

Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ingeniería

Carrera:

Maestría en Ciencias de la Ingeniería



**Aplicaciones del método de elementos discretos en
mecánica de fractura estática y dinámica**

T E S I S

Para obtener el título de:

Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Presenta:

Ing. Luis Eduardo Kosteki

Director de tesis:

Dr. Ing. Ignacio Iturrioz

Co-director de tesis:

Ms. Cs. Ricardo Barrios D'Ambrá

Resistencia, Chaco Argentina

2008

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE INGENIERÍA

**APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS
DISCRETOS EN MECÁNICA DE FRACTURA ESTÁTICA Y
DINÁMICA**

LUIS EDUARDO KOSTESKI

RESISTENCIA MAYO DE 2008



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA APLICADA

**APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS
DISCRETOS EN MECÁNICA DE FRACTURA ESTÁTICA Y
DINÁMICA**

POR:

LUIS EDUARDO KOSTESKI

TESIS PRESENTADA AL CUERPO DOCENTE DEL CURSO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE, REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA.

DIRECTOR:

DR. ING. IGNACIO ITURRIOZ

CO-DIRECTOR:

MS. CS. RICARDO BARRIOS D'AMBRA

EL TRIBUNAL EXAMINADOR QUE APROBÓ ESTA DISERTACIÓN FUE INTEGRADO POR:

DR. ING. ADRIÁN P. CISILINO

DR. ING. ALFREDO E. HUESPE

DR. ING. JORGE D. RIERA

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por haber puesto en mi camino a las siguientes personas, porque sin su ayuda y compañía nunca hubiese llegado a esta instancia de mi vida.

A Ignacio Iturrioz, mi director, para el que la distancia no fue un impedimento y continuó guiándome y corrigiendo las innumerables idas y vueltas por e-mail de esta tesis.

A Ricardo Barrios D'Ambra, que estando más cerca, fue el encargado de sacarme las dudas que tenía a diario y orientarme constantemente. Sin su aporte hubiese sido imposible haber llegado hasta acá.

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste, específicamente a los integrantes de los departamentos de Mecánica Aplicada y Matemática por haberme hecho sentir uno de ellos y a todos los amigos que encontré allí.

A la Secretaría General de Ciencia y Técnica de la UNNE por las becas, tanto de Pre-grado como de Iniciación en la Investigación, otorgadas en el período de desarrollo de este trabajo.

A mi familia y amigos que me aguantaron durante este proceso y me apoyaron siempre. Especialmente a mis padres.

Muchas Gracias.

Parte del material de esta tesis sirvió de base para la publicación de los siguientes trabajos:

“Determinación del Factor de Intensidad de Tensiones Aplicando el Método de los Elementos Discretos”

Presentado en: XXXII Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural. Mayo de 2006

Autores: Ricardo Barrios D`Ambra, Ignacio Iturrioz, Héctor Cóceres, Luis Kostaschi, Tomás Tech, Adrián Cisilino.

“Aplicación del Método de los Elementos Discretos para la determinación del factor de intensidad de tensiones estático y dinámico”.

Presentado en: Mecánica Computacional (ISSN 1666-6070). Vol: 25, N° 22, pág. 2109-2123. ED. Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA). Santa Fe. Argentina. 2006

Autores: Luis Kostaschi, Héctor Cóceres, Ricardo Barrios D'Ambra, Ignacio Iturrioz, Adrián Cisilino.

“Cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones utilizando el Método de los Elementos Discretos”

Trabajo aceptado, en etapa de publicación. Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural. ED. Associação Sul Americana de Engenharia Estrutural (ASAEE) 2007

Autores: Ricardo Barrios D`Ambra, Ignácio Iturrioz, Héctor Cóceres, Luis Kostaschi, Tomás Tech, Adrián Cisilino.

INDICE

AGRADECIMIENTOS	I
INDICE	V
LISTA DE SÍMBOLOS	IX
RESUMEN	XI
ABSTRACT	XIII
Capítulo 1 – INTRODUCCIÓN	1
1.1 Motivación de la tesis	1
1.2 Objetivos	4
1.3 Organización del trabajo	4
Capítulo 2 - FUNDAMENTOS TEORICOS DE MECÁNICA DE FRACTURA	7
2.1 Introducción a la Mecánica de fractura	7
2.2 Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE)	9
2.2.1 Balance Energético de Griffith	9
2.2.2 Tasa de Energía Liberada, G	11
2.2.3 Análisis de tensiones en las Proximidades del Extremo de una Fisura	12
2.2.4 Factor de intensidad de Tensiones	13
2.2.5 Relación entre K y G	16
2.3 Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (MFEP)	16
2.3.1 Crack Opening Displacement, COD	17
2.3.2 La Integral J	18
2.4 Fractura Dinámica y Dependiente del Tiempo	20

2.4.1 Propagación de Ondas en un medio elástico	20
2.4.2 Excitación transitoria sobre una fisura estacionaria	22
2.4.3 Propagación rápida de la fisura y <i>arrest</i> (detención)	23
2.4.4 Velocidad de la fisura	25
2.4.5 Parámetros Elastodinámicos de la punta de la fisura	27
2.4.6 Integral J generalizada	28
Capítulo 3 – REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA – FORMA DE OBTENER LOS PARÁMETROS FRACTOMECÁNICOS	31
3.1 Factor de Intensidad de Tensiones	31
3.1.1 Cálculo de K a partir del balance energético – Tasa de energía liberada, G	31
3.1.2 Cálculo de K a partir de las tensiones en la extremidad de la fisura	32
3.1.3 Cálculo de K a partir del COD	33
3.1.4 Cálculo de K a partir de la integral J	34
3.2 Propagación Inestable de fisuras	36
3.2.1 Diferentes formas de simular la dirección y velocidad de propagación.	36
Capítulo 4 – MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS (MED)	43
4.1 Características de la formulación del Método utilizada en este trabajo	45
4.1.1 Rigidez de las barras equivalentes al continuo	45
4.1.2 Masas Nodales	49
4.1.3 Solución de la ecuación de equilibrio	49
4.1.4 Relación constitutiva de la barra para modelar la rotura del material	51
4.2 Integración por diferencias finitas	53

4.3 Metodología utilizada para obtener el tensor de tensiones	54
4.3.1 Tensiones normales	55
4.3.2 Tensiones tangenciales	56
4.4 Aplicaciones analizadas con el MED	57
Capítulo 5 – IMPLEMENTACIONES REALIZADAS EN EL MED	59
5.1 Modificación en la forma de modelar la fisura	59
5.2 Factor de Intensidad de Tensiones	62
5.2.1 Balance Energético en el MED. Avance Elemental de la Fisura	62
5.2.2 Extrapolación de K calculado a partir del COD en el MED	63
5.2.3 La Integral J en el MED	65
5.3 Propagación de fisuras	70
Capítulo 6 – DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES ESTÁTICO, K	71
6.1 Cálculo del K estático para una placa con una fisura central	71
6.1.1 Cálculo del K estático utilizando el método del balance energético	73
6.1.2 Cálculo del K estático utilizando el COD	75
6.1.3 Cálculo del K estático utilizando la integral J	76
6.1.4 Comparación entre las diferentes técnicas implementadas en el MED	77
6.1.5 Influencia de la velocidad de carga en K_I/K_0 versus tensión	78
6.1.6 Distribución de tensiones	78
6.2 Cálculo del K estático para un bloque con una fisura de sección circular	79
6.3 Cálculo del K estático para un bloque con una fisura de sección semielíptica	82

Capítulo 7 - DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES DINÁMICO, K_d	87
7.1 Cálculo del K dinámico para una placa con una fisura central	87
7.1.1 Cálculo del K dinámico utilizando el método del balance energético	88
7.1.2 Cálculo del K dinámico utilizando el COD	90
7.1.3 Cálculo del K estático utilizando la integral J	91
7.1.4 Distribución de tensiones	93
7.2 Cálculo del K dinámico para una placa con una fisura central inclinada	95
7.3 Cálculo del K dinámico para una placa con una fisura en el borde inclinada 45°	100
7.4 Cálculo del K dinámico para un prisma rectangular que contiene una fisura elíptica	103
Capítulo 8 - PROBLEMAS DE PROPAGACIÓN DE FISURAS	107
8.1 Desviación del camino de la fisura debido a un hueco circular	107
8.2 Placa con una fisura sometida a una carga impulsiva. Simulación numérica del experimento de Kalthoff	112
8.3 Propagación en una placa de PMMA	118
8.4 Impacto en Disco de PPH	121
Capítulo 9 – CONCLUSIONES	129
9.1 Consideraciones Finales	131
BIBLIOGRAFÍA	133

LISTA DE SIMBOLOS

a	Semilongitud de la fisura en el plano o radio de la fisura en el espacio	G	Tasa de energía liberada
a ₀	Longitud inicial de la fisura	G _C	Tasa crítica de energía liberada
A _f	Área de la superficie fracturada	G _f	Tasa de energía superficial G utilizada en el MED
B	Espesor de la placa	J	Integral J
C	Matriz de amortiguamiento (diagonal)	k	Número de barras que concurren al nudo i
c ₀	Velocidad del sonido para una onda de propagación unidimensional	K	Factor de Intensidad de Tensiones (FIT)
C _{ij}	Constantes elásticas	K ₀	FIT de referencia. Varía según el ejemplo analizado.
COD	Crack Opening Displacement o abertura de la punta de la fisura	K _C	FIT crítico
da	Incremento diferencial de la longitud de la fisura	K _I	FIT del Modo de apertura o Modo I
dA	incremento diferencial del área de la fisura	K _{II}	FIT del Modo de deslizamiento o Modo II
D _f	Constante vinculada al coeficiente de amortiguamiento crítico ξ_n	K _{III}	FIT del Modo de torsión o Modo III
ds	Elemento diferencial del contorno Γ	K _I (t)	FIT del Modo I en función del tiempo
E	Módulo de elasticidad	k _r	Ductilidad, parámetro que permite calcular ϵ_r
E'	$\frac{E}{1-\nu^2}$	L _c	Longitud del módulo elemental
E _A	Rigidez de las barras del modelo reticulado	m	masa de un nudo
E _K	Energía cinética	M	Matriz de masa nodal (diagonal)
E _K	Densidad de energía cinética	MFLE	Mecánica de Fractura Lineal Elástica
E _T	Energía total	MFLE	Mecánica de Fractura Elasto-Plástica
E A _n	Rigidez de las barras diagonales	\vec{n}	Vector unitario normal al contorno Γ
E A _n	Rigidez de las barras normales	$\vec{P}(t)$	Vector de fuerzas externas
\mathcal{F}	Flujo de energía dentro del área encerrada por el contorno Γ	P _{cr}	Fuerza máxima de tracción transmitida por la barra
f _{ij}	Función adimensional de θ	Q ^d ₁₁	Propiedad unidireccional efectiva correspondiente a las barras diagonales
f _n	Frecuencia natural de vibración de modo n (Hz)	Q ⁿ ₁₁	Propiedad unidireccional efectiva normal a las caras del cubo
$\vec{F}(t)$	Vector de fuerzas internas	\overline{Q}_{ij}	Constantes elásticas del sólido equivalente representado por la estructura reticulada.
		r	Distancia medida desde la punta de la fisura

r_p	Tamaño de la zona plástica	ϵ_r	Deformación para la cual la barra no transmite más esfuerzos de tracción
r_y	Radio de zona singular considerando el material elástico (ideal)	γ	Coefficiente de seguridad
R_{fc}	Factor de falla	γ_s	Energía de superficie del material
t	Tiempo	Γ	Contorno Γ contenido en la extremidad de la fisura (figura 2-10)
T	Temperatura	$\Gamma\epsilon$	Contorno que varía en función de ϵ
\vec{T}	Vector tracción	λ	Función que dependerá del tipo de material a modelar (relación constitutiva)
\vec{u}	Vector desplazamiento	μ	Módulo de corte
U	Energía de deformación almacenada en el cuerpo	ν	Coefficiente de Poisson
V	Velocidad, velocidad de propagación de la fisura	v_x	Desplazamientos correspondientes con el Modo II
V_Γ	Volumen encerrado por el contorno Γ y la fisura	v_y	Desplazamientos correspondientes con el Modo I, perpendiculares al plano de la fisura.
$V_{\Gamma\epsilon}$	Volumen encerrado entre el contorno $\Gamma\epsilon$ y la fisura	v_z	Desplazamientos correspondientes con el Modo III
V_P	Velocidad de las ondas P	Π	Energía potencial
V_R	Velocidad de las ondas de Rayleigh	θ	Ángulo formado entre el eje x o 1 de referencia de la punta de la fisura y el punto considerado (figura 2-3).
V_S	Velocidad de las ondas S	ρ	Densidad del material
W	Energía potencial producida por las fuerzas externas	Δa	Incremento de la longitud de la fisura
W_d	Densidad de energía de deformación en puntos del contorno Γ	Δt	Intervalo de tiempo
W_S	Trabajo requerido para crear nuevas superficies de la fisura	$\Delta t_{crítico}$	Intervalo de tiempo crítico
\vec{X}	Vector de desplazamientos nodales	σ_{YS}	Tensión de fluencia
$\alpha_{I_i}^n$ y $\alpha_{J_{kl}}^d$	Cosenos directores de los sistemas cartesianos \bar{x}, x_1^n y \bar{x}, x_j^d respectivamente.	σ_f	Tensión de fractura
χ	Parámetro que depende de la geometría del problema y a la longitud de la fisura	$\dot{\sigma}$	Tasa de la tensión
δ	COD o abertura de la punta de la fisura	σ	Tensión
ϵ_b y $\dot{\epsilon}_b$	Deformación y velocidad de deformación de la barra b	σ_{ij}	Tensor de tensiones
ϵ_p	deformación asociada a P_{cr}	$\sigma_{máx eq}$	Tensión máxima equivalente
		$\sigma_{rot eq}$	Tensión de rotura equivalente
		ξ_n	Coefficiente de amortiguamiento crítico

RESUMEN

Los procesos de falla y fractura en las estructuras continúan siendo un problema desafiante de la mecánica, y precisan ser tenidos en cuenta en el análisis de seguridad de las mismas. Además, juegan un papel muy importante en el desarrollo de nuevos materiales, tanto para el conocimiento de su durabilidad, como de su resistencia.

Es posible obtener los parámetros fractomecánicos así como caracterizar la propagación subcrítica de fisuras en sólidos a través de varias metodologías de análisis, tanto numéricas como analíticas. Pero cuando se desea determinar los parámetros fractomecánicos y la configuración de ruptura considerando una propagación inestable de las fisuras, el problema está lejos de ser trivial.

En la simulación de la propagación inestable de un defecto, los métodos clásicos, como el Método de los Elementos Finitos (FEM) o el Método de los Elementos de Contorno (BEM), presentan dificultades debido a estar fundamentados en la hipótesis de los medios continuos. En este contexto el Método de los Elementos Discretos (MED) se presenta como una alternativa eficiente para el estudio de este tipo de problemas.

El MED consiste en representar el continuo como un arreglo regular de barras reticuladas donde las mismas tienen una rigidez equivalente a la porción del continuo que pretenden representar. La masa es discretizada y concentrada en los nodos que unen las barras las que tienen una relación constitutiva relacionada con la energía de fractura del material modelado. La ecuación de movimiento resultante es integrada en el tiempo con un algoritmo de integración explícita. El método puede representar con gran facilidad procesos de ruptura y/o fragmentación.

En este trabajo se presentan primero, ejemplos de la obtención de los parámetros fractomecánicos estáticos; luego, varios problemas en 2 y 3 D del cálculo de los Factores de intensidad de tensiones dinámicos y finalmente, se reproduce la propagación inestable de fisuras comparándola con soluciones presentadas por otros autores.

Con estos ejemplos se demuestra la capacidad del MED para obtener los FIT estáticos y dinámicos además de la velocidad y dirección de la propagación de fisuras y configuraciones de rotura.

ABSTRACT

The fault and fracture processes in structures continue being a challenging problem in Mechanics. For this reason they must be taken into account in the security analysis of the structures. In addition they play a very important role in the development of new materials, as much for the knowledge of their durability as for their resistance.

It is not only possible to obtain the fracture parameters but also to characterize the fissure subcritical propagation of solids through many methodologies of analysis, both analytic and numerical ones. But when it is desired to determine the fracture parameters and the fracture configuration considering the unstable propagation of fissures, the problem is far from being trivial.

In the simulation of the unstable propagation of a fault, the classical methods like the Finite Element Method (FEM) or the Boundary Element Method (BEM) present difficulties because they are based on the hypothesis of the continuous means. In this context the Discrete Element Method (DEM) is presented as an efficient alternative for the study of this kind of problems.

The DEM consists of representing the continuum as a regular arrangement of reticulate bars where they have a rigidity equivalent to the part of the continuum they intend to represent. The mass is discrete and concentrated in the nodes that join the bars, which have a constitutive relation related with the fracture energy of the modeled material. The resulting movement equation is integrated in time with an algorithm of explicit integration. This process can very easily represent the fracture and/or propagation processes.

In this work are, in the first place, presented examples of how to obtain static fracture parameters. Secondly, various problems in 2 and 3 dimensions about the calculus of the intensity factors of dynamic tension. And finally, the fissure unstable propagation is reproduced compared with the solutions presented by other authors.

With these examples the capacity of the MED is demonstrated to obtain the static and dynamic FIT in addition to the speed and direction of the propagation of fissures and configurations of breakage.

Capítulo 1 - INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación de la tesis

Hoy en día, los procesos de falla y fractura, continúan siendo un problema desafiante de la mecánica, y precisan ser tenidos en cuenta en el análisis de seguridad de las distintas estructuras. Además, juegan un papel muy importante en el desarrollo de nuevos materiales, tanto para el conocimiento de su durabilidad, como de su resistencia.

A principios del Siglo 20, el acero empezaba a ser el material más utilizado en la construcción de todo tipo de estructuras. En algunas de las cuales se comenzaron a detectar mecanismos de falla y fractura debidos a la propagación crítica de defectos, incrementándose así el interés por este fenómeno. Como ejemplos de fallas catastróficas relacionadas a la propagación crítica de defectos, se pueden citar la de los barcos Titanic (1912), y Olympic (1911) entre muchos otros, ocurridas durante la Primera y la Segunda Guerra Mundial.



Figura 1-1 Falla de barcos (Vieira Chaves, 2003)

Sucedan ejemplos de colapso similares en tipos de estructuras totalmente diferentes, como es el caso de las presas de hormigón. Es sabido que las presas de hormigón desarrollan fisuras, que dan un carácter heterogéneo al material y que pueden afectar su integridad. Dependiendo del estado tensional, las microfisuras pueden convertirse en fisuras macroscópicas, las cuales pueden causar una operación ineficiente durante la vida útil o incluso el colapso total de la presa. Se relatan a continuación algunos casos de colapsos relacionados a presas.

En 1928, apenas comenzó a llenarse la presa de St. Francis cerca de Los Ángeles California, aparecieron grietas a las que no se le dieron importancia. Cinco días después, la presa se rompió matando a 450 personas y produciendo grandes pérdidas materiales.

En 1959 la presa de Malpasset (Francia) falló unas semanas después que se notaron grietas cercanas a la base aguas abajo de la presa. Quedó poco de la presa, la falla sucedió rápida y catastróficamente. Murieron alrededor de 500 personas.

En octubre de 1963 alrededor de 2500 personas murieron como consecuencia del colapso de la presa de Vajont (Italia).

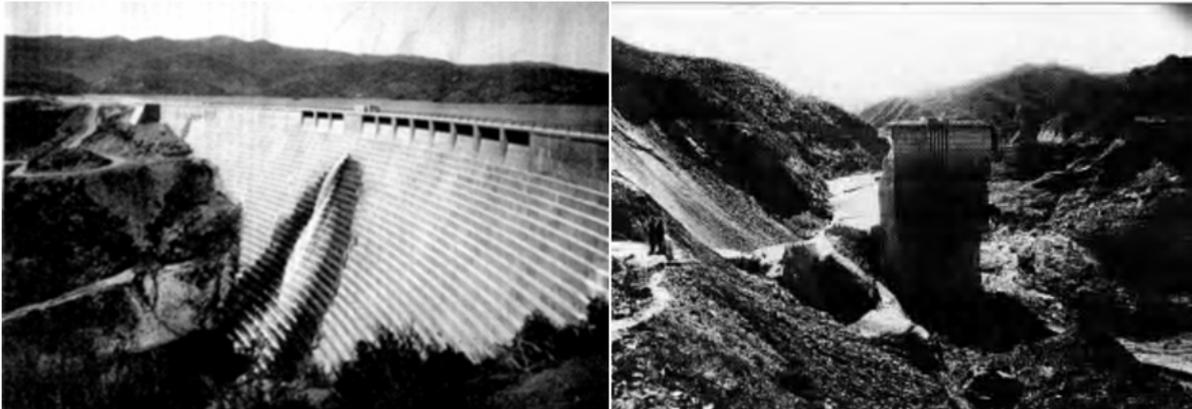


Figura 1-2 Presa de St. Francis antes y después del colapso

Otro caso de interés es el de las cañerías. Actualmente existen miles de kilómetros de cañerías que transportan gas y petróleo alrededor del mundo. Muchas de ellas pasan por zonas pobladas y su colapso puede producir pérdidas de vidas, económicas, y algunas veces, hasta llegar a generar un desastre ecológico.



Figura 1-3 Rotura de cañerías.

Es también importante la fractura en el campo de la ingeniería biomédica. Podemos citar una enfermedad relativamente común relacionada a los huesos llamada osteoporosis. Esta involucra una disminución de la masa del hueso, lo que incrementa el riesgo de fractura del

mismo (con el aumento de la edad). Para prevenir algunas fracturas es necesario evaluar, con un alto grado de precisión, la resistencia del hueso y la propensión a la fractura (Vieira Chaves, 2003).



Figura 1-4 Ingeniería biomédica.

Los ejemplos presentados muestran que esta forma de colapso relacionada a la propagación de fisuras se encuentra presente en muchos problemas de ingeniería, razón por la cual su estudio es de gran interés para los investigadores.

En las últimas décadas ha habido un incremento en el estudio del comportamiento experimental y teórico de la respuesta de los materiales bajo condiciones de carga extremas.

En esta área de conocimiento, así como en muchas otras, la utilización de modelos teóricos permite reducir la cantidad de ensayos experimentales, así como comprender mejor el fenómeno estudiado.

La simulación numérica del comportamiento mecánico de materiales poliméricos, por ejemplo, es hoy en día una herramienta que puede ser utilizada para comprender mejor los mecanismos por los cuales este tipo de materiales llega al colapso, y de esta forma aprovechar mejor la información obtenida a través de ensayos experimentales. El comportamiento mecánico de polímeros es muy sensible a factores como temperatura, velocidad de deformación y composición química entre otros, siendo alterados fácilmente con la

metodología de fabricación. Esta característica introduce considerables complicaciones en su estudio. Actualmente se están realizando grandes esfuerzos para mejorar las propiedades de plásticos combinando varios materiales, siendo este un campo vastísimo para nuevas investigaciones, donde la simulación numérica tiene un papel protagónico.

Por esto, la determinación de parámetros fractomecánicos utilizando métodos numéricos, continúa interesando a investigadores en el área de la mecánica del sólido. Los métodos considerados más aptos para simular problemas de mecánica de los sólidos son el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno. Pero, en la simulación de la propagación inestable de un defecto, estos métodos presentan dificultades debido a estar fundamentados en la hipótesis de los medios continuos. En este sentido el Método de los Elementos Discretos (MED) se presenta como una alternativa eficiente para el estudio de problemas estáticos y dinámicos de la mecánica de fractura, y ha sido empleado con éxito en el modelado de procesos de fractura.

1.2 Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es desarrollar técnicas que permitan describir el proceso de fractura de un sólido utilizando el Método de los Elementos Discretos (MED).

Como objetivos específicos se pueden mencionar:

- La implementación computacional de la construcción de fisuras en forma más refinada en el MED.
- Determinación de los parámetros fractomecánicos estáticos utilizando el MED.
- Determinación de los parámetros fractomecánicos dinámicos utilizando el MED.
- Modelado adecuado de la propagación inestable de fisuras en el MED.
- Cálculo de velocidades de propagación inestable de fisuras.

1.3 Organización del trabajo

En el capítulo 2 se realizará una introducción de los fundamentos teóricos de la mecánica de fractura donde se presentarán los conceptos utilizados en el transcurso de este trabajo. En el

capítulo 3 se presentarán las metodologías más conocidas actualmente para determinar los parámetros fractomecánicos y velocidades de propagación. En el capítulo 4 se hará una introducción al método de los elementos discretos, comentando cómo y para qué se utiliza este método. En el capítulo 5 se detallarán las implementaciones computacionales realizadas con el MED para poder realizar las aplicaciones deseadas. En el capítulo 6 se presentarán ejemplos de obtención del factor de intensidad de tensiones estático, en distintos tipos de placas y también en configuraciones tridimensionales. En el capítulo 7 se ilustrará la capacidad del método de captar el factor de intensidad de tensiones dinámico también para varias configuraciones de placas en 2D y cuerpos en 3D. En el capítulo 8, último capítulo de aplicaciones, se presentarán los resultados obtenidos en ejemplos de propagación de fisuras y problemas de impacto relacionados con la determinación de configuraciones de propagación inestable de fisuras. En éste se mostrará la capacidad de obtener el camino recorrido por la fisura cuando propaga y la determinación de la velocidad de propagación. Finalmente, en el capítulo 9, se presentarán las conclusiones finales y recomendaciones para futuros trabajos que se realicen dentro del tema abarcado por este estudio.

Capítulo 2 - FUNDAMENTOS TEORICOS DE MECÁNICA DE FRACTURA

En este capítulo serán revisados conceptos de la mecánica de fractura a ser utilizados durante este trabajo.

2.1 Introducción a la Mecánica de fractura

Usualmente, en los problemas de ingeniería, para verificar la seguridad de una estructura se calcula la tensión máxima equivalente dada por alguna teoría de resistencia (Von Mises, Tresca, Rankine entre otras) a la que está sometida $\sigma_{\text{máx eq}}$. Esta es comparada con el valor de la tensión de rotura equivalente, que caracteriza la ruptura de una probeta del mismo material que tendrá una geometría simple normalizada, la cual será sometida a un valor de tensión también simple y normalizada $\sigma_{\text{rot eq}}$. La tensión máxima equivalente, $\sigma_{\text{máx eq}}$, es una función de la geometría, las condiciones de contorno y las cargas aplicadas (σ), mientras que la tensión de rotura equivalente, $\sigma_{\text{rot eq}}$, depende del material y de las condiciones en que se realizó el ensayo para obtenerla (temperatura T, velocidad de aplicación de la carga $\dot{\sigma}$).

El suceso de la aplicación de este procedimiento tradicional de cálculo depende del uso de un coeficiente de seguridad (γ) que sea lo suficientemente alto como para evitar fallas provocadas por cualquier aspecto que no se haya tenido en cuenta en el cálculo y suficientemente bajo como para evitar peso exagerado y consumo de material innecesario, para que el costo no sea excesivo. Estos coeficientes se eligen entonces en base a la experiencia acumulada. (Anderson, 2005; Kaninnen y Popelar, 1985)

Se tiene entonces:

$$\sigma_{\text{máx eq}}(\text{Geometría, Cond. de contorno, } \sigma) \leq \sigma_{\text{rot eq}}(\text{material, T, } \dot{\sigma}) / \gamma \quad 2-1$$

Si la estructura analizada posee defectos, para valores de cargas relativamente pequeñas, el valor de las tensiones equivalentes en las proximidades de las puntas de estos defectos serán muy altas, pero esto no implica el colapso de la misma. Por lo tanto, evaluar piezas con defectos utilizando la ecuación 2-1 se torna inviable. La comparación de parámetros del material y de la estructura que no sean directamente tensiones equivalentes se presenta como una salida para evaluar la integridad de estructuras con defectos

Los resultados de la Mecánica de Fractura originan nuevas filosofías de proyecto, en que se asume que la estructura tiene defectos (fisuras), como consecuencia por ejemplo, del proceso constructivo utilizado o de cualquier pequeño accidente durante la vida útil de la estructura. Básicamente el problema consiste en obtener el comportamiento estimativo de la fisura observada o de la que se sospecha su existencia. Es necesario saber si la fisura permanecerá con dimensiones pequeñas durante el período de servicio, aunque aumente establemente de dimensiones durante este período, o se propagará inestablemente, siendo en este caso necesario tomar recaudos preventivos.

Si consideramos entonces que en la estructura en análisis existe una fisura, las tensiones en los extremos de la misma serán elevadas, por más bajo que sea el nivel de las cargas aplicadas. Aun así, está comprobado que las estructuras con defectos resisten, aunque en este caso no es posible utilizar la ecuación 2-1 para dimensionar las mismas, pues siempre se verificará que $\sigma_{\text{máx eq}} \geq \sigma_{\text{roteq}}$. Por esta razón tenemos que buscar una inecuación de dimensionamiento que no esté en función de las tensiones. Esta inecuación tendrá que ser función de un parámetro alternativo que llamaremos Z. En la estructura en análisis, Z será función de las condiciones de contorno aplicadas, geometría y tamaño de la fisura, el cual compararemos con el valor de este parámetro Z_{mat} medido en el momento de su colapso en una probeta de geometría y condiciones de contorno simples.

