO, C.O. 1999. Introdução à teoria dos conjuntos difusos. In: GALVÃO, C.O.; VALENÇA, M.J.S. (Org.). **Sistemas inteligentes**: aplicações a recursos hídricos e ciências ambientais. Porto Alegre: Ed. da Universidade/UFRGS, ABRH. cap.5, p.167-191.

GOLDBARG, M.C.; LUNA, H.P. 2000. **Otimização combinatória e programação linear:** modelos e algoritmos. Rio de Janeiro. Editora Campus. 649p.

HALL, W., DRACUP, J. 1974. **Ingeniería de sistemas en los recursos hidráulicos**. México. Mc Graw-Hill. 436 p.

HILLIER, F.S.; LIEBERMAN, G.J. 2007. **Introducción a la investigación de operaciones**. México. McGraw-Hill Interamericana. 1061p.

JACQUET-LAGRÈZE, E. [1994?]. Conceitos básicos para suporte de decisão multi-critério. In: BANNA E COSTA, C. **Métodos de decisão multicritérios e aplicações**. Florianopolis: UFSC. p.6-14.

LANNA, A.E.L. 1998. Gestão dos Recursos Hídrico: Texto de referência da disciplina HIDP-78. Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Instituto de Pesquisas Hidráulicas / UFRGS.

LOPES, P. A. 2000. Probabilidades e Estatística. Rio de Janeiro. Reichmann & Affonso Editores. 174p.

MARTÍN DEL BRÍO, B.; SANZ MOLINA, A. 2007. **Redes neuronales y sistemas borrosos**. 3ed. Madrid: RA-MA. 436p.

MINDLIN, G. 2008. **Causas y azares: la historia del caos y los sistemas complejos**. 1.ed. Buenos Aires. Sigo XXI Editores. 124p.

NEOS Guide. 1996. [Argone: Optimization Technology Center]. Disponible en: <http://www-c.mcs.anl.gov/home/otc/ Guide>.

NIJKAMP, P.; VOOGD, H. [1994?]. Uma introdução informal à avaliação multi-critérios. In: BANNA E COSTA, C. **Métodos de decisão multicritérios e aplicações.** Florianopolis: UFSC. p.36-49.

PEDROLLO, O.C. 2000. **Previsão em tempo atual de cheias com uso de_sistema especialista difuso**. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, UFRGS, Porto Alegre.

PILAR, J.V. 1999. Programación Dinámica aplicada a los recursos hídricos. **Revista del Centro Universitario Rosario de Investigaciones Hidroambientales – CURIHAM**, v.5, n.2., pp. 36-50.

PILAR, J.V.;ROHRMANN, H.R.; VARGAS, R.; BURGOS, J.C. 2002. Modelo de apoyo a la decisión multiobjetivo para la elección de la traza de una defensa para el Gran Resistencia. In: CONGRESO NACIONAL DEL AGUA, 19., Villa Carlos Paz, Córdoba. **Anales**.

PILAR, J.V. 2003. Utilización de un modelo de apoyo a la decisión con relajación “difusa” para la elección de la traza de una defensa para el Gran Resistencia. In: ENCUENTRO NACIONAL DE DOCENTES DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA, 16., [e] ESCUELA DE PERFECCIONAMIENTO EM INVESTIGACIÓN OPERATIVA, 14., La Plata. **Anales.**

ROMERO, C. 1996. **Análisis de las decisiones multicriterio.** Madrid: Algorán 115p.

RUELLE, D. 1993. **Acaso e caos**. São Paulo. Editora da Universidade Estadual Paulista. 225p.

SAATY, T. 1991._**Método de análise hierárquica**. São Paulo: Makron. 367p.

SAHUQUILLO HERRAIZ, A. 1993. Reflexiones sobre la planificación hidrológica. In: ANDREU ÁLVAREZ, J. (Ed.) **Conceptos y métodos para la planificación_hidrológica.** Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. p.1-14.

SAKAWA, M. 1993. **Fuzzy sets and interactive multiojective optimization**. New York: Plenum Press. 309p.

TAHA, H.A. 1995. **Investigación de operaciones**. 5.ed. México. Alfaomega. 960p.

TRIOLA, M.F. 2009. **Estadística**. 10.ed. México. Pearson Eduacación. 904p.

VENTSEL, E.S. 1983. **Investigación de operaciones**: problemas, principios, metodología. Moscú: MIR. 280 p.

VIEIRA, V.P.P.B. 1996. Teoria dos conjuntos difusos e sua aplicação a projetos de recursos hídricos. **RBRH:** Revista Brasileira de Recursos Hídricos, São Paulo, v.1, n.1, p.110-123.

WAGNER, H.M. 1986. **Pesquisa operacional**. 2.ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall. 851 p.

ZIONTS, S. [1994?]. Programação matemática múltiplos critérios: uma visão geral e diversas abordagens. In: BANNA E COSTA, C. **Métodos de decisão_multicritérios e aplicações**. Florianopolis: UFSC. p.49-63.

Esta segunda edición se terminó de imprimir
en el mes de mayo de 2012

Alvarado 2049 - Salta (Rep. Argentina)
Telefax. (0387) 422 9473
E-mail: vmhanne@arnet.com.ar