



Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Nordeste

SIMULACION DEL COMPORTAMIENTO
MICROESTRUCTURAL DEL HORMIGON SIMPLE
APLICANDO TECNICAS DE HOMOGENIZACION

Juan Manuel Podestá

Director: Mg. Ing. Javier Luis Mroginski

Trabajo final presentado
para acceder al grado académico de
Ingeniero Civil

Diciembre 2012

SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO MICROESTRUCTURAL DEL HORMIGÓN SIMPLE APLICANDO TÉCNICAS DE HOMOGENIZACIÓN

PODESTÁ JUAN MANUEL

En el presente trabajo final se abordan problemas referidos a la homogenización de un material estructural heterogéneo: hormigón simple. La finalidad de la homogenización es obtener un material homogéneo ideal que se comporte, macroscópicamente, de la misma forma que el material heterogéneo original.

Para obtener este material homogéneo ideal se debe trabajar sobre las heterogeneidades del material original, analizando su distribución, tamaño, ley constitutiva, etc. Todo esto se logra mediante la utilización del Elemento de Volumen Representativo, el cual se define como un volumen V a nivel microscópico, que debe ser representativo de la totalidad del material. Para esto se debe cumplir lo que se conoce como distribución estadísticamente homogénea de los defectos (heterogeneidades) a lo largo de todo el material.

La modelación de los distintos problemas se realizó utilizando el Método de los Elementos Finitos (MEF), en estado plano de tensiones en algunos casos y de deformaciones en otros. Todos los materiales se consideraron dentro de campo elástico lineal. Los problemas fueron resueltos utilizando un software de MEF de elaboración propia en lenguajes FORTRAN 90 y MatLab, y también aplicaciones como GiD v10.0.9 y Abaqus v6.9. Una aplicación importante consistió en el desarrollo de una rutina de usuario UMAT, programada en FORTRAN para modelar materiales heterogéneos teniendo en cuenta propiedades de

la microestructura dentro de Abaqus v6.9.

Se presentan ejemplos estructurales con el fin de mostrar las ventajas de la micromecánica para describir diferentes comportamientos mecánicos de materiales heterogéneos.

Agradecimientos

En primer lugar es mi deseo agradecer a mis compañeros y amigos, los que estuvieron y los que están, que desde dentro y fuera de la carrera lograron incentivarme en muchas ocasiones y se mostraron siempre dispuestos a ayudarme ante cualquier inconveniente.

A los colegas y amigos del Departamento de Mecánica Aplicada, por la confianza depositada en mí para desarrollar tareas en varios campos de la Ingeniería, tareas que me ayudaron a comprender mejor la profesión y así lograr encaminarme con más ahínco y pasión hacia una formación constante.

Finalmente, un profundo agradecimiento a mi familia y particularmente a mis padres, por darme la estabilidad emocional necesaria para desempeñarse en la vida, enseñarme los valores morales y ser continuamente el ejemplo a seguir.

Juan Manuel Podestá

Diciembre 2012

Índice general

1. Introducción	8
2. Conceptos básicos de la homogenización	10
2.1. Introducción	10
2.2. Conceptos de auto-deformaciones (eigenstrains), inclusión y solución de Eshelby	10
2.2.1. Auto-deformaciones e inclusiones	10
2.2.2. Resultado de Eshelby	11
2.3. El concepto de homogenización	13
2.3.1. Propiedades Elásticas Efectivas (PEE)	13
2.3.2. Elemento de Volumen Representativo (EVR)	15
2.4. Revisión de métodos analíticos existentes	16
2.4.1. Límites de Borde de Voigt y Reuss	17
2.4.2. Hashin-Shtrikman	17
2.4.3. El método Auto-Consistente	18
2.4.4. El Modelo de Mori-Tanaka	20
3. Estudio de las condiciones de borde y elemento de volumen representativo	22
3.1. Introducción	22
3.2. Condiciones de borde y homogenización de una celda unitaria	22
3.3. Simulaciones de celda unitaria	25
3.3.1. Modo tracción pura	25
3.3.2. Modo corte puro	26

3.4. Conclusiones	28
4. Determinación del Elemento de Volumen Representativo para el Hormigón Simple y sus Propiedades Elásticas Efectivas	29
4.1. Introducción	29
4.2. Determinación del EVR	29
4.3. Análisis del EVR del hormigón simple	37
4.4. Conclusiones	38
5. Resultados numéricos de la homogenización del hormigón simple	39
5.1. Introducción	39
5.2. Simulaciones numéricas	39
5.2.1. Probeta de hormigón simple	40
5.2.2. Muro de sostenimiento	44
6. Conclusiones	48
Bibliografía	50

Índice de figuras

2.1. Inclusión dentro de la matriz.	11
2.2. Inclusión elipsoidal Ω en un dominio infinito [5]	12
2.3. Escalas características en la homogenización [5]	16
3.1. Geometría del EVR	23
3.2. Discretización EVR	25
3.3. Simulación mediante MEF del EVR aplicando condiciones de borde prescriptas. a) Deformación u_x ; b) Tensión σ_x ; c) Tensión τ_{xy}	26
3.4. Simulación mediante MEF del EVR aplicando condiciones de borde homogéneas. a: Deformación u_x ; b: Tensión S_x ; c: Tensión T_{xy}	27
4.1. Configuración de Celda 10x10cm	30
4.2. Configuración de Celda 15x15cm	30
4.3. Configuración de Celda 20x20cm	31
4.4. Tensiones σ_{xx} para celda 10x10cm	31
4.5. Tensiones σ_{xx} para celda 15x15cm	32
4.6. Tensiones σ_{xx} para celda 20x20cm	32
4.7. Tensiones τ_{xy} 10x10cm	32
4.8. Tensiones τ_{xy} : 15x15cm	33
4.9. Tensiones τ_{xy} : 20x20cm	33
4.10. E^* vs. Tamaño celdas	34
4.11. ν^* vs. Tamaño celdas	34
4.12. C_{11}^* vs. Lado Celda	35
4.13. C_{12}^* vs. Lado Celda	36

4.14. C_{66}^* vs. Lado Celda	36
4.15. ν^* vs. concentración de agregados gruesos.	37
4.16. E^* vs. concentración de agregados gruesos.	38
5.1. Ensayo de Compresión Normalizado	40
5.2. Curvas de Carga vs. Desplazamientos para caso heterogéneo y homogeneizado.	41
5.3. Tensiones σ_{xx} para caso heterogéneo (izquierda), homogeneizado con porcentaje de agregados variable (centro) y homogéneo (derecha).	42
5.4. Tensiones σ_{yy} para caso heterogéneo (izquierda), homogeneizado (centro) y homogéneo (derecha).	42
5.5. Superposición de curvas para distintas concentraciones	43
5.6. Extrapolación de valores de E	44
5.7. Transmisión de Presiones Normales.	45
5.8. Geometría del muro de sostenimiento modelado	45
5.9. Condiciones de borde del muro de sostenimiento modelado	46
5.10. Tensiones S_{11} (Izquierda) y S_{22} (Derecha)	47
5.11. Presiones Normales en la masa de suelo.	47
6.1. Mallados de probeta de Hormigón Simple: a) Material Heterogéneo; b) Material Homogéneo Equivalente	48
6.2. Comparación entre las escalas de ambos problemas	49

CAPÍTULO 1

Introducción

En la actualidad la modelación constitutiva de los materiales estructurales está sujeta a importantes cambios debido al creciente avance en el conocimiento de las propiedades o características de los materiales a diferentes escalas de observación [10].

Dependiendo del fenómeno físico que interesa ser captado y de las características propias de los materiales estructurales empleados, el estudio del comportamiento constitutivo puede requerir del conocimiento de propiedades microestructurales para contemplar el efecto de escala (*size effect*) [2] ya sea cuando se pretende modelar el comportamiento post pico o en el caso de materiales que presentan heterogeneidades [1, 4, 6, 12]. De hecho, a través de un análisis microscópico, todos los materiales reales muestran una multitud de heterogeneidades aunque macroscópicamente parecen ser homogéneos [21]. Esta falta de homogeneidad puede existir en forma de grietas, huecos, las partículas, o regiones de un material extraño, o capas de fibras en los límites de grano laminado, o irregularidades en una red cristalina, etc.

El objetivo de la micromecánica es entonces el estudio del comportamiento de estas heterogeneidades o defectos, así como su efecto sobre las propiedades y el rendimiento general de un material. Por ejemplo, las heterogeneidades de cualquier tipo a nivel local pueden actuar como concentradores de esfuerzos y con ello dar lugar a la formación y coalescencia de microgrietas o vacíos como fuente de daños materiales progresiva [15]. Por lo tanto, una tarea importante de la micromecánica, es vincular las relaciones mecánicas en diferentes escalas de longitud. Así mismo tiene la ventaja de que un comportamiento material complejo que es difícil de describir de una manera puramente fenomenológica puede ser tratado en el marco de la mecánica de medios continuos a través de procesos elementales de la microescala [20].

Por otro lado, esta disciplina permite examinar la influencia de defectos o heterogeneidades microscópicas en el comportamiento macroscópico de los materiales, es decir, que permite trasladar propiedades materiales correspondientes a escalas microscópicas a una escala de longitud mayor. Tal transición de micro a macro formalmente se denomina homogeneización [14, 17, 19].

En este trabajo se realiza la homogeneización del hormigón simple. La finalidad de la homogeneización es obtener un material homogéneo ideal que se comporte, macroscópica-

mente, de la misma forma que el material heterogéneo original.

El trabajo se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se plantean los conceptos básicos de la homogenización, se expone la solución de Eshelby. Además se realiza una revisión sobre los métodos analíticos existentes.

En el capítulo 3 se detalla un estudio de las condiciones de borde a aplicar y se muestran resultados de una serie de simulaciones realizadas sobre una celda unitaria, ejemplo que se compara con resultados de Kurukuri [13].

En el capítulo 4 se detallan las simulaciones numéricas realizadas para la determinación del Elemento de Volumen Representativo (EVR) del hormigón simple, como así también de las Propiedades Elásticas Efectivas (PEE) o Constantes Elásticas Efectivas (CEE).

En el capítulo 5 se muestran dos ejemplos de aplicación de las PEE sobre problemas de estructuras de hormigón. Un ejemplo es abordado como estado plano de tensiones y otro como estado plano de deformaciones.

Por último en el capítulo 6 se presentan las conclusiones extraídas del trabajo realizado junto con los posibles desarrollos futuros que se desprenden del mismo.

CAPÍTULO 2

Conceptos básicos de la homogenización

2.1 Introducción

La mecánica del continuo trabaja sobre materiales homogéneos ideales. Tiene como fin describir la respuesta del material frente a condiciones externas utilizando relaciones constitutivas apropiadas, las cuales, en general, se basan en experimentos macroscópicos fenomenológicos sin tener en cuenta consideraciones microestructurales. Sin embargo, todos los materiales son heterogéneos, aunque a cierta escala aparenten lo contrario. Por lo tanto, la descripción de materiales mediante la mecánica del continuo homogéneo es siempre una aproximación.

La micromecánica lidia, en general, con materiales heterogéneos, donde las dimensiones de trabajo habituales son grandes comparando con niveles moleculares pero pequeñas desde el punto de vista macroscópico. El tamaño de la escala está relacionado con el tamaño característico de las heterogeneidades (defectos) en el medio, por ejemplo el tamaño predominante de las inclusiones, fibras, grietas, agregados, etc.

El objetivo de la micromecánica es determinar el comportamiento a gran escala (macroscópico) de un medio heterogéneo, basándose en las propiedades obtenidas a nivel microscópico. La idea básica de la homogenización consiste en reemplazar el material heterogéneo por un medio homogéneo que, desde un punto de vista macroscópico, se comporta de la misma forma que el original.

2.2 Conceptos de auto-deformaciones (eigenstrains), inclusión y solución de Eshelby

2.2.1 Auto-deformaciones e inclusiones

Formalmente, todo tipo de deformación que puede prevalecer en un material en ausencia de tensiones puede ser interpretado como auto-deformación. Considerando una distri-

bución espacial de auto-deformación $\varepsilon_{ij}^t(x)$, estas son también conocidas como «stress-free transformation strains» (Deformaciones libres de tensiones), lo que denota el superíndice t . En el marco de las pequeñas deformaciones las deformaciones totales ε_{ij} son la suma de las deformaciones elásticas $\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl}$ y las auto-deformaciones: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^t$. Entonces, las tensiones vienen dadas por:

$$\sigma = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) \quad (2.1)$$

Si las auto-deformaciones no nulas persisten solo en una subregión acotada Ω de material homogéneo, esta región es llamada *inclusión* y el material que la rodea *matriz* Fig. 2.1. Debe enfatizarse que las propiedades elásticas de la inclusión y de la matriz son las mismas, caso contrario la región Ω se definiría como *in-homogeneidad*.

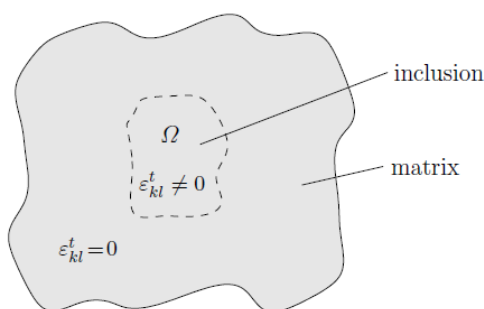


Figura 2.1: Inclusión dentro de la matriz.

En el caso general de una inclusión de geometría arbitraria Ω en un campo de auto-deformaciones también arbitrario, no es posible representar la distribución de tensiones los campos totales de deformaciones y desplazamientos de forma cerrada, lo que se simplifica acotando el problema. Una de las soluciones mas importante se presenta en la siguiente sección.