De esta forma, la inecuación de dimensionamiento equivalente a la 2-1 pero considerando un cuerpo con fisuras, será:

$$Z(a, \text{Cond. de contorno, Geometria}) < Z_{\text{mat}}(\text{material, } T, \dot{\sigma})/\gamma \quad 2-2$$

Cuando la inecuación 2-2 se verifica, se considera que la fisura no propaga en forma inestable.

Existen varias propuestas de parámetros para Z, dos válidas dentro de lo que se llama la mecánica de la fractura lineal elástica (MFLE): la tasa de energía liberada (G), que fue propuesta por Griffith en 1920 que es considerada como un parámetro global ya que envuelve el balance energético de la estructura como un todo, y el factor de intensidad de tensiones (K), propuesto por Irwin en 1957, el cual es un parámetro local, pues solamente considera la distribución de tensiones en un entorno de la punta de la fisura.

Dentro de la mecánica de fractura no lineal, la cual considera la interacción de la propagación inestable de una fisura con la plasticidad, existen también dos parámetros: la integral J (Rice,

1968) que es un parámetro energético, considerado también global y el COD o abertura de la punta de la fisura, que fue introducido por Wells en 1961 y es considerado un parámetro local. Se pueden encontrar más detalles sobre estos parámetros en Anderson (2005).

2.2 Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE)

Los conceptos de la mecánica de fractura elástica-lineal son aplicables a aquellos materiales con fisuras que obedecen la ley de Hooke y cuyo comportamiento global tiene carácter lineal y elástico. Para ellos la teoría establece una descripción cuantitativa de la criticidad del defecto analizado proporcionando una predicción acerca de la vida útil de las estructuras.

En la MFLE existen dos maneras de encarar el estudio:

- Criterio energético de Griffith o Criterio Global: se basa en la determinación de la energía disponible para el avance o extensión inestable de la fisura preexistente, que se obtiene al hacer un balance energético en toda la estructura.
- Criterio del factor de intensidad de tensiones de Irwin o criterio local: se basa en la determinación del estado tensional de la estructura en las proximidades del extremo de la fisura.

2.2.1 Balance Energético de Griffith

Según este criterio la extensión de la fisura ocurre cuando la energía disponible para el desarrollo de la fisura es suficiente para superar la resistencia del material. La resistencia del material puede incluir la energía superficial, el trabajo plástico u otro tipo de energía de disipación asociado con la propagación de la fisura.

El balance energético de Griffith para un incremento diferencial del área de la fisura (dA) en una placa sujeta a una tensión remota, σ , que contiene una fisura de longitud $2a$, puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\frac{dE_T}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad 2-3$$

ó

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad 2-4$$

Donde E_T es la energía total, Π es la energía potencial suministrada por la energía de deformación interna y las fuerzas exteriores, y W_s es el trabajo requerido para crear nuevas superficies de la fisura.

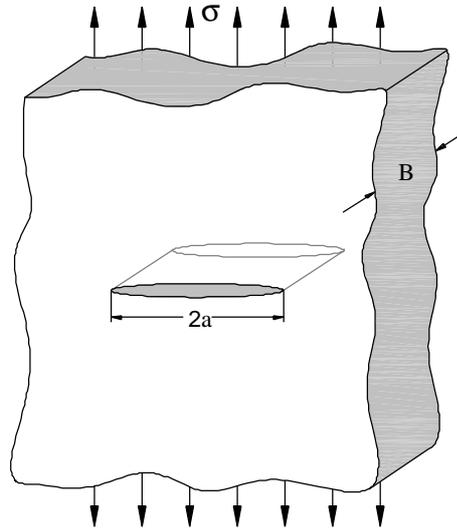


Figura 2-1 Placa de espesor constante y dimensiones infinitas con una fisura pasante longitud $2a$.

Para la placa fisurada mostrada en la figura 2-1, Griffith llegó a (Anderson, 2005):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_s}{\pi \cdot a}} \quad 2-5$$

Donde σ_f es la tensión de fractura, a es la semilongitud de fisura, E es el módulo de elasticidad y γ_s la energía de superficie del material.

El criterio de Griffith se puede aplicar a otros tipos de configuraciones fisuradas. Por ejemplo, la tensión de fractura en un cuerpo que tiene una fisura de sección circular (figura 2-2) está dada por:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\pi \cdot E \cdot \gamma_s}{2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot a}} \quad 2-6$$

Donde a es el radio de la fisura y ν el coeficiente de Poisson. (Anderson, 2005)

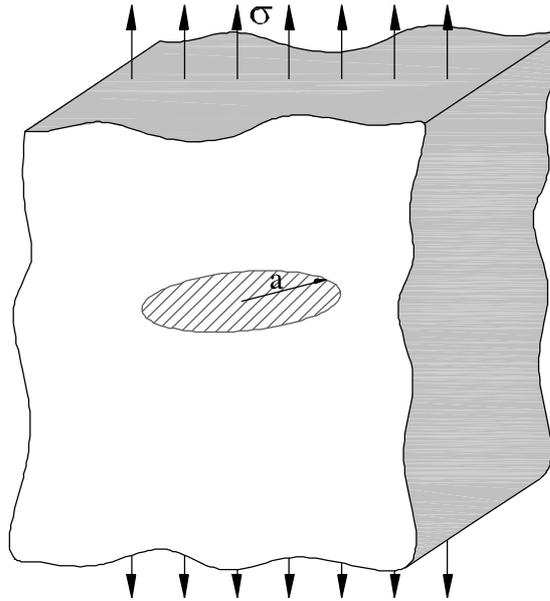


Figura 2–2 Cuerpo de dimensiones infinitas con una fisura de sección circular sometido a una tensión remota de tracción σ .

2.2.2 Tasa de Energía Liberada, G

En 1956, Irwin (citado en Anderson, 2005) definió la tasa de energía liberada, G , como una medida de la energía disponible para el incremento de la extensión de la fisura:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad 2-7$$

G es la razón de cambio de la energía potencial con el área de la fisura. Es también llamada *driving force*, fuerza guía de la fisura o fuerza que dirige la fisura, es importante notar que su dimensión es la de energía por unidad de superficie.

La fisura comienza a propagar cuando G alcanza un valor crítico:

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} \quad 2-8$$

Donde G_c (tasa crítica de energía liberada) es una medida de la tenacidad del material.

La energía potencial para un cuerpo elástico (Π), para un proceso cuasiestático, es definido de la siguiente manera:

$$\Pi = U - W \quad 2-9$$

Siendo U es la energía de deformación almacenada en el cuerpo y W es la energía potencial producida por las fuerzas externas.

2.2.3 Análisis de Tensiones en las Proximidades del Extremo de una Fisura

Para ciertas configuraciones fisuradas sujetas a fuerzas externas, es posible describir mediante expresiones cerradas la tensión en el cuerpo, asumiendo un comportamiento del material lineal elástico e isotrópico. Westwrgaard e Irwin (citados en Anderson, 2005) fueron algunos de los primeros en publicar estas soluciones. Si se define el origen de coordenadas polares en la punta de la fisura (figura 2-3), se puede demostrar que el campo de tensiones en un cuerpo elástico lineal fisurado es dado por:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) \cdot f_{ij}(\theta) + O_1 r^0 + O_2 r^{3/2} + O_3 r^2 + \dots \quad 2-10$$

Donde σ_{ij} es el tensor de tensiones, r y θ se definen en la figura 2-3, k es un constante, f_{ij} es una función adimensional de θ y los coeficientes O_i son dependientes de la geometría y condiciones de borde de la estructura. Cuando r tiende a cero, el primer término tiende a infinito, pero los términos restantes permanecen finitos o tienden a cero. Por lo tanto la forma de la distribución de tensiones en las proximidades de la punta de la fisura es independiente de la geometría y condiciones de contorno del componente estudiado. También se puede demostrar que los desplazamientos cercanos a la punta de la fisura varían con \sqrt{r} .

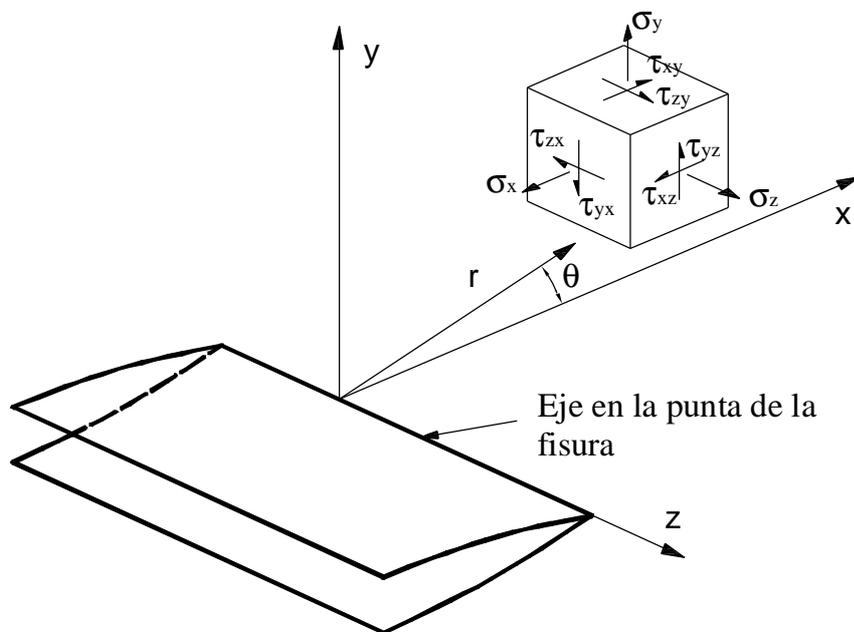


Figura 2-3 Definición de las coordenadas con los ejes en la punta de la fisura.

Existen tres tipos de solicitaciones que la fisura puede experimentar, como se ilustra en la figura 2-4:

- Modo de apertura o Modo I, en el cual las caras de la fisura se separan casi paralelamente entre sí. La solicitación actúa normal al plano de la fisura, ésta tiende a abrir la misma.
- Modo de deslizamiento o Modo II, en el cual las caras de la fisura se deslizan una sobre la otra. Corresponde a una solicitación de cizalla en el plano de la fisura.
- Modo de torsión o Modo III, donde las caras de una fisura se deslizan lateralmente una respecto de la otra. Corresponde a una solicitación de cizalla fuera del plano de la fisura.

Un cuerpo fisurado puede ser solicitado en cualquiera de estos tres modos, o con una combinación de dos o de los tres modos.

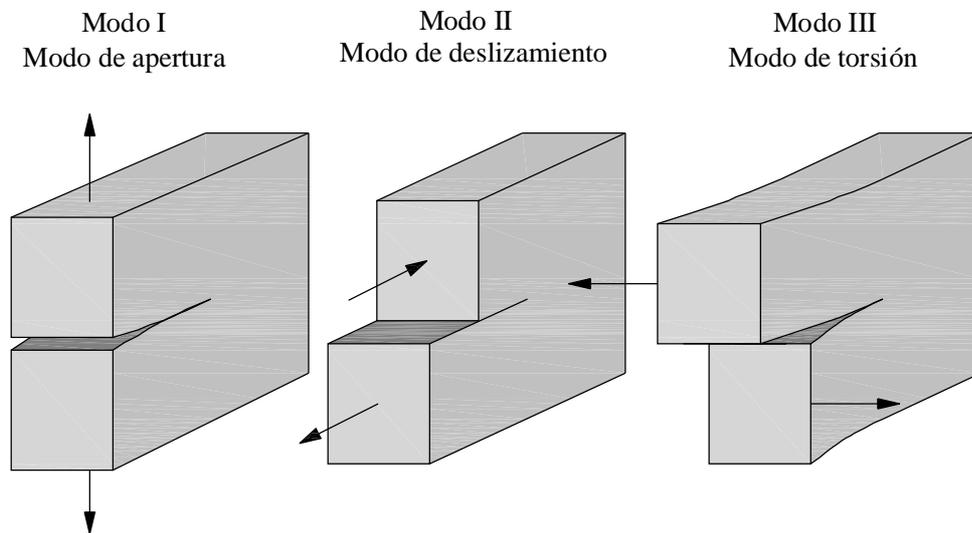


Figura 2-4 Modos de carga que se pueden aplicar a una fisura.

2.2.4 Factor de intensidad de Tensiones

Cada tipo de carga produce en la punta de la fisura una singularidad en función de $1/\sqrt{r}$, pero la constante de proporcionalidad k y f_{ij} dependen del modo de carga. Es conveniente reemplazar k por el factor de intensidad de tensiones, K , siendo $K = k \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}$. Este factor de intensidad de tensiones es usualmente dado denotando el modo de carga con un subíndice en número romano, es decir, K_I , K_{II} o K_{III} . Entonces el campo de tensiones delante de la punta de la fisura en un material elástico lineal isotrópico puede ser escrito como:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(1)} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{(1)}(\theta) \quad 2-11-a$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad 2-11-b$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad 2-11-c$$

Consideremos un campo singular de Modo I en una placa fisurada donde $\theta = 0$. La tensión en la dirección "x" y en la dirección "y" son iguales:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \quad 2-12$$

Cuando $\theta = 0$, la tensión de corte es nula, lo que significa que el plano de la fisura es un plano de tensiones principales para el modo I de carga. La figura 2-5 es una gráfica esquemática de las tensiones σ_{yy} , tensión normal al plano de la fisura, versus la distancia a la punta de la fisura. La ecuación 2-12 es válida solamente en las cercanías de la punta de la fisura, donde la singularidad $1/\sqrt{r}$ domina el campo de tensiones. Las tensiones lejos de la punta de la fisura son gobernadas por las condiciones de borde remotas. Por ejemplo, si la estructura fisurada es sometida a una tensión remota uniforme, σ_{yy} se aproxima a ese valor constante σ^{00} .

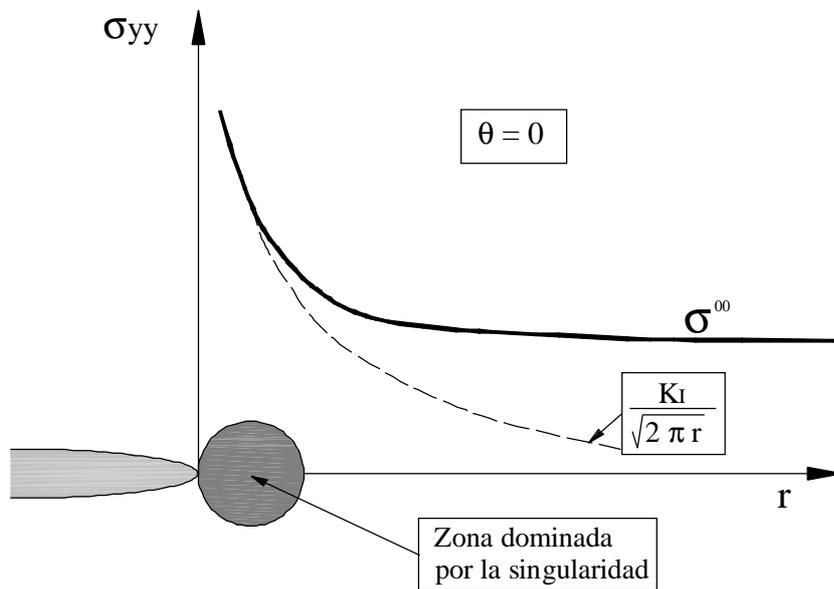


Figura 2-5 Tensiones normales al plano de la fisura en el Modo I.

El factor de intensidad de tensiones define la amplitud de la singularidad en la punta de la fisura. Esto quiere decir que las tensiones en las cercanías de la punta de la fisura aumentan proporcionalmente a K. Es más, el factor de intensidad de tensiones define completamente las condiciones en la punta de la fisura. Si K es conocido, es posible calcular todas las

componentes de las tensiones, deformaciones y desplazamientos en función de r y θ . Una posibilidad sería tomar este factor K como el parámetro Z presentado en la ecuación 2-2. Este simple parámetro de descripción de las condiciones en la punta de la fisura se transforma en uno de los conceptos más importantes en la mecánica de fractura.

En el gráfico anterior queda implícito que las tensiones en la punta de la fisura son infinitas. En materiales reales, sin embargo, las tensiones en la punta de la fisura son finitas. Deformaciones inelásticas en el material, como plasticidad en metales y crazing en polímeros, conducen a una relajación adicional de las tensiones en la punta de la fisura.

Por esto, existen correcciones simples a la mecánica de fractura lineal elástica (MFLE) cuando ocurre una fluencia moderada en la punta de la fisura. Para una fluencia más extensa, se deben aplicar parámetros alternativos que tienen en cuenta el comportamiento no lineal del material.

Cuando ocurre la fluencia, las tensiones se tienen que redistribuir para satisfacer el equilibrio. La zona rayada en la figura 2-6 representa las fuerzas que estarían presentes en un material elástico ideal pero no existen en el material elasto-plástico porque las tensiones no pueden exceder la tensión de fluencia. La zona plástica debe aumentar de tamaño para absorber estas fuerzas. Un simple balance de fuerzas conduce a una estimación de segundo orden del tamaño de la zona plástica, r_p , que es el doble de r_y , la estimación de primer orden. Donde r_y es el radio de zona singular considerando el material elástico (ideal).

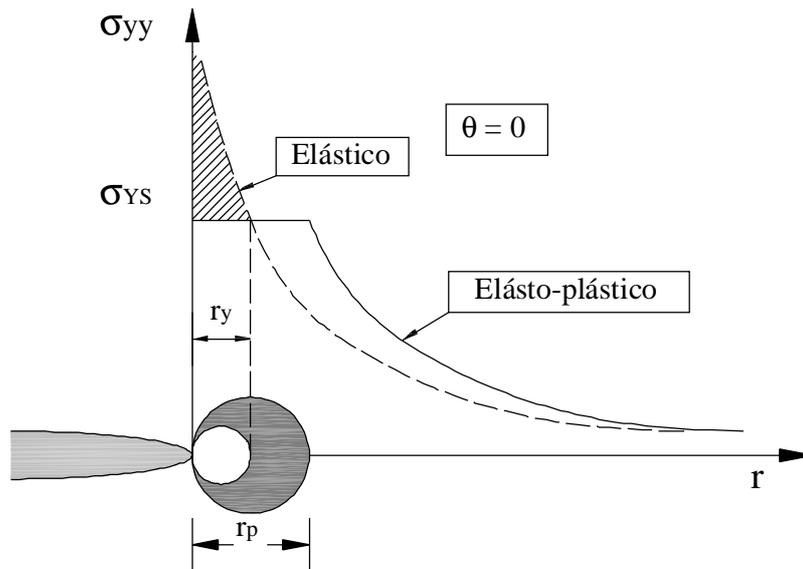


Figura 2-6 Estimación del tamaño de la zona plástica de primer y segundo orden. El área rayada representa las cargas que deben ser redistribuidas, lo que resulta en un aumento de la zona plástica.

2.2.5 Relación entre K y G

Para una placa infinita con fisura pasante sujeta a una tracción uniforme (figura 2-1), se llega a la siguiente relación entre G y K para estado plano de tensiones (capítulo 2 de Anderson, 2005):

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad 2-13$$

Para un estado de deformación plana E debe ser reemplazado por $E/(1-\nu^2)$. Para evitar escribir separadamente las expresiones para estado plano de tensiones y estado plano de deformaciones, se adopta la siguiente nomenclatura:

$E' = E$ para estado plano de tensiones

$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \text{ para estado plano de deformaciones}$$

Entonces la relación entre G y K para ambos será:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad 2-14$$

Se puede encontrar en Anderson (2005) análisis realizados por Irwin donde se prueba que esta ecuación es la relación general entre G y K que se aplica a toda configuración.

La ecuación 2-14 es la relación general entre G y K para el Modo I. Cuando los tres modos de carga están presentes, la tasa de liberación de energía está dada por:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2 \cdot \mu} \quad 2-15$$

La contribución de los tres modos es aditiva porque la tasa de energía liberada, al igual que la energía, es un escalar.

2.3 Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (MFEP)

La Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE) es válida siempre que la deformación no lineal del material esté confinada en una pequeña región alrededor de la punta de la fisura. En muchos materiales es virtualmente imposible caracterizar el comportamiento de la fractura con MFLE, y se requiere un modelo alternativo de mecánica de fractura.

Como ya se mencionó, existen dos parámetros elasto-plásticos: la apertura en la punta de la fisura (Crack Opening Displacement, COD) y la integral J. Los dos parámetros describen las condiciones de la punta de la fisura en materiales donde ya no es válido el comportamiento elástico lineal, y cada uno puede ser utilizado como un criterio de falla. Los valores críticos del COD o J dan una medida de la tenacidad a la fractura, incluso para relativamente grandes cantidades de plasticidad en la punta de la fisura. Existen límites para la aplicación de J y COD, pero estos límites son mucho menos restrictivos que los requerimientos de validez de MFLE.

2.3.1 Crack Opening Displacement, COD

La MFLE es aplicable cuando la zona de deformación plástica es de dimensiones reducidas y está contenida en una región elástica. Cuando esto no sucede los parámetros antes definidos, como el factor de intensidad de tensiones, no son aplicables y se torna necesario procurar nuevos parámetros para caracterizar la fractura de estructuras. El primer parámetro sugerido para este efecto fue el “Crack Opening Displacement”, COD, usualmente designado por δ , propuesto por Wells en 1961 (citado en Moura et al., 1986). El COD procura caracterizar la capacidad de un material para deformarse plásticamente antes de la fractura, es decir, midiendo cuanto se abre el extremo de la fisura antes de propagar en forma inestable.

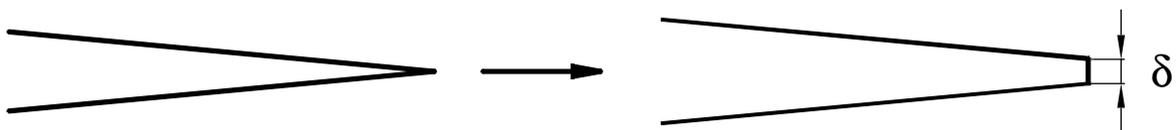


Figura 2-7 Representación esquemática de la deformación plástica en la extremidad de la fisura.

En su trabajo original Wells estableció la equivalencia entre una fisura real de longitud $2a$ y zonas de deformación plástica, supuestas circulares de radio r_y , y una fisura equivalente, puramente elástica, de longitud $2 \cdot (a + r_y)$. En la figura 2-8 se muestra un esquema de como se realizó el cálculo: considerando la fisura elástica equivalente $2 \cdot (a + r_y)$, para determinar el valor del COD sólo tenemos que conocer el valor del desplazamiento en la dirección "y" del punto definido por $r = r_y$ y $\theta = 180^\circ$. El COD esta dado por:

$$\text{COD} = \delta = \frac{2K}{E/(2+2\nu)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \text{sen} \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad 2-16$$

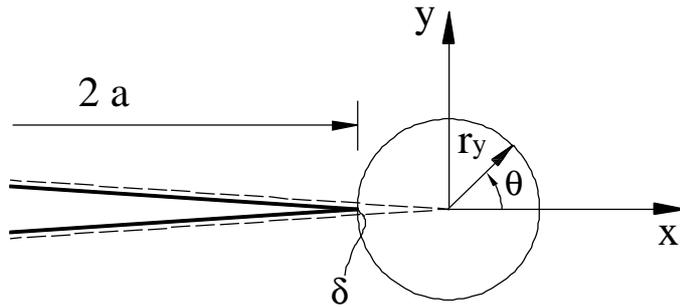


Figura 2-8 Modelo para el cálculo del valor del COD (δ).

Siendo $\sigma/\sigma_{YS} \ll 1$, es decir, una tensión remota aplicada σ mucho menor que el valor de la tensión de fluencia σ_{YS} .

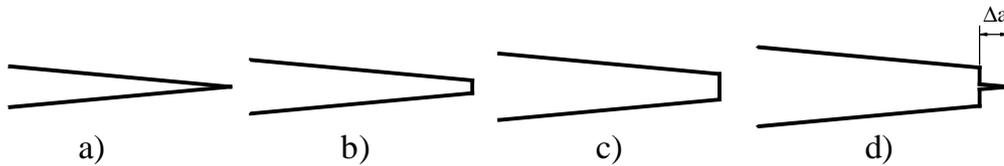


Figura 2-9 Representación esquemática del aumento del COD con la carga hasta que se produce la propagación (d).

El uso del COD en la evaluación de la tenacidad de materiales, se basa en la hipótesis de que existe, para cada material, un valor crítico de δ correspondiente al inicio de la propagación de la fisura preexistente. Esta hipótesis se graficó en la figura 2-9. En a) se presenta la fisura preexistente, en b) y c) valores sucesivamente crecientes del COD (correspondiendo a cargas aplicadas sucesivamente crecientes), hasta que en d) se presenta la propagación de la fisura (Δa). El valor crítico del COD es el valor de δ que inmediatamente antecede al inicio de la propagación de la fisura preexistente.

2.3.2 La Integral J

Aunque el COD esté establecido como el parámetro más utilizado en el estudio de la fractura elasto-plástica en Europa y Japón, no tiene mucha aceptación en los Estados Unidos. Allí ha sido desarrollado otro concepto, el de la integral J, presentado originalmente por J. Rice en 1968 (Anderson, 2005).

La integral J es una integral de contorno definida presuponiendo un comportamiento elástico no lineal. Este parámetro evita las dificultades que provienen de la caracterización del estado en la extremidad de la fisura, pues su valor es independiente del contorno Γ contenido en la extremidad de la misma (ver figura 2-10). Es dado analíticamente por:

$$J = \int_{\Gamma} W_d \cdot dy - \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \quad 2-17$$

Donde W_d es la densidad de energía de deformación en puntos del contorno, \vec{T} es el vector tracción, \vec{u} es el desplazamiento y ds un elemento del contorno Γ .

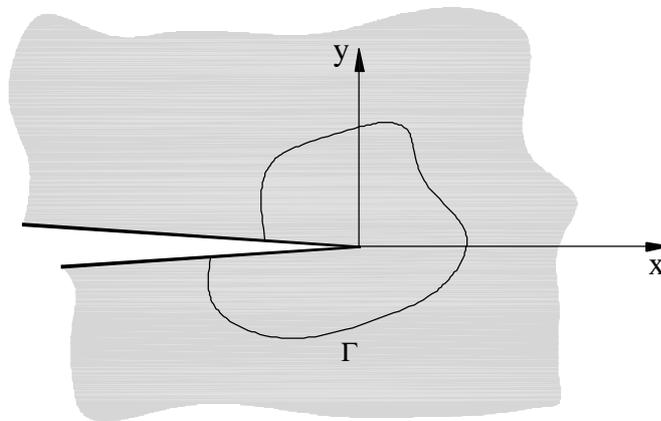


Figura 2-10 Contorno para la determinación de la Integral J.

Esta complicada formulación matemática tiene una interpretación física muy simple, dado que Rice mostró que para un material elástico no lineal la integral tiene el valor:

$$J = -\frac{dU}{da} = G \quad 2-18$$

Es decir, la variación de la energía potencial con el aumento de la longitud de la fisura. J es por tanto una extensión del concepto de G (desarrollado para un comportamiento elástico lineal) al comportamiento elástico no lineal.

Tal como se verifica que el estado correspondiente a la propagación de una fisura está caracterizado por el valor crítico del COD, también se lo puede caracterizar por un valor de J.

2.4 Fractura Dinámica y Dependiente del Tiempo

En ciertos problemas de fractura, el tiempo es una variable importante. Si las tasas de carga son muy elevadas, por ejemplo, los efectos de inercia y la variación de las propiedades del material con la velocidad de deformación pueden ser significativos. En estos casos la mecánica de fractura lineal elástica y elasto-plástica, que asumen condiciones cuasiestáticas y deformaciones independientes del tiempo, son inadecuadas (Anderson, 2005).

En la mayoría de los casos, la mecánica de fractura dinámica tiene tres complicaciones características que no están presentes en MFLE y en la mecánica de fractura elasto-plástica: la importancia de las fuerzas de inercia, la dependencia de las propiedades del material con la velocidad de deformación y la influencia de las ondas de tensiones que reflejadas en las fronteras del componente estudiado producen un estado tensional complejo que es función del tiempo.

La versión dinámica de MFLE es llamada mecánica de fractura elastodinámica, donde el comportamiento no lineal del material es despreciado, pero las fuerzas de inercia y las ondas de tensiones reflejadas son consideradas en el cálculo cuando es necesario.

Los efectos de inercia son importantes cuando la carga cambia abruptamente o la fisura crece rápidamente, una porción del trabajo aplicado en el cuerpo se transforma en energía cinética. En estos casos las ondas de tensión se propagan a través del material y se reflejan en las superficies libres como los contornos del cuerpo y el plano de la fisura. Las ondas de tensiones reflejadas influyen en las tensiones locales de la punta de la fisura y en los campos de deformación, los que afectan al comportamiento de la fisura.

Para poder comprender mejor la influencia de la interacción de las ondas de tensión, a continuación se realizará una reseña de cómo es el comportamiento de las ondas de propagación en un medio elástico, ya que se hará referencia a ellas a lo largo de este trabajo.

2.4.1 Propagación de Ondas en un medio elástico

Si en un punto cualquiera de un medio elástico se produce una perturbación, las ondas que se originan se propagan en todas las direcciones.

Las ondas elásticas causan deformaciones no permanentes en el medio en que se propagan. La deformación se constituye de una alternancia de compresión y de dilatación de tal manera que las partículas del medio se acercan y se alejan respondiendo a las fuerzas asociadas con las

ondas. Las deformaciones obtenidas debido a la perturbación inducida se irán propagando a lo largo de todo el cuerpo hasta disipar gradualmente la energía. A continuación se presentan los principales tipos de ondas de propagación de tensiones en un medio elástico.

Existen ondas de compresión, ondas transversales y ondas superficiales.

- *Ondas "P" u ondas longitudinales u ondas de compresión*

Como se puede observar en la Figura 2-11 a), las partículas de un cuerpo excitados por una onda P, longitudinal o de compresión oscilan en la dirección de propagación de la onda. Las ondas P son parecidas a las ondas sonoras ordinarias. En caso de tener una carga puntual, la propagación se dará en forma radial. Son las ondas más veloces.

La velocidad de las ondas P se presenta en la ecuación 2-19, su deducción se puede encontrar en Timoshenko y Goodier (1968):

$$V_P = \sqrt{\frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu) \cdot \rho}} \quad 2-19$$

Donde: V_P es la velocidad de la onda P [m/s]; E el módulo de elasticidad [N/m²]; ρ la densidad [kg/m³] y ν el módulo de Poisson.

- *Ondas "S" u ondas transversales u ondas de cizalla*

Las partículas de un cuerpo excitados por una onda S, transversal o de cizalla oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación, pudiendo ser horizontales y/o verticales (figura 2-11 b)). La velocidad de propagación de estas ondas viene dada por la siguiente ecuación (Timoshenko y Goodier, 1968):

$$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad 2-20$$

Donde V_S es la velocidad de la onda S [m/s] y μ el módulo de corte [N/m²].

- *Ondas de Superficie - Ondas de Rayleigh*

Dentro de las ondas de superficie, las más significativas son las ondas de Rayleigh. Estas ondas son el resultado de la interferencia de las ondas P y S. Las ondas de Rayleigh causan un

movimiento parecido a las olas del mar y las partículas de un cuerpo excitados por este tipo de ondas se mueven en forma elipsoidal en el plano vertical, que pasa por la dirección de propagación. Estas ondas provocan la vibración en la dirección contraria a la propagación de la onda, en la superficie el movimiento de las partículas es retrógrado con respecto al avance de las ondas. Estas ondas presentan las menores velocidades y las mayores amplitudes, como se observa en la figura 2-11 c).

La velocidad de las ondas de Rayleigh (V_R) es menor que la velocidad de las ondas S (V_S) y se la puede obtener haciendo $V_R = \alpha \cdot V_S$, donde α es una función del módulo de Poisson (Timoshenko y Goodier, 1968).

Para $\nu = 0,25$, se tiene:

$$V_R = 0,9194 \cdot V_S = 0,9194 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad 2-21$$

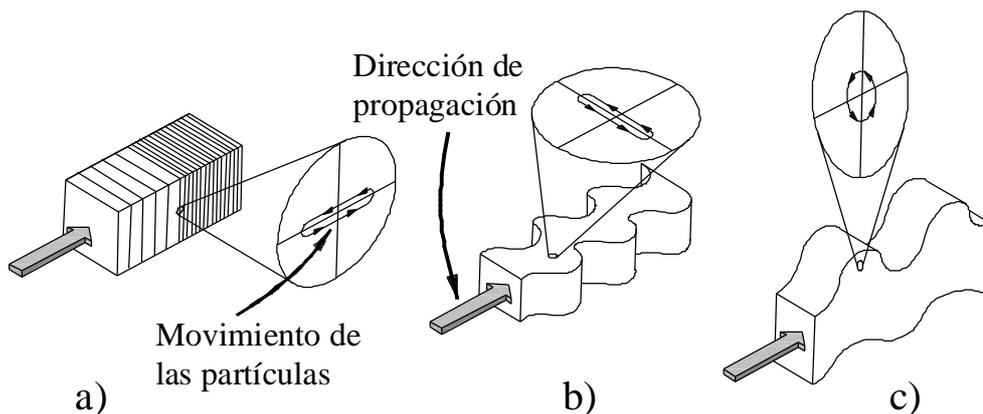


Figura 2–11 Esquema ilustrativo de a) ondas P o longitudinales; b) ondas S o transversales y c) ondas de Rayleigh (Dowding, 1985 citando en Casagrande, 2006).

2.4.2 Excitación transitoria sobre una fisura estacionaria

En una estructura se pueden tener cargas transitorias o dinámicas debidas a un gran número de fuentes, pero la más común es la del resultado del impacto con un objeto secundario (un barco chocando contra una plataforma o un misil alcanzando a su objetivo). Cargas de impacto son usualmente utilizadas en ensayos de laboratorio cuando se desea obtener altas tasas de deformaciones. Se pueden alcanzar cargas dinámicas en especímenes de mecánica de fractura a través de cargas de impacto, explosiones controladas cercanas al modelo o máquinas de

ensayo servo hidráulico que son especialmente diseñadas para generar altas tasas de deformaciones.

La determinación del parámetro de fractura característico, como el factor de intensidad de tensiones o la integral J, para cargas rápidas no es algo convencional. Consideremos el caso en el que la zona plástica está confinada a una pequeña región alrededor de la punta de la fisura. El campo de tensiones cercano a la punta de la fisura para altas tasas de tensiones del modo I están dadas por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad 2-22$$

En la expresión 2-22, $K_I(t)$ denota que el Factor de intensidad de tensiones es una función del tiempo. Las funciones angulares, f_{ij} , son idénticas que para el caso de cargas cuasiestáticas. El $K_I(t)$, varía de manera irregular en las primeras etapas de carga. Las ondas de tensiones reflejadas que pasan a través del espécimen interfieren unas con otras resultando en una distribución de tensiones muy compleja dependiente del tiempo. El K_I instantáneo depende de la magnitud de las ondas de tensión que pasan a través de la zona de la punta de la fisura en un tiempo en particular. Cuando las ondas de tensión son significativas, es imposible inferir K_I a partir de las cargas remotas. (Anderson, 2005).

2.4.3 Propagación rápida de la fisura y su *arrest* (detención)

Si la tasa de energía elástica disponible para que la fisura se abra es mayor que la tasa de trabajo necesario para la abertura la misma, $G > G_c$, el proceso se torna inestable y ocurre la propagación dinámica de la fisura. La figura 2-12 ilustra un caso simple donde la tasa de energía liberada (cuasiestática) aumenta linealmente con la longitud de la fisura y la resistencia del material es constante. Como la primera ley de la termodinámica es válida aún para sistemas inestables, el exceso de energía, denotado por el área rayada en la figura 2-12, no puede simplemente desaparecer, sino que es convertida en energía cinética. La magnitud de la energía cinética impone la velocidad a la que la fisura propaga. Hay limitaciones físicas que hacen que la velocidad de propagación de la fisura no sea mayor que una fracción de la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh en el cuerpo estudiado.

Por lo tanto, en los casos en que la energía cinética es muy elevada, la forma que encuentra el cuerpo de disipar esta energía es generando bifurcaciones (branching), ya que no puede acelerar la propagación más allá de un cierto límite.

En los casos cuasiestáticos, la fisura es estable si la fuerza conductora es menor o igual a la resistencia del material. Similarmente, si la energía disponible para un incremento de extensión de una propagación rápida de la fisura cae debajo de la resistencia del material, la fisura se detiene. Como está en juego la energía cinética y la tenacidad del material que en algunos casos puede depender de la velocidad de deformación, entonces será más difícil frenar un proceso de propagación inestable que tratar de que el mismo arranque de nuevo. O sea $K_{Cdinámico} < K_{Cestático}$.

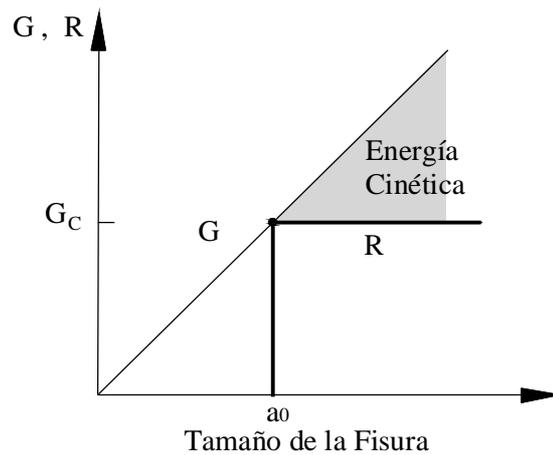


Figura 2–12 Propagación inestable de una fisura, de la cual resulta una generación de energía cinética (Anderson 2005).

El balance de energía de Griffith-Irwin puede ser modificado para incluir la energía cinética, resultando en una definición de tasa de energía liberada dinámica:

$$G(t) = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dE_K}{dA} \quad 2-23$$

Donde W es el trabajo realizado por las fuerzas exteriores y A es el área de la fisura. La ecuación 2-23 es consistente con el criterio original de Griffith, el cual se basa en la primera ley de la termodinámica. La energía cinética (E_K) debe ser incluida en la declaración general de la primera ley, Griffith asume implícitamente que $E_K = 0$. La aplicación de la ecuación 2-23 no es directa por la influencia que tiene el juego de ondas de tensión que actúan en este tipo de problemas. A este respecto se realiza una explicación mayor en el ítem 2.4.6 referido a la integral J dinámica.

2.4.4 Velocidad de la fisura

Mott, en 1948 (citado en Anderson, 2005), aplicó un análisis dimensional para estudiar la propagación de una fisura y determinar la relación entre la energía cinética y la velocidad de la fisura. Como, para fisuras pasantes de longitud $2a$ en una placa infinita tensionada, los desplazamientos deben ser proporcionales al tamaño de la fisura, entonces a es la única dimensión relevante del problema. Asumiendo que la placa es elástica, los desplazamientos deben ser también proporcionales a la deformación nominal aplicada. Inicialmente se llegó a:

$$V = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cdot c_0 \cdot \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad 2-24$$

Donde $c_0 = \sqrt{E/\rho}$, es la velocidad del sonido para una onda de propagación unidimensional, k es una constante y a_0 es la longitud inicial de la fisura.

En trabajos posteriores, Mott (citado en Anderson, 2005) obtuvo una relación un poco diferente a la ecuación 2-24, porque tuvo en cuenta la suposición errada de que $dV/da = 0$.

Después de hacer algunas suposiciones, Roberts y Wells (1954, *The Velocity of Brittle Fracture*, citado por Anderson, 2005), estimaron el valor de la constante k que aparece en la fórmula de Mott, evaluando la energía cinética durante el avance de una fisura cuasiestática. Recurriendo a la solución de Westergaard para los desplazamientos en problemas estáticos, y para un módulo de Poisson $\nu = 0,25$ mostraron que $\sqrt{2\pi/k} \approx 0.38$.

De acuerdo a la ecuación 2-24 y al análisis de Roberts y Wells, la velocidad de la fisura alcanza el valor de $0.38 c_0$ cuando $a \gg a_0$. Esta apreciación se compara favorablemente con mediciones de la velocidad de propagación realizada en metales, las cuales se encuentran comúnmente en un rango de 0.2 a $0.4 c_0$.

Kenninen y Popelar 1985 señalaron que los valores experimentales para la velocidad de fisura en metales y en vidrios, concordaban con los valores predichos anteriormente.

Freund (1972 a 1973, citado en Anderson, 2005) realizó un análisis numérico más detallado de la propagación dinámica de la fisura en un cuerpo infinito y obtuvo la siguiente relación:

$$V = V_R \cdot \left(1 - \frac{a}{a_0}\right) \quad 2-25$$

Donde V_R es la velocidad de onda de Rayleigh.

Para un coeficiente de Poisson de 0.3, la razón $V_R/c_0 = 0.57$. Entonces el análisis de Freund predice un límite mayor de la velocidad de propagación que el análisis de Roberts y Wells.

En las dos ecuaciones la velocidad límite es independiente de la energía de fractura, entonces la máxima velocidad de propagación debería ser V_R (velocidad de Rayleigh).

En los trabajos realizados por Riera y Rocha (1991) se propone una ecuación modificada para el cálculo de la velocidad límite de propagación de la fisura, que incluye la tenacidad a la fractura como un factor de gobierno.

$$V = \left[\frac{0,58 + 0,38 \cdot \eta}{1 + \eta} \right] \cdot V_p \cdot \left(1 - \frac{a_0}{a} \right) \quad 2-26$$

Con

$$\eta = \left(\frac{10^5 \cdot G}{a_0 \cdot E} \right) \quad 2-27$$

De los resultados presentados se sugiere que la velocidad de propagación de la fisura está influenciada por la rigidez a la fractura, obteniéndose valores de velocidad de propagación de la fisura, para varios valores de G , dentro del rango definido por las ecuaciones 2-24, adoptando el coeficiente k estimado por Robert y Wells, y 2-25.

Riera y Rocha 1991 también han demostrado que para materiales más frágiles, para valores de G pequeños menores a 10 N/m, el pico de velocidades es más cercano a la velocidad de la onda de Rayleigh (V_R), mientras que para incrementos de la rigidez a la fractura, el pico de velocidades decrece a valores algo superiores a $0,38 \cdot V_p$.

Por todo lo expuesto se puede llegar a la conclusión que la velocidad de propagación de la fisura será siempre una fracción de la velocidad de la onda longitudinal (V_p). Para un material frágil la velocidad límite de la fisura es igual a la velocidad de la onda de superficie V_R .

2.4.5 Parámetros Elastodinámicos de la punta de la fisura

La ecuación que gobierna la propagación de la fisura en Modo I sometida a condiciones elastodinámicas puede ser escrita como:

$$K_I(t) = K_{ID}(V) \quad 2-28$$

Donde K_I es la intensidad de tensiones instantánea y K_{ID} es la resistencia del material a la propagación de la fisura, la cual depende de la velocidad de propagación. En general, $K_I(t)$ no es igual al factor de intensidad de tensiones estático. Numerosos investigadores obtuvieron relaciones para el factor de intensidad de tensiones dinámico de la forma:

$$K_I(t) = \kappa(V) \cdot K_I(0) \quad 2-29$$

Donde κ es una función universal de la velocidad de propagación y $K_I(0)$ es el factor de intensidad de tensiones estático. La función $\kappa(V) = 1.0$ cuando $V = 0$, y disminuye hasta cero mientras V se acerca a la velocidad de onda de Rayleigh.

Esta relación no tiene en cuenta las ondas de tensión reflejadas, las cuales pueden tener un efecto significativo en los campos de tensiones en la proximidad de la punta de la fisura.

En un espécimen de dimensiones finitas donde las ondas de tensión reflejadas vuelven a la punta de la fisura propagada, el factor de intensidad de tensiones dinámico debe ser determinado experimentalmente o numéricamente para cada caso diferente.

Para un cuerpo de dimensiones infinitas o tiempos cortos, Freund demostró que la tasa de energía liberada dinámica puede ser expresada de la siguiente forma:

$$G(t) = g(V) \cdot G(0) \quad 2-30$$

Donde $g(V)$ es una función universal de la velocidad de propagación de la fisura que se puede aproximar con:

$$g(V) \approx 1 - \frac{V}{c_r} \quad 2-31$$

Combinando las ecuaciones 2-29 a 2-30 y la teniendo en cuenta la relación entre G y K (ecuación 2-14) se llega a:

$$G(t) = A(V) \cdot \frac{K_I^2(t)}{E'} \quad 2-32$$

Donde $A(V)$ es una función de las velocidades de propagación y de las ondas elásticas. Entonces la relación entre K_I y G depende de la velocidad de la fisura.

Cuando la zona plástica por delante de la fisura propagada es pequeña, $K_I(t)$ define la tensión y deformación en la punta de la fisura, así como el campo de desplazamientos, pero la dependencia angular de estas cantidades es diferente que para el caso estático. Por ejemplo, la tensión en la singularidad elástica está dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\theta, V) \quad 2-33$$

La función f_{ij} se reduce al caso cuasiestático cuando $V = 0$. Las funciones de desplazamiento también presentan una dependencia de la orientación que varían a su vez con la velocidad V .

2.4.6 Integral J generalizada

La formulación original de la integral de contorno J es equivalente a la tasa no lineal de liberación de energía para deformaciones cuasiestáticas, como se vio en el ítem 2.3.2. Si se tiene en cuenta la definición más general de la tasa de energía liberada, es posible incorporar los efectos dinámicos y la dependencia del tiempo en el comportamiento del material en la integral J.

Consideremos un contorno pequeño, Γ , alrededor de la punta de la fisura en un sólido de dos dimensiones (figura 2-13). La tasa de energía liberada es igual al flujo de energía dentro de la punta de la fisura dividido por la velocidad de la fisura (Anderson, 2005):

$$J = \frac{\mathcal{F}}{V} \quad 2-34$$

Donde \mathcal{F} es el flujo de energía dentro del área encerrada por Γ . La tasa de energía liberada generalizada, incluyendo los efectos de inercia, está dada por (capítulo 4 y anexos en Anderson, 2005 o en Nishioka, 1998):

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[(W_d + E_K) \cdot dy - \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right] d\Gamma \quad 2-35$$

Donde W_d y E_K son la densidad del trabajo de las tensiones y la densidad de energía cinética definidas como:

$$W_d = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij} \quad 2-36$$

y

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \quad 2-37$$

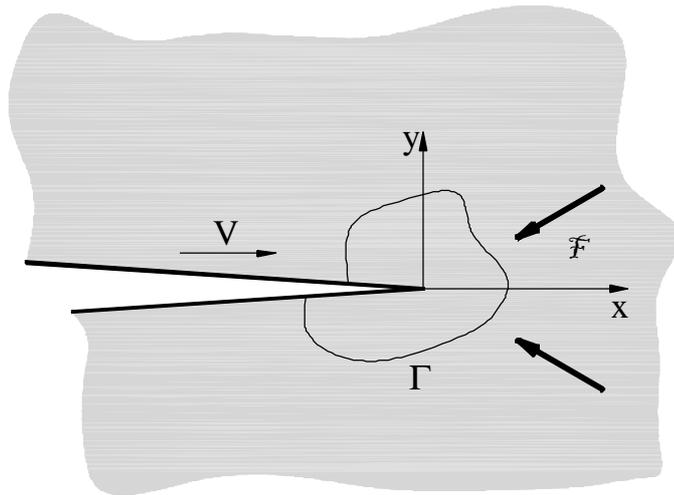


Figura 2–13 Flujo de energía en un contorno pequeño de la punta de la fisura en propagación.

Esta ecuación es aplicable a todo tipo de respuesta del material (comportamiento elástico, plástico, viscoplástico o viscoelástico), porque se deriva del balance de energía generalizado.

En general esta ecuación no es independiente del camino, excepto en una región local cercana a la punta de la fisura. La independencia del contorno es perdida en problemas dinámicos, porque la transmisión de energía para diferentes caminos de integración depende del tiempo en que las ondas de tensión llegan a cada contorno.

Para un material elástico, sin embargo, J es independiente del camino en el caso dinámico cuando la propagación de la fisura es de forma estable ($\partial u/\partial t = 0$).

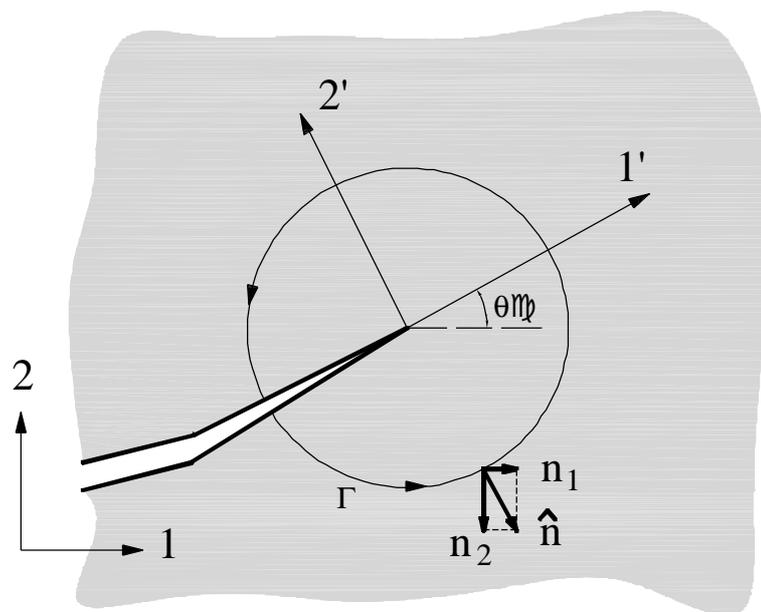


Figura 2–14 Nomenclatura y ejes coordenados utilizados en el cálculo de la integral J . 1 y 2 son los ejes x e y globales. Los ejes 1' y 2' están alineados con la dirección de la fisura. El contorno Γ comienza en el borde de la fisura y continúa en sentido antihorario hasta el otro borde de la fisura. (Guo y Nairn, 2004)

La ecuación 2-35 de la integral J fue publicada en una variedad de formas distintas por una gran cantidad de investigadores. Dentro de ellos, para problemas en estado plano, Nishioka (citado por Guo y Nairn, 2004; 2006) definió dos componentes de la integral J (J_m , con $m = 1, 2$) en la punta de la fisura:

$$J_m = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[(W_d + E_K) \cdot n_m - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] d\Gamma \quad 2-38$$

Una vez calculadas las componentes de la integral J, la tasa de energía liberada total para una fisura en crecimiento en materiales elásticos (lineales o no lineales) está dada por (Nishioka citado por Guo y Nairn, 2004):

$$G = J_1 \cdot \cos \theta c + J_2 \cdot \sen \theta c \quad 2-39$$

Donde θc es el ángulo de propagación de la fisura medido respecto de eje x global (figura 2-14) J_1 y J_2 son componentes de la integral J calculada con la ecuación 2-35.

Capítulo 3 – REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA – FORMA DE OBTENER LOS PARÁMETROS FRACTOMECÁNICOS

En este capítulo se presenta una revisión sobre los métodos numéricos clásicos para determinar los parámetros fractomecánicos que caracterizan comportamiento frente a la fractura de materiales. En Aliabadi y Rooke (1991) se presenta una revisión más completa sobre los mismos.

3.1 Factor de Intensidad de Tensiones

Como se mencionó en el capítulo anterior, se pueden calcular los parámetros fractomecánicos considerando la MFLE o la MFEP. Cualquiera sea la base teórica adoptada se pueden tener problemas estáticos o dinámicos. En los primeros las cargas son aplicadas muy lentamente de manera de no generar fuerzas de inercia. En los segundos la aplicación rápida de las cargas genera ondas de tensión que se reflejan en los contornos libres del cuerpo y en la fisura dando lugar a una complicada interacción entre las distintas ondas. En este caso no se pueden despreciar las fuerzas de inercia.

En la bibliografía existente se pueden encontrar varias técnicas para calcular el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), tanto para casos estáticos como para dinámicos, entre las cuales las más utilizadas se definen a continuación.

3.1.1 Cálculo de K a partir del balance energético – Tasa de energía liberada, G

Para que el factor de intensidad de tensiones se vuelva útil, debe ser posible calcular K a partir de las tensiones remotas y de la geometría. Para algunas geometrías simples existen fórmulas cerradas para el cálculo de K. Para situaciones más complejas el factor de intensidad de tensiones puede ser calculado experimentalmente o mediante análisis numérico.

Como se mostró en el ítem 2.2.5., para una placa infinita con fisura pasante sujeta a una tracción uniforme (Figura 2-1), se llega a la ecuación 2-14:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad 3-1$$

Como se conoce la relación entre K y G , se puede resolver el problema utilizando el balance energético de todo el cuerpo.

Por su definición (ecuación 2-7), G es el cambio de energía potencial suministrada por la energía de deformación interna y las fuerzas exteriores, con respecto al incremento diferencial del área de la fisura. El cálculo directo de G involucra dos simulaciones: la primera con la longitud original de la fisura, y la segunda igual a la primera a excepción de una pequeña diferencia en el tamaño de la fisura (Δa).

Sin embargo, en problemas de tres dimensiones, este procedimiento no es directamente aplicable debido a que el factor de intensidad de tensiones varía usualmente a lo largo del frente de la fisura. Esto significa que se necesita una simulación con extensión localizada por cada punto diferente sobre el frente de la fisura (Aliabadi y Rooke, 1991). Esta técnica requiere un posprocesamiento mínimo. Otra ventaja es que la energía total estimada no estará en función de la malla o discretización que se adopte.

Una primera desventaja de este método es que se necesitan conocer las soluciones de las dos configuraciones mientras que en otros métodos con un solo análisis se pueden calcular los parámetros fractomecánicos. Además si el avance de la fisura (Δa) no es muy pequeño este método puede tener errores significativos (Anderson, 2005).

Tabiei y Wu (2003) presentan como una alternativa el balance energético y la tasa de energía liberada para calcular K para algunos problemas con cargas estáticas, aunque no detallan los resultados parciales (distintas energías para las dos corridas o variación de energías).

Si se tiene una estructura cargada dinámicamente, es decir, cuando no son despreciables las fuerzas de inercias, para el cálculo del G se debe utilizar la ecuación 2-23 que difiere de la 2-7 en el término que involucra a la energía cinética. Como se mencionó en el capítulo 2, no será posible calcular el factor de intensidad de tensiones K a partir del parámetro G . En el caso dinámico podríamos usar 2-23 solamente si nos colocamos en un contorno muy próximo de la punta de la fisura para que las ondas de tensión no tengan influencia.

3.1.2 Cálculo de K a partir de las tensiones en la extremidad de la fisura

Como se explica en el capítulo 2, el campo de tensiones delante de la punta de la fisura en un material elástico lineal isotrópico puede ser escrito como una función del FIT, ver ecuaciones 2-11 Por lo tanto si se conoce el campo de tensiones delante de la punta de la fisura, podemos

determinar K. Esto es lo que hacen Domínguez y Gallego (1992), quienes calculan las tensiones en la cercanía de la punta de la fisura con el método de elementos de contorno en el dominio del tiempo, porque determinaron que los campos de tensiones son menos sensibles al tamaño de la discretización que los campos de desplazamientos. Utilizan este procedimiento para el cálculo de K dinámico, pero nada impide que se pueda calcular de esta forma también K estático.

3.1.3 Cálculo de K a partir del COD

De la ecuación 2-16, tomando $\theta = 180^\circ$ se puede llegar a:

$$\text{COD} = \delta = \frac{2K}{E/(2+2\nu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left(\frac{2}{1+\nu} \right) \quad 3-2$$

De donde se puede despejar K:

$$K = \delta \frac{E}{4+4\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left(\frac{1+\nu}{2} \right) = \delta \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad 3-3$$

En la que "r" es la distancia desde la punta de la fisura hasta el punto donde se miden los desplazamientos como se indica en la Figura 3-1.

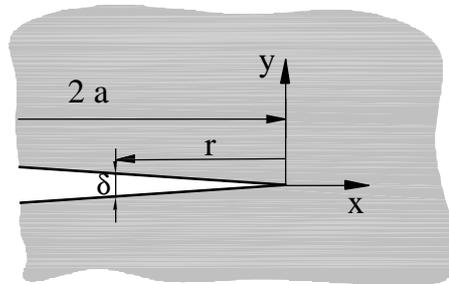


Figura 3-1 Esquema de referencia para valores de r, δ .

En función de cómo se toman los desplazamientos δ entre dos puntos originariamente en la misma posición pero en labios opuestos de la fisura, se puede obtener:

$$K_I = \nu_y \frac{E}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad 3-4-a$$

$$K_{II} = \nu_x \frac{E}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad 3-4-b$$

$$K_{III} = v_z \frac{E}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}}$$

3-4-c

Donde v_y son desplazamientos correspondientes con el Modo I, perpendiculares al plano de la fisura; v_x son desplazamientos correspondientes con el Modo II y v_z son desplazamientos correspondientes con el Modo III.

El cálculo del factor de intensidad de tensiones utilizando este procedimiento se encuentra detallado en el capítulo 5 de Aliabadi y Rooke (1991), quienes distintas técnicas utilizables en elementos de contorno pero que se pueden adaptar a otros métodos.

Como el COD es un parámetro local, tanto como K, si se tiene un problema dinámico las ondas de tensión se tienen en cuenta implícitamente. Por esto las fórmulas para problemas estáticos o dinámicos son las mismas.

Se encuentran una gran cantidad de trabajos que miden el K estático o dinámico utilizando el COD como parámetro, entre otros podemos mencionar a Fedelinski et al. (1993) que trabajan con el método de los elementos de contorno duales, Wen et al. (1998), también con elementos de contorno duales, Tabiei y Wu (2003) que trabajan con el DYNA3D con un código de fractura automatizada y Kostaski et al. (2006) en donde se aplicó el MED.

Además, medir el FIT a través del COD está comentado en trabajos de Nishioka y varios libros como el Aliabadi y Rooke (1991) y el Anderson (2005).

3.1.4 Cálculo de K a partir de la integral J

Como queda claro en la ecuación 2-18, la integral de contorno J es igual a G, la tasa de energía liberada. Por lo tanto las relaciones entre G y K también son aplicables a J.

Para casos en los que la carga es estática la integral J viene dada por la ecuación 2-17. En esta ecuación se puede observar que esta integral es independiente del camino de integración, es decir que se puede obtener el mismo valor de la integral J cualquiera sea el camino adoptado (contorno abierto que contenga la punta de la fisura).