2.2.2 Resultado de Eshelby

El aporte mas importante a las soluciones en micromecánica fue descubierto por J. D. Eshelby (1916-1981). Esta es válida para un dominio infinito, en el cual existe una inclusión elipsoidal Ω con ejes principales a_i :

$$(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leq 1 \quad (2.2)$$

Si la autodeformación en la inclusión es constante, $\varepsilon_{kl}^t = const$, la solución sostiene que la deformación total ε_{kl} dentro de la inclusión Ω es también constante. Viendo el tensor de cuarto orden de Eshelby S_{ijkl} , las deformaciones totales dependen linealmente de las auto-deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^t = const \quad \text{en } \Omega \quad (2.3)$$

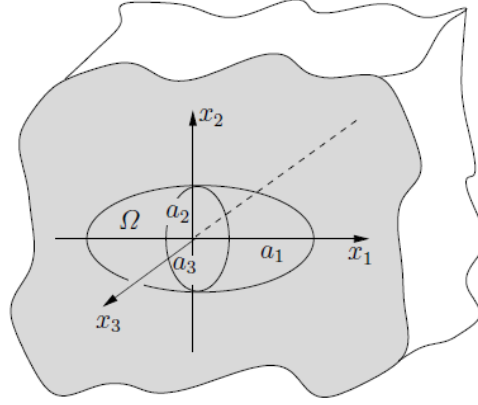


Figura 2.2: Inclusión elipsoidal Ω en un dominio infinito [5]

Utilizando la relación:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) \quad (2.4)$$

las tensiones dentro de Ω que también son constantes, pueden ser representadas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (S_{mnkl} - I_{mnkl}) \varepsilon_{kl}^t = const \quad \text{en } \Omega \quad (2.5)$$

donde

$$I_{mnkl} = \frac{1}{2} (\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk}) \quad \text{en } \Omega \quad (2.6)$$

Es el tensor identidad de cuarto orden. El tensor de Eshelby es simétrico en el primer y segundo par de índices, pero en general no lo es:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \quad , \quad S_{ijkl} \neq S_{klij} \quad (2.7)$$

En el caso de un material isotrópico sus componentes dependen solamente del coeficiente de Poisson ν , la relación de los ejes principales a_i , y su orientación con respecto al sistema de ejes cartesianos utilizado. Fuera de la inclusión Ω las tensiones y deformaciones no son constantes: Al aumentar la distancia r de la inclusión, decrece asintóticamente según la relación $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij} \approx r^{-3}$ para $r \rightarrow \infty$. El resultado Ec. (2.3) dado por Eshelby (1957) es para un material anisotrópico arbitrario. Aún así, solo para un material isotrópico es posible la representación de forma cerrada del tensor S_{ijkl} y los campos fuera de la inclusión Ω . La solución de Eshelby para inclusiones elipsoidales es de fundamental importancia para las técnicas de homogenización analíticas.

2.3 El concepto de homogenización

2.3.1 Propiedades Elásticas Efectivas (PEE)

El punto de vista más simple es que un medio heterogéneo se comporta macroscópicamente de la misma forma que sus constituyentes, pero con diferentes valores de las constantes de los materiales, que llamaremos Propiedades Elásticas Efectivas (PEE). En la presente sección, se trata de poner este concepto en un marco más claro, introduciendo y analizando la definición de PEE.

En los análisis micromecánicos los campos de tensiones y deformaciones en un material heterogéneo se dividen en las contribuciones correspondientes a diferentes escalas. Se asume que esas escalas son suficientemente diferentes, tal que:

- Las fluctuaciones de los campos de tensiones y deformaciones en la microescala (microcampos) tienen influencia en el comportamiento macroscópico en la escala mayor, solamente a través de su media volumétrica.
- Los gradientes de los campos de tensiones y deformaciones, en la macroescala, no son significativos a nivel micro; donde estos campos aparentan ser constantes.

Formalmente, esta división de tensiones y deformaciones en campos de contribuciones microscópicas y macroscópicas puede ser expresada como:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}'(x) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}'(x) \quad (2.8)$$

donde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ son los macrocampos y $\boldsymbol{\sigma}'(x)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}'(x)$ las fluctuaciones microscópicas.

Para cada región de un material heterogéneo (mas adelante definidas como Elementos de Volumen Representativo) los campos microscópicos de tensiones y deformaciones, $\boldsymbol{\sigma}(x)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$, y sus correspondientes respuestas macroscópicas $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pueden ser relacionadas mediante las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbf{A}(x) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}(x) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.9)$$

donde $:$ es un producto de doble contracción. Además, si el dominio es lo suficientemente grande y a la vez no contiene gradientes significativos de tensiones y deformaciones la

relación de homogenización puede definirse como:

$$\begin{aligned}
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(x) dV = \frac{1}{2V} \int_S (\mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{n}_S + \mathbf{n}_S \otimes \mathbf{u}(x)) dS \\
 \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2V} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS \\
 \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(x) dV = \frac{1}{V} \int_S \mathbf{t}(x) \otimes x dS \\
 \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{2V} \int_S (t_i x_j + t_j x_i) dS
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Donde V y S corresponden al volumen y a la superficie de la región considerada, $\mathbf{u}(x)$ es el vector de desplazamiento infinitesimal, $\mathbf{t}(x) = \boldsymbol{\sigma}(x) \mathbf{n}_s$ es el vector de tracción de la superficie, \mathbf{n}_s el vector normal a la superficie. $\mathbf{A}(x)$ y $\mathbf{B}(x)$ son llamados "tensores de concentración de tensiones y deformaciones mecánicas" (o tensores de influencia), respectivamente, el símbolo \otimes corresponde al producto diad.

Se destaca que las Ec. (2.8) y Ec. (2.10) implican que la fluctuación de las medias de volumen desaparece para un volumen de integración suficientemente grande,

$$\frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}'(x) dV = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}'(x) dV = 0 \tag{2.11}$$

Para materiales heterogéneos donde ambas escalas se diferencian claramente, la relación:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^*(x) \boldsymbol{\varepsilon}^*(x) dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}^*(x) dV \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^*(x) dV \tag{2.12}$$

puede demostrarse para campos de tensiones estáticamente admisibles $\boldsymbol{\sigma}^*$, y campos de deformaciones cinemáticamente admisibles $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ [10]. La Ec. (2.12) se conoce como condición Macro-Homogénea de Hill o condición de Mandel-Hill. Dichas condiciones implican que la media volumétrica de densidad de energía de deformación de un material heterogéneo puede obtenerse a través de las medias volumétricas de tensiones y deformaciones. De esta forma, la «Homogenización» puede ser interpretada como la tarea de hallar un material de comparación homogéneo que sea energéticamente equivalente a la microestructura inicial.

La microgeometría real de los materiales heterogéneos es aleatoria y sumamente compleja. En consecuencia, las expresiones exactas para $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}(x)$, $\boldsymbol{\sigma}(x)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$, etc, no pueden ser determinadas y soluciones aproximadas deben ser consideradas. De esta forma, sub-volúmenes suficientemente grandes (meso-dominios, volúmenes de homogenización) seleccionados al azar dentro de la muestra se toman para obtener las propiedades medias del material, y a su vez lograr obtener las Propiedades Globales o Propiedades Elásticas Efectivas del material.

El dominio o volumen representativo de homogenización debe ser definido de manera tal que sea estadísticamente representativo de las micro-heterogeneidades del material.

Dicho volumen de referencia se denomina en la literatura especializada Elemento de Volumen Representativo (EVR), cuya sigla en inglés es RVE. Alternativamente el EVR puede ser definido como un volumen que muestra las mismas propiedades globales, independientemente de las condiciones de borde aplicadas [18, 11]. Esta definición da lugar a una dependencia del tamaño del EVR en la propiedad física considerada.

Dicho EVR debe ser lo suficientemente grande para permitir una significativa toma de muestras del microcampo y suficientemente pequeño para que la influencia de los gradientes macroscópicos sea despreciable y que un análisis del microcampo sea posible [16]. Este requisito se denota simbólicamente con la expresión $MICRO \ll MESO \ll MACRO$ [7], donde Micro y Macro tienen su significado habitual y Meso se refiere a una escala de observación intermedia.

Los campos homogeneizados de tensiones y deformaciones, de un material heterogéneo elástico, $\bar{\sigma}$ y $\bar{\varepsilon}$, obtenidos mediante Ec. (2.10), pueden relacionarse mediante el tensor constitutivo elástico efectivo C^* tal que

$$\bar{\sigma} = C^* \bar{\varepsilon} \quad (2.13)$$

el cual puede considerarse como el tensor elástico de un material homogéneo equivalente. Utilizando la expresión Ec. (2.10) este tensor constitutivo elástico efectivo puede obtenerse mediante el tensor constitutivo elástico local (o de la microestructura) $C(x)$ y el tensor de concentración $A(x)$ empleando la media volumétrica

$$C^* = \frac{1}{V} \int_V C(x) A(x) dV \quad (2.14)$$

El número de constantes independientes en C^* viene dado en función de las hipótesis constitutivas adoptadas en el comportamiento mecánico del medio homogeneizado según el grado del isotropía considerado.

2.3.2 Elemento de Volumen Representativo (EVR)

Previa a la obtención de las propiedades efectivas de un material heterogéneo, se debe estudiar el tamaño del EVR, dado que las Propiedades Elásticas Efectiva (PEE) pueden variar con el tamaño de aquel, por lo que es necesario encontrar las dimensiones adecuadas cuyas PEE sean objetivas.

En el marco de la mecánica del continuo, el proceso de homogenización y el papel de los niveles microscópico y macroscópico, con sus escalas características, se pueden apreciar en la figura 2.3. En algún punto arbitrario x_{macro} en el nivel macroscópico, donde los materiales se describen como homogéneos con propiedades efectivas constantes, un acercamiento hasta un nivel microscópico indica que esta condición de homogeneidad no se cumple en absoluto.

Asumiendo que el comportamiento del material a nivel micro es conocido y lineal elástico, y que además se puede describir su comportamiento mediante el tensor consti-

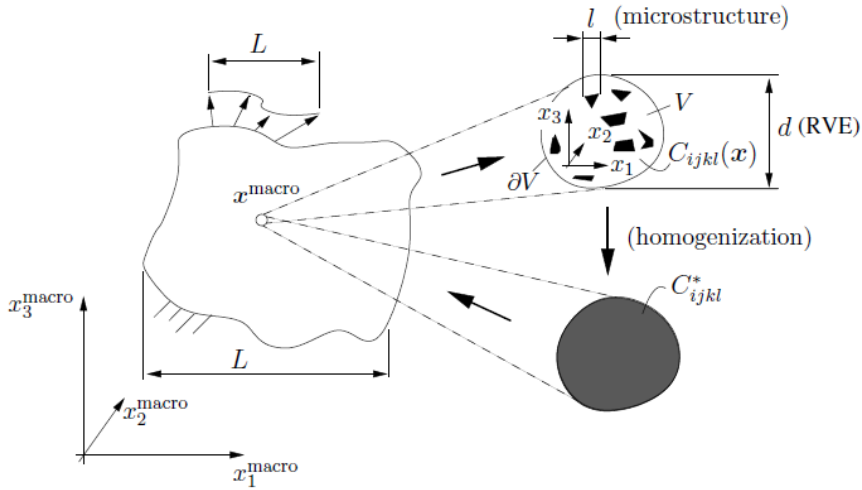


Figura 2.3: Escalas características en la homogenización [5]

tutivo elástico $C_{ijkl}(x)$ consideramos un volumen V a nivel microscópico, que debe ser representativo de la totalidad del material. Para esto se debe cumplir lo que se conoce como Distribución Estadísticamente Homogénea de los Defectos (Heterogeneidades) a lo largo de todo el material.

Este volumen V debe contener una cantidad suficiente de heterogeneidades y su tamaño d debe ser mucho más grande que el l característico de la microescala. A su vez, V debe ser lo suficientemente pequeño para ser asimilado a un punto en el nivel macroscópico. Una longitud característica L en este nivel puede determinarse según la geometría, la variación espacial en las cargas, o mediante los campos de tensión y deformación.

Ambas condiciones anteriores pueden resumirse en la siguiente desigualdad:

$$l \ll d \ll L \quad (2.15)$$

El volumen V es llamado Elemento de Volumen Representativo (EVR). Los límites impuestos en Ec. (2.15) pueden impedir la existencia del EVR, y así la posibilidad de realizar la homogenización, lo que se da en casos particulares [5]

2.4 Revisión de métodos analíticos existentes

En esta sección se hace una revisión de varios modelos para simulación de materiales compuestos bifásicos elásticos. La relación entre los mismos y sus límites de aplicabilidad son también detallados.

2.4.1 Límites de Borde de Voigt y Reuss

Los límites más elementales y rigurosos, basándose en módulo de elasticidad, son las de Voigt (media aritmética) y Reuss (media armónica). En términos de Módulo de Elasticidad Volumétrico Isotrópico, K y Módulo de Corte G , estas condiciones de borde pueden ser expresadas como:

- Límites de Voigt

$$\begin{aligned} K_U^* &= K_f V_f + K_m V_m \\ G_U^* &= G_f V_f + G_m V_m \end{aligned} \quad (2.16)$$

- Límites de Reuss

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_L^*} &= \frac{V_f}{K_f} + \frac{V_m}{K_m} \\ \frac{1}{G_L^*} &= \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde

- $V_f \equiv$ fracción de volumen de las partículas
- $K_f \equiv$ módulo de elasticidad volumétrico de las partículas
- $G_f \equiv$ módulo de corte de las partículas.
- $V_m \equiv$ fracción de volumen de la matriz
- $K_m \equiv$ módulo de elasticidad volumétrico de la matriz
- $G_m \equiv$ módulo de corte de la matriz.
- $K^* \equiv$ módulo de elasticidad volumétrico efectivo del compuesto
- $G^* \equiv$ el módulo de corte efectivo del compuesto

El subíndice U indica límite superior (upper) y el L límite inferior (lower).

2.4.2 Hashin-Shtrikman

Hashin y Shtrikman extendieron el análisis en su trabajo al incluir el Tensor Elástico de Polarización, mediante la derivación de límites superiores e inferiores para el módulo de elasticidad efectivo de materiales multifase cuasi-isotrópicos y cuasi-homogéneos, en una geometría arbitraria.

Cuando no existe mucha diferencia entre los módulos de las fases, los límites derivados son lo suficientemente cercanos para proveer una buena estimación del modulo de elasticidad. Para un material compuesto por dos fases estos límites, el superior K_L^* y el inferior K_U^* pueden desarrollarse tal que:

$$K_U^* = K_f + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_f} + \frac{3V_f}{3K_f + 4G_f}} \quad (2.18)$$

$$G_U^* = G_f + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_f} + \frac{6(K_f + 2G_f)V_f}{5G_f(3K_f + 4G_f)}} \quad (2.19)$$

$$K_L^* = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_f - K_m} + \frac{3V_m}{3K_m + 4G_m}} \quad (2.20)$$

$$G_L^* = G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{6(K_m + 2G_m)V_m}{5G_m(3K_m + 4G_m)}} \quad (2.21)$$

Donde $K_f > K_m; G_f > G_m; V_f + V_m = 1$.