Si se tiene un caso dinámico, se agrega un término que tiene en cuenta la energía cinética (ecuación 2-35) y ahora la integral es dependiente del camino de integración. Por esto se obtiene el valor de la integral J en el límite del contorno tendiendo a cero. No importa la forma del contorno, mientras este tienda a cero.

Existen otras versiones de la integral J en donde en vez una integral de contorno con el contorno tendiendo a cero, se tiene una integral independiente del camino de integración para fisura propagando dinámicamente. Esta ecuación (Nishioka, 1998) se transcribe a continuación:

$$\begin{aligned}
 J_m &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[(Wd + EK) \cdot n_m - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] d\Gamma \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_C} \left[(Wd + EK) \cdot n_m - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] d\Gamma + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{V_\Gamma - V_\varepsilon} \left[\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_m} - \rho \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_m} \right] \right\} \quad 3-5
 \end{aligned}$$

Donde los contornos y volúmenes se muestran en la figura 3-2.

En la expresión 3-5 Γ representa un contorno fijo que comprende la punta de la fisura y V_Γ es el volumen encerrado por este contorno y la fisura. El contorno Γ_ε , en cambio, es un contorno que varía en función de ε y V_{Γ_ε} el volumen que queda encerrado entre dicho contorno y la fisura. Cuando ε tiende a cero tanto el contorno como el volumen tienden a cero.

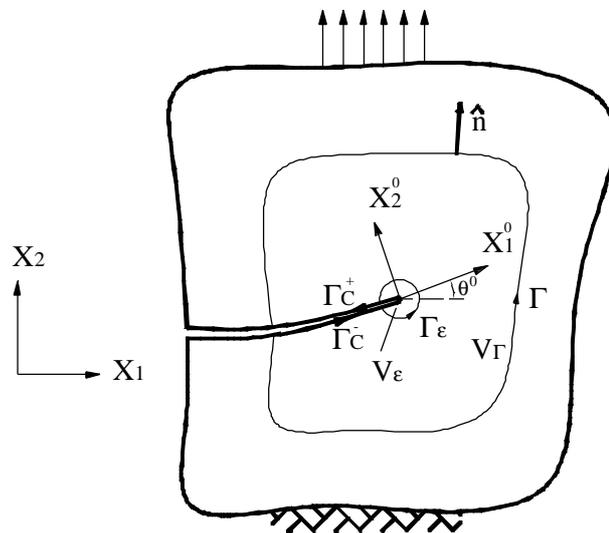


Figura 3-2 Sistema coordinado y caminos de integración. (Nishioka, 1998)

También hay otras variaciones de la integral J, como la integral M utilizada por Song y Paulino (2006), pero todas son obtenidas con un principio similar realizando un balance energético. Por este motivo, cualquiera de estas integrales será equivalente a la tasa de energía liberada.

Se encontraron cálculos de factores de intensidad de tensiones dinámicos para especímenes de dimensiones finitas calculados a partir de la integral J , o una variación de ella, en los trabajos de Guo y Nairn (2004) y (2006) donde utilizaron el método del punto material, Krysl y Belytschko (1999) con el método de Galerkin y Song y Paulino (2006) que utilizaron el FEM.

3.2 Propagación Inestable de fisuras

Cuando la fisura propaga es de interés conocer, primero hacia donde propaga, es decir poder identificar el camino de propagación y luego la velocidad con que lo hace. Existen otras cuestiones como por ejemplo la bifurcación, pero estos temas exceden al tratamiento del problema planteado en este trabajo.

Un análisis teórico de la velocidad máxima de propagación se presentó en el capítulo anterior. A continuación se realiza una revisión bibliográfica de las formas de modelar la propagación de fisuras en sólidos utilizando diversos métodos numéricos.

3.2.1 Diferentes formas de simular la dirección y velocidad de propagación

Los criterios mencionados a continuación, en su gran mayoría, corresponden a implementaciones realizadas en el método de los elementos finitos. La velocidad y la dirección de la propagación son determinadas directamente por cada criterio en la simulación.

- *Pérdida de Hiperbolicidad*

Belytschko et al. (2003) desarrollaron una metodología para cambiar de un continuo a una discontinuidad discreta donde la ecuación diferencial en derivadas parciales gobernante pierde la hiperbolicidad. Esta formulación se limita a los materiales en los que sus propiedades no cambian con la velocidad de aplicación de la carga. La discontinuidad discreta es tratada por el método de elementos finitos extendido (XFEM) por el que se pueden incorporar discontinuidades arbitrarias en el modelo sin necesidad de un remallado. La pérdida de hiperbolicidad es rastreada por un indicador de hiperbolicidad que permite determinar la velocidad y la dirección de la fisura para un modelo material dado. Belytschko et al. (2003) también presentan un desarrollo para el caso en que la discontinuidad termina dentro de un elemento; este facilita modelar las puntas de las fisuras que llegan o quedan dentro de un

elemento cuando esta propaga dinámicamente. El método es aplicado a varios problemas de crecimiento dinámicos de fisuras, incluso en la bifurcación de las mismas.

Belytschko et al. (2003) utilizando este criterio para simular la propagación de fisuras en acero, obtuvieron una velocidad inicial del 75 % de la velocidad de Rayleigh para ese material, pero observaron que la velocidad decrece rápidamente hasta llegar al 36 % de la misma. Obtienen también direcciones de propagación coincidentes con ensayos experimentales y predicciones teóricas.

- *Método de las superficies cohesivas*

Este método ha demostrado ser muy robusto y fácil de poner en ejecución, incluso en códigos comerciales del FEM, y se han obtenido algunos muy buenos resultados (Belytschko et al., 2003).

En este método los elementos que comparten un borde, obligados inicialmente a tener desplazamientos idénticos, pueden separarse (según leyes cohesivas o fuerzas-desplazamientos) liberando las coacciones y las fuerzas nodales que llevan a cabo los elementos juntos. Por lo tanto se genera una nueva superficie libre de la fisura en la interfaz de la grieta. En esta técnica se admite que la grieta propaga a lo largo de los bordes existentes de la malla de los elementos. En cada paso, un nodo de esquina o de borde del elemento se separa en dos nodos y la grieta se extiende a lo largo de la longitud respectiva del elemento. Esto quiere decir que los bordes de los elementos se separan uno a uno, entonces el crecimiento de la fisura no es continuo.

Este método produce claramente un perfil explícito de la abertura de la fisura y tiene como gran ventaja el esfuerzo mínimo para la modificación de la malla. Ha demostrado ser muy eficiente si la trayectoria de la fisura se sabe a priori (Rankin citado por Tabiei y Wu, 2003). Pero este método es muy dependiente de la malla. En problemas en los cuales la trayectoria de la grieta es incierta se necesita una malla muy fina, esto lleva a un esfuerzo numérico considerable.

Otro modelo para la simulación de problemas dinámicos con fisuras es el presentado por Oliver et al. (2002) y Huespe et al. (2006). Está basado en la introducción de una fuerte discontinuidad dentro del elemento finito, apareciendo fuerzas cohesivas producidas en las fuertes discontinuidades de las interfaces. Por esto el modelo puede ser entendido como perteneciente a una amplia clase de los modelos cohesivos.

Dentro de estos métodos se puede encontrar que en la simulación realizada por Huespe et al. (2006), logran una velocidad de propagación del orden de 75 % de V_R en el polimetilmetacrilato (PMMA), que coincide con resultados obtenidos por Falk et al. (2001) también utilizando el mismo método. En estas simulaciones, para el problema estudiado en dichas publicaciones, también captan bifurcaciones en el material.

Murphy e Ivankovic (2005) y Murphy et al. (2006), realizaron ensayos experimentales y simulaciones con el método de zonas cohesivas en PMMA, y obtuvieron picos del 90 % de V_R y hasta valores medios del 37 %, dependiendo del espesor de la placa considerado y la longitud inicial de la fisura preexistente (profundidad de la indentación). Zhou et al. (2004) analizan la forma de la fisura en función de la velocidad de propagación en PMMA y se encuentran velocidades similares a los trabajos antes mencionados.

- *Métodos de introducción de discontinuidades*

Otros tipos de métodos son los de introducción de discontinuidades, en donde la fisura es representada por una banda de alta deformación en el elemento. Muchos investigadores como Belytschko, Simo, Dvorkin (citados por Belytschko, 2003) utilizaron el método de introducción de discontinuidades. En este método, el comportamiento inestable del material es confinado a una banda angosta, la cual se puede alinear arbitrariamente con el elemento. Sin embargo las bandas son agregadas prudentemente a los elementos, entonces la discontinuidad debe propagar en incrementos no menores que el tamaño de los elementos.

- *Criterio de la grieta sucia (smeared crack)*

Este concepto ha sido ampliamente utilizado en las simulaciones con elementos finitos para los estudios del análisis de falla (Scordelis, Argyri, Lee, Chang, Hwang, y Vaziri citados por Tabiei y Wu, 2003). El método asocia la fractura con la pérdida de tensión del elemento. La tensión en cada elemento es supervisada y el elemento con falla se sigue considerando como continuo pero pierde su capacidad de soportar la carga en ciertas direcciones. Una grieta por lo tanto no se representa explícitamente, pero modelado como una “fisura sucia” se modifican las relaciones constitutivas del material de una manera conveniente. La metodología es relativamente simple de ejecutar, y elimina el proceso de remallado en cada paso de la simulación. Sin embargo, puesto que las tensiones o las deformaciones se comprueban en el centro de los elementos, estas tensiones o deformaciones son más pequeñas que las existentes

en la extremidad de la fisura, entonces se sobrestima la tensión aplicada que causa la fractura. Los resultados de las simulaciones de la propagación de una fisura son también altamente sensibles al tamaño de la malla utilizada. Para los materiales que fallan en una manera difusa, tal como concreto, este método se ha utilizado con éxito. Sin embargo, puesto que la extremidad de la fisura en metales sigue siendo relativamente definida, la geometría de la extremidad de la misma no se puede simular con precisión por el criterio de la fisura sucia (Tabiei y Wu, 2003).

Con una variante de este criterio, y monitoreando la máxima tensión de tracción para simular la propagación de fisuras en acero, Belytschko et al. (2003) obtuvieron una velocidad más o menos constante del 64% de V_R . Para un problema estudiado de modo mixto de falla, lograron una buena concordancia entre el camino de la fisura obtenido y el de resultados teóricos y experimentales.

- *Método de remallado suprimir y rellenar. (delete-and-fill remeshing method)*

Este concepto primero fue introducido por Saouma e Ingraffea (Wawrzynek citado por Tabiei y Wu, 2003) a principios de los años 80. Primero, un grupo de elementos en una región por delante de la punta de la fisura se suprime. Después de que la grieta sea extendida, el dominio local se rellena con los nuevos elementos para la nueva extremidad de la fisura. Esta técnica permite simular la propagación de una fisura curvilínea arbitraria por un proceso de remallado automático. Un gran número de metodologías fueron descritas actualmente en la literatura para llenar un dominio 2D arbitrario (Henshell, Barsoum y Lee citados por Tabiei y Wu, 2003). Sin embargo existen pocos algoritmos para la generación de mallas arbitrarias en 3D.

- *Simulación dinámica molecular*

La técnica de dinámica molecular está basada en el movimiento de un número dado de átomos gobernados por sus interacciones mutuas descritas por potenciales interatómicos continuos. En estas simulaciones son usados millones de átomos para generar un sistemas de dimensiones suficientemente grandes para independizar el movimiento de la fisura de las ondas de tensión reflejas desde los bordes y para seguir la propagación de la fisura durante los intervalos de tiempo y distancias necesarios.

Utilizando simulaciones dinámicas moleculares de la propagación de la fisura Gao (1996) determinó que la velocidad crítica en el comienzo de la ramificación local de la fisura resultó ser de $V = 0.30 \cdot V_s$ y la velocidad límite local resultó ser de $V_l = 0.37 \cdot V_s$, la cual es un 20 % mayor que el valor observado experimentalmente.

Abraham et al. (1997) llevaron a cabo simulaciones de fractura dinámica en un enrejado triangular bi-dimensional de átomos, usando también la dinámica molecular. Determinaron que la punta de fisura avanza con una velocidad límite igual a $0.57 V_R$, pero que dicha velocidad se torna muy irregular después de alcanzada la velocidad de $0.32 V_R$. Para velocidades menores a $0.32 V_R$ la aceleración de la punta de la fisura resulta suave, pero con el comienzo de las fluctuaciones irregulares de la velocidad, se observa una desaceleración importante de la punta de la fisura. Los resultados de la simulación numérica concordaron con los obtenidos en trabajos de investigación experimental realizados por Fineberg et al. (1992).

Abraham et al. (1997) observaron que inicialmente la fisura frágil se propaga en línea recta y deja las superficies de fractura lisas. Inmediatamente aparecen con el movimiento de la fisura, las ondas de tensión periódicas en correspondencia con el comienzo de las oscilaciones irregulares de la velocidad de punta de fisura, a la velocidad de $0.32 V_R$, y la superficie de fractura se torna rugosa. Las oscilaciones de la punta de la fisura van de un lado para el otro, en zig-zag, formando ángulos de $\pm 30^\circ$ con respecto a la dirección original de movimiento de la fisura.

Las investigaciones sugirieron que esta inestabilidad es intrínseca a la fractura frágil dinámica, independientemente de la geometría de la probeta, las cargas externas, de las propiedades elásticas del material y de la orientación de la fisura inicial en el enrejado.

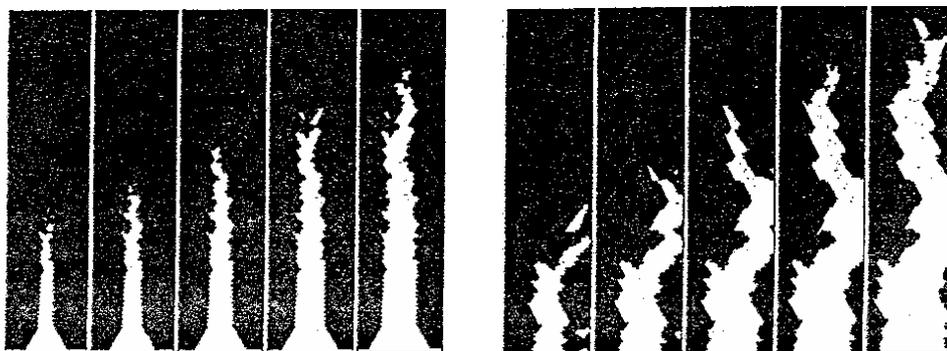


Figura 3-3 Secuencia de propagación de la punta de la fisura en forma de zig-zag y detalle de la punta de la fisura. (Abraham et al., 1997)

En las simulaciones dinámicas moleculares, Abraham et al. (1997) observaron que la punta de la fisura sigue una trayectoria ahocada con la superficie de mayor energía superficial, en desacuerdo con el conocimiento clásico el cual supone como la dirección de separación o fractura la superficie con menor energía superficial.

En el capítulo 5 se presentarán las técnicas utilizadas para el cálculo de los parámetros fractomecánicos con el método de los elementos discretos, así como también la forma de evaluar las velocidades y dirección que sigue una fisura cuando propaga.

Capítulo 4 – MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS (MED)

En el Método de los Elementos Discretos se considera al medio modelado como un sistema de partículas discretas, generalmente de forma esférica y masa conocida. En el método cada partícula es identificada separadamente y sus posiciones instantáneas son determinadas a partir de las ecuaciones de movimiento.

Cundall aparece como uno de los principales precursores del método (Cundall, 1971 y Cundall et al., 1979). El método que propuso se basa en realizar una integración explícita de las ecuaciones de movimiento de una estructura formada por partículas rígidas con masas conectadas entre si, mediante resortes y amortiguadores.

El MED fue aplicado con gran éxito en el modelado numérico de procesos que envuelven un comportamiento discontinuo predominante, relacionado con sólidos no cohesivos. También ha sido aplicado con suceso en el estudio de materiales susceptibles de fracturar, donde la hipótesis de medio continuo, base de los métodos numéricos tradicionales (elementos finitos y de contorno) es violada.

Como ejemplos se pueden citar el transporte de sedimentos en un fluido (Goth y Sakai, 1997 e Lin et al., 2000), modelado de filtros con capas granulares (Chou et al., 2000). También se utilizó en el modelado de procesos de degradación y fractura en sólidos cohesivos, entre los cuales pueden ser citados: simulación de explosión en rocas (Ladislav y Dutko, 2003, Procházka, 2004), fractura de materiales compuestos como el hormigón, por ejemplo (Sawamoto et al., 1998; Camborde et al., 2000; Brara et al., 2001; Wittel et al., 2003).

Particularmente, a través de la formulación del MED utilizada en este trabajo, fueron modelados procesos de fractura dinámica en rocas, producto de terremotos (Dalguer et al., 2003), impacto en concreto armado (Riera, 1980; 1984), procesos de fractura en hormigón y hormigón armado (Riera e Iturrioz, 1998), simulación del comportamiento de suelos frente a cargas explosivas (Iturrioz y Riera, 2001), simulación de propagación dinámica de fisuras (Spellmeyer et al., 2001), problemas de impacto en materiales compuestos poliméricos y fenómenos de fractura por impacto en polímeros (Barrios D'Ambra et al., 2002 y 2003). También existen trabajos previos en los cuales se presenta la determinación de parámetros fractomecánicos con el MED publicados por Tech et al. (2003). Parte de los trabajos de Kostas et al. (2004) y (2006), y Barrios D'Ambra et al. (2006), pertenecen al trabajo realizado para esta disertación.

En otro abordaje, algunos trabajos combinan el método de los elementos discretos con el método de los elementos finitos (Gethin et al., 2001; Munjiza et al., 2004, entre otros).

4.1 Características de la formulación del Método utilizada en este trabajo

La formulación original fue propuesta por Nayfeh y Hefzy (1978) que reemplazaron una estructura reticulada espacial por un continuo equivalente, para disminuir la cantidad de grados de libertad y disminuir así el esfuerzo computacional.

El modelo de discretización empleado en este trabajo fue desarrollado por Hayashi (1982) y verificado también por Rocha (1989) e Iturrioz (1995).

El Método de los Elementos Discretos consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo por medio de un reticulado espacial formado por la repetición de un módulo regular. Las rigideces de las barras que componen el reticulado son equivalentes a la del continuo que se quiere representar. Como se consideran barras de reticulado espacial, por cada nudo se tienen tres grados de libertad. La masa del modelo es discretizada y concentrada en los nodos del reticulado espacial ya mencionado.

La figura 4-1 muestra el arreglo cúbico básico o módulo. Este módulo está compuesto de ocho nodos en sus vértices más un nodo central.

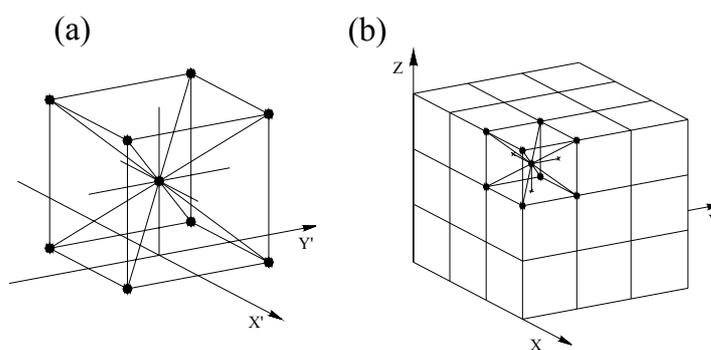


Figura 4-1 a) Detalle del módulo cúbico básico, b) Prisma compuesto por varios módulos cúbicos.

4.1.1 Rigidez de las barras equivalentes al continuo

La equivalencia entre el arreglo cúbico y un sólido elástico ortótropo con los ejes principales del material orientados en la dirección de los elementos longitudinales fue verificada por Hayashi (1982), dentro del campo de la elasticidad lineal. Sólo debe ser impuesta la

restricción $\nu = 0.25$ al valor del módulo de Poisson para que la equivalencia sea perfecta, es decir que el material se comporte como isótropo. Para otros valores de ν aparecen pequeñas diferencias en los términos de corte, estas diferencias pueden despreciarse sobre todo cuando se está interesado en la respuesta no lineal del modelo estudiado.

A continuación se presenta en forma resumida las deducciones que permiten llegar a las constantes elásticas de un sólido y a las rigideces equivalentes de las barras para el módulo cúbico presentado en la figura 4-1, las cuales fueron desenvueltas en las tesis de Hayashi (1982) e Iturrioz (1995) y en el trabajo de Nayfeh y Hefzy (1978).

La relación constitutiva de un cuerpo elástico arbitrario, en notación indicial, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad (i, j = 1 \dots 6) \quad 4-1$$

En el caso del cuerpo anisótropo y elástico la matriz de las constantes elásticas, C_{ij} , queda definida conociendo 21 parámetros independientes. Si el material es isótropo, es posible realizar simplificaciones que permiten expresar la matriz C_{ij} en función apenas de dos constantes independientes. En este último caso, se puede escribir C_{ij} como sigue:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad 4-2$$

Donde C_{11} , C_{12} , C_{44} son funciones del módulo de elasticidad longitudinal E y del coeficiente de Poisson ν .

Como se están analizando estructuras reticuladas a partir de elementos unidireccionales es de esperar que cada elemento contribuya a la rigidez global de la estructura y la suma de las contribuciones medias de cada barra forme la matriz final.

Como todas las barras poseen el mismo módulo de elasticidad E , cada conjunto de barras paralelas define un continuo con una propiedad unidireccional efectiva, que será llamada Q_{11} . Como Q_{11} es tomado como un valor medio ponderado con relación al área de influencia de la barra en un determinado conjunto de barras paralelas, su valor dependerá de la separación entre estas barras.

El elemento cúbico de la figura 4-1 posee dos valores diferentes para Q_{11} , uno correspondiente a las columnas que son normales a las caras del cubo y otro correspondiente a las barras diagonales. Estas propiedades serán diferenciadas respectivamente por Q_{11}^n y Q_{11}^d .

Para una estructura cúbica el valor del parámetro Q_{11}^n puede ser fácilmente determinado proyectando el área de las barras en una cara del cubo como se muestra en la figura 4-2 a).

Entonces en cada cara del módulo cúbico de área Lc^2 se tiene una contribución de dos barras normales enteras. De esta forma, cada elemento tiene un área efectiva de contribución igual a $(Lc^2/2)$. Por eso, la relación entre la rigidez de la barra $E A_n$ y el área efectiva de contribución de la misma provee el valor medio de una propiedad unidireccional efectiva en la dirección de las barras normales a las caras del módulo Q_{11}^n :

$$Q_{11}^n = \frac{E \cdot A_n}{Lc^2/2} \quad 4-3$$

En forma similar se procede para obtener el valor medio de la propiedad unidireccional en la dirección de las barras diagonales en relación a las caras del módulo cúbico Q_{11}^d . Se debe también, determinar el área efectiva de contribución de cada diagonal, la cual es indicada en la figura 4-2 b). Luego, Q_{11}^d está dado por la expresión:

$$Q_{11}^d = \frac{\sqrt{3} \cdot E \cdot A_d}{Lc^2} \quad 4-4$$

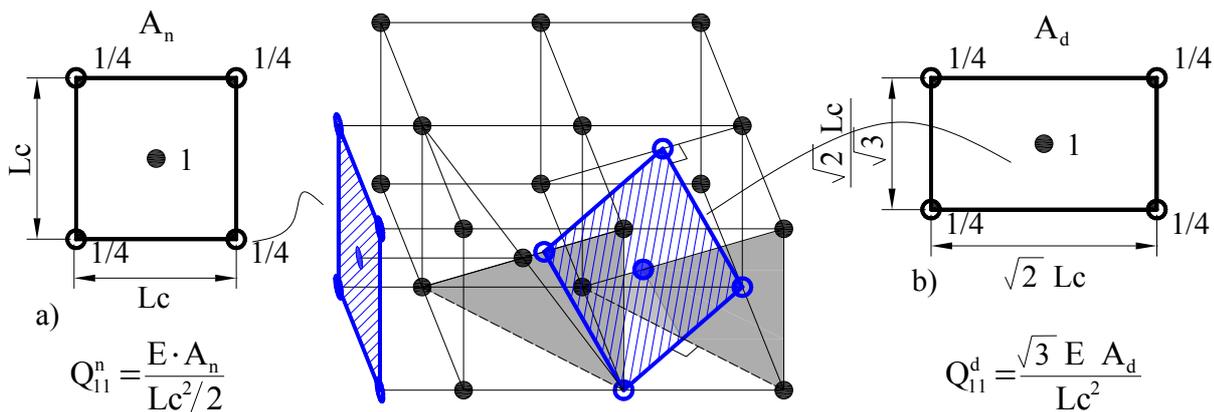


Figura 4-2 Determinación del área efectiva de las barras a) normales y b) diagonales.

En la representación del continuo utilizada en este trabajo, a través de la estructura reticulada, es necesario que se considere la influencia de cada barra en la rigidez del sólido equivalente, o sea, una rigidez global. Para esto es utilizada la ecuación 4-5 (Nayfeh y Hefzy, 1979; Iturrioz,

1995), que permite la transformación de las constantes elásticas de un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas x_i para otro cuyas coordenadas son \bar{x}_i .

$$\bar{Q}_{ij} = \sum_{I=1}^3 f_I(Q_{11}^n, \alpha_{I_{kl}}^n) + \sum_{J=1}^4 f_J(Q_{11}^d, \alpha_{J_{kl}}^d) \quad (k,l = 1, 2, 3) \quad 4-5$$

Donde $\alpha_{I_{kl}}^n$ y $\alpha_{J_{kl}}^d$ son los cosenos directores de los sistemas cartesianos \bar{x} , x_1^n y \bar{x} , x_1^d respectivamente. \bar{Q}_{ij} representa las constantes elásticas del sólido equivalente representado por la estructura reticulada.

El primer término corresponde a la contribución de las barras normales a las caras del módulo cúbico y el segundo término corresponde a las cuatro direcciones de las diagonales del cubo.

Trabajando con las ecuaciones 4-3 a 4-5 se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{11} &= Q_{11}^n \cdot \left(1 + \frac{4}{9} \cdot \delta\right) \\ C_{12} &= Q_{11}^n \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot \delta\right) \\ C_{44} &= Q_{11}^n \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot \delta\right) \end{aligned} \quad 4-6$$

Donde:

$$\delta = \frac{Q_{11}^d}{Q_{11}^n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{A_d}{A_n} \quad 4-7$$

Sustituyendo las expresiones de C_{ij} en la matriz (4-2) se obtiene:

$$C_{ij} = \frac{2 \cdot E \cdot A_n}{Lc^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} \cdot \delta & 1 + \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & 1 + \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} \cdot \delta \end{bmatrix} \quad 4-8$$

Que es la expresión propuesta por Nayfeh y Hefzy (1978), donde A_n y A_d son datos del problema. En dicho trabajo se aclara que la ecuación 4-8 es equivalente a la matriz de rigidez

de un material isotrópico y homogéneo sólo en el caso en que $\delta = 9/8$ (lo que implica que $\nu = 0.25$). Para otros valores de ν la equivalencia no es perfecta y las diferencias se concentran en los términos de corte (Iturrioz, 1995).

Las constantes elásticas E , ν y μ pueden ser obtenidas para el continuo equivalente a partir de los correspondientes C_{ij} de la expresión anterior, como sigue:

$$\begin{aligned}
 E &= C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}} \\
 \nu &= \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} \\
 \mu &= \frac{1}{2}C_{44}
 \end{aligned}
 \tag{4-9}$$

Considerándose las ecuaciones 4-8 y 4-9, es obtenida la relación entre las constantes elásticas E , ν y μ y las constantes elásticas del sólido equivalente de la estructura reticulada, ecuación 4-10.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{2 \cdot E \cdot A_n \cdot (9 + 12\delta)}{Lc^2 \cdot (9 + 8 \cdot \delta)} \\
 \nu &= \frac{4 \cdot \delta}{9 + 8 \cdot \delta} \\
 \mu &= \frac{8 \cdot E \cdot A_n \cdot \delta}{9 \cdot Lc^2}
 \end{aligned}
 \tag{4-10}$$

Como lo que interesa es obtener las rigideces de las barras ($E A_n$) y ($E A_d$) en función de las propiedades elásticas del sólido que representa, E , ν , simplemente reemplazamos estos valores en la ecuación 4-7 obteniendo:

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{9 \cdot \nu}{(4 - 8 \cdot \nu)} \\
 E \cdot A_n &= \frac{Lc^2 \cdot (9 + 8 \cdot \delta)}{2 \cdot (9 + 12 \cdot \delta)} \cdot E \\
 E \cdot A_d &= \frac{2 \cdot \delta \cdot E \cdot A_n}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}
 \tag{4-11}$$

Estas expresiones son válidas si el módulo o arreglo básico de barras es cúbico, como el mostrado en la figura 4-2 a).

Para una célula básica de forma diferente, se deben obtener nuevas relaciones. Bush et al. (1977) y Noor y Mikulas (1988) (citados por Hayashi, 1983 e Iturrioz, 1995) presentan estas

relaciones para tetraedros, en cuanto otros autores proponen realizar el cálculo de las rigideces de las barras directamente por calibración numérica. Schlangem (1993) realizó una revisión bibliográfica de varios tipos de arreglos utilizados en el modelado de estructuras de hormigón. Ostoja_Starzenski (1995) también presentan el cálculo de propiedades equivalentes de barras para el caso en que existe ortotropía utilizando células tetraédricas.