2.4.3 El método Auto-Consistente

La predicción de propiedades macroscópicas en sólidos compuestos bifásicos ha estado restringida a declarar límites universales en módulos de elasticidad globales [8]. Dichos límites dependen solamente del volumen relativo y no reflejan geometría alguna, excepto cuando una de las fases consiste en fibras alineadas [8]. Sin embargo, cuando una de las fases es una dispersión de inclusiones elipsoidales, no necesariamente disueltas, un acercamiento mucho más directo es posible. Este es el Método Auto-Consistente de [9] y Kroner [1957] que fue originalmente propuesto para agregados de cristales, y luego reformulado por Hill [1965].

El método se basa en la solución familiar a un problema elástico auxiliar. En particular, asume que la interacción de fases es representada considerando a cada fase como una inclusión embebida en un medio homogéneo que tiene las propiedades globales del compuesto. Teniendo en cuenta las relaciones elementales entre fases y las medias globales de tensiones:

$$V_f (\bar{\sigma}_f - \bar{\sigma}) + V_m (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}) = 0 \quad (2.22)$$

El postulado básico del método sugiere que:

$$\bar{\sigma}_f - \bar{\sigma} = \mathbf{C}^* (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_f) \quad (2.23)$$

y utilizando Ec. (2.22) se obtiene:

$$\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma} = \mathbf{C}^* (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_m) \quad (2.24)$$

Los factores de concentración para inclusión y matriz, vienen derivadas del mismo \mathbf{C}^* . Esto implica que el mismo módulo global es determinado por otro compuesto en el cual los papeles de las fases están invertidos. Las Ec. (2.23) y Ec. (2.24), que ahora pueden ser consideradas de manera conjunta, pueden ser reformuladas de la siguiente manera:

$$(\mathbf{C}^* + \mathbf{C}_f) \bar{\varepsilon}_f = (\mathbf{C}^* + \mathbf{C}_m) \bar{\varepsilon}_m = (\mathbf{C}^* + \mathbf{C}) \bar{\varepsilon} \quad (2.25)$$

Esta ecuación puede ser resuelta para la Rigidez Efectiva para varias formas de partículas. Este procedimiento es llamado Esquema Auto-Consistente. Las aproximaciones auto-consistentes han sido utilizadas para generar Propiedades Efectivas excelentes, para bajas concentraciones del componente disuelto. Sin embargo, para concentraciones altas, cuando es grande el contraste entre los módulos de los componentes, este método no logra buenos resultados. Para compuestos que contienen dispersiones elásticas esféricas, el esquema auto-consistente apunta hacia dos ecuaciones en K^* y G^* que deben ser resueltas de manera iterativa. Estas son:

$$K^* = K_m + \frac{V_f K^* (K_f - K_m)}{K^* + \left(\frac{3K^*}{3K^* + 4G^*}\right) (K_f - K^*)} \quad (2.26)$$

$$G^* = G_m + \frac{V_f G^* (G_f - G_m)}{K^* + \left(\frac{6K^* + 12G^*}{15K^* + 10G^*}\right) (G_f - G^*)} \quad (2.27)$$

Donde:

- $K^* \equiv$ módulo de elasticidad volumétrico efectivo del compuesto.
- $G^* \equiv$ el módulo de corte efectivo del compuesto.
- $K_f \equiv$ módulo de elasticidad volumétrico de las partículas
- $G_f \equiv$ módulo de corte de las partículas.
- $K_m \equiv$ módulo de elasticidad volumétrico de la matriz
- $G_m \equiv$ módulo de corte de la matriz.
- $V_f \equiv$ fracción de volumen de las partículas.

2.4.4 El Modelo de Mori-Tanaka

El método de Mori-Tanaka [Mori and tanaka 1973] consistía originalmente en calcular la tensión media interna en una matriz de un material que contiene inclusiones con auto-deformaciones. Benveniste en [3] reformuló el método para que pueda ser aplicado a materiales compuestos. Este considero fases anisotrópicas e inclusiones elipsoidales considerando las condiciones de borde homogéneas

$$\mathbf{u}(S) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{t}(S) = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} \quad (2.28)$$

donde $\mathbf{u}(S)$ y $\mathbf{t}(S)$ son los desplazamientos y los vectores de tracción, respectivamente, S es la superficie externa del compuesto, $\boldsymbol{\sigma}^0$ $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ son los tensores constantes de tensión y deformación, y \mathbf{n} el vector normal exterior de la superficie S . Estas condiciones de borde son muy útiles para definir la rigidez efectiva y su inversa del medio compuesto. Bajo las condiciones Ec. (2.28), tenemos:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = V_m \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^m + V_f \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^f \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (2.29)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = V_1 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m + V_2 \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}^f \rangle = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.30)$$

donde $\langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^f \rangle$ y $\langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}^f \rangle$ son los tensores de deformación y tensión medios en una inclusión, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^m$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m$ son los tensores de deformación y tensión en la matriz y finalmente $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ son los tensores de deformaciones y tensiones del medio homogeneizado.

El Tensor de Rigidez Efectivo se define como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^* \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.31)$$

Y con la idea de una matriz de concentración, tenemos que las propiedades efectivas pueden definirse como:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^m + V_2 (\mathbf{C}^f - \mathbf{C}^m) \mathbf{A}_2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.32)$$

donde \mathbf{C}^m y \mathbf{C}^f son los tensores constitutivos de ambas fases, y la orientación depende del tensor \mathbf{A}_2 , llamado en la literatura Factor de Concentración, definido tal que:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (2.33)$$

Se define al tensor de concentración, \mathbf{A}_2 , tal que:

$$\mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{T} \quad (2.34)$$

donde \mathbf{T} puede ser descripto en términos del tensor de Eshelby, \mathbf{P} :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I} + \mathbf{P} [\mathbf{C}^m]^{-1} (\mathbf{C}^f - \mathbf{C}^m)]^{-1} \quad (2.35)$$

siendo \mathbf{I} el tensor identidad de cuarto orden. Esta aproximación, debido al modelo diluido, no tiene en cuenta la interacción entre partículas y por lo tanto es mas válida como concentración de dilución. Para extender este método se asume la existencia de un tensor, tal que:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^f \approx \mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^m \quad (2.36)$$

Utilizando Ec. (2.30), Ec. (2.33) y Ec. (2.36).

La aproximación en este método implica que:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \quad (2.37)$$

Y por lo tanto:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^m + \mathbf{V}_f (\mathbf{C}^f - \mathbf{C}^m) \mathbf{T} (\mathbf{V}_m \mathbf{I} + \mathbf{V}_f \mathbf{T})^{-1} \quad (2.38)$$

Y de manera similar al respectivo tensor inverso

$$\mathbf{S}^* = (\mathbf{C}^*)^{-1} \quad (2.39)$$

Finalmente:

$$\frac{\varepsilon_{kk}^f}{\varepsilon_{kk}^0} = (3K_m + 4G_m) / (3K_f + 4G_f) \quad (2.40)$$

Y los módulos de elasticidad volumétrico y de corte efectivos son:

$$K^* = K_m + \frac{K_m V_f (K_f - K_m)}{(1 - V_f) (K_f - K_m) \alpha_m + K_m} \quad (2.41)$$

$$G^* = G_m + \frac{G_m V_f (G_f - G_m)}{(1 - V_f) (G_f - G_m) \alpha_m + G_m} \quad (2.42)$$

Donde:

$$\alpha_m = \frac{3K_m}{(3K_m + 4G_m)} \quad (2.43)$$

CAPÍTULO 3

Estudio de las condiciones de borde y elemento de volumen representativo

3.1 Introducción

La micromecánica provee un comportamiento global de materiales compuestos, mediante el examen de las propiedades de los componentes (matriz e inclusiones) a través del análisis del Elemento de Volumen Representativo (EVR) o un modelo de celda unitaria [1, 16]. Por otro lado, la estructura heterogénea del compuesto es reemplazada por un medio homogéneo con propiedades isotrópicas. Dentro de las ventajas que provee la micromecánica no se encuentran solamente las propiedades globales de los compuestos, si no también varios mecanismos, tales como iniciación y propagación de daño y fisuras, etc. Existen varios métodos utilizados en la micromecánica para el análisis y la predicción del comportamiento global de los materiales heterogéneos. En particular, las condiciones de borde superiores e inferiores para el módulo elástico, han sido derivadas utilizando principios variacionales de energía, obteniéndose expresiones analíticas de forma cerrada [7, 8] como se mencionó en la sección 2.4. Desafortunadamente, la generalización de estos métodos para compuestos viscoelásticos, elastoplásticos y no lineales es de alta dificultad. Aboudi [1] ha desarrollado una teoría micromecánica unificada basada en el estudio de celdas periódicas interactuantes, y fue utilizada para predecir el comportamiento global de materiales compuestos, tanto elásticos como anelásticos. En esta sección se lleva a cabo un estudio de condiciones de borde prescriptas impuestas a un EVR para predecir las PEE de un material heterogéneo aplicando los conceptos de homogenización.

3.2 Condiciones de borde y homogenización de una celda unitaria

El Método de los Elementos Finitos (MEF) ha sido muy utilizado en la bibliografía para determinar propiedades mecánicas y mecanismos de daño en celdas unitarias de materiales compuestos.

Se utilizaron condiciones de borde prescriptas, basándose en lo aplicado por Kurukuri [13]. Este último utilizó condiciones de borde homogéneas, periódicas y prescriptas. Mostrando que sus resultados para las condiciones de borde periódicas y prescriptas son muy similares.

En la Fig. 3.1 se detalla la geometría del EVR; una celda unitaria con una heterogeneidad de forma circular ubicada en el centro del cuadrilátero, y cuya superficie es del 20% del total de la celda. Para el ensayo se adoptó la hipótesis de estado plano de tensiones, trabajando con un software de MEF de elaboración propia para la generación de la malla, de las condiciones de borde, y además para el trabajo de pre y post-proceso se empleó el software comercial GiD v10.0.9 en su versión gratuita.

En todos los modelos, las mallas fueron generadas con elementos cuadriláteros para estado plano de tensiones de 4 nodos con continuidad C_0 y cuatro puntos de Gauss, siendo las incógnitas primarias nodales el desplazamiento en x e y . Este elemento finito muestra un buen comportamiento ante distorsiones angulares y evita el problema de bloqueo que presentan elementos como el triángulo lineal (*constant strain*).

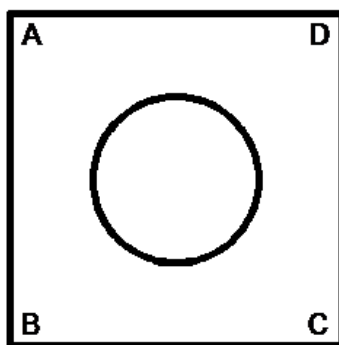


Figura 3.1: Geometría del EVR

Se asume que la media de las propiedades mecánicas de un EVR es igual a la media de las propiedades mecánicas de un cierto material compuesto. La media de las tensiones y la media de las deformaciones se expresan:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (3.1)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (3.2)$$

siendo V el volumen total del EVR. Para obtener las propiedades efectivas, C_{ijkl}^* , inicialmente se deben conocer los tensores de tensión y deformación homogeneizado, mediante las Ec. (3.1) y Ec. (3.2). Luego con la aplicación de diferentes condiciones de borde se tiene:

$$C_{ijkl}^* = \frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(x) A_{ijkl}(x) dV \quad (3.3)$$

Este tensor de cuarto orden se desarrolla matricialmente de la siguiente manera:

$$C_{ijkl}^* = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Dado que se trabajó en Estado Plano de Tensiones (EPT), los tensores de segundo orden $\bar{\sigma}_{ij}$ y $\bar{\varepsilon}_{kl}$ se expresan matricialmente

$$\bar{\sigma}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{\varepsilon}_{kl} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

En el análisis numérico del EVR, las tensiones y las deformaciones se determinaron sobre cada elemento, multiplicadas por el volumen del mismo y finalmente se calcularon la media de tensión y la media de deformación sobre la totalidad de los elementos empleando integración numérica con cuatro puntos de Gauss por elemento.

La determinación de los coeficientes efectivos para EPT se determinó partiendo de la siguiente expresión:

$$C^{EPT} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

De la Ec. (3.6) conocemos los valores de:

$$C_{11}^* = C_{22}^* = \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} \quad , \quad C_{12}^* = C_{21}^* = \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} \quad , \quad C_{66}^* = \frac{1 - \nu^*}{2} \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} \quad (3.7)$$

Combinando las relaciones de Ec. (3.7) llegamos a los valores de E^* y ν^* :

$$\nu^* = C_{12}^*/C_{11}^* \quad y \quad E^* = C_{11}^* \cdot (1 - \nu^{*2}) \quad (3.8)$$

De esta forma se obtenemos los coeficientes elásticos efectivos para EPT.

Análogamente para Estado Plano de Deformaciones (EPD):

$$C^{EPD} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

De la Ec. (3.9) conocemos los valores de:

$$C_{11}^* = C_{22}^* = \frac{E^* (1 - \nu^*)}{(1 + \nu^*) (1 - 2\nu^*)}, \quad C_{12}^* = C_{21}^* = \frac{E^* \nu^*}{(1 + \nu^*) (1 - 2\nu^*)}, \quad C_{66}^* = \frac{E^*}{2(1 + \nu^*)} \quad (3.10)$$

Combinando las relaciones de Ec. (3.10) llegamos a los valores de E^* y ν^* :

$$\nu^* = \frac{1}{1 + C_{11}^*/C_{12}^*} \quad \text{y} \quad E^* = \frac{C_{11}^* (1 + \nu^*) (1 - 2\nu^*)}{(1 - \nu^*)} \quad (3.11)$$

De esta forma se obtenemos los CEE para EPD.

3.3 Simulaciones de celda unitaria

Se considero una estructura periódica como la mostrada en la Fig. 3.2. Asumiendo elasticidad, las constantes de la matriz y la fibra son las siguientes: $E_f = 90000MPa$, $\nu_f = 0,22$; $E_m = 34000MPa$, $\nu_m = 0,18$. Los resultados propios son comparados con los de Kurukuri [13]

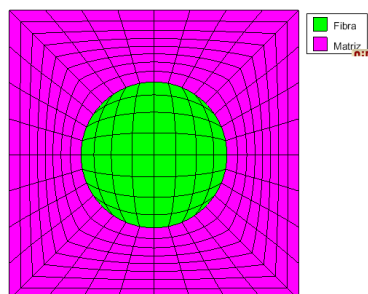


Figura 3.2: Discretización EVR

3.3.1 Modo tracción pura

Se aplican desplazamientos prescritos sobre la celda, con un valor de 10% de la longitud total. Las condiciones de borde se detallan a continuación:

- $u_{CD} = 0,1$
- $v_{BC} = v_{AD} = 0$
- $u_{AB} = 0$

donde u y v son los desplazamientos a lo largo de los ejes X e Y respectivamente, y el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el punto B.