4.1.2 Masas Nodales

Como se comentó anteriormente, la masa del cuerpo simulado se discretiza y se la coloca en los nudos del reticulado, el valor de la misma depende del volumen de influencia del nudo. Considerándose el módulo cúbico básico de las figuras 4-1 a) o 4-2, se puede observar que en el volumen de dicho módulo (Lc^3) están comprendidos dos nudos, el central y la suma de la octava parte que aporta cada nudo del vértice del módulo.

Como la masa del continuo comprendida dentro de ese volumen elemental es $\rho \cdot Lc^3$, siendo ρ la densidad del material, la masa de cada nudo completo deberá ser la mitad ($\rho \cdot Lc^3/2$).

Los nudos del vértice del modelo global tienen solamente un octavo de la masa de un nudo completo, por lo tanto su masa será de $\rho \cdot Lc^3/16$. Los nudos de las aristas del modelo global tendrán un cuarto de la masa del nudo completo ($\rho \cdot Lc^3/8$) y los nudos pertenecientes a las caras o superficies del modelo global la mitad ($\rho \cdot Lc^3/4$).

4.1.3 Solución de la ecuación de equilibrio

Como se explicó anteriormente se consiguió representar el continuo por un sistema tridimensional de n grados de libertad.

Para cada nudo de masa m es considerado el sistema de fuerzas representado en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4-3. Quedando la ecuación de movimiento para el sistema completo:

$$M \cdot \ddot{\vec{x}} + C \cdot \dot{\vec{x}} + \vec{F}(t) - \vec{P}(t) = 0 \quad 4-12$$

Donde \vec{x} representa el vector de desplazamientos nodales, M la matriz de masa nodal (diagonal), C es una matriz de amortiguamiento, también considerada diagonal, y $\vec{F}(t) - \vec{P}(t)$

representa la diferencia entre el vector de fuerzas internas $\vec{F}(t)$ y el vector de fuerzas externas $\vec{P}(t)$. Se considera que estas fuerzas actúan sobre los nudos del modelo.

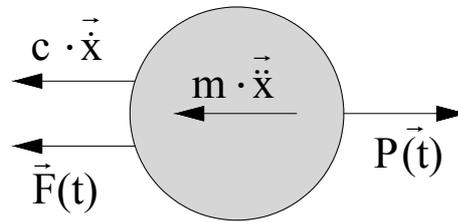


Figura 4-3 Diagrama de cuerpo libre para un nudo.

Para cada nodo i del modelo se verifica que:

$$\vec{F}^i(t) = \sum_{b=1}^k \vec{F}^b \quad 4-13$$

Siendo k el número de barras que concurren al nudo i . La fuerza interna en cada barra, \vec{F}^b , es obtenida a partir de una ecuación constitutiva elemental, que se puede expresar como sigue:

$$\vec{F}^b = \lambda(\varepsilon_b, \dot{\varepsilon}_b) \quad 4-14$$

Siendo que ε_b y $\dot{\varepsilon}_b$ representan la deformación y la velocidad de deformación de la barra b y λ será una función que dependerá del tipo de material a modelar (relación constitutiva).

La ecuación de equilibrio 4-12 es integrada en el tiempo valiéndose de un esquema de integración explícita, utilizando el método de diferencias finitas centrales, de manera de obtener la coordenada actual del nudo en cada paso de integración.

En relación a la matriz de amortiguamiento C , se adoptó la hipótesis simplificativa de considerar el amortiguamiento proporcional a la masa M (Iturrioz, 1995).

$$C = M \cdot D_f \quad 4-15$$

Siendo D_f una constante vinculada al coeficiente de amortiguamiento crítico ξ_n .

$$D_f = \xi_n \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \quad 4-16$$

Donde f_n es la frecuencia natural de vibración de modo n (Hz). De un modo general el modo n es adoptado como siendo igual al modo fundamental de vibración de la estructura (Iturrioz, 1995).

4.1.4 Relación constitutiva de la barra para modelar la rotura del material

Rocha (1989) propuso una ley constitutiva bilineal para los elementos que permite capturar el comportamiento de materiales hasta la ruptura, la misma se presenta en figura 4-4. Como menciona Rocha (1989), esta ley fue propuesta originariamente por Hilleborg en 1978.

La relación constitutiva de cada barra tiene la siguiente forma:

$$\text{Fuerza} = \text{función (deformación de la barra)} \quad 4-17$$

El comportamiento a compresión de la barra es lineal elástico, la ruptura del modelo global cuando está comprimido, deberá ocurrir por tracción indirecta (efecto de Poisson).

En la figura, P_{cr} representa la fuerza máxima de tracción transmitida por la barra, ϵ_p es la deformación asociada a P_{cr} , E_A es la rigidez de las barras del modelo reticulado y k_r es la ductilidad, parámetro que permite calcular la deformación para la cual la barra no transmite más esfuerzos de tracción, ϵ_r .

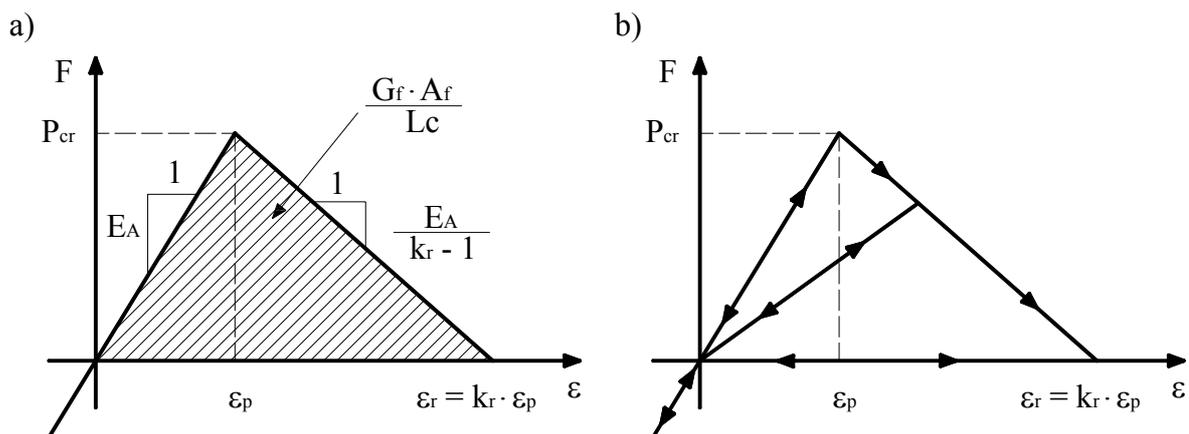


Figura 4-4 Relación Constitutiva Elemental de las barras del reticulado – a) Diagrama constitutivo adoptado con sus parámetros de control; b) Esquema para la carga y descarga. (Rocha, 1989).

La deformación límite ϵ_r es elegida para satisfacer la condición de que cuando un elemento falla y la fisura se abre, se disipa una cierta cantidad de energía. Esta energía es igual al producto del área de la superficie fracturada, $A_f = \text{cte } Lc^2$, por el valor de la tasa de energía superficial G_f , que es una propiedad del material, dividido por la longitud de la barra, para tener en cuenta que en este diagrama estamos relacionando fuerza y deformaciones.

Las propiedades del material pueden ser modeladas como campos aleatorios, lo que implica que las mismas pueden variar de elemento a elemento siguiendo una ley estadística establecida.

Es importante destacar que P_{cr} , ε_p , ε_r , G_f , y R_f son propiedades exclusivas del material, A_f y L_c son propiedades exclusivas del modelo, los parámetros E_A y k_f dependen tanto del modelo como del material.

Considerando que el material en estudio tiene comportamiento frágil, puede ser aplicada la mecánica lineal de fractura. El factor de intensidad de tensiones para el modo de falla I (K_I), presentado en el capítulo 2, puede ser escrito como:

$$K_I = \chi \cdot f_t \cdot \sqrt{a} \quad 4-18$$

Siendo χ un parámetro que depende de la geometría del problema y de la longitud de la fisura.

Considerando el comportamiento lineal hasta la ruptura ($f_t = \varepsilon_p \cdot E$) y estado plano de deformaciones, la deformación crítica es dada por:

$$\varepsilon_p = R_{fc} \cdot \sqrt{\frac{G_f}{E \cdot (1 - \nu^2)}} \quad 4-19$$

Donde:

$$G_f = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) \quad 4-20$$

R_{fc} es un “factor de falla” definido como:

$$R_{fc} = \frac{1}{\chi \cdot \sqrt{a}} \quad 4-21$$

La relación entre ε_p y G_f fue establecida como criterio de falla a tracción y su deducción está basada en la mecánica de fractura lineal elástica (Rocha, 1989).

Como cita Iturrioz (1995), es posible introducir mejoras sobre el comportamiento del modelo en función de investigaciones realizadas por varios autores; entre ellos, cabe destacar los trabajos de Vonk (1993) y Feenstra y Borst (1993). También puede ser cuestionada la forma por la cual se realiza la descarga. Linde (1993) propone una ley más sofisticada, basada en los ensayos realizados por Curbach (1987), que fue probada en casos de excitaciones impulsivas sin obtener ventajas en los resultados obtenidos. Presumiblemente, en problemas donde el comportamiento cíclico de la excitación sea dominante, cargas sísmicas por ejemplo, su utilización traerá ventajas.

Observaciones sobre la implementación del criterio de rotura utilizado

- Es importante precisar que ε_p , E , P_{cr} , R_f y G_f son considerados propiedades exclusivas del material, mientras que A_f y L_c son propiedades exclusivas del modelo. k_f y E_A dependen tanto del material como del modelo.
- Se puede demostrar que el criterio constitutivo utilizado es objetivo frente a la discretización del modelo.
- Una condicionante del modelo en la definición de L_c es la siguiente:

Cuando un elemento rompe, toda la energía de deformación acumulada en él, es consumida en el proceso de fractura. Esto no es lo que sucede en realidad, pues parte de la energía de deformación se preserva con la forma de energía cinética (vibraciones inducidas) y energía elástica, en las dos partes en las que el elemento se divide. Como no es posible tener en cuenta esta subdivisión para un elemento aislado (porque las masas están concentradas en los nudos, y no a lo largo de su longitud), esto resulta una restricción en términos de un valor máximo para la longitud de L_c .

4.2 Integración por diferencias finitas

La integración explícita permite realizar un balance energético durante todo el proceso, constituyendo una información de gran utilidad para comprender los fenómenos estudiados.

La integración explícita no requiere del montaje de la matriz de rigidez global del sistema. Esto es especialmente conveniente para el análisis dinámico no lineal, en donde en cada paso de integración en el tiempo la matriz de rigidez debe ser modificada. (Riera, 1980). Una característica inherente al esquema explícito de integración es la de permitir integrar aun sistemas hipoestáticos, ya que la rigidez solo entra en la construcción del vector de cargas independiente en cada paso de tiempo. Esto facilita el estudio de estructuras que no estén totalmente vinculadas, como por ejemplo, seguir la trayectoria de los fragmentos en que se rompe una estructura.

Debido a la utilización de un método de integración explícita en la integración de las ecuaciones de movimiento, el intervalo de tiempo Δt se ve restringido, por condiciones de estabilidad numérica, a un valor crítico $\Delta t_{crítico}$. El método de las diferencias finitas centrales presenta el menor intervalo crítico en comparación con los otros métodos explícitos. Para este

modelo se ha adoptado un $\Delta t_{\text{crítico}}$ en función de la longitud de las barras (L_c) y de la velocidad de propagación de la onda de compresión V_p :

$$\Delta t_{\text{crítico}} \leq 0,6 \cdot \frac{L_c}{V_p} \quad 4-22$$

Siendo V_p la velocidad de las ondas principales o de compresión (2-19).

El proceso de integración básicamente consiste en:

- Dada una configuración deformada en el instante j
- Se obtienen las fuerzas internas, en esta configuración, en el instante j .
- Conocidas las otras fuerzas actuantes en el instante j
- Se determina la configuración deformada en el instante $j+1$.

Se pueden encontrar detalles de la implementación de diferencias finitas en libros de métodos numéricos (Burden y Faires, 1996; Bathe, 1996).

4.3 Metodología utilizada para obtener el tensor de tensiones

A continuación se explica como fueron calculadas las componentes del tensor de tensiones y de deformaciones para cada módulo básico. Los resultados fueron adecuados para poder ser visualizados en el programa de elementos finitos ANSYS (Batista et al., 2003).

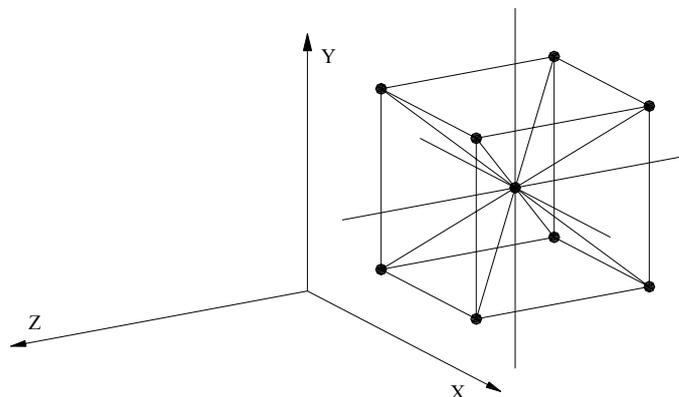


Figura 4-5 Módulo cúbico utilizado como referencia para la explicación de la obtención del tensor de tensiones, orientado con el sistema de coordenadas global.

Toda la descripción realizada a continuación esta basada en un módulo cúbico orientado siguiendo las coordenadas globales presentadas en la figura 4-5 (Batista et al., 2003 y Batista, 2007).

4.3.1 Tensiones normales

La tensión normal en cualquiera de las direcciones ortogonales al módulo está determinada por una fuerza equivalente dividida por el área de la sección transversal del módulo. Esta fuerza equivalente está compuesta por:

- El promedio de las fuerzas correspondientes a las barras de las aristas en la dirección analizada.
- El promedio de los valores correspondientes a suma de las fuerzas en las barras diagonales de uno y otro lado proyectadas según la dirección analizada.
- El promedio de las fuerzas en las barras centrales en la dirección analizada.

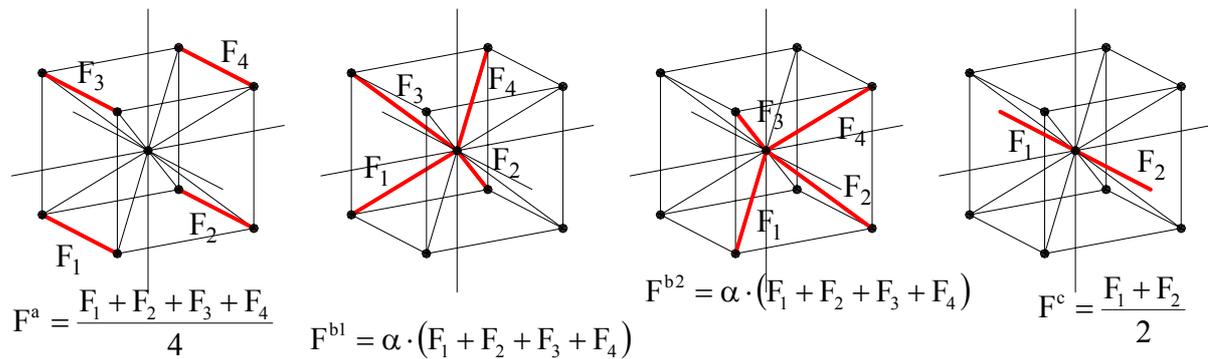


Figura 4-6 Componentes de la fuerza equivalente para el cálculo de la tensión normal.

En la figura aparece el valor α que es la tangente del ángulo formado por las barras y la dirección ortogonal analizada. Este valor es de 0.577. La fuerza equivalente se obtiene como la suma de las fuerzas descritas en la figura 4-6.

$$F_{\text{normal equivalente}} = F^a + F^b + F^c \quad 4-23$$

4.3.2 Tensiones tangenciales

Las tensiones tangenciales solamente incluyen las barras diagonales, y son determinadas también por una fuerza equivalente dividida por el área de la sección transversal del módulo. A continuación se describe a modo de ejemplo como se obtiene la fuerza equivalente en la dirección “x” global en un plano perpendicular a la dirección “y” (F_{xy}). Esta fuerza equivalente está formada por:

- El promedio de la diferencia entre la fuerza de la barra superior y la inferior de un lado.
- El promedio de la diferencia entre la fuerza de la barra superior e inferior del otro lado.

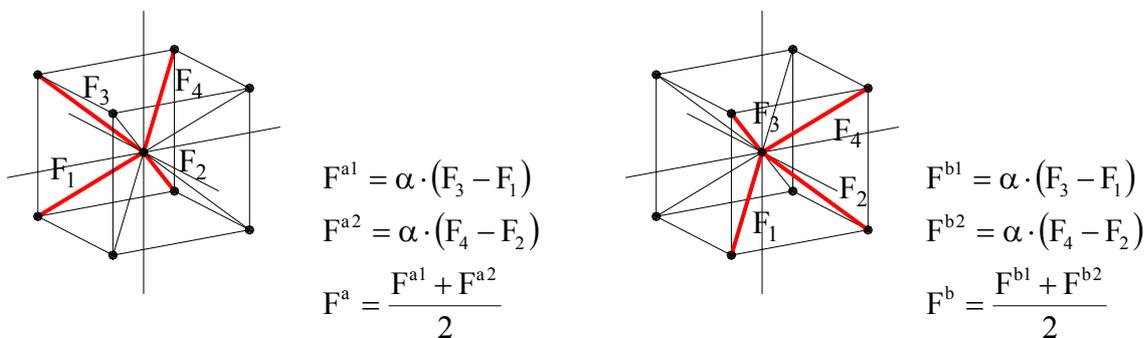


Figura 4-7 Componentes de la fuerza equivalente para el cálculo de la tensión tangencial.

De la misma forma que en la figura 4-6, el valor α es la tangente del ángulo de las barras diagonales y la dirección ortogonal analizada.

Realizando la sumatoria de las fuerzas se obtiene que F_{xy} está dado por:

$$F_{xy} = \frac{F^a + F^b}{2} \quad 4-24$$

De la misma manera que se analizó la fuerza equivalente F_{xy} , siguiendo el mismo procedimiento se pueden calcular F_{yz} y F_{xz} (Batista et al., 2003).

Batista et al. (2003) realizaron la comprobación del correcto funcionamiento de la forma de calcular el tensor de tensiones verificando los resultados obtenidos con el MED de problemas cuya solución era conocida.

4.4 Aplicaciones analizadas con el MED

En forma de resumen se presentan a continuación los distintos tipos de problemas que fueron analizados con el MED con la formulación presentada anteriormente y para los cuales demostró ser apto.

- Problemas con no linealidad geométrica. (Hayashi, 1982)
- Problemas con no linealidad física y geométrica. (Hayashi, 1982)
- Impacto sobre una placa elástica. (Hayashi, 1982)
- Aplicaciones en problemas básicos de la MELF. (Rocha, 1989)
- Simulación de materiales no homogéneos con propiedades aleatorias. (Rocha, 1989)
- Aplicaciones al Hormigón. Corroboración de la teoría de banda de fisuración de BAZANT. (Rocha, 1989)
- Aplicación del DEM a estructuras elastoplásticas. (Iturrioz, 1995)
- Análisis de estructuras de Hormigón Armado sometido a cargas de impacto e impulsivas. (Iturrioz, 1995).

Con los ejemplos presentados en esta disertación se demuestra que el MED también es apto para:

- Medir el factor de intensidad de tensiones estático para modos de falla simples o mixtos, en 2 y 3 dimensiones. Aplicando la tasa de energía liberada y el COD.
- Medir el factor de intensidad de tensiones dinámico para modos de falla simples o mixtos, en 2 y 3 dimensiones. Aplicando el COD.
- Calcular la velocidad y camino de propagación de una fisura.
- Captar la propagación de ondas de tensión y la influencia de los bordes o contornos libres en esta distribución de tensiones.
- Reproducir configuraciones de rotura complejas, propagación inestable de fisuras (como las de un disco sometido al impacto de un punzón) y los mecanismos de fractura producidos.

Capítulo 5 – IMPLEMENTACIONES REALIZADAS EN EL MED

En este capítulo se presentan las implementaciones realizadas en el MED, explicando como fueron adecuados los métodos para medir los parámetros fractomecánicos.

5.1 Modificación en la forma de modelar la fisura

En trabajos anteriores como Spelmeyer et al. (2001), Tech et al. (2003), Kostas et al. (2004) o Barrios D'Ambra et al. (2006), para introducir una fisura en el modelo de los elementos discretos se procedía a debilitar o eliminar las barras que se encontraban en la posición geométrica que ocuparía la fisura esto llevaba a una discretización grosera de la misma que depende del tamaño del módulo elemental.

En el presente trabajo se realizó una mejora en la forma de introducir la fisura. Esta puede ser horizontal o inclinada con cierto ángulo respecto de la horizontal y empezar en el borde o en un punto interior de la placa. Ya en Kostas et al. (2006) se presentó esta modificación.

Algoritmo utilizado:

El primer paso consiste en identificar cual es el nodo inicial y el nodo final de la fisura (para una cara del modelo). En la figura 5-1 a) se grafica una vista del modelo en donde se dibujaron rellenos los nodos inicial y final de la fisura. Luego se desdoblan los nudos, la masa que se coloca en estos es la mitad de la masa que tiene un nodo que no haya sido desdoblado. Este proceso se halla ilustrado en la figura 5-1 b). La posición real de los nudos desdoblados es coincidente, en el esquema mencionado se los grafica separados para poder entender mejor el procedimiento.

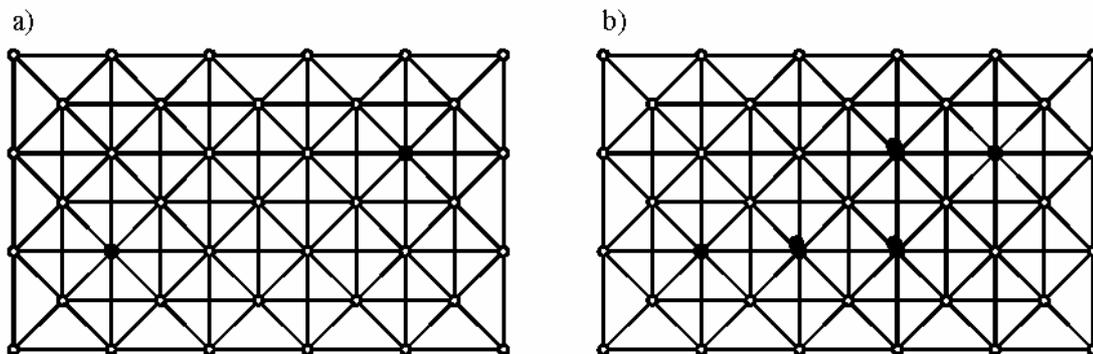


Figura 5-1 a) Identificación del nudo inicial y nudo final, b) nudos desdoblados

Una vez desdoblados los nudos el siguiente paso consiste en cambiar la conectividad de algunas barras y desdoblar las barras que están sobre la línea de la fisura, las rigideces de estas barras desdobladas también se disminuyen a la mitad. Esto se puede ver en la figura 5-2 a) y b). Las barras resaltadas continuas son a las que se cambia la conectividad, es decir cambia el nudo inicial o final de la barra. Las resaltadas de trazos son las desdobladas.

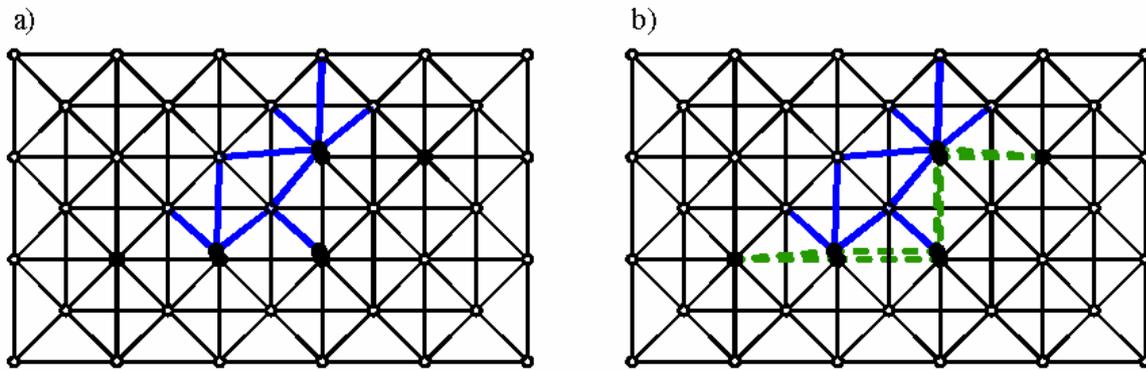


Figura 5-2 a) Modificación de la conectividad de las barras, b) desdoblado de las barras que se encuentran sobre la línea de la fisura.

El último paso consiste en eliminar las barras que conectan los nudos centrales que atraviesan la fisura modelada. Estas barras se graficaron con líneas de puntos en la figura 5-3, en donde se muestra la configuración final del modelo con la fisura.

De esta forma se tiene una fisura refinada que no depende directamente del tamaño del módulo elemental (L_c) (como ocurría anteriormente).

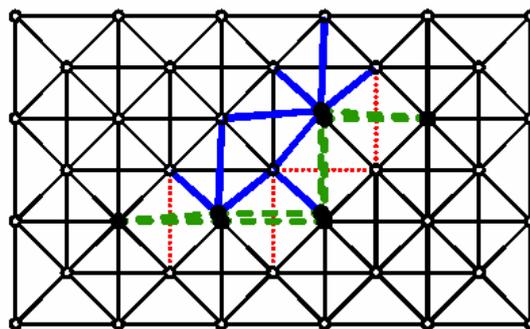


Figura 5-3 Configuración final con la fisura realizada.

Esta fisura se puede realizar en un plano horizontal o formando un ángulo con respecto a la horizontal (como se observa en las figuras anteriores).

En la figura 5-4 se puede observar claramente la diferencia entre las dos formas de representar la fisura.

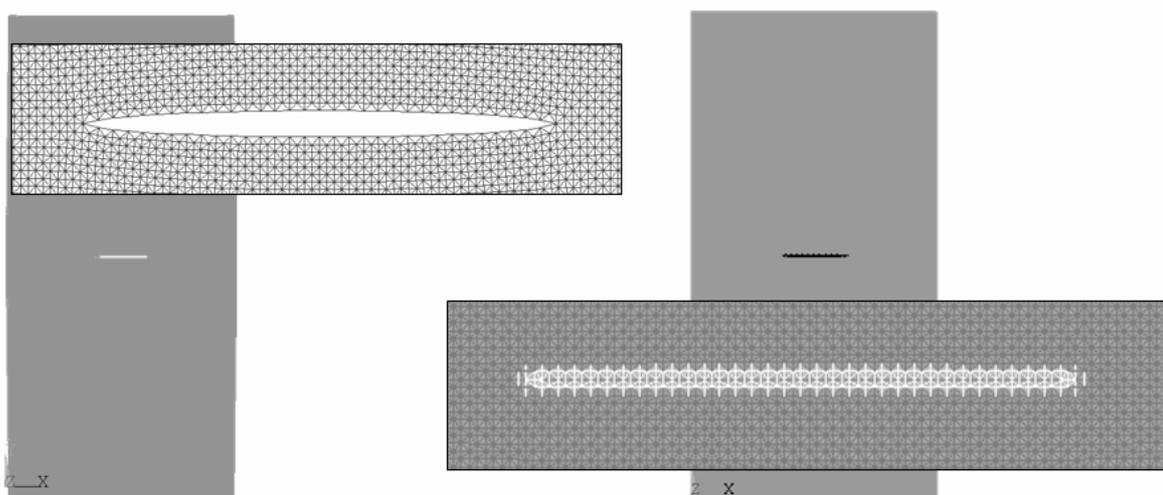


Figura 5–4 a) Configuración deformada con la nueva metodología implementada b) Sin utilizar el modelador de fisuras.

Como se mencionó anteriormente la fisura puede empezar en cualquier punto y tener cualquier inclinación. Entre los ejemplos del capítulo 6 y 7 se presentan placas con fisuras inclinadas centradas en la placa y que llegan hasta un borde.

Siguiendo este procedimiento, con algunas pequeñas modificaciones es posible generar fisuras de secciones circulares o elípticas en bloques de tres dimensiones. Esto se grafica en la figura 5-5, en donde se marcó la sección de la fisura circular simulada con este procedimiento, ya que es muy difícil mostrar esta fisura tanto en su posición no deformada como deformada. En los capítulos 6 y 7 se presentan algunos ejemplos con bloques de tres dimensiones.

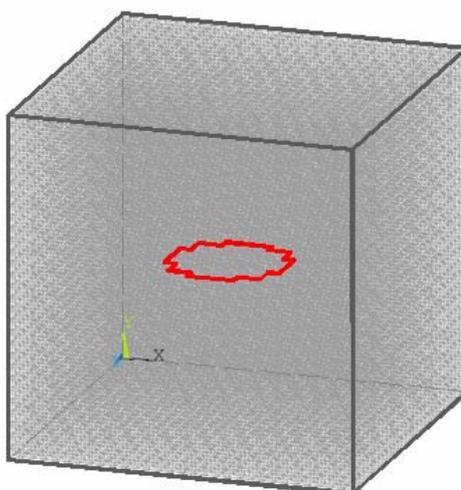


Figura 5–5 Bloque modelado con MED donde se marca la forma de la fisura modelada.