Analizando el gráfico de deformación específica, se puede afirmar que los desplazamientos se distribuyen en forma periódica. De la Fig. 3.3 se observa que se conserva la simetría en la distribución tanto para las tensiones de corte como para los esfuerzos normales; así también se destacan las concentraciones de tensiones que se producen en los límites fibra-matriz, dada la diferencia entre valores de rigidez entre ambos materiales.

Resolviendo la integral en la 3.3 se calculan los coeficientes $C_{11} = 41667MPa$ y $C_{12} = 7783MPa$. Dada la hipótesis de isotropía adoptada y la simetría de la celda unitaria se cumple que C_{22} es equivalente a C_{11} .

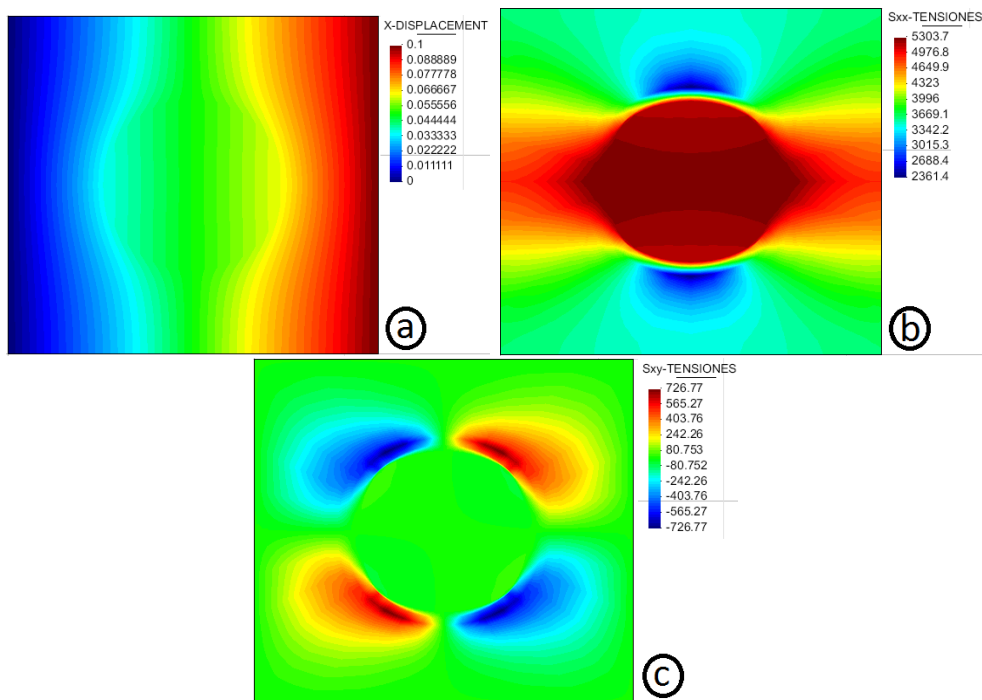


Figura 3.3: Simulación mediante MEF del EVR aplicando condiciones de borde prescriptas. a) Deformación u_x ; b) Tensión σ_x ; c) Tensión τ_{xy} .

3.3.2 Modo corte puro

Para este caso se aplicaron desplazamientos también de un 10% de la longitud de los lados, pero en sentido paralelo a las caras para obtener un estado de corte puro.

Condiciones de borde prescriptas:

- $v_{AB} = -0,1$
- $v_{CD} = 0,1$
- $u_{BC} = -0,1$

- $u_{AD} = 0,1$

donde u y v son los desplazamientos a lo largo de los ejes X e Y respectivamente, y el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el punto B.

En la Fig. 3.4 se observa que las caras no permanecen planas después de la deformación, sin embargo los contornos paralelos presentan periodicidad en la distribución de tensiones con lo cual la condición de borde impuesta se asimila a la condición de borde periódica [13].

Nuevamente se aplica la 3.3 y de allí se obtienen el coeficiente correspondiente a corte puro $C_{66} = 16664MPa$.

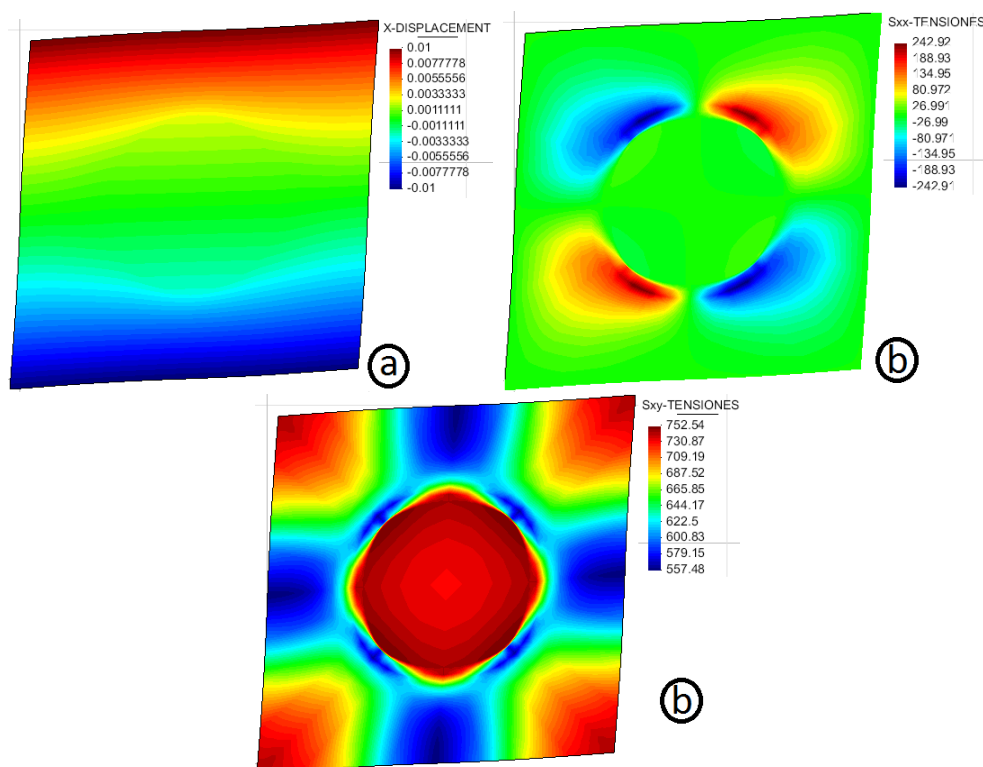


Figura 3.4: Simulación mediante MEF del EVR aplicando condiciones de borde homogéneas. a: Deformación u_x ; b: Tensión S_x ; c: Tensión T_{xy} .

En [13], Kurukuri trabajo con varias condiciones de borde. En el cuadro 3.1 se presenta un resumen de sus resultados en comparación con los propios.

Coef. Efectivo	CBP	CBHK	Error1	CBPK	Error2
C_{11}	41667	41599	0.16 %	41557	0.26 %
C_{12}	7783	7782	0.01 %	7767	0.20 %
C_{66}	16664	16825	0.96 %	16619	0.27 %

Cuadro 3.1: Coeficientes del tensor efectivo

En el cuadro 3.1 tenemos:

- CBP: Los resultados propios obtenidos con la aplicación de condiciones de borde prescriptas.
- CBHK: Valores de los coeficientes obtenidos por Kurukuri [13] aplicando condiciones de borde homogéneas.
- Error1: Cálculo del error entre los valores de CBP y CBHK.
- CBPK: Valores de los coeficientes obtenidos por Kurukuri [13] aplicando condiciones de borde periódicas.
- Error1: Cálculo del error entre los valores de CBP y CBPK.

3.4 Conclusiones

Se ha determinado que el cálculo realizado con el software propio es acertado en la determinación de los CEE. Con la validación del método se puede proceder al siguiente paso del presente trabajo, que consiste en obtener el tamaño adecuado del EVR.

CAPÍTULO 4

Determinación del Elemento de Volumen Representativo para el Hormigón Simple y sus Propiedades Elásticas Efectivas

4.1 Introducción

En este capítulo se procede al análisis de la homogenización de un material heterogéneo específico: el hormigón. Dicho material está compuesto por el mortero mezclado con agregado grueso (piedra). El mortero es a su vez es una mezcla de cemento, arena silíceo y agua. Para los fines de este trabajo, se define al mortero como matriz y al agregado grueso como heterogeneidad; y como primer hipótesis se considera al mortero como un material homogéneo. Esta última hipótesis es correcta considerando la escala de trabajo, si ésta aumenta es visible la falta de homogeneidad del mortero y la hipótesis de homogeneidad no sería adecuada.

4.2 Determinación del EVR

Para determinar el tamaño adecuado del EVR de un material, se trabaja con las llamadas constantes aparentes o propiedades aparentes. Calculadas de la misma forma que las PEE Ec. (3.3), llevan esa definición ya que se determinan sobre distintos tamaños de celdas del mismo compuesto. Basándonos en lo trabajado por Kurukuri [13], en la Fig. 3.3 se detallan los tamaños de celdas sobre las que se analizaron las propiedades aparentes y en las Fig. 4.1, Fig. 4.2 y Fig. 4.3 vemos algunas de las configuraciones obtenidas.

Las propiedades adoptadas para los materiales son, para el mortero, $E = 37900MPa$, $\nu = 0,18$; para el agregado, $E = 89900MPa$ y $\nu = 0,18$ [13]. La concentración de agregados en todos los casos es de 40 %, y la granulometría adoptada es de 10 a 30mm de diámetro mínimo, que corresponde a la mas utilizada en el mercado local.

Para las configuraciones mostradas en Fig. 4.1, Fig. 4.2, Fig. 4.3, se pueden apreciar

Tamaño de celda	C_{11}^*	C_{12}^*	C_{66}^*	ν^*	E^*
10x10cm	55485	9886	21957	0,1781	53723
15x15cm	54396	9707	21606	0,1791	52675
20x20cm	53509	9526	21300	0,1780	51813
30x30cm	53237	9453	21227	0,1775	51558
40x40cm	53198	9445	21215	0,1775	51521

Cuadro 4.1: Tamaños de celdas ensayadas y coeficientes aparentes obtenidos en cada caso

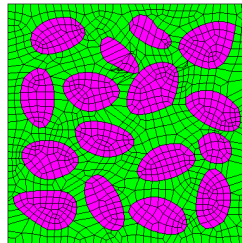


Figura 4.1: Configuración de Celda 10x10cm

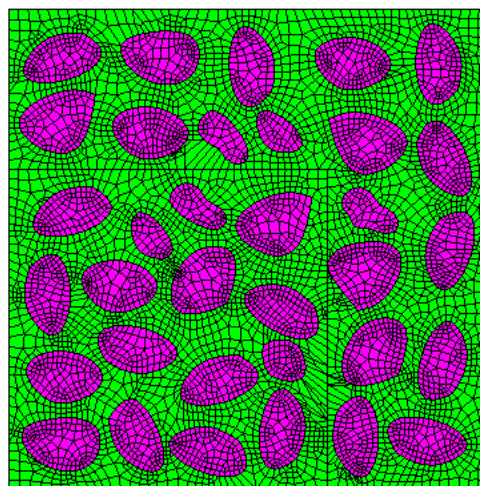


Figura 4.2: Configuración de Celda 15x15cm

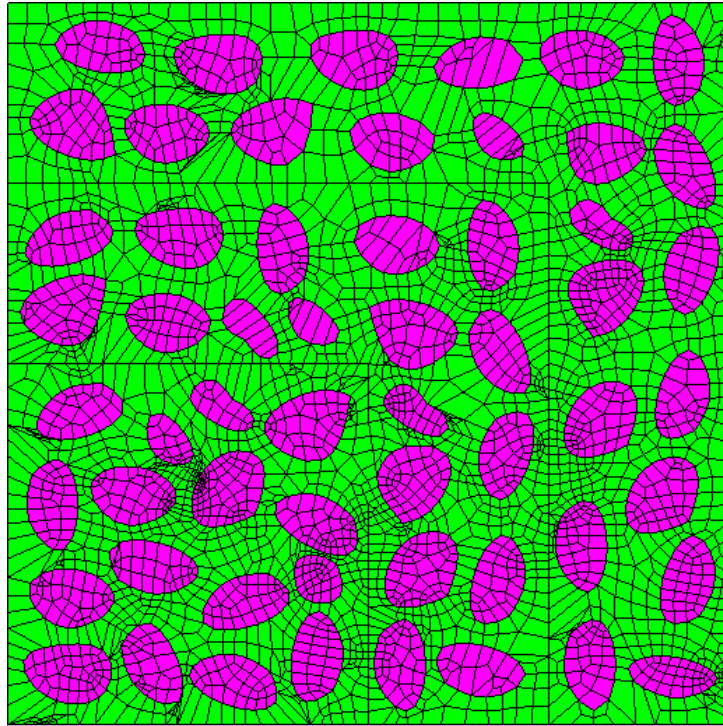


Figura 4.3: Configuración de Celda 20x20cm

sus correspondientes estados tensionales según sea:

- σ_{xx} para el estado de tracción pura en los cuadriláteros de 10x10cm Fig. 4.4, 15x15cm Fig. 4.5 y 20x20cm Fig. 4.6.
- τ_{xy} para el estado de corte puro en los cuadriláteros de 10x10cm Fig. 4.7, 15x15cm Fig. 4.8 y 20x20cm Fig. 4.9.

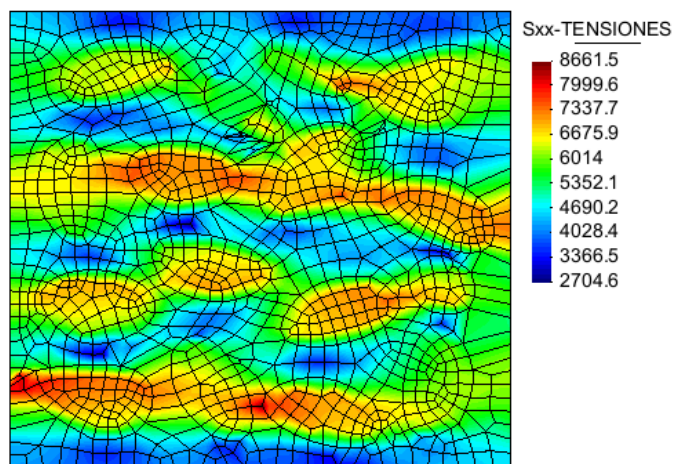


Figura 4.4: Tensiones σ_{xx} para celda 10x10cm

En el cuadro 4.2 se cuantifican los coeficientes C_{ij}^* en función del tamaño de celda.