5.2 Factor de Intensidad de Tensiones

Como se señaló en el capítulo 3, se pueden encontrar varias técnicas para calcular el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). Las utilizadas en este trabajo son:

- Balance energético.
- Extrapolación de K calculado a partir del COD.
- Integral J.

A continuación se explicará como se implementa en el MED el cálculo del FIT utilizando cada una de estas técnicas.

5.2.1 Balance Energético en el MED. Avance Elemental de la Fisura

Una posibilidad de calcular el factor de intensidad de tensiones es a partir de la tasa de energía liberada. Se utilizó el MED para determinar el valor de la energía específica de fractura G para diferentes valores de tensión aplicada, realizando dos simulaciones con tamaños de fisuras levemente diferentes (este procedimiento se puede encontrar en Anderson, 2005 y Aliabadi y Rooke, 1991).

Es posible expresar el parámetro G como sigue (Anderson, 1995):

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dE_K}{dA} \quad 5-1$$

Donde Π representa el potencial total, W potencial de las fuerzas externas (la cual es evaluada multiplicando las fuerzas aplicadas por los desplazamientos en los nodos correspondientes), A es el área de la fisura, U es la energía de deformación elástica y E_K es la energía cinética.

Para resolver el problema numéricamente para cada valor de tensión aplicada σ se tendrá:

$$G(\sigma) = \frac{W_{(a+\Delta a)} - W_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{K_{(a+\Delta a)} - K_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad 5-2$$

Se verifica que si las cargas son aplicadas lentamente es posible despreciar la parte correspondiente a la energía cinética. Si se aplican tensiones prescritas en los extremos de la placa, por el teorema de Clapeyron, es posible demostrar que $dW/dA = 2 dU/dA$. Sustituyendo en (5-2) se obtiene:

$$G = \frac{dU}{dA} \quad 5-3$$

Para resolver el problema numéricamente para cada valor de tensión aplicada σ se tendrá:

$$G(\sigma) = \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad 5-4$$

Para el cálculo de $U(a+\Delta a)$ se aumenta el largo de la fisura en un módulo L_c y se repite el análisis. Obtenido el valor de $G(\sigma)$ y considerando estado plano de deformaciones es posible calcular el factor de intensidad de tensiones K y posteriormente su valor normalizado K/K_0 , pudiéndose escribir entonces que:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\sqrt{Gf \cdot E}}{\sigma \sqrt{\pi \cdot a}} \quad 5-5$$

El cálculo del factor de intensidad de tensiones estático a partir del balance energético de toda la placa o cuerpo aplicando la ecuación 5-2 o 5-4 no genera ninguna dificultad además de la necesidad de dos simulaciones con una pequeña diferencia en la longitud de la fisura.

Ahora, cuando se quiere calcular por medio de este método el K dinámico, los resultados no son los esperados a priori. Esto sucede, como se explicó en el capítulo 3, porque debido a la traslación a lo largo del cuerpo de las ondas de tensiones y su superposición una vez que se reflejan en los contornos, generan una gran influencia en la forma y magnitud del campo de tensiones en las proximidades de la punta de la fisura que no pueden ser medidas con un balance global de energías.

5.2.2 Extrapolación de K calculado a partir del COD en el MED

Utilizando las fórmulas mostradas en el capítulo 2 y 3 se puede relacionar el factor de intensidad de tensiones con la apertura en la punta de la fisura. Este método es utilizado para medir los FIT tanto estáticos como dinámicos.

Se miden los desplazamientos relativos (δ) entre los puntos desdoblados cercanos a la punta de la fisura. Se calcula el factor de intensidad de tensiones en cada uno de los otros puntos (ecuaciones 3-6) y se realiza una extrapolación para cuando r tiende a cero. De esta forma se logra independizar de la discretización adoptada el valor del K/K_0 obtenido. Con la extrapolación mencionada se predice el valor para $r = 0$ por medio de una regresión lineal con un ajuste de mínimos de cuadrados del rango de datos conocidos.

Para realizar la extrapolación se desprecian los resultados obtenidos en los tres primeros puntos, ya que se considera que se son necesarios cuatro módulos para que se pueda tomar la curvatura de la deformación.

Esto se demuestra basándose en que la deformación cercana a la punta de la fisura es una función de \sqrt{r} (capítulo 2 de Anderson, 2005) como lo expresa la ecuación 2-13. En la figura 5-6 se comparan los resultados obtenidos utilizando dicha expresión y los obtenidos con el MED, en donde se observa una diferencia en los puntos más cercanos a la punta de la fisura, pero esta va disminuyendo rápidamente. Como se aprecia, recién a partir del punto 4 en adelante los desplazamientos obtenidos son los mismos.

Como realizamos el cálculo del FIT en función de los desplazamientos, y recién a partir del tercer nodo conseguimos acercarnos a la deformada real con el MED, despreciamos los valores obtenidos hasta este nodo.

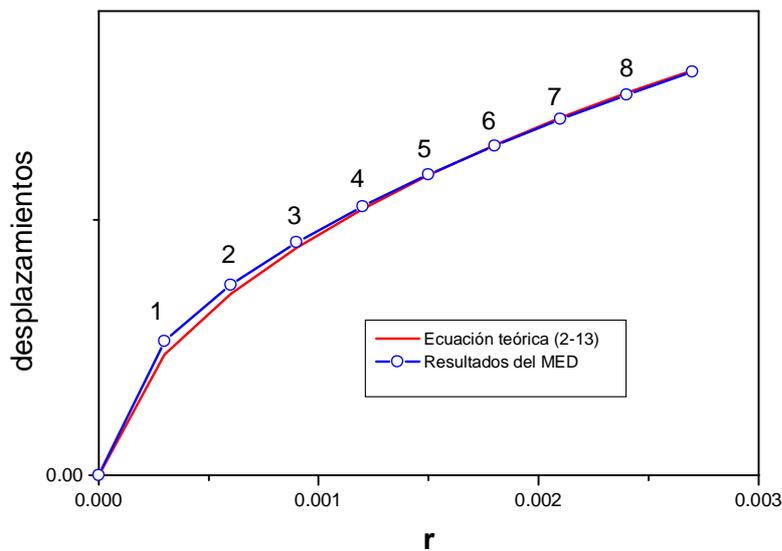


Figura 5-6 Relación entre ecuación 2-13 y resultados del MED.

Para fisuras de forma circular o elíptica en bloques de tres dimensiones se realiza un procedimiento similar.

Este método de cálculo se utiliza tanto para obtener el factor de intensidad de tensiones estático como el dinámico.

5.2.3 La Integral J en el MED

En el MED se realizó la implementación de un algoritmo para el cálculo de los FIT con la integral J para una fisura horizontal. Además se consideró un recinto de forma rectangular. Para el caso de cargas estáticas la integral J es independiente del camino de integración por lo que la forma del camino no tiene importancia. Para el caso de cargas dinámicas hay que hacer el límite del contorno tendiendo a cero, para esto se calculará J en varios contornos y se realizará una regresión lineal con los valores encontrados para definir cual es el valor de J cuando el contorno tiende a cero.

Discretizando la ecuación 2-38 (Guo y Nairn, 2004 y 2006), se obtiene la formulación de la integral J utilizada en el MED:

$$J_m = \sum_{l=1}^{n_{\text{nod}}-1} (F_m^{(l)} + F_m^{(l+1)}) \cdot \frac{\Delta_l}{2} \quad (m = 1, 2) \quad 5-6$$

Donde n_{nod} son la cantidad de nudos y $(n_{\text{nod}}-1)$ la cantidad de segmentos en que es discretizado el camino en el cual será calculada la integral J. Δ_l es la longitud del segmento y $F_m^{(l)}$ está dado por:

$$F_m^{(l)} = (Wd^l + EK^l) \cdot n_m^l - \sigma_{ij} \cdot n_j^l \cdot \frac{\partial u_i^l}{\partial x_m} \quad 5-7$$

En la ecuación 5-7, Wd y EK son densidades de energía elástica y cinética respectivamente que son calculadas en cada nudo I , σ_{ij} representa el tensor de tensiones que multiplicado por n_j^l (componentes del vector unitario normal al segmento $I - I+1$ del contorno sobre el cual se está calculando la integral J), determina el vector tensión sobre el contorno. Finalmente u_i^l representa las componentes del vector desplazamiento en el nudo I perteneciente al contorno.

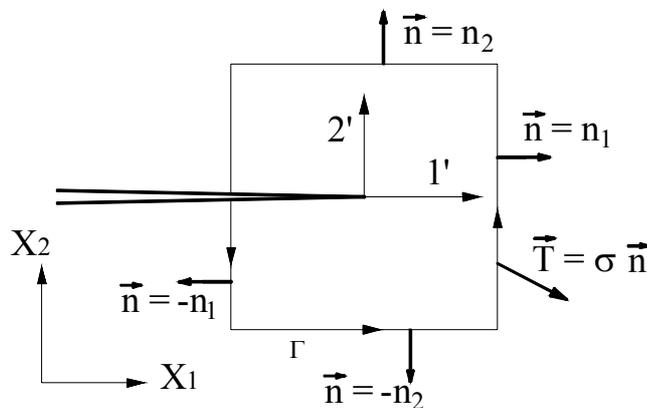


Figura 5-7 Detalle del contorno utilizado en el MED.

Si la fisura es horizontal, las coordenadas de la punta de la fisura coinciden con las coordenadas globales, entonces $\theta_c = 0$. Las ecuaciones 2-39 y 5-7 quedan:

$$G = J_1 \quad 5-8$$

$$F_1^{(l)} = (Wd^l + EK^l) \cdot n_1^l - \sigma_{ij} \cdot n_j^l \cdot \frac{\partial u_i^l}{\partial x_1} \quad 5-9$$

Calculando F con la expresión 5-9 para cada nudo del contorno adoptado y luego sumándolos como se indica en la ecuación 5-6 se obtiene el valor de la integral J sobre el contorno definido. Conocida la relación entre J y K es posible obtener el valor de K/K_0 con el que se compararán los resultados, donde $K_0 = \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$ es el factor de intensidad de tensiones para una placa de dimensiones infinitas con una fisura de semilongitud “a” sometida a cargas de tracción (Anderson, 2005).

A continuación se realiza una explicación detallada de como calcular en el contexto del MED cada uno de los términos de la expresión 5-9 que se discriminan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (Wd^l + EK^l) \cdot n_1^l & \quad 1^\circ \text{ término} \\ \vec{T}^l \cdot \frac{\partial \vec{u}^l}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \cdot n_j^l \cdot \frac{\partial u_i^l}{\partial x_1} & \quad 2^\circ \text{ término} \end{aligned} \quad 5-10$$

Realizando la sumatoria de estos términos para cada nudo sobre el contorno y multiplicándolos por Δ_l se obtiene la integral J discretizada (ecuaciones 5-6 y 5-9).

En la figura 5-8 se indica el contorno sobre el cual se calculará la integral J dentro del modelo de elementos discretos. En esta figura, el contorno pasa por los nudos centrales del módulo básico que se representan con puntos azules con más grosor, la fisura está marcada con una línea gruesa verde. En los detalles se indican en rojo, en cada caso, cuales son las barras cortadas por el contorno.

El 1º término se obtiene calculando la energía elástica y cinética en cada nodo y sumando dichas energías en los nodos correspondientes al contorno. La energía elástica en cada nudo del contorno (indicado en azul en la figura 5-8) se obtiene como la mitad de la energía elástica de todas las barras que concurren al mismo.

Analizando la figura 5-7 y la expresión 5-10 vemos que sólo tendrá sentido medir el 1º término sobre la parte del contorno vertical ya que sobre los contornos horizontales $n_1 = 0$.

Como se observa en la figura 5-7, n_i será negativo en la parte izquierda del contorno vertical y positivo en la parte de la derecha.

Los valores así calculados deben ser divididos por L_c^3 (volumen del cubo elemental) para transformar las energías calculadas en densidades de energía (energía por unidad de volumen).

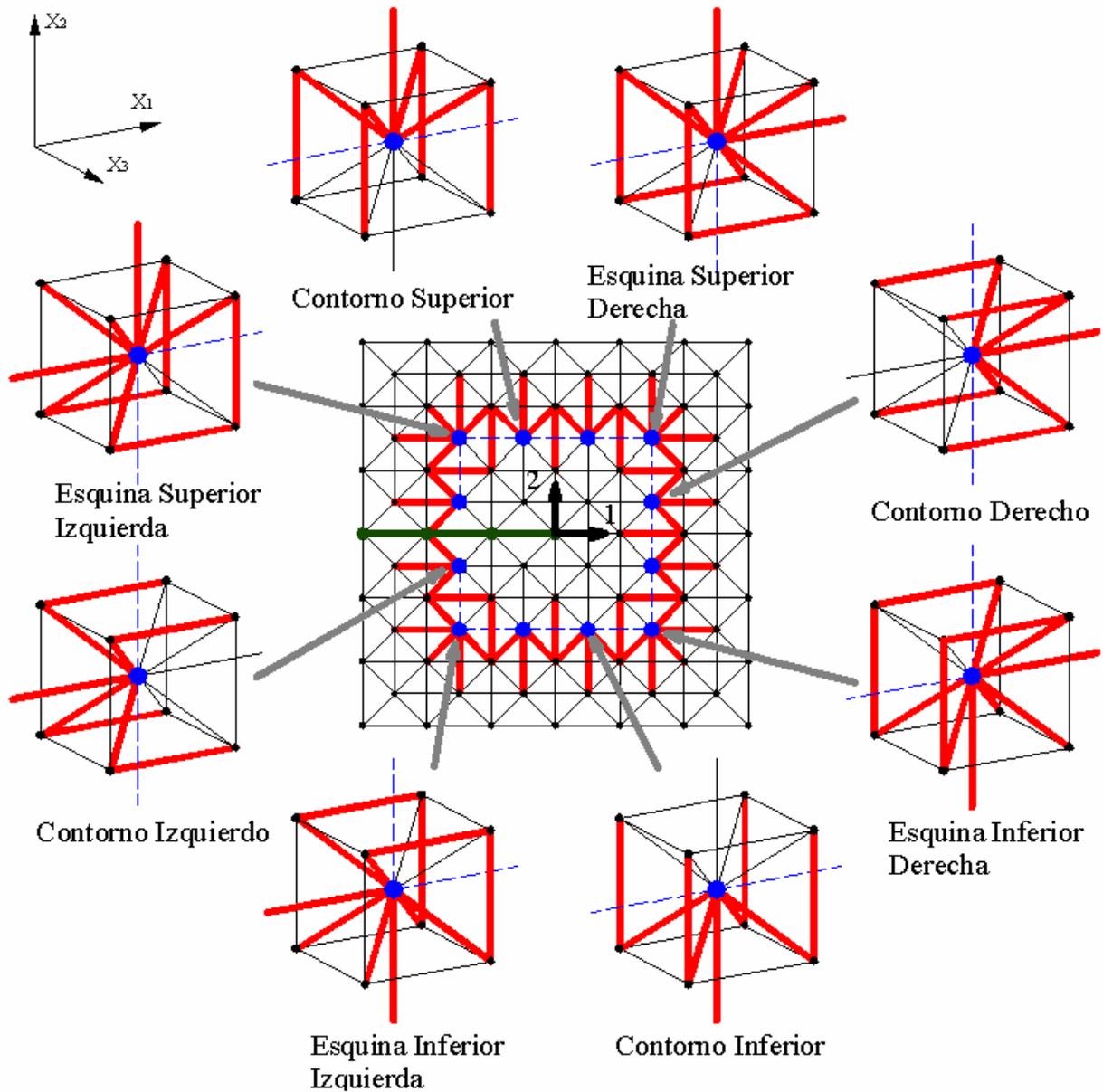


Figura 5-8 Forma del contorno y detalle del cálculo del vector de tracciones con el MED. Los nodos azules están ubicados sobre el contorno, la fisura se marca con línea roja gruesa. En los detalles se marcan con rojo las barras del módulo elemental que son cortadas por el contorno.

Para obtener el 2º término (ecuación 5-10) en un principio se calcula el vector de tracciones dado por $\vec{T}^I = \sigma_{ij} \cdot n_j^I$, como se puede ver en la figura 5-7 tendrá dos componentes. Este vector tensión se obtiene como la proyección en las dos direcciones x_1 y x_2 de la suma de todas las fuerzas de las barras que son cortadas por el contorno dividida por la sección del módulo que representan estas barras (Lc^2).

En la figura 5-8 se graficaron con rojo las barras cortadas por el contorno (las utilizadas para el cálculo del vector de tracciones) para módulos ubicados en distintas posiciones, pero cuyo nudo central esta sobre el dicho perímetro (tiene un solo módulo de espesor). Cabe aclarar que las fuerzas en las barras horizontales y verticales del borde del módulo se dividen por dos ya que corresponden también a otro y que las fuerzas de las barras diagonales se las proyecta en la direcciones x_1 y x_2 .

La otra parte del 2º término, $\frac{\partial u_i^I}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial u_1^I}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2^I}{\partial x_1} \right)$, también se calcula para cada nudo que queda

sobre el contorno (nudos azules en la figura 5-8). En el MED se identifica un nudo que pertenezca al contorno y se buscan los ocho nudos que lo rodean. Como el problema a resolver se considerará en estado plano de deformaciones, los desplazamientos de los cuatro nudos de adelante son iguales al de los cuatro nudos de atrás. En la figura 5-9 se presenta un módulo sobre el cual se realizará la explicación del procedimiento utilizado.

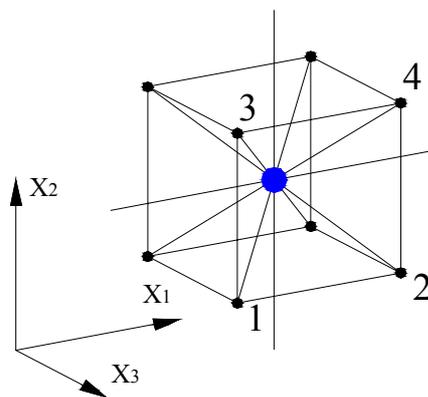


Figura 5-9 Módulo de contorno.

Para calcular la variación de desplazamientos en la dirección x_1 (figura 5-9) respecto de esta misma dirección, primero se calcula el Δu_1 de cada nudo:

$$\Delta u_1^I = u_1^I(t) - u_1^I(0) \quad \text{con } I = 1, 2, 3, 4 \text{ nudo considerado} \quad 5-11$$

En la ecuación 5-11, $u_1^1(0)$ es la posición inicial del nudo I según la dirección x_1 , $u_1^1(t)$ es la posición del nudo I según la dirección x_1 en un cierto instante de tiempo t , dando Δu_1^1 el incremento de la posición del nudo I según la dirección x_1 para un cierto instante t .

Luego se obtiene la variación de estos desplazamientos respecto de x_1 , como se observa en la ecuación 5-12. Cabe aclarar que la separación entre los nudos en la dirección x_1 es L_c o ancho del módulo básico.

$$\frac{\Delta u_1^4 - \Delta u_1^3}{L_c} \text{ y } \frac{\Delta u_1^2 - \Delta u_1^1}{L_c} \quad 5-12$$

Estas ecuaciones representan la variación de los desplazamientos en la dirección x_1 respecto de la dirección x_1 de los nudos superiores e inferiores del módulo considerado. Se toma un promedio de estos valores y se lo asigna al nudo central (I), que es por donde pasa el contorno.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \left[\frac{\Delta u_1^4 - \Delta u_1^3}{L_c} + \frac{\Delta u_1^2 - \Delta u_1^1}{L_c} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad 5-13$$

Reemplazando la ecuación 5-11 en la 5-13, se puede llegar a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \left[\frac{(u_1^4(t) - u_1^3(t)) - (u_1^4(0) - u_1^3(0))}{L_c} + \frac{(u_1^2(t) - u_1^1(t)) - (u_1^2(0) - u_1^1(0))}{L_c} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad 5-14$$

De la misma forma se obtienen:

$$\frac{\Delta u_2^4 - \Delta u_2^3}{L_c} \text{ y } \frac{\Delta u_2^2 - \Delta u_2^1}{L_c} \quad 5-15$$

Que representan la variación de los desplazamientos en la dirección x_2 respecto de la dirección x_1 de los nudos superiores e inferiores del módulo considerado.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \left[\frac{(u_2^4(t) - u_2^3(t)) - (u_2^4(0) - u_2^3(0))}{L_c} + \frac{(u_2^2(t) - u_2^1(t)) - (u_2^2(0) - u_2^1(0))}{L_c} \right] \cdot \frac{1}{2} \quad 5-16$$

Una vez obtenidas las variaciones de los desplazamientos respecto de la dirección x_1 , se las multiplica por la proyección del vector de tracciones en cada dirección en cada nudo perteneciente al contorno.

Finalmente, utilizando la ecuación 5-9, se obtiene para cada nudo perteneciente al contorno la contribución de los dos términos, y utilizando la ecuación 5-6 se logra obtener la integral J multiplicando por $\Delta l = L_c$ que viene del proceso de integración de la integral de contorno.

5.3 Propagación de fisuras

En el MED una barra se rompe cuando la tensión a la que está solicitada sobrepasa la tensión crítica. Para seguir el camino de propagación se visualizan las configuraciones en diferentes tiempos del proceso y simplemente se monitorea la región donde se van rompiendo barras durante la simulación.

La velocidad de propagación se mide haciendo el cociente entre el avance de la punta de la fisura y el tiempo requerido para que este acontezca.

$$V_{\text{prop}} = \frac{\text{avance de la fisura}}{\Delta t} \quad 5-17$$

A modo de ejemplo en la figura 5-10 se visualiza como sería determinada esta velocidad de propagación en un caso particular. La figura a) representa la configuración del cuerpo para un tiempo t y la figura b) para un tiempo $t + \Delta t$. En c) se muestra en detalle cual sería la longitud que avanzó la fisura en el tiempo Δt . Se mide este avance de la fisura y aplicando la ecuación 5-17 se obtiene la velocidad de propagación. Cuanto más pequeño es el intervalo de tiempo en que se toman las figuras más nos acercamos a la velocidad instantánea.

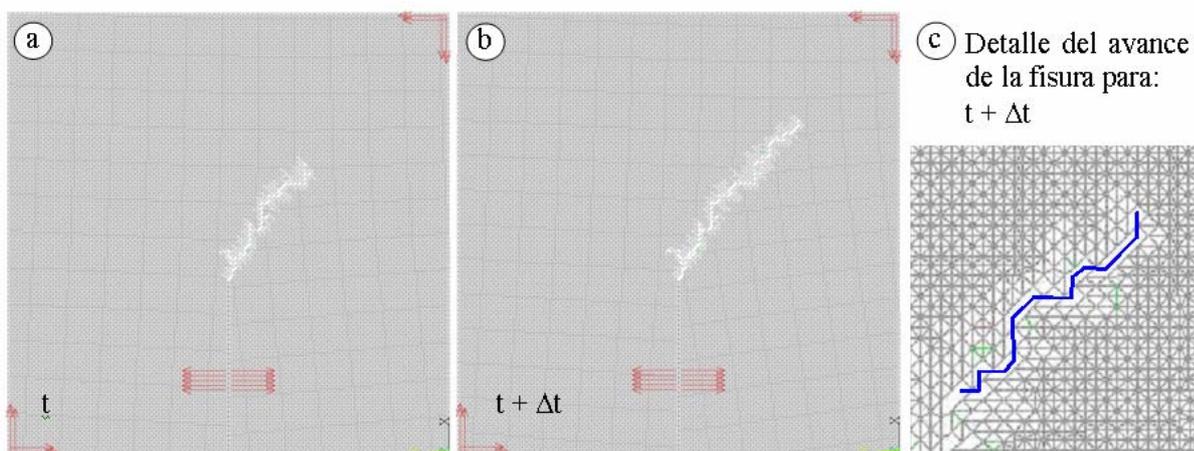


Figura 5-10 Módulo de contorno.

Una restricción que tiene el MED para medir las velocidades con esta metodología es que el mínimo Δt que se puede tomar está restringido a aquel en el cual la fisura propaga a través de un módulo, ya que es la mínima unidad observable.

Capítulo 6 – DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES ESTÁTICO, K

En este capítulo se presentan simulaciones numéricas realizadas con el MED, mostrándose la capacidad del mismo para la determinación de parámetros fractomecánicos estáticos.

Se realiza el cálculo del factor de intensidad de tensiones (FIT) estático, K, utilizando el criterio energético y/o el COD para placas con distintas configuraciones de fisuras en 2D y 3D, obteniéndose el estado tensional de las placas en estudio.

6.1 Cálculo del K estático para una placa con una fisura central

Se analiza el caso de una placa finita con una fisura central, con las dimensiones indicadas en la figura 6-1. Se aplican tensiones prescritas uniformes con una variación en el tiempo linealmente creciente en dos bordes opuestos de la placa, siendo el incremento de la carga lo suficientemente lento de modo que pueda considerarse un problema estático.

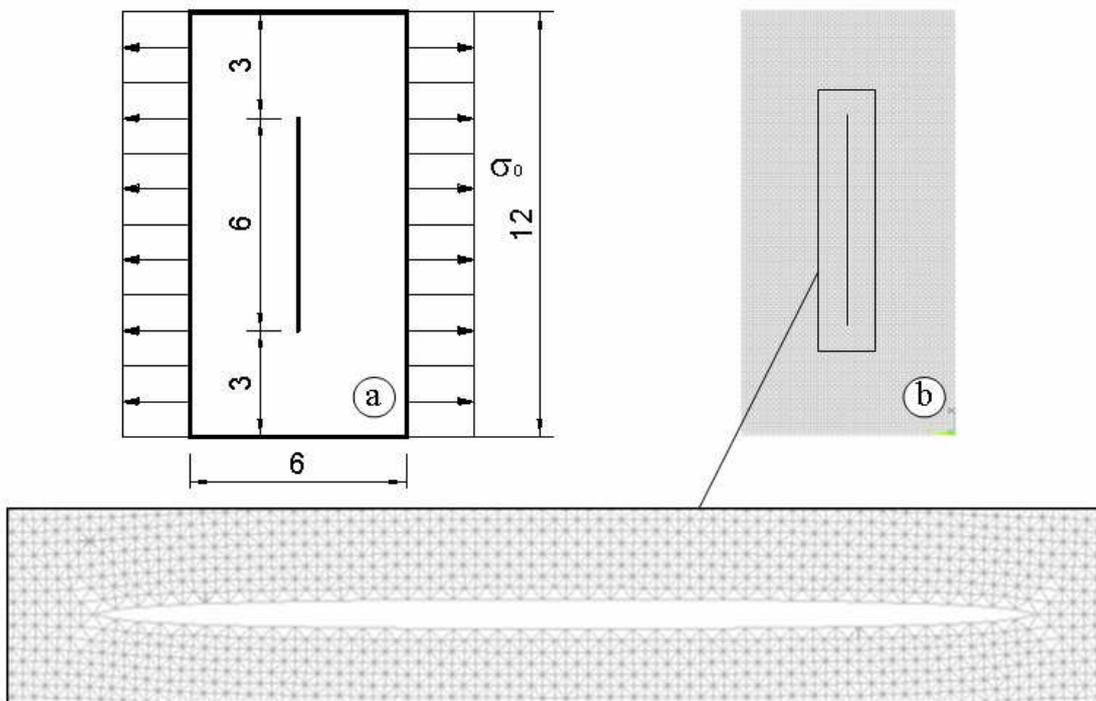


Figura 6–1 Esquema de la placa en estudio. a) Geometría de la placa, en mm. b) detalle con el modelo deformado, para observar la fisura.

En la Figura 6-2 se reproduce el gráfico de Rooke y Cartwright (1976), en el que se tienen los valores de K_I para placas con distintas geometrías normalizados versus el K de una placa con

dimensiones infinitas $K_0 = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$. El factor de intensidad de tensiones para la placa analizada, obtenido del gráfico para las relaciones $a/b=0.50$ y $b/h=0.50$, resulta $K_I/K_0 = 1.93$.

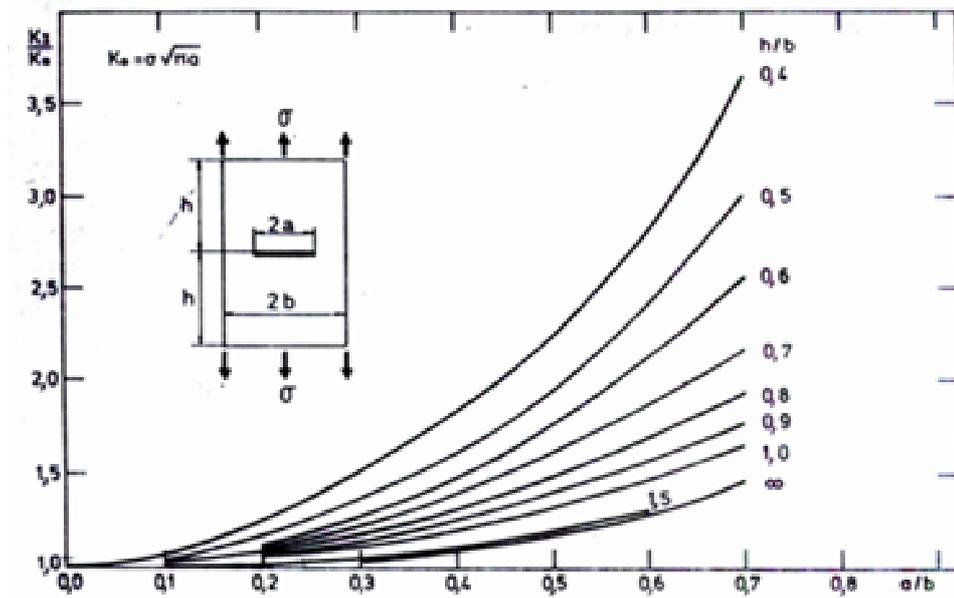
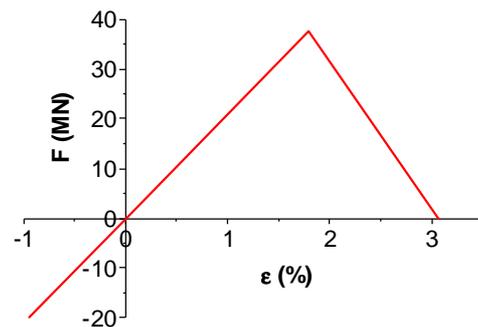


Figura 6–2 Factor de intensidad de tensiones para el caso analizado según Rooke y Cartwright (1976).