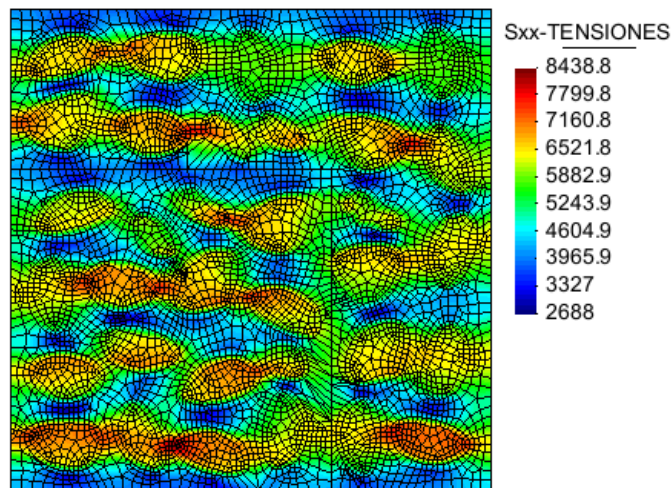


Figura 4.5: Tensiones σ_{xx} para celda 15x15cm

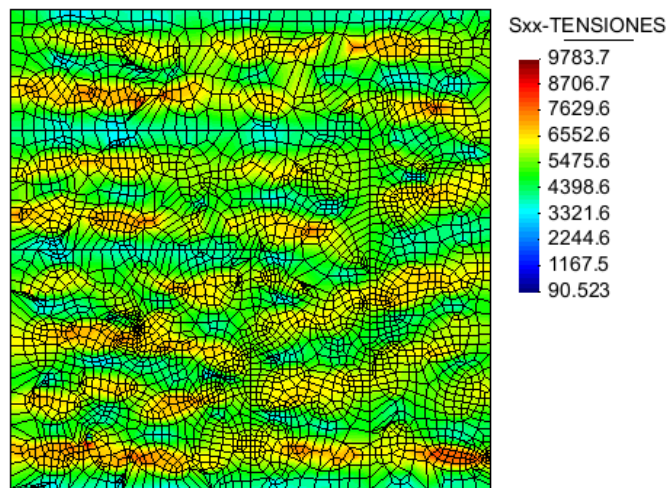


Figura 4.6: Tensiones σ_{xx} para celda 20x20cm

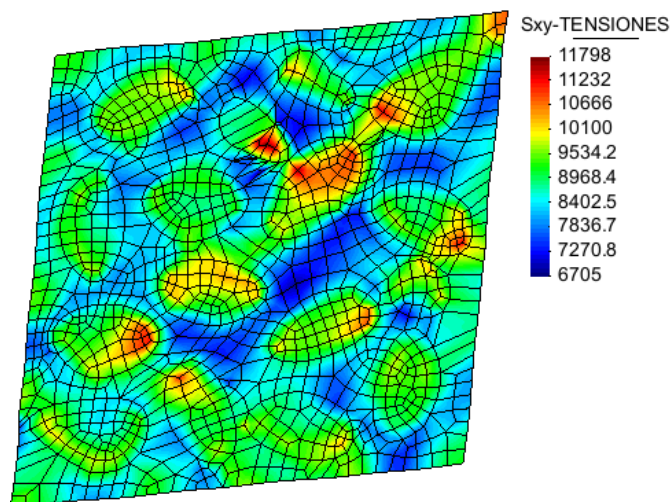


Figura 4.7: Tensiones τ_{xy} 10x10cm

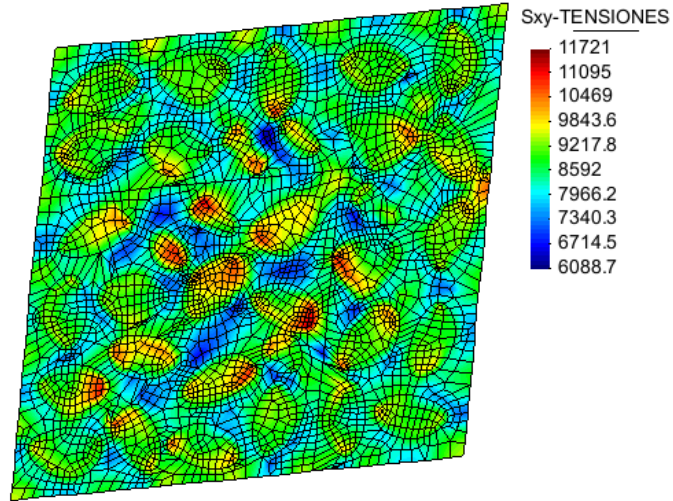


Figura 4.8: Tensiones τ_{xy} : 15x15cm

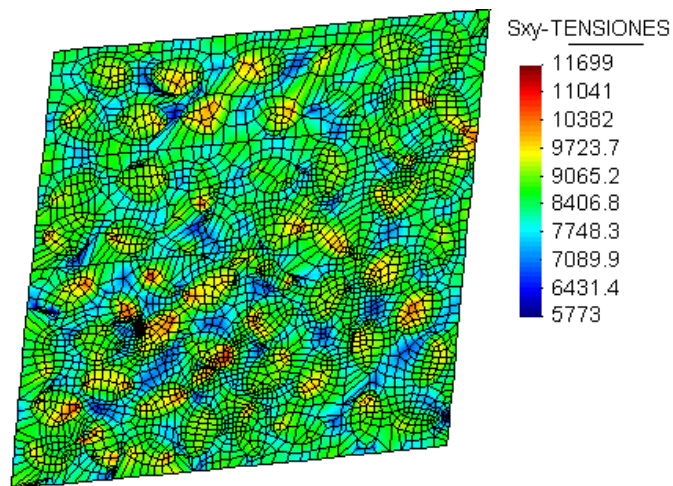


Figura 4.9: Tensiones τ_{xy} : 20x20cm

En la Fig. 4.10, se grafican los valores obtenidos de E^* en el eje y vs. los tamaños de celdas en el eje x . Las curvas tienden a suavizar su pendiente a medida que crece el tamaño de los cuadriláteros. El punto sobre el eje x donde empieza a ser horizontal es donde se consigue el tamaño de EVR y con él se determinan las CEE. En la Fig. 4.11 se grafica la curva ν^* vs. los tamaños de celdas en el eje x .

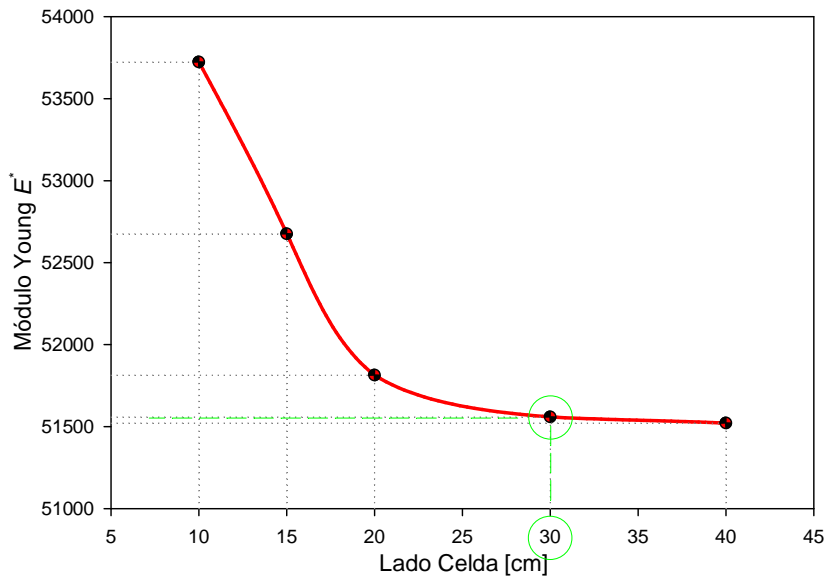


Figura 4.10: E^* vs. Tamaño celdas

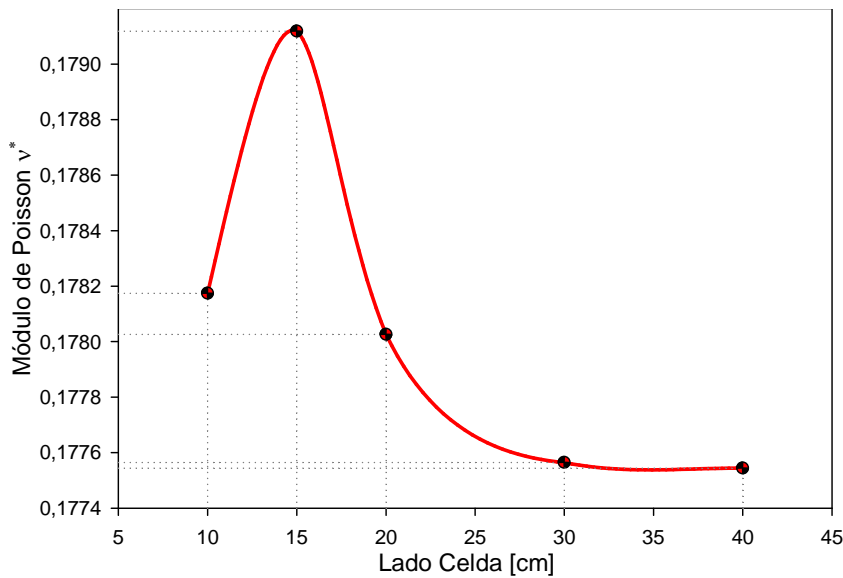


Figura 4.11: ν^* vs. Tamaño celdas

Según lo analizado y en función de los resultados de todas las configuraciones simuladas, consideramos viable adoptar como EVR óptimo la celda de tamaño 30x30cm, la cual arroja las PEE del material heterogéneo en cuestión. El desarrollo de la curva en la Fig. 4.11 no es coincidente con las demás tendencias, pero la variación de los valores es mínima en función del coeficiente ν recordando que sus variaciones importantes se toman

de hasta dos decimales. En este contexto los resultados mostrados en dicha figura son favorables.

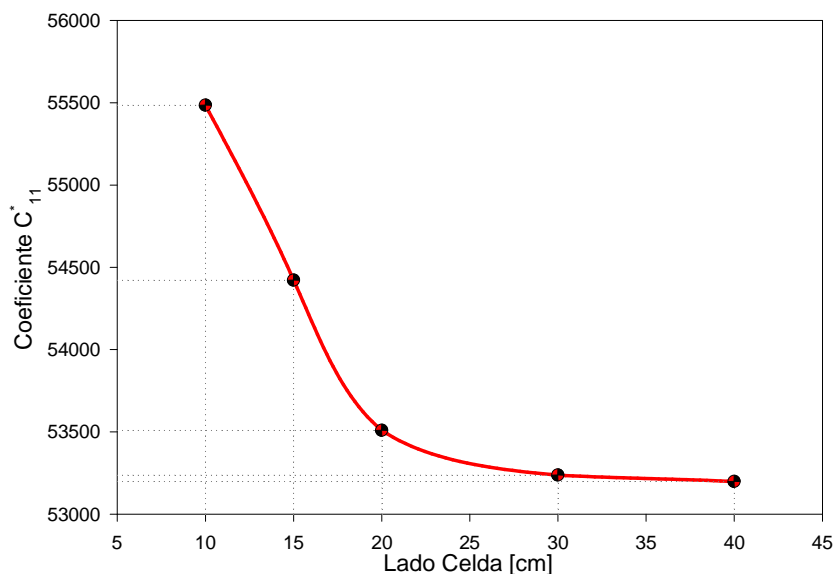


Figura 4.12: C_{11}^* vs. Lado Celda

Los valores obtenidos son $E^* = 51558\text{Mpa}$ y $\nu^* = 0,1775$. La efectividad de estos resultados se puede analizar utilizando las expresiones de Voigt y Reuss Ec. (2.16) y Ec. (2.17) desarrolladas en la sección 2.4.1. Los límites que establecieron éstos, son para nuestro caso:

$$\begin{aligned}
 K_u^* &= 32770,83\text{Mpa} \\
 K_l^* &= 24634,82\text{Mpa} \\
 G_u^* &= 23847,74\text{Mpa} \\
 G_l^* &= 19362,77\text{Mpa}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Los valores propios se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 K^* &= \frac{E^*}{3(1-2\nu^*)} = 26644,96\text{Mpa} \\
 G^* &= \frac{E^*}{2(1+\nu^*)} = 21892,99\text{Mpa}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Lo que nos muestra resultados satisfactorios en función de los límites de Voigt y Reuss. Por otro lado, también se pueden calcular las PEE mediante las expresiones de Mori-Tanaka Ec. (2.41) y Ec. (2.42), las cuales presentan los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 K_{MT}^* &= 27342,56\text{Mpa} \\
 G_{MT}^* &= 20990,04\text{Mpa}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

El error cometido es del 2.55% para K^* y 4.3% para G^* .

Por último, se pueden destacar las curvas Fig. 4.12, Fig. 4.13 y Fig. 4.14 donde se pone de manifiesto la variación entre de los coeficientes C_{11} , C_{12} y C_{66} y el tamaño de las celdas. Al realizar un análisis de la citada variación, se puede llegar a una misma conclusión en el tamaño del EVR.