Las propiedades del material y los parámetros utilizados en el modelado con el MED se presentan en la tabla 6-1. También se muestra la relación constitutiva considerada para cada barra del modelo en este ejemplo.

Tabla 6–1 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	2100 MPa	Lc	$3.00 \cdot 10^{-4}$ m
ν	0.25	ν	0.25
ρ	908 kg/m^3	t	$1.0 \cdot 10^{-8}$ seg
G_f	500 J/m^2	ϵ_p	1.792 %



La placa mostrada en la figura 6-1 se modeló con 80×40 módulos y un módulo de espesor. La fisura fue construida aplicando la técnica descrita en la sección 5.1. Se restringieron los desplazamientos en la dirección transversal al plano de la placa, de forma tal que sea posible representar un estado plano de deformaciones.

Teniendo en cuenta las propiedades del material enunciadas en la tabla 6-1 y el valor de $K_I/K_0=1.93$ obtenido de la figura 6-2, es posible calcular el valor de la tensión crítica a partir

de ecuación 5-5. Esta tensión es la que producirá la propagación de la fisura, que resulta aproximadamente $\sigma = 4 \times 10^6 \text{ Pa}$. Estos valores servirán de comparación a los obtenidos con la simulación realizada con el MED.

6.1.1 Cálculo del K estático utilizando el método del balance energético

Como se explicó en el capítulo 5 (punto 5.2.1.) se realizaron dos simulaciones con tamaños de fisura levemente diferentes. Se obtuvo el G por medio de la ecuación 5-4 (o 5-2), y el FIT, K_I , normalizado por medio de la ecuación 5-5.

En la figura 6-3 se presentan los valores de las energías obtenidas para las dos simulaciones. Como las cargas fueron aplicadas lentamente la energía cinética de ambas placas es prácticamente nula, por eso no se aprecian en la figura.

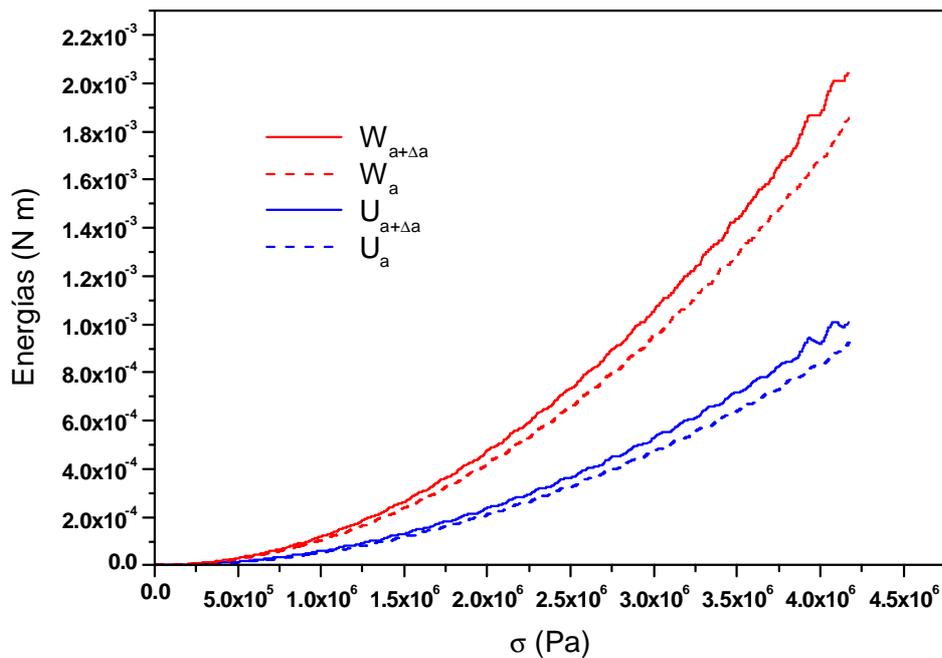


Figura 6–3 Energías elásticas (U) y Potencial de las fuerzas externas (W), para las dos configuraciones.

Haciendo la diferencia entre las energías de las placas con longitud de fisura a y longitud $a+\Delta a$, dividiéndolas por el aumento diferencial de área de la fisura ($dA = B \cdot da$) se obtiene la figura 6-4. En esta figura se observa que se cumple lo expresado en el ítem 5.2.1, que dice que por el teorema de Clapeyron, $dW/dA = 2 dU/dA$.

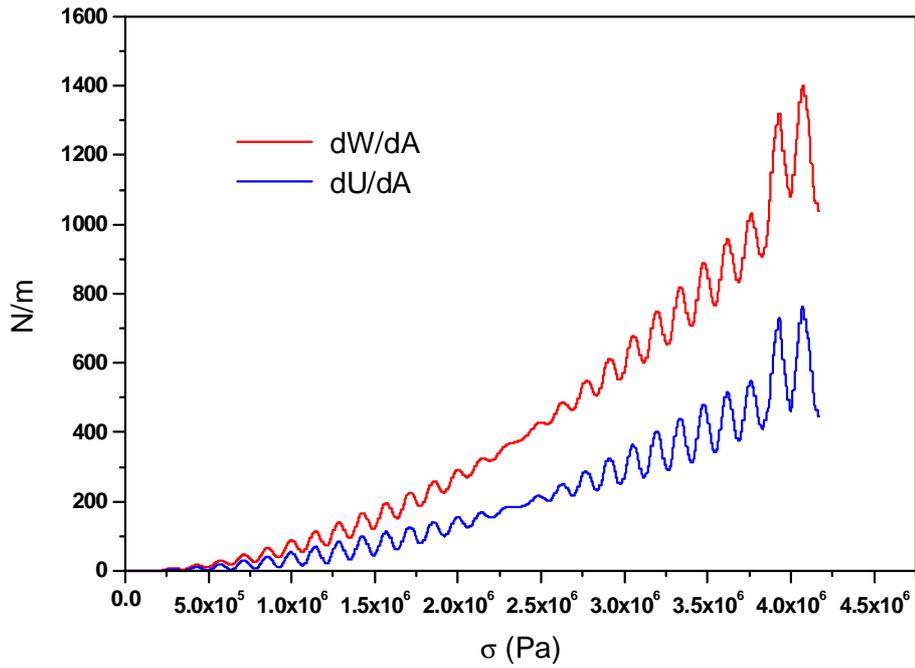


Figura 6-4 Variación de la energía elástica (U) y del potencial de las fuerzas externas (W), respecto del aumento del área de la fisura.

La figura 6-5 muestra el K_I normalizado y la variación de la energía específica de fractura G versus la tensión remota aplicada.

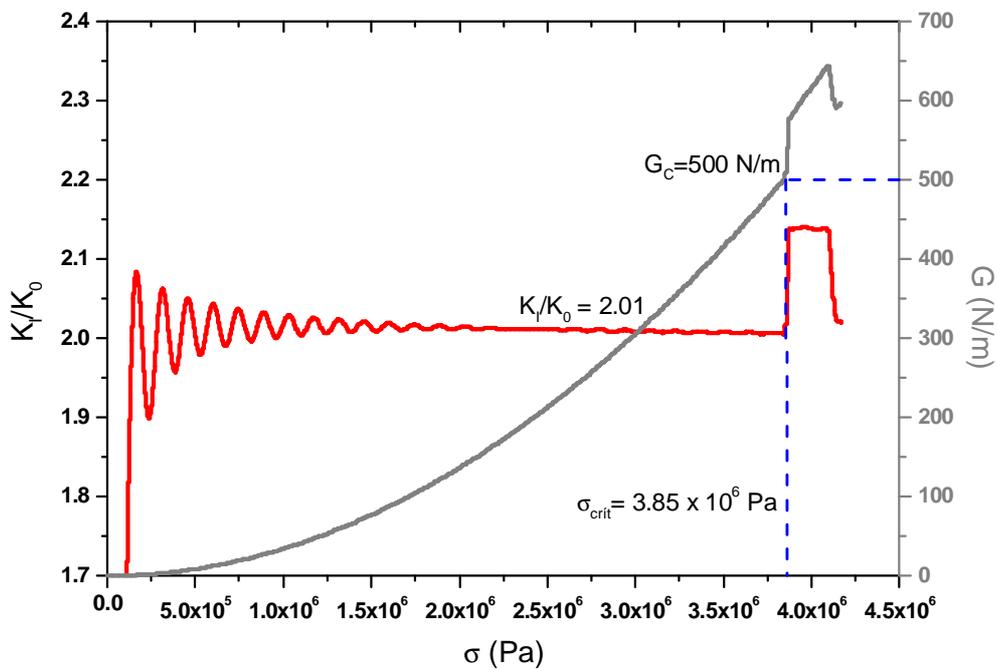


Figura 6-5 K_I estático normalizado y Variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada.

El valor $K_I/K_0 = 2.01$ obtenido con el método del balance energético ilustrado en la figura 6-5, resulta algo superior al valor teórico de referencia (1.93), con un error del 4.1%. Sin embargo, resultados obtenidos por Tech et al. (2003), con un mayor refinamiento del mallado ($L_c/a > 50$), muestran que el error cometido puede reducirse a valores inferiores al 2 %.

Aplicando el método del balance de energía para determinar el factor de intensidad de tensiones, la tensión crítica es 3.85×10^6 Pa, como se ilustra en la figura 6-5, este valor es levemente inferior al calculado según el gráfico de la figura 6-2 ($\sigma_{crít} = 4.0 \times 10^6$ Pa).

6.1.2 Cálculo del K estático utilizando el COD

Se determinaron con el MED los desplazamientos δ de pares de puntos enfrentados a ambos lados de la fisura, en las proximidades del extremo de la misma.

Utilizando la técnica descrita en el capítulo 5 (punto 5.2.2) se calcula el FIT y se lo normaliza con respecto a K_0 . El FIT normalizado versus tensión remota se grafica en la figura 6-6. En esta figura también se muestra la variación de energía específica de fractura G con la tensión remota aplicada.

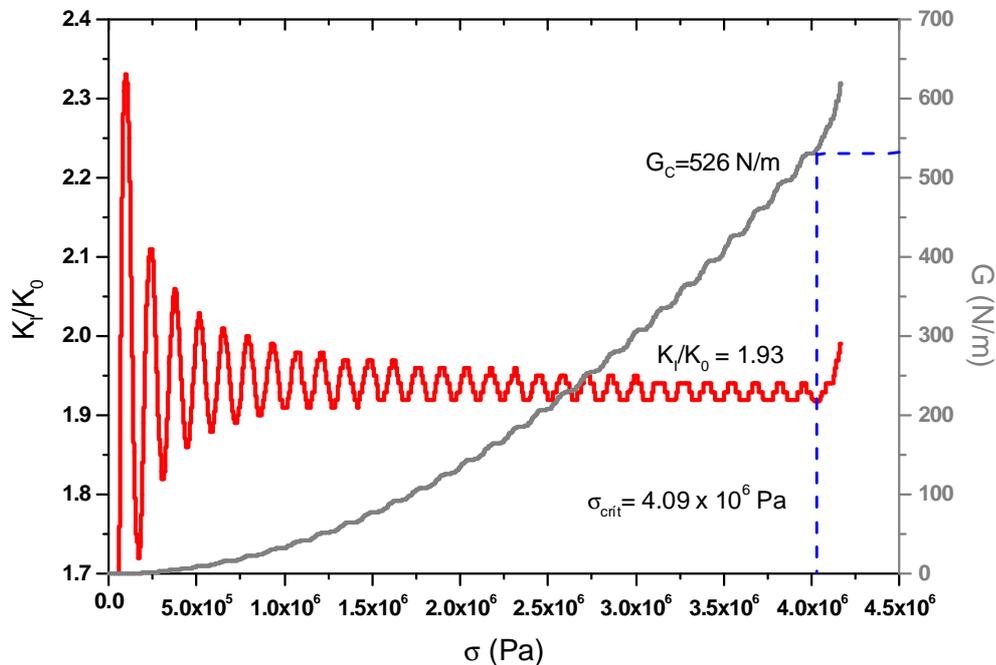


Figura 6–6 Factor de intensidad de tensiones normalizado y Variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada.

El valor obtenido de K_I/K_0 utilizando este método oscila alrededor de 1.93, que como se mencionó anteriormente es el valor teórico de referencia.

Como se puede observar en la figura 6-6 la tensión crítica es aproximadamente 4.08×10^6 Pa, valor prácticamente igual al teórico.

De la comparación con el ítem anterior queda clara la ventaja del COD sobre el método del balance energético, ya que con el mismo modelo, en el primero se tiene una mayor precisión, además de necesitar una sola simulación para obtener el resultado buscado.

6.1.3 Cálculo del K estático utilizando la integral J

Utilizando las ecuaciones 5-6 a 5-16 para contornos rectangulares de distinto tamaño con centro en la punta de la fisura se obtienen los resultados presentados en la figura 6-7. En esta se puede apreciar que el valor de K normalizado (K_I/K_0) presenta una pequeña variación en función del contorno analizado. La diferencia encontrada entre los valores de K_I/K_0 calculados para diferentes contornos es del orden del 5%, variación que se considera aceptable para el nivel de discretización utilizada.

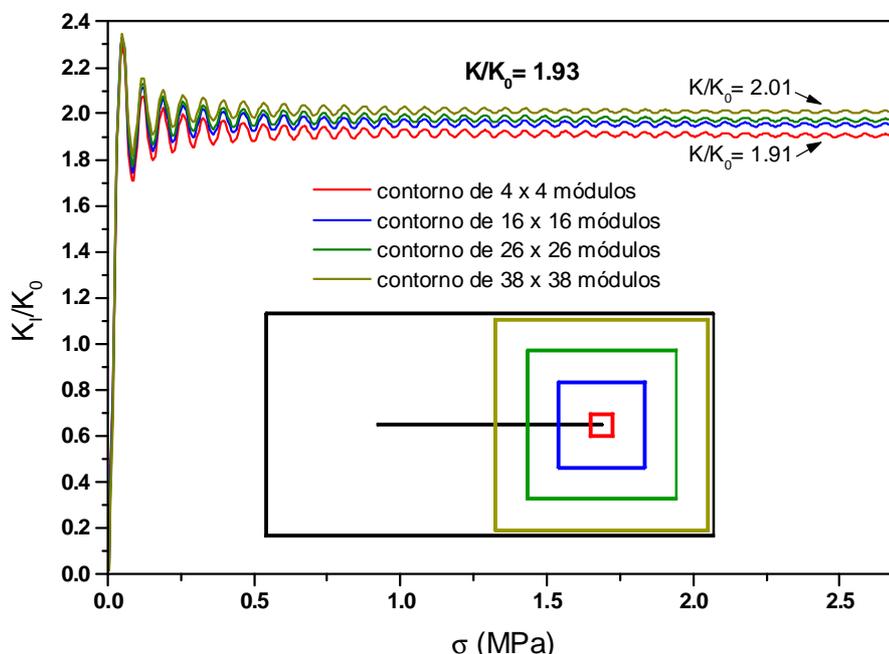


Figura 6-7 Factor de intensidad de tensiones normalizado utilizando la integral J analizada para distintos contornos. Placa de 80x40 módulos y longitud de la fisura de 40 módulos.

En la figura 6-8 se muestra el factor de intensidad de tensiones normalizado y variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada obtenida mediante la Integral J con un contorno de 4 x 4 módulos. En esta figura se observa concordancia con los valores obtenidos con las otras técnicas y con los de referencia.

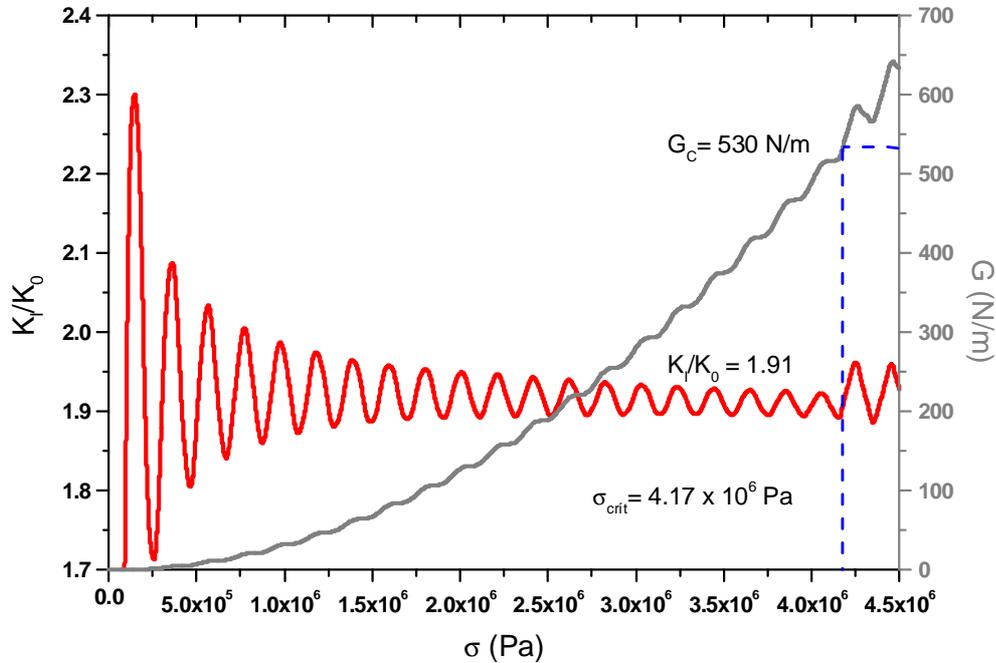


Figura 6–8 Factor de intensidad de tensiones normalizado y Variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada obtenida mediante la Integral J con un contorno de 4 x 4 módulos.

6.1.4 Comparación entre las diferentes técnicas implementadas en el MED

En la tabla 6-2 se presentan los resultados de los factores de intensidad de tensiones medidos con el MED utilizando las diferentes metodologías implementadas.

Tabla 6–2 Comparación entre las diferentes metodologías técnicas utilizadas para el Cálculo del FIT estático con el MED

	K/K ₀
Valor teórico Rooke y Cartwright	1.93
Balance energético (a+da) – (a)	2.01
COD	1.92
Integral J	1.96 ± 0.05

Como se observa en la tabla anterior no existe una diferencia importante entre las tres técnicas implementadas en el DEM, obteniéndose el K estático más cercano al valor teórico utilizando el COD.

6.1.5 Influencia de la velocidad de carga en K_I/K_0 versus tensión

Se calcularon los FIT normalizados K_I/K_0 , utilizando el COD, para distintas velocidades de aplicación de carga. Los mismos se grafican en la figura 6-9. Como se puede observar en esta figura, cuanto más lenta es la aplicación de la carga las oscilaciones son de menor amplitud siendo más fácil la identificación del valor del FIT, aunque el valor medio de estas oscilaciones es el mismo si las velocidades de carga no son muy elevadas. En contraposición, cuando menor es la velocidad de carga más tiempo de simulación es necesario. En base a este análisis se puede utilizar una velocidad de aplicación de cargas no tan baja, para disminuir el tiempo computacional necesario para la simulación, y se considera que el K estático como el promedio de los valores que forman una onda completa.

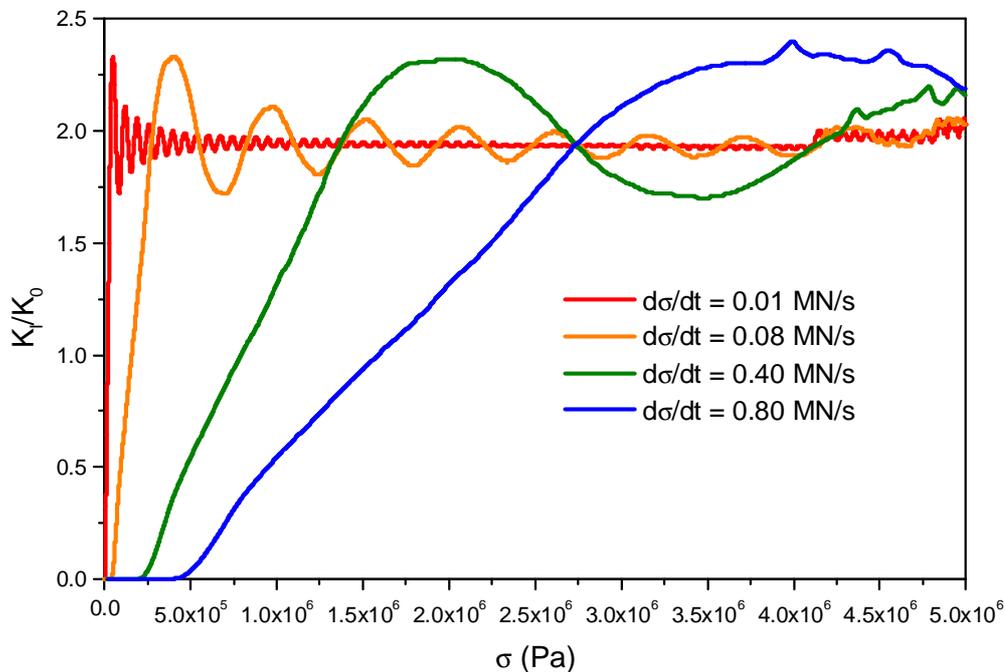


Figura 6-9 Influencia de la velocidad de carga para las curvas K_I/K_0 vs Tensión aplicada

6.1.6 Distribución de tensiones

En la figura 6-10 se puede observar la distribución de tensiones verticales y un detalle con las curvas de isotensiones en la punta de la fisura. Comparando la figura con la forma que tiene la zona plástica en las cercanías de la punta de la fisura, nos da una muy buena concordancia.

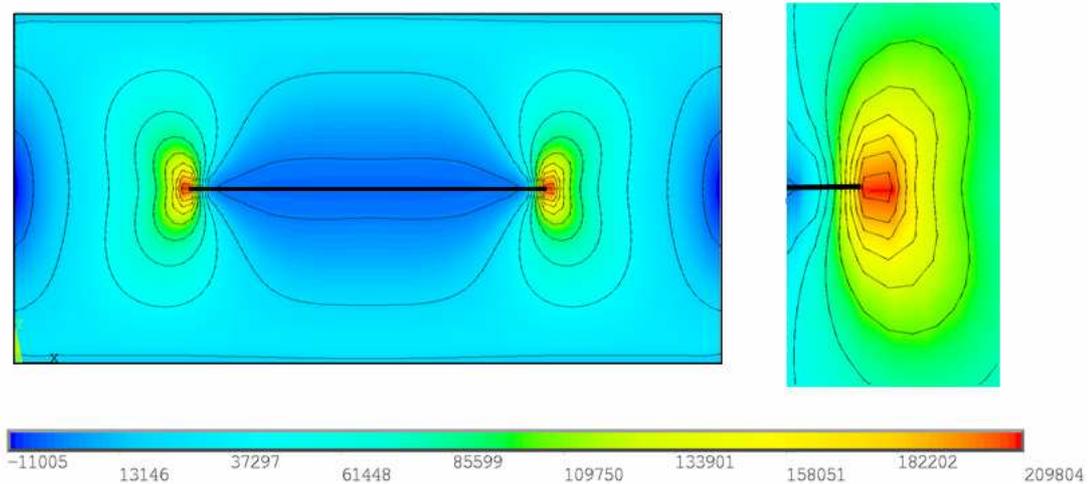


Figura 6–10 Distribución de tensiones verticales σ_{yy} y detalle de distribución de tensiones en la punta de la fisura (Pa).

6.2 Cálculo del K estático para un bloque con una fisura de sección circular

El valor del FIT para un bloque de dimensiones infinitas (o dimensiones de la fisura muy pequeñas en comparación con las dimensiones del bloque), con una fisura de sección circular que está sometido a tensiones de tracción remotas es uno de los problemas que tienen una solución cerrada en la mecánica de fractura. Según Anderson (2005), para un bloque como el de la figura 6-10, el factor de intensidad de tensiones vale:

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad 6-1$$

Como este es el caso más simple de un cuerpo fisurado en tres dimensiones, se utilizará el valor de K_I de la ecuación 6-1 para normalizar el FIT (K_0) en todos los problemas en 3D.

Por lo tanto para este primer ejemplo en 3D, el FIT normalizado para el bloque en estudio será igual a la unidad.

$$\frac{K_I}{K_0} = 1 \quad 6-2$$

Se modela con el MED un bloque con una fisura de sección circular de dimensiones finitas y se compara con los resultados teóricos. El bloque es cúbico de 30 módulos y a la mitad de la altura, en el medio de la sección del bloque, se colocó una fisura de sección circular de 5 módulos de radio, como se puede apreciar en la figura 6-11. Las propiedades del material y parámetros del modelo, iguales que en el ejemplo anterior, son los presentados en la tabla 6-1.

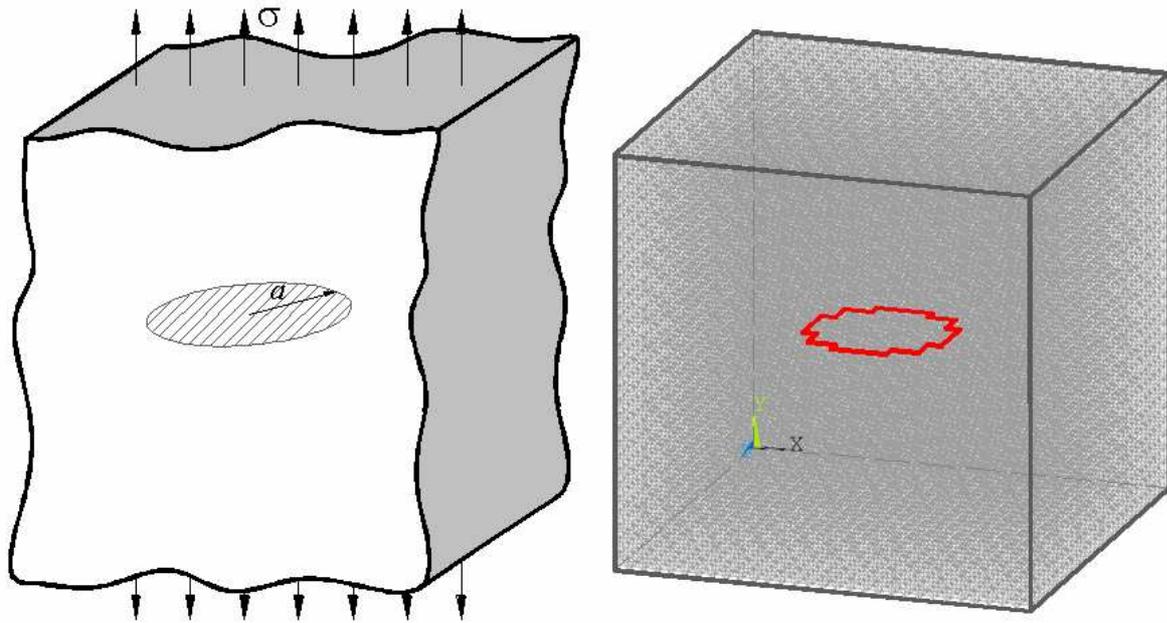


Figura 6–11 Esquema del bloque de dimensiones infinitas con una fisura de sección circular sometido a una tensión remota de tracción σ y bloque modelado con MED donde se marca la forma de la fisura modelada.

Como se puede observar en la figura 6-12, los resultados obtenidos oscilan alrededor del valor teórico, para un bloque de dimensiones infinitas y carga estática, que se mencionó anteriormente. Estas oscilaciones se dan debido a la velocidad de aplicación de la carga, que a pesar de ser lenta sigue generando perturbaciones.