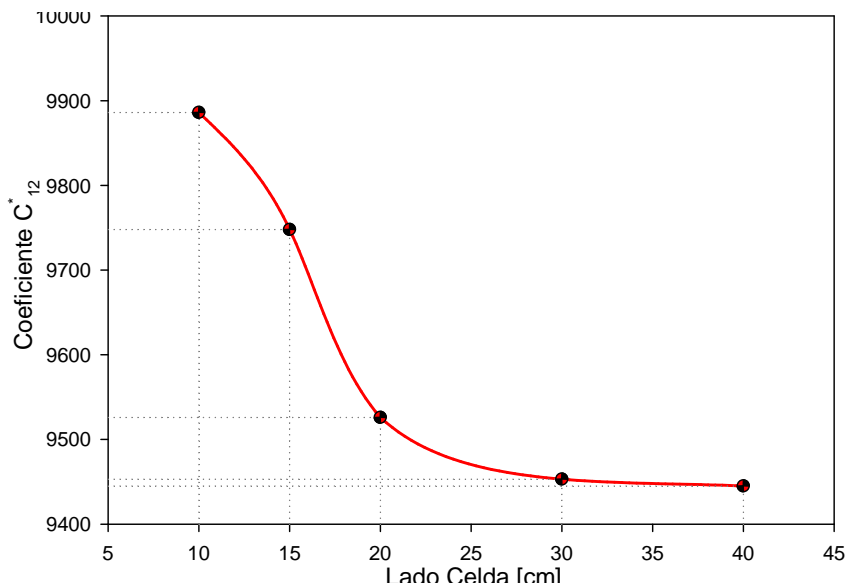


Figura 4.13: C_{12}^* vs. Lado Celda

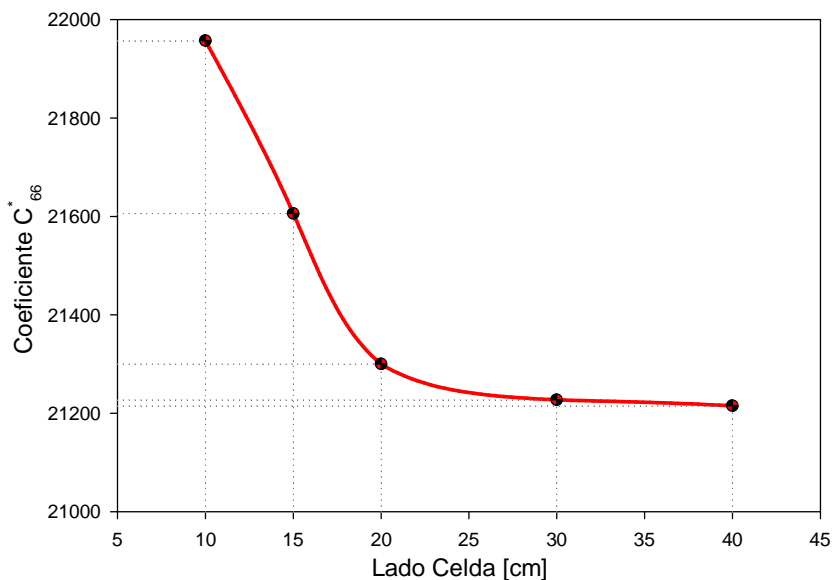


Figura 4.14: C_{66}^* vs. Lado Celda

Vale mencionar que los resultados hasta aquí expuestos corresponden a ensayos en EPT. Los resultados para EPD son muy similares, por lo que no hace falta su desarrollo.

4.3 Análisis del EVR del hormigón simple

En la sección anterior, la determinación del tamaño del EVR para el hormigón simple se realizó en base a una concentración a del 40% de agregado grueso (piedra). Este porcentaje responde a una dosificación muy utilizada en el ámbito profesional: 1:3:3, lo que se traduce como una parte de cemento (Aglomerante), tres partes de arena (Agregado fino) y tres partes de piedra (Agregado grueso). Cabe recordar la hipótesis adoptada de que el mortero es un material homogéneo, por lo que la relación entre el volumen del agregado grueso y el volumen del total de la celda debe ser $3/7 \approx 40\%$. Sin embargo, en la elaboración de una estructura de hormigón, no siempre se obtienen las dosificaciones que fueron impartidas en el cálculo. El proceso de mezcla, colado, etc., no asegura en absoluto una distribución homogénea del agregado grueso en el mortero. Por supuesto, el mismo principio se cumple para el mortero en sí (agua, arena y cemento), pero el análisis de tales cuestiones escapa al presente trabajo.

En esta sección se detallan los resultados de simular el EVR con distintas concentraciones de agregados en el mortero, variando entre un 30% a un 45%, lo que a fines prácticos se consideraron en este trabajo como extremos de los valores que adoptan las concentraciones en una estructura de hormigón simple. Para las concentraciones simuladas comprendidas en este rango se determinaron los coeficientes $C11^*$, $C12^*$ y $C66^*$, y por consiguiente E^* y ν^* según la expresión Ec. (3.8). Cabe recordar nuevamente que todo lo expuesto (figuras y valores) esta referido a ensayos en EPT. También fueron realizados ensayos para EPD, y sus resultados son valores sumamente cercanos a los de EPT, con errores menores al 0.01%; por lo que exponerlos sería redundante. En las Fig. 4.15 y Fig. 4.16 la variación de los coeficientes ν^* y E^* se presenta en función a la concentración de agregados que contiene el EVR.

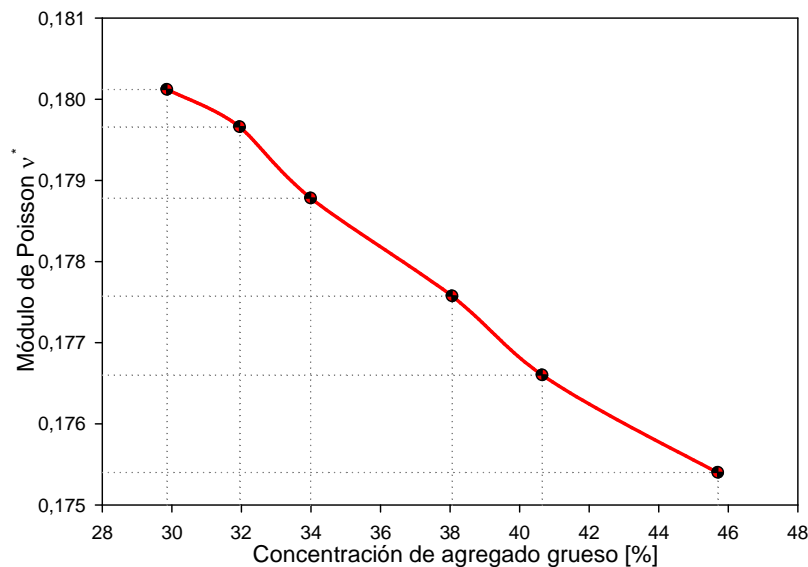


Figura 4.15: ν^* vs. concentración de agregados gruesos.

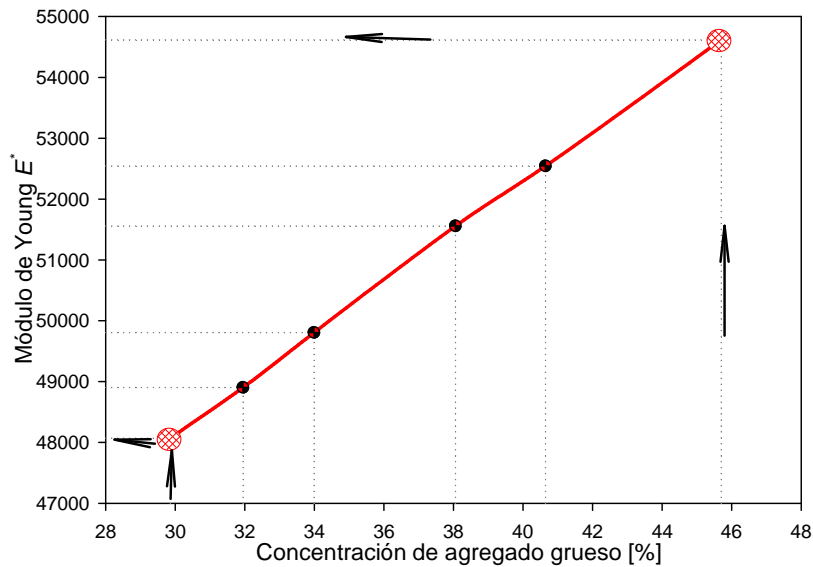


Figura 4.16: E^* vs. concentración de agregados gruesos.

4.4 Conclusiones

Analizando la Fig. 4.10, no resulta difícil la determinación del tamaño del EVR según la configuración de la curva. En cambio, la curva en Fig. 4.11 no tiende a ser asintótica con el eje x como idealmente sería conveniente. Pero realizando un análisis de la poca variación que toma la ν en función de los importantes cambios de tamaño de las celdas, se puede concluir que es válido adoptar un EVR en función del E . Por otro lado, cuanto mayor es la concentración de agregados, mayores son los valores del coeficiente E^* (Fig. 4.16) y menores para ν^* (Fig. 4.15), lo que resulta lógico ya que el mortero tiene menor valor resistente (E^*) y a su vez mayor deformación. Por último, la poca diferencia, casi nula, entre resultados para EPT y EPD es razonable y satisfactoria teniendo en cuenta que, por definición, la homogenización busca un material homogéneo equivalente que macroscópicamente se comporte de la misma forma que el material original, y éstas PEE deben ser independientes del estado al que está sometido el EVR.

CAPÍTULO 5

Resultados numéricos de la homogenización del hormigón simple

5.1 Introducción

El objetivo del presente capítulo es presentar la utilización de las Propiedades Elásticas Efectivas (PEE) obtenidas mediante los análisis detallados en el capítulo 4, lo que se conoce como homogenización, para simular el comportamiento microscópico del hormigón simple a través de un modelo macroscópico.

La modelación del medio heterogéneo en estudio se realizó a través de la implementación de una rutina de usuario (UMAT, User Material) en el software de elementos finitos Abaqus v6.9, que permite simular el comportamiento constitutivo a nivel macroscópico sin perder información de la microestructura. De esta manera se logra predecir su comportamiento mecánico con diferentes grados de concentración de agregados gruesos y así realizar el pasaje del comportamiento en la micro escala a un punto material en escala macro.

La rutina UMAT es una rutina de usuario capaz de modelar el comportamiento o las características de materiales complejos que no están incluidos en el programa original. Esta disponible únicamente en el módulo Abaqus/Standard. Dicha rutina de usuario fue programada en el lenguaje FORTRAN. El principal objetivo del desarrollo del UMAT consiste en incorporar en el modelo macroscópico las Propiedades Elásticas Efectivas (E^* y ν^*) del hormigón simple sin perder la condición de heterogeneidad que posee el material y aprovecha la robustez y confiabilidad del software comercial Abaqus.

5.2 Simulaciones numéricas

Se dan a conocer resultados obtenidos en simulaciones de problemas estructurales de índole habitual en la construcción, y así mostrar la ventaja en la aplicación de estos coeficientes.

5.2.1 Probeta de hormigón simple

El primer caso presentado es el ensayo de compresión de una probeta de hormigón (Ensayo Normalizado por IRAM 1546 - Agosto, 1992), y consiste en someter a una probeta de hormigón simple a un estado de compresión pura. El tamaño de la probeta es de 30cm de altura, con una sección transversal de forma circular, con un diámetro de 15cm Fig. 5.1.

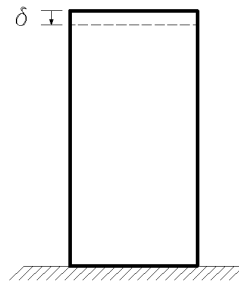


Figura 5.1: Ensayo de Compresión Normalizado

Los casos de simulación se describen a continuación

- 1.- En el primer caso la probeta es simulada como un material heterogéneo utilizando las propiedades ya detalladas en la sección 4.2: Para el mortero $E = 37900MPa$, $\nu = 0,18$; para el agregado, $E = 89900MPa$ y $\nu = 0,18$ [13].
- 2.- En segunda instancia son detallados los resultados del mismo ensayo normalizado, pero ahora considerando al hormigón como un material homogeneizado. En este caso se utilizan las PEE obtenidas en los análisis también presentados en la sección 4.2. Para este modelo en cada punto de integración se consideraron valores aleatorios de E^* (Modulo de Young Efectivo) siempre acotados entre 48171Mpa y 54330Mpa que corresponden a las concentraciones de 30 % y 45 %, respectivamente, de agregado grueso en el hormigón (ver Fig. 4.16).
- 3.- Por último, se realizó un ensayo sobre la probeta homogénea pero con un valor medio de E^* , correspondiente al 37.5 % de agregado grueso en el hormigón.

Es de destacar la diferencia de la complejidad de los mallados para el caso heterogéneo y el homogéneo (Fig. 6.1). Los casos 2 y 3 fueron simulados utilizando la subrutina UMAT, mientras que el caso 1 se modela empleando Abaqus/Standart.

Siempre los modelos fueron sometidos al mismo valor de desplazamiento prescrito. En la Fig. 5.2 se aprecia el acercamiento que existe entre los valores de Reacción vs. Desplazamiento entre los modelos 1 y 2, a tal punto que no es fácil diferenciar los puntos correspondientes a cada caso dentro del gráfico. Esto último permite validar la aplicación de PEE en modelos homogeneizados.

En las Fig. 5.3 y Fig. 5.4 se grafican las tensiones σ_{xx} y σ_{yy} , respectivamente. En cada gráfico, a la izquierda se tiene el estado tensional para la probeta heterogénea, en

el centro la probeta homogeneizada con porcentaje de agregado variable y a la derecha se presentan resultados del tercer modelo. Se destaca en los casos correspondientes a la probeta heterogénea la existencia de concentraciones de tensiones en los alrededores de los agregados. Por supuesto, esto no se da en el caso de probeta homogénea, pero la distribución general de tensiones es apreciablemente coincidente en ambos ejemplos. Por otro lado, comparando los resultados para los modelos 2 y 3, donde el mallado siempre es homogéneo, se visualiza la aleatoriedad de los valores de tensiones, resultado de aplicar valores aleatorios de E^* y ν^* .

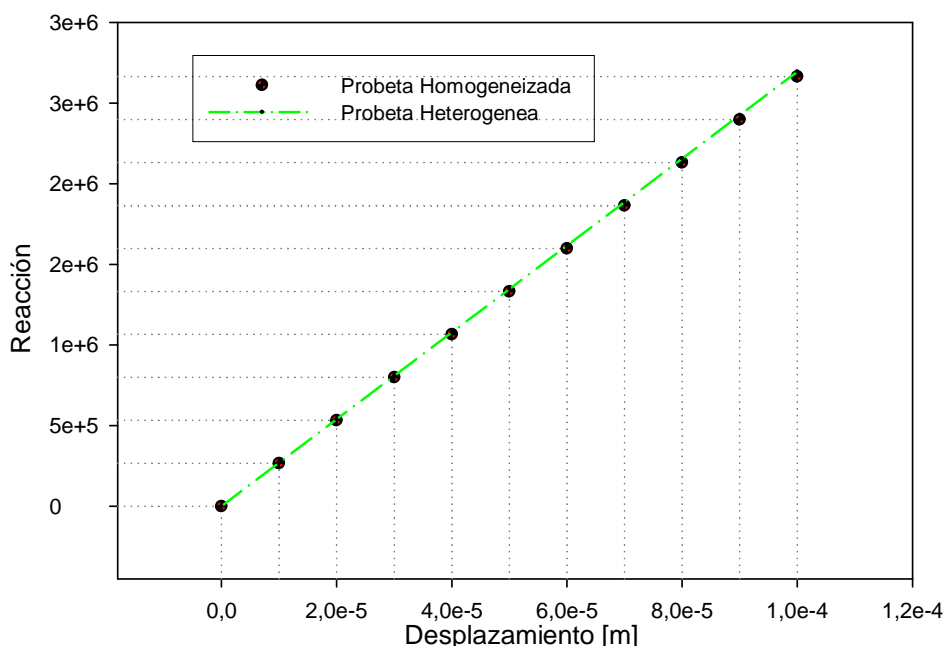


Figura 5.2: Curvas de Carga vs. Desplazamientos para caso heterogéneo y homogeneizado.

Destacando la aproximación de los resultados entre los casos homogeneizados y los heterogéneos, es apreciable la ventaja de aplicar PEE en la simulación de distintos tipos de problemas. El presentado en esta sección es un caso sencillo de modelar, que no requiere demasiados recursos computacionales. Pero en casos más complejos la aplicabilidad de estos conceptos es relevante como se verá en la siguiente sección.

En la Fig. 5.5 se presentan 5 curvas superpuestas, correspondientes a la modelación de la probeta a compresión pura para distintos casos:

- a.- Para una concentración de agregados del 30 %.
- b.- Para una concentración de agregados del 45 %.
- c.- Para una concentración de agregados variable en cada punto de Gauss, entre 30 % y 45 %.
- d.- Para una concentración de agregados del 0 % (correspondiente a una probeta de mortero).

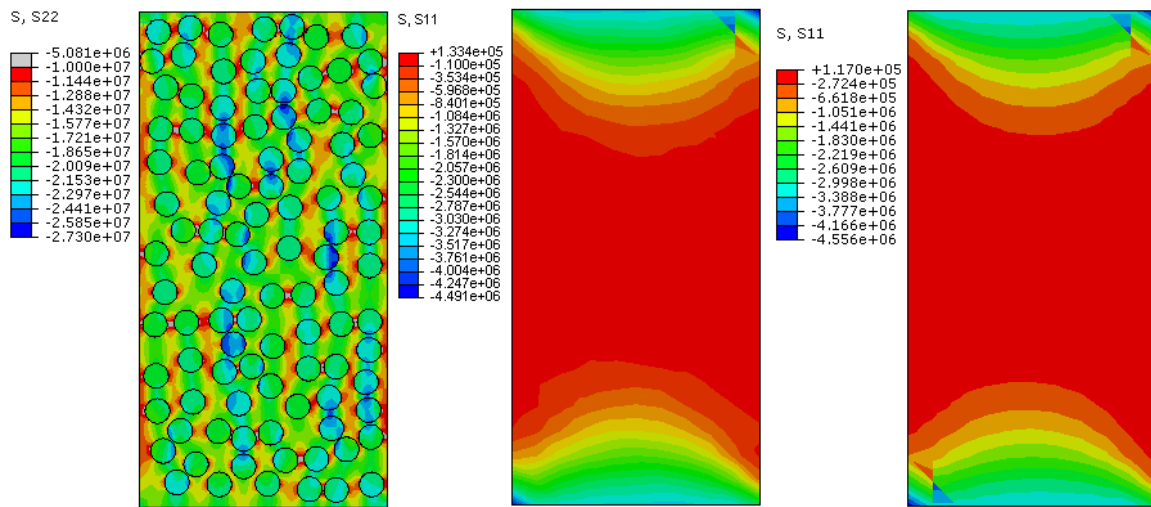


Figura 5.3: Tensiones σ_{xx} para caso heterogéneo (izquierda), homogeneizado con porcentaje de agregados variable (centro) y homogéneo (derecha).

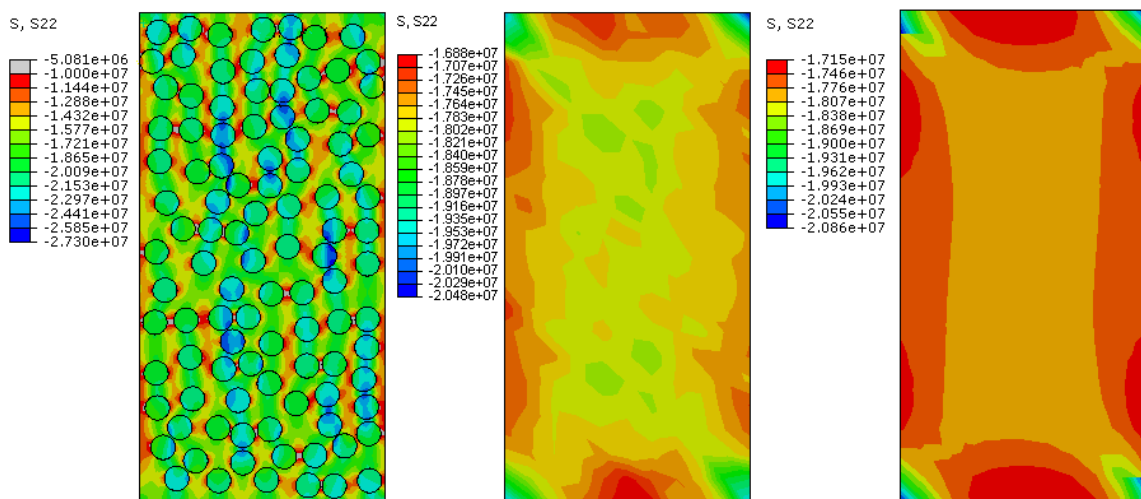


Figura 5.4: Tensiones σ_{yy} para caso heterogéneo (izquierda), homogeneizado (centro) y homogéneo (derecha).

e.- Para una concentración de agregados del 100 % (correspondiente a una probeta de agregado grueso).

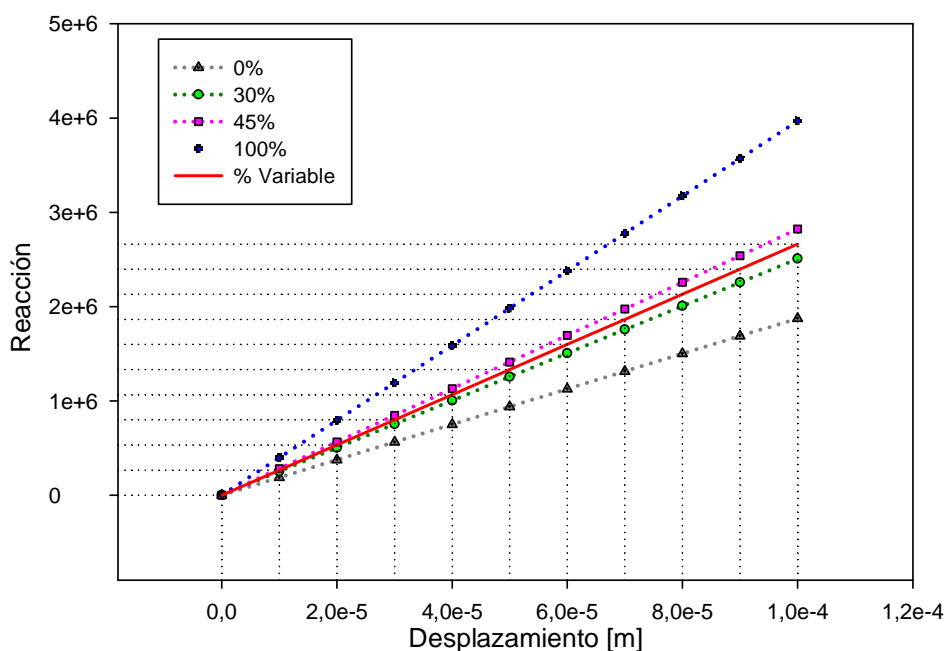


Figura 5.5: Superposición de curvas para distintas concentraciones

Estas cinco últimas simulaciones fueron realizadas utilizando las PPE del hormigón homogeneizado, variando la concentración pero sin necesidad de variar el tipo de mallado del modelo, lo que representa una clara ventaja para realizar análisis estadísticos. Observando la Fig. 5.5 la curva correspondiente a una concentración variable se encuentra acotada entre las curvas *a* y *b* (30 % y 45 % respectivamente). Esta situación pone de manifiesto el buen funcionamiento del modelo numérico homogeneizado, trabajando dentro de los límites impuestos.

Con respecto al campo de validez de los coeficientes obtenidos, la interpolación de valores utilizando ecuaciones de tendencia es aplicable dada la linealidad de los resultados.

$$E^* = 410,63 * Conc + 35852 \quad (5.1)$$

$$E^* = 417,54 * Conc + 35669 \quad (5.2)$$

La expresión Ec. (5.1) corresponde a la tendencia para estado plano de tensiones, y la Ec. (5.2) a la tendencia para estado plano de deformaciones. Siendo E^* el módulo de Young (Mpa) y $Conc$ el porcentaje de concentración de agregados.

En cambio, la extrapolación con concentraciones fuera de los límites ensayados, no es totalmente válida. Esto se evidencia al reemplazar en la ecuación de tendencia Ec. (5.1) el porcentaje de concentración correspondiente a un medio heterogéneo compuesto solamente por mortero (0 % de agregados) o por agregados (100 %), ver Fig. 5.6.

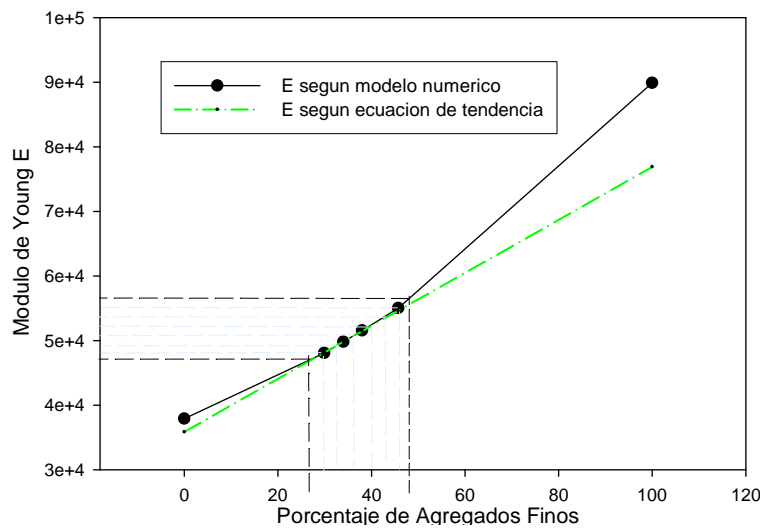


Figura 5.6: Extraplación de valores de E

En cuyo caso el módulo de elasticidad correspondiente al 0% de concentración resulta $E_{0\%} = 35852Mpa$, según Ec. (5.1), en lugar del valor $E_{mort} = 37900Mpa$ empleado como dato para el módulo de elasticidad del mortero. Del mismo modo para el 100% de concentración se obtiene $E_{100\%} = 76915Mpa$, según Ec. (5.1), en lugar del $E_{pied} = 89900Mpa$. Por otro lado en virtud de que en el presente trabajo el estudio se centra en el proceso de homogenización del hormigón simple los rangos de concentración de agregados fuera del entorno ensayado (entre 30% y 45%) no representan las características físicas típicas de estos materiales heterogéneos, y la variación lineal adoptada en Ec. (5.1) y Ec. (5.2) es correcta.

Por otro lado, en la Fig. 5.7 se observa el proceso de transferencia de presiones normales (1er invariante del tensor de tensiones) entre agregados del modelo heterogéneo de la probeta.

5.2.2 Muro de sostenimiento

El presente ejemplo es un muro de sostenimiento el cual trabaja por gravedad. En la Fig. 5.8 se aprecian las medidas de la pieza, y en la Fig. 5.9 las condiciones de borde a las cuales se encuentra sometida se describen a continuación:

Para la modelación de este ejemplo, se utilizaron dos tipos de materiales dentro del software Abaqus. Por un lado tenemos el ya mencionado hormigón simple, descrito como material de usuario y el suelo, modelado como un material arenoso de graduación mediana, cuyas propiedades son: $\nu = 0,35$, $E = 18MPa$, $\gamma_{sat} = 1,85tn/m^3$, $\phi = 30^0$, $\sigma_{tadm} = 10tn/m^2$, y por último la fricción entre el hormigón y el suelo $\mu = 0,45$.

En este caso el ejemplo representa un problema estructural de grandes dimensiones. Entonces, viendo la aleatoriedad de las propiedades del hormigón simple dado el proceso de elaboración, hormigonado en obra, etc; la implementación de las PEE sobre la estructura se realizó de la manera también mencionada en la sección 5.2.1, aquí se da un análisis

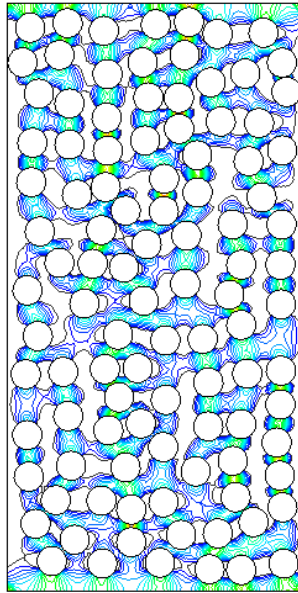


Figura 5.7: Transmisión de Presiones Normales.

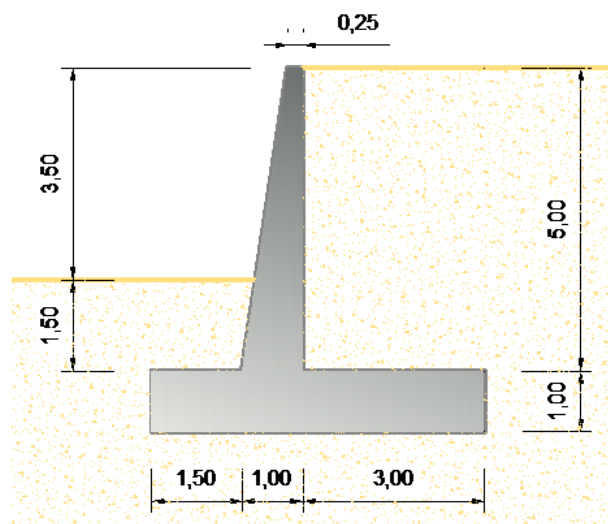


Figura 5.8: Geometria del muro de sostenimiento modelado

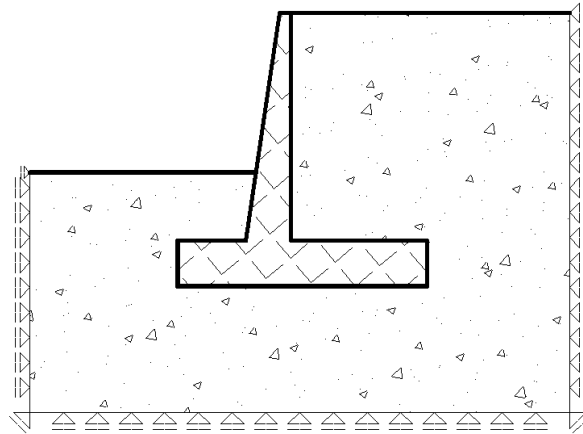


Figura 5.9: Condiciones de borde del muro de sostenimiento modelado

mas profundo del razonamiento aplicado: Considerando los resultados que se detallan en el capítulo 4, se utilizan las curvas de las Fig. 4.15 y Fig. 4.16 para dar propiedades aleatorias a cada punto de la masa de hormigón. Esto es, variando la concentración de agregado grueso en cada punto de Gauss de los elementos del mallado. Dicha condición tiene dos pautas muy importantes a seguir; en primer lugar los límites de concentración son 30 % como cota inferior y 45 % como cota superior. Además es muy importante tener en cuenta que las dos propiedades que van variando (E^* y ν^*) se relacionan entre si, por lo que el valor aleatorio que adopta cada una está relacionada con la otra. El problema se modela en estado plano de deformaciones, ya que la propia geometría y condiciones de contorno del problema permite identificar una dirección irrelevante (normal al plano mostrado en la Fig. 5.9) de modo que pueden plantearse soluciones del problema de forma independiente a dicha dimensión.

En la Fig. 5.10 se aprecia el estado tensional al que esta sometido el muro de sostenimiento. Nótese el mallado simple y regular con el que se modeló el problema. Por otro lado, en la Fig. 5.11 se presenta el estado tensional del suelo en función de las presiones a las cuales esta sometido y se aprecia la forma del bulbo de tensiones.

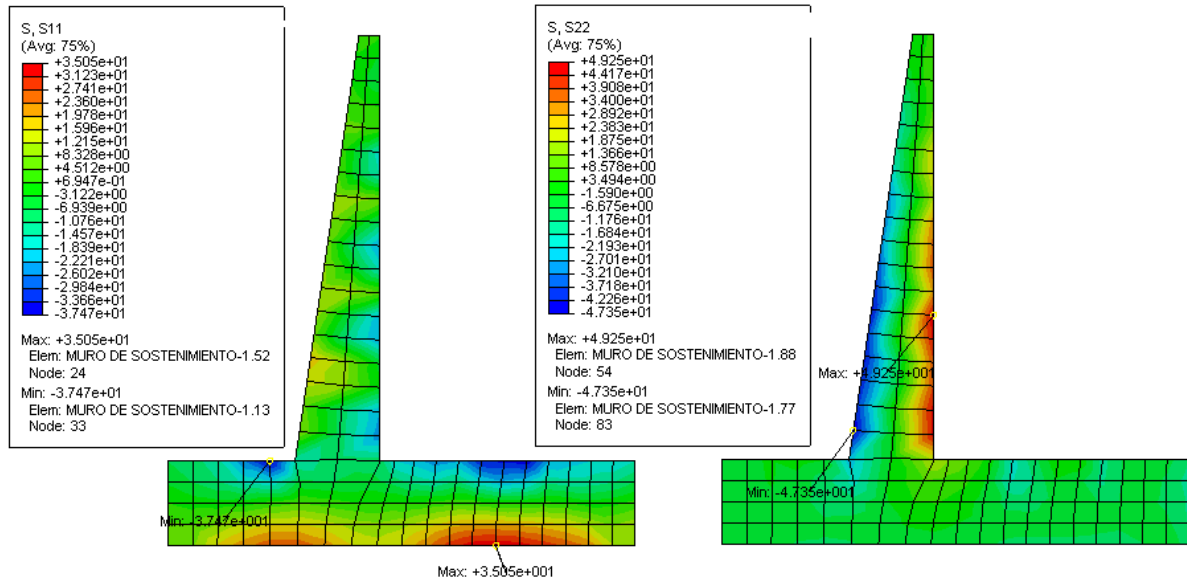


Figura 5.10: Tensiones S_{11} (Izquierda) y S_{22} (Derecha)

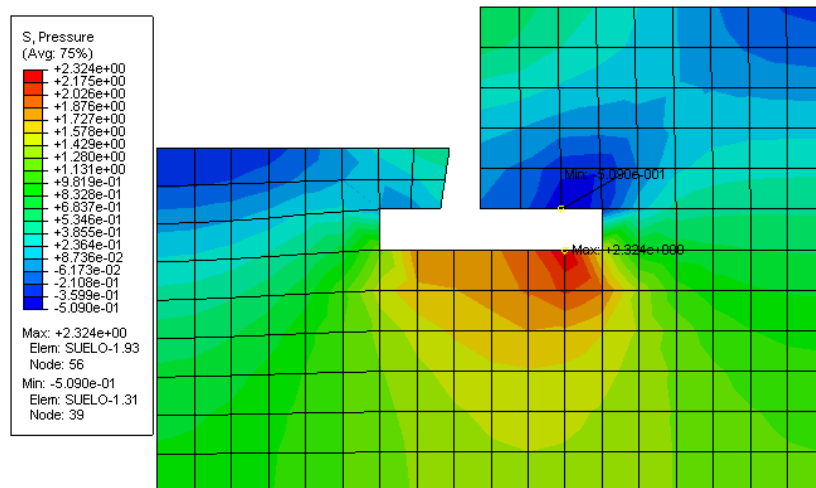


Figura 5.11: Presiones Normales en la masa de suelo.

CAPÍTULO 6

Conclusiones

La modelación de materiales heterogéneos es un trabajo muy complejo, sobre todo si se busca tener en cuenta la aleatoriedad de sus propiedades. En la sección 5.2, se hizo énfasis en los mallados de discretización de los distintos problemas. Por ejemplo, en la Fig. 6.1 se muestra el contraste entre el modelo heterogéneo y el homogéneo. Es claro que el primero requiere mayor labor, no solo computacional, si no también en el armado de la geometría y las condiciones de borde.

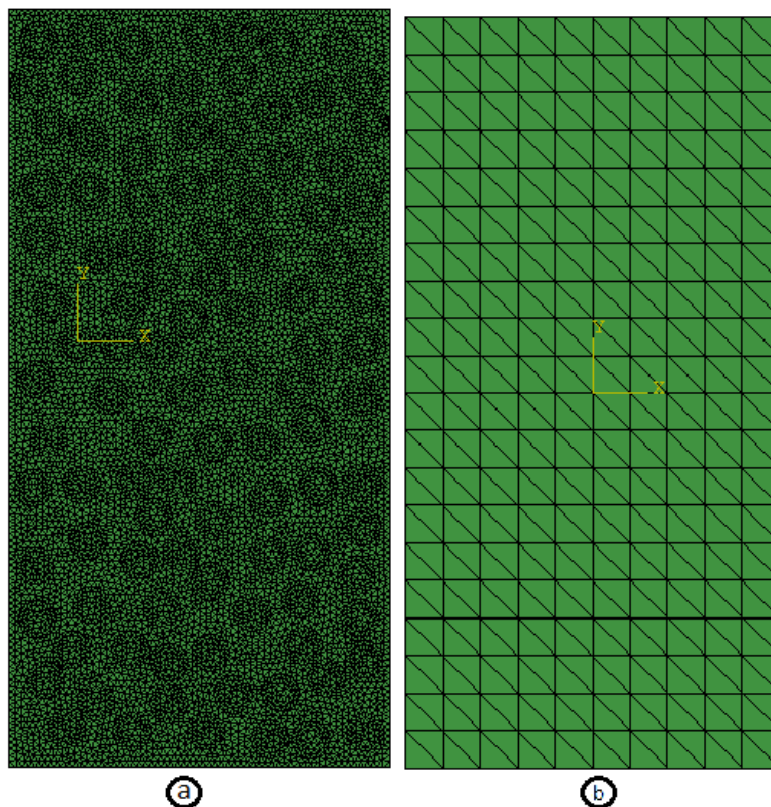


Figura 6.1: Mallados de probeta de Hormigón Simple: a) Material Heterogéneo; b) Material Homogéneo Equivalente

Simular el problema de la sección 5.2.2 sería muy difícil utilizando un mallado para

materiales heterogéneos, llevando a altos costos computacionales y de trabajo en preproceso. Para destacar la idea, se puede apreciar en la figura Fig. 6.2 un acercamiento a la discretización del ejemplo de 5.2.2. Colocando al lado del muro la probeta del ejemplo 5.2.1 ambos en la misma escala, se hace notoria la dificultad de la discretización de un ejemplo a gran escala de forma heterogénea. En este caso particular, la probeta simulada en forma heterogénea constaba de unos 8512 elementos, cuando en el último problema un elemento del muro de Hormigón es de tamaño mayor al de la probeta. Lo importante no es solo el ahorro en el costo computacional; si no también la ventaja de poder realizar simulaciones de materiales heterogéneos, de propiedades variables en cada punto, pero en forma mucho mas sencilla. A la vez utilizar esta metodología permite realizar análisis estadísticos sobre un mismo problema; cosa que sería sumamente dificultosa aplicando mallados heterogéneos. También se pueden utilizar algoritmos que otorguen determinados valores de PEE teniendo en cuenta parámetros constructivos y/o estructurales, los cuales son mas complejos y son objetivo de futuros trabajos.

De este modo, es posible homogenizar el comportamiento microscópico del hormigón simple sin perder de vista la heterogeneidad del mismo y evitar una distribución periódica de la concentración de agregados gruesos.

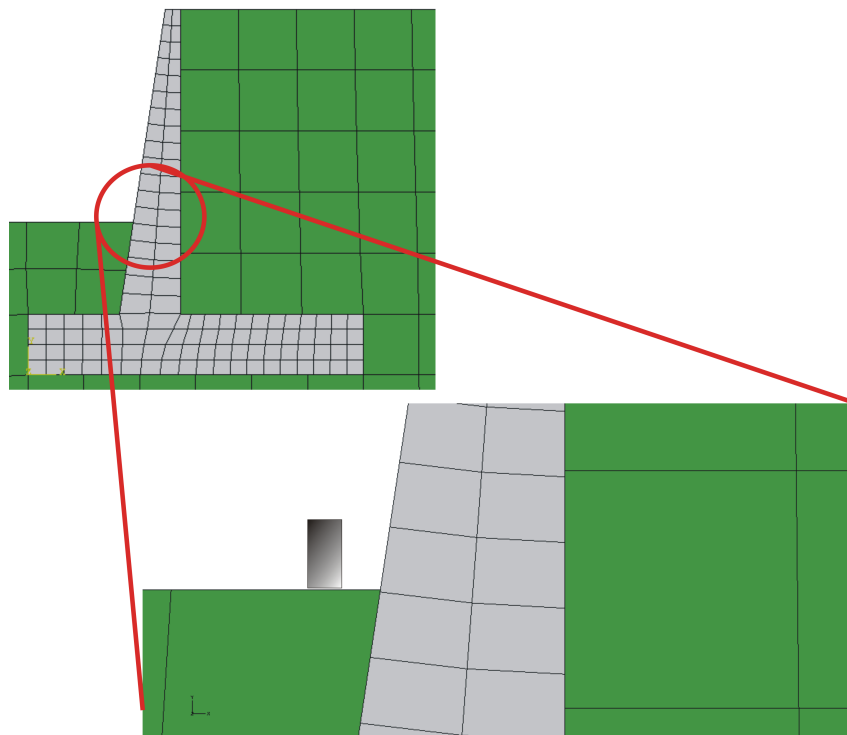


Figura 6.2: Comparación entre las escalas de ambos problemas

Bibliografía

- [1] J. Aboudi. *Mechanics of Composite Materials*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands., 1991.
- [2] Z.P. Bazant. *Scaling of Structural Strength. Second ed.* Elsevier London., 2005.
- [3] Y. Benveniste. A new approach to the application of mori-tanaka theory in compsite materials. *Mech. Mater.*, 6:147–157, 1987.
- [4] R.M. Christensen. *Mechanics of Composite Materials*. Wiley & Sons, New York., 1979.
- [5] G Dietmar and S. Thomas. *Fracture Mechanics whit a Introduction to Micromechanics*. Springer, 2006.
- [6] Z. Hashin. Analysis of composite materials - a survey. *J. Appl. Mech.*, 50:481–505, 1983.
- [7] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 211:127–140, 1963.
- [8] Z. Hashin and Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *J. Appl. Mech.*, 31:223–232, 1964.
- [9] A.V. Hershey. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21:236–240, 1954.
- [10] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15:79–95, 1967.
- [11] C. Huet. Coupled size and bououndary-condition effects in viscoelastic heterogeneous and composite bodies. *Mechanics of Materials*, 31:787–829, 1999.
- [12] R.M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. McGraw-Hill, Washington., 1975.
- [13] S. Kurukuri. *Homogenization of Damage Concrete Meso-structures using Representative Volume Elements - Implementation and application to Slang*. Master thesis, Institute of Structural Mechanics - Bauhaus, University Weimar Germany, 2005.
- [14] Moulinec H. Suquet P. Michel, J.C. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: A computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, 172:109–143, 1999.

- [15] T. Mura. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht., 1982.
- [16] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North Holland, Amsterdam., 1993.
- [17] and. He Q. Pensée, V. Generalized self-consistent estimation of the apparent isotropic elastic moduli and minimum representative volume element size of heterogeneous media. *International Journal of Solids and Structures.*, 44:2225–2243, 2007.
- [18] K. Sab. On the homogenization and he simulation of random materials. *Eur. J. Mech. Solids*, 11:585–607, 1992.
- [19] E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui. *Homogenization Techniques for Composite Materials*. Springer, Berlin., 1987.
- [20] P. Suquet. *Continuum Micromechanics*. CISM Lecture notes, Springer, Berlin., 1997.
- [21] T.I. Zohdi and P. Wriggers. *Introduction to Computational Micromechanics*. Springer, Berlin., 2004.