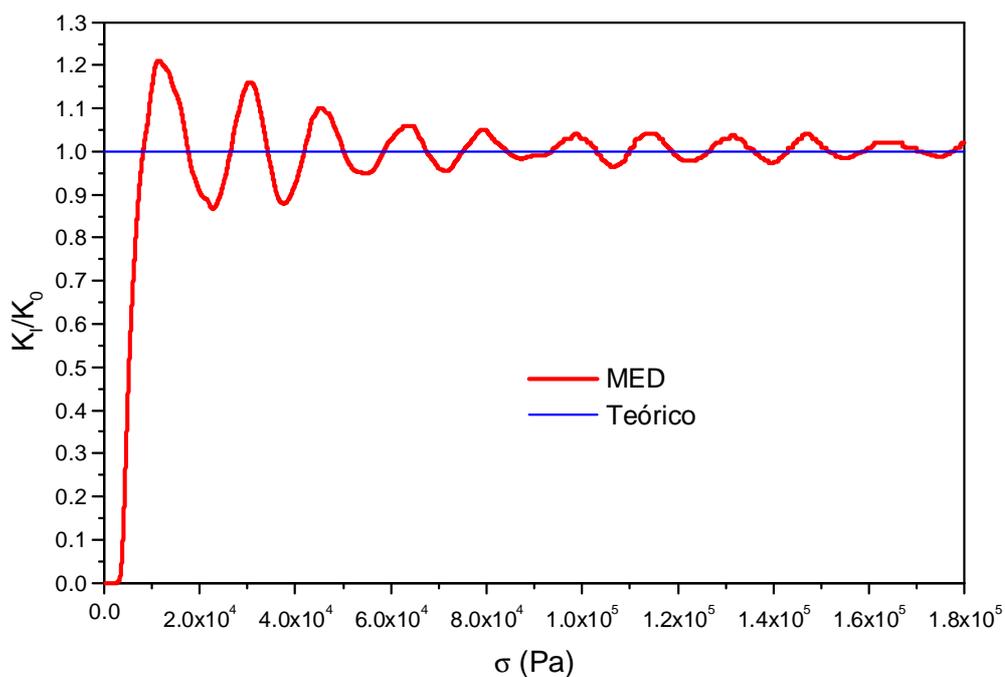


Figura 6–12 Factor de Intensidad de tensiones normalizado.

En las figuras 6-13 se muestran las distribuciones de tensiones verticales (σ_{yy}) para dos cortes realizados en el bloque, el primero perpendicular a la fisura por el medio del bloque, siguiendo la dirección de la tensión aplicada, y el segundo coincidente con el plano de la fisura, es decir, perpendicular a las tensiones aplicadas. En esta última se puede observar que la distribución de tensiones no es exactamente la misma en todas las direcciones. Esto se debe a que la fisura no tiene una sección perfectamente circular ya que se modela un círculo con elementos de sección cuadrada y este modelado crea irregularidades que generan concentraciones de tensiones.

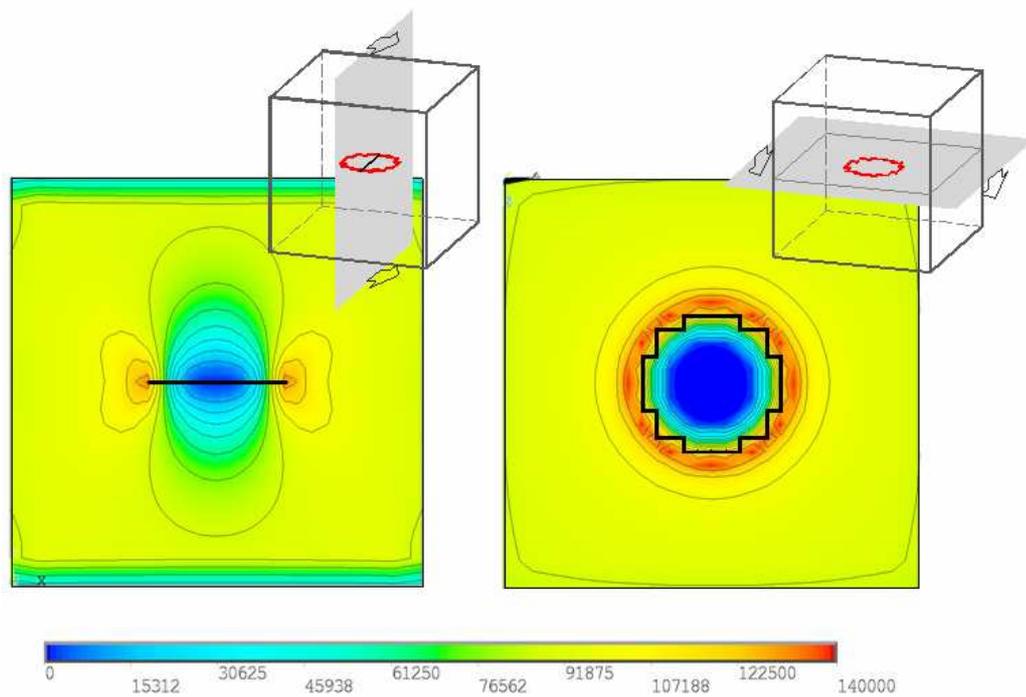


Figura 6–13 Corte perpendicular y coincidente con la fisura donde se grafican las distribuciones de tensiones verticales σ_{yy} (Pa).

En la figura 6-14 se presentan superficies de isotensiones que ayudan a dar una imagen tridimensional de la distribución de tensiones. El gráfico de la derecha es una superficie que se encuentra adentro de las superficies graficadas a la izquierda, más cercana a la fisura.

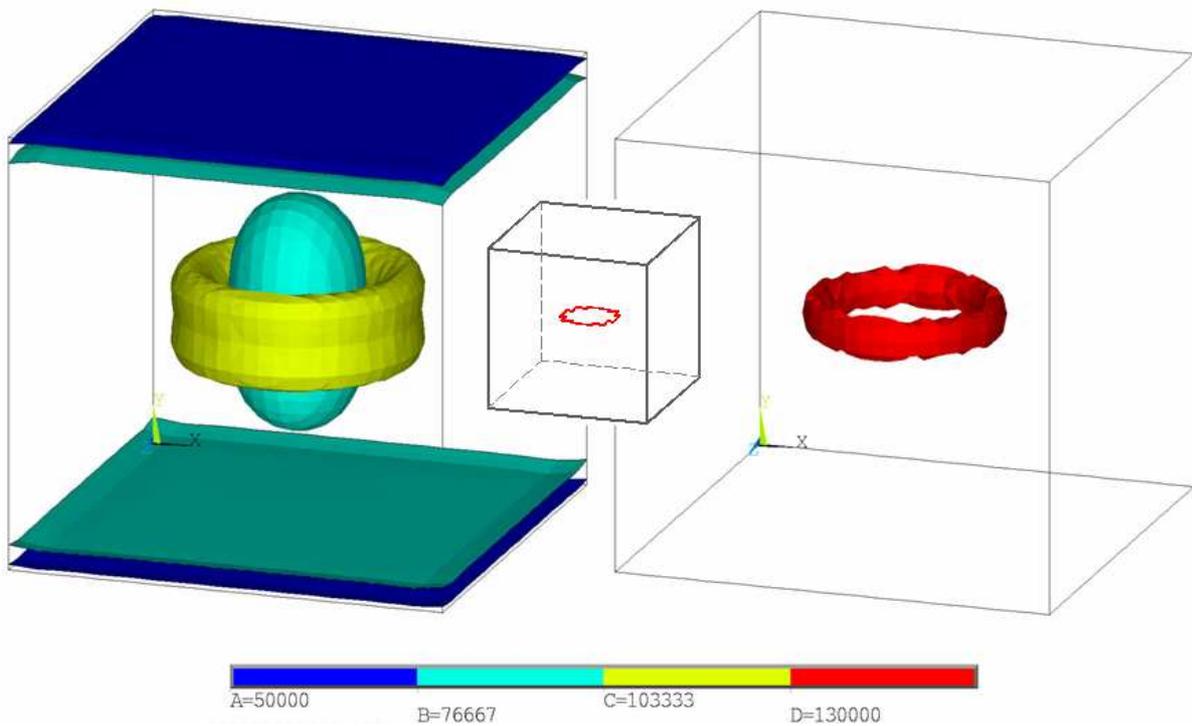


Figura 6–14 Esquema de superficie de isotensiones σ_{yy} (Pa). La figura de la derecha se encuentra contenida en la de la izquierda, fue separada para mejorar la apreciación.

6.3 Cálculo del K estático para un bloque con una fisura de sección semielíptica

El cálculo del factor de intensidad de tensiones para el caso de un prisma con una fisura de sección semielíptica también posee solución teórica, Anderson (2005). Según este autor, el FIT para este caso viene dado por:

$$K_I = \sigma_m \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{Q}} \cdot F\left(\frac{a}{t}, \frac{a}{c}, \frac{c}{W}, \phi\right) \quad 6-3$$

Donde:

$$Q = 1 + 1.464 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{1.65} \quad 6-4$$

$$F = \left[M_1 + M_2 \cdot \left(\frac{a}{t}\right)^2 + M_3 \cdot \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] \cdot f_\phi \cdot f_w \cdot g \quad 6-5$$

$$M_1 = 1.13 - 0.09 \cdot \frac{a}{c} \quad 6-6$$

$$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \frac{a}{c}} \quad 6-7$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1.0}{0.65 + \frac{a}{c}} + 14 \cdot \left(1.0 - \frac{a}{c}\right)^{24} \quad 6-8$$

$$f_\phi = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \right]^{1/4} \quad 6-9$$

$$f_w = \left[\sec \left(\frac{\pi \cdot c}{2 \cdot W} \sqrt{\frac{a}{t}} \right) \right]^{1/2} \quad 6-10$$

$$g = 1 + \left[0.1 + 0.35 \cdot \left(\frac{a}{t}\right)^2 \right] \cdot (1 - \sin \phi)^2 \quad 6-11$$

Como vamos a comparar el factor de tensiones normalizado, a K_I lo dividiremos por el K_0 definido en la ecuación 6-1 $\left(K_0 = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \right)$.

Las variables mencionadas en las ecuaciones anteriores se representan en la figura 6-15.

En la figura 6-15 se muestra además el modelado realizado con el MED, donde el bloque se formó con 30 módulos de ancho ($2W = 30$ módulos) y 15 de espesor (t), siendo la altura del mismo también de 30 módulos. La semielipse fue realizada con 10 módulos sobre el eje mayor (c) y 7 sobre el menor. Se midió el FIT en la dirección del eje menor de la elipse, es decir se utilizó $\theta = 90^\circ$ en las fórmulas anteriores.

Seguendo el esquema de la figura 6-15 se colocó una tensión prescrita en la cara superior del bloque y se restringieron todos los desplazamientos de la inferior. Se aplicó dicha tensión con una ley de crecimiento lineal muy lenta para no generar fuerzas de inercia. Las propiedades del material modelado son las mismas que las de los ejemplos anteriores (tabla 6-1).

Reemplazando estos valores en las fórmulas anteriores se obtiene:

$$\frac{K_I}{K_0} \phi=90^\circ = 1.549 \quad 6-12$$

Utilizando el COD, y midiendo los desplazamientos en un plano coincidente con el eje menor de la elipse, se obtuvieron los resultados representados en la figura 6-16.

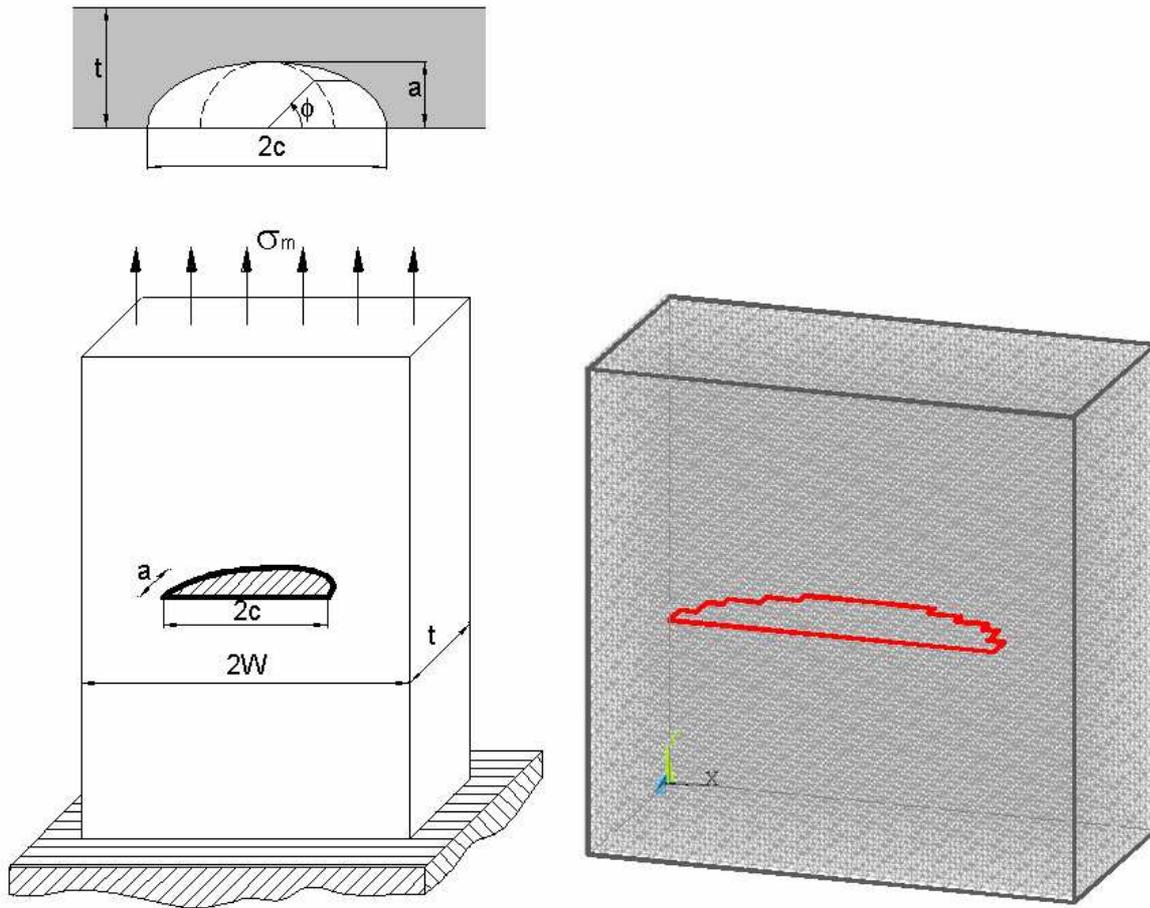


Figura 6-15 Esquema del bloque donde se indican las dimensiones, y Vistas del bloque modelado con el MED.

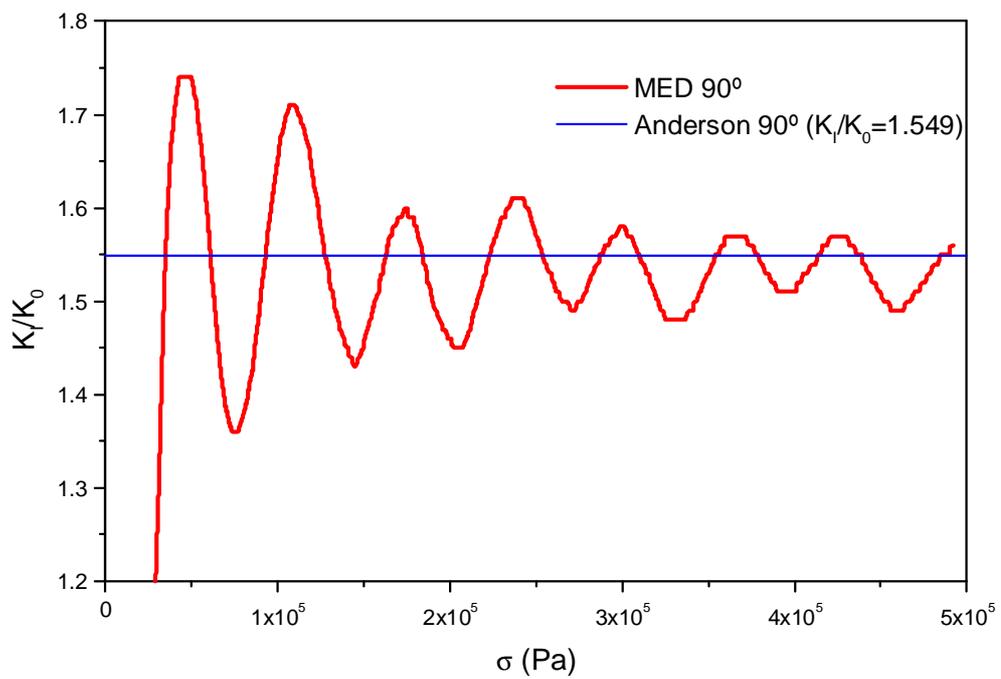


Figura 6-16 FIT normalizado versus tensión en la dirección del eje menor de la elipse (90°).

En la figura 6-16 se observa una buena correlación entre los valores obtenidos con el MED y el valor teórico propuesto por Anderson (2005).

En la figura 6-17 se presentan una vista frontal y dos cortes, perpendicular (derecha) y coincidente con la fisura (abajo). En esta figura se puede observar la distribución de tensiones verticales y la concentración que se genera en el borde de la fisura.

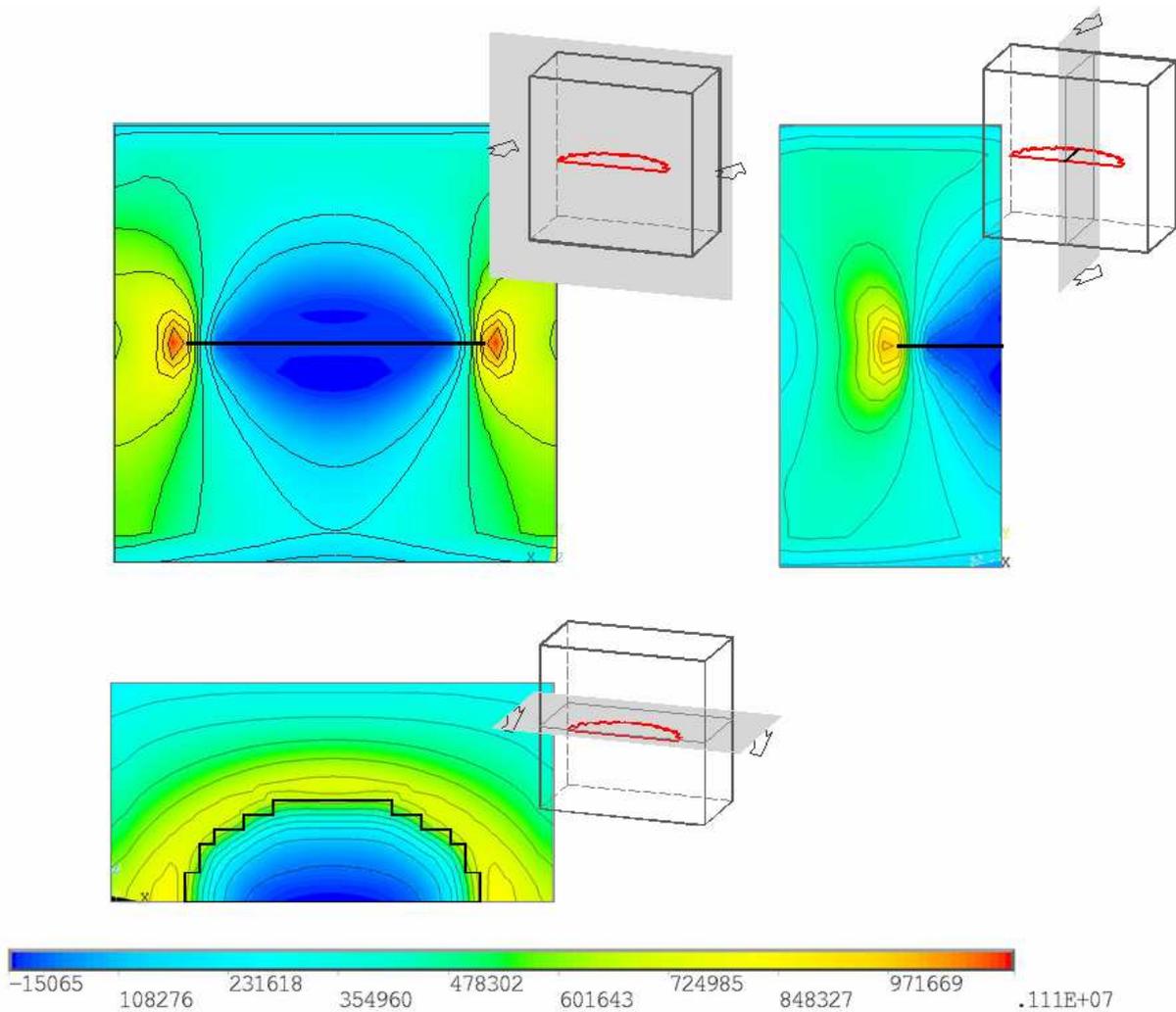


Figura 6–17 Esquema de isotensiones σ_{yy} , vista y cortes, de un bloque con una fisura de sección semielíptica (Pa).

En la figura 6-18 se muestra una figura del bloque en 3D en donde se grafican superficies de isotensiones. Esta figura da una mejor idea de cómo es la distribución de las tensiones en el cuerpo. También se puede observar la concentración de tensiones alrededor de la punta de la fisura, la superficie de tensión más elevada (roja) se encuentra rodeando el borde de la fisura, mientras que en el resto del cuerpo se distribuyen las superficies de menor tensión.

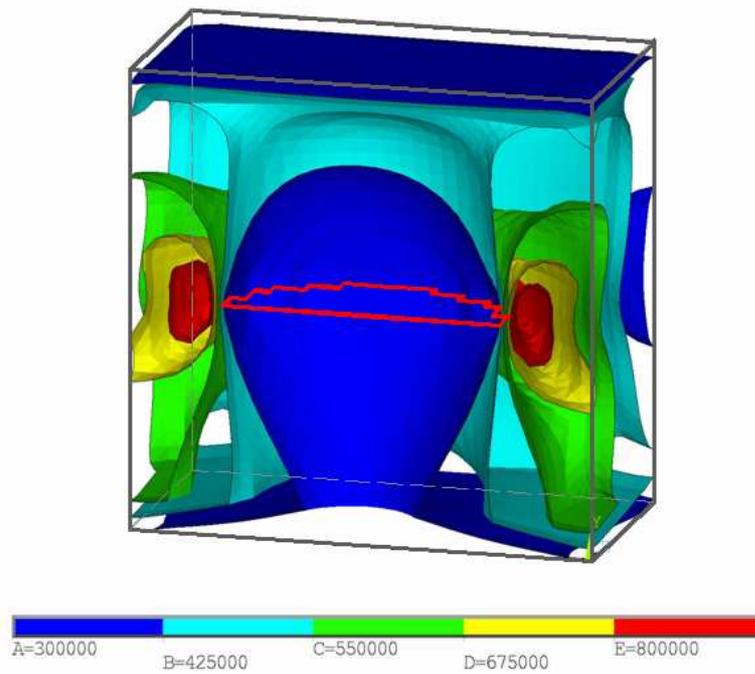


Figura 6–18 Esquema tridimensional de superficies de isotensiones σ_{yy} en bloque con una fisura de sección semielíptica (Pa).

Con los ejemplos presentados en este capítulo se puede concluir que el MED es capaz de medir los factores de intensidad de tensiones estáticos en problemas de dos y tres dimensiones.

Capítulo 7 - DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES DINÁMICO, K_d

En este capítulo se presentan distintas simulaciones numéricas realizadas con el MED, mostrándose la capacidad del mismo para la determinación de parámetros fractomecánicos dinámicos y la determinación de propagación de ondas de tensión y distribuciones de tensiones.

Se determina el FIT dinámico, K_d , y la distribución de tensiones para placas con distintas configuraciones de fisuras en 2D y 3D. Todos los resultados obtenidos son contrastados con valores teóricos y/o experimentales disponibles en la bibliografía.

7.1 Cálculo del K dinámico para una placa con una fisura central

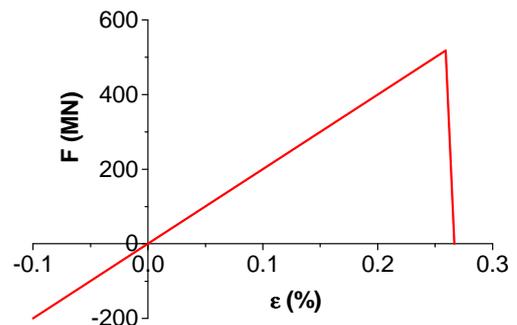
Se propone calcular el FIT dinámico normalizado K_{Id}/K_0 a partir de los métodos del balance energético y el COD.

En este ejemplo se analiza una placa finita con una fisura central, siendo las dimensiones indicadas en la figura 7-1. Sobre la misma se aplica una tensión prescrita constante a través del tiempo (Heaviside) de $\sigma_0 = 0.4 \times 10^8$ Pa, y se considera el problema como de estado plano de deformaciones.

Se modeló la placa con 266 módulos de largo por 134 de ancho y uno de espesor, siendo la fisura 30 módulos de longitud ($2a$). Las propiedades del material y los parámetros utilizados en el modelo se presentan en la tabla 7-1. También se presenta la relación constitutiva elemental de cada barra utilizada en el modelo.

Tabla 7-1 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	200 GPa	Lc	$1.50 \text{ E}^{-4} \text{ m}$
ν	0.20	ν	0.25
ρ	5000 kg/m^3	t	$1.0 \text{ E}^{-8} \text{ seg}$
G_f	300 J/m^2	ϵ_p	0.259 %



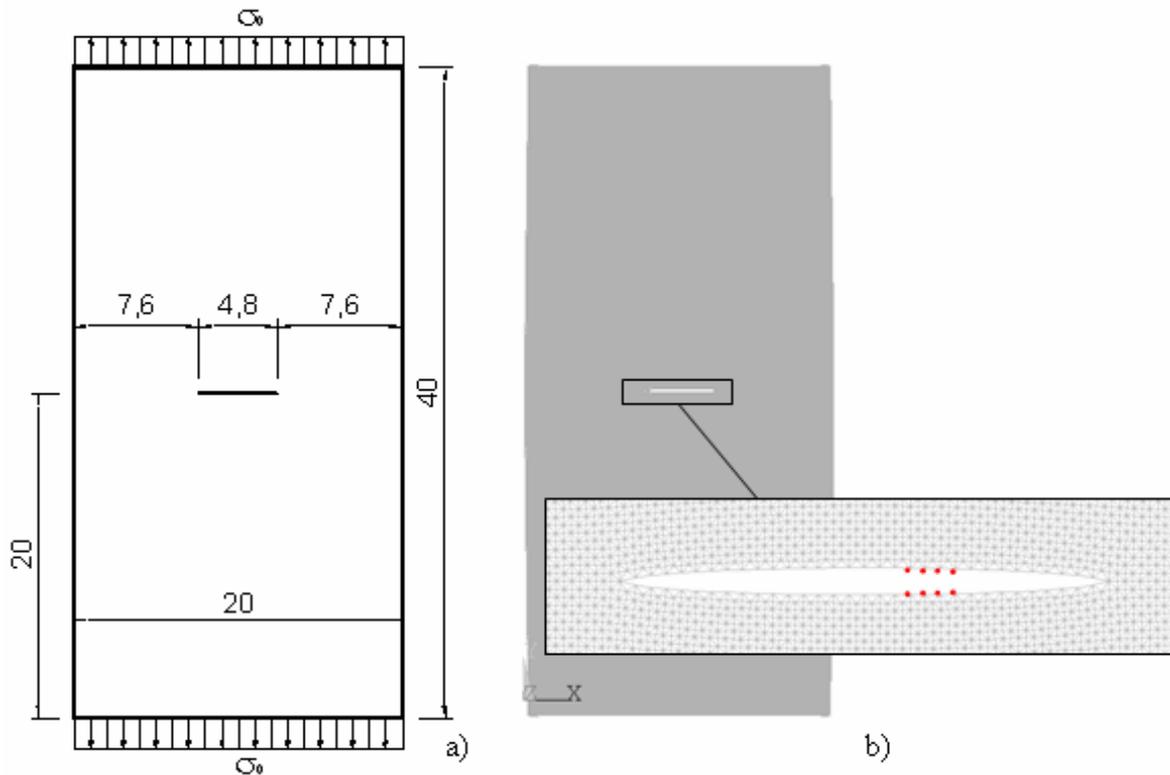


Figura 7-1 Esquema de la placa en estudio. a) Geometría de la placa, en mm. b) detalle modelo con MED ya deformado, para poder observar la fisura.

El Poisson del problema es 0.2, pero en la simulación con el MED se tomó 0.25, como se aprecia en la tabla 7-1. Se hace esto porque debido al arreglo cúbico básico adoptado en la formulación del MED utilizada en este trabajo, únicamente se obtiene una relación perfecta entre un material isótropo y el simulado cuando el Poisson es 0.25, como fue explicado con anterioridad. Si se coloca otro valor de Poisson en el modelo existen diferencias en los términos de corte.

7.1.1 Cálculo del K dinámico utilizando el método del balance energético

Como se explicó en el capítulo 5 (punto 5.2.1.) se realizaron dos simulaciones con tamaños de fisura levemente diferentes. Se obtuvo el G por medio de la ecuación 5-2, y el FIT dinámico normalizado por medio de la ecuación 5-5.

En la figura 7-2 se muestra cada término del balance energético planteado en la ecuación 5-2. En esta figura se observa que hasta que las ondas de tensiones P alcanzan la fisura (t_1) no tienen diferencias entre las dos configuraciones (con longitudes de fisura a y $a+da$). A partir de este momento comienza a existir diferencia entre la variación de energía elástica (dU/da) y

la variación de la energía cinética (dK/da), ya que las diferencias entre las dos configuraciones son notadas por las ondas elásticas que se mueven por el cuerpo.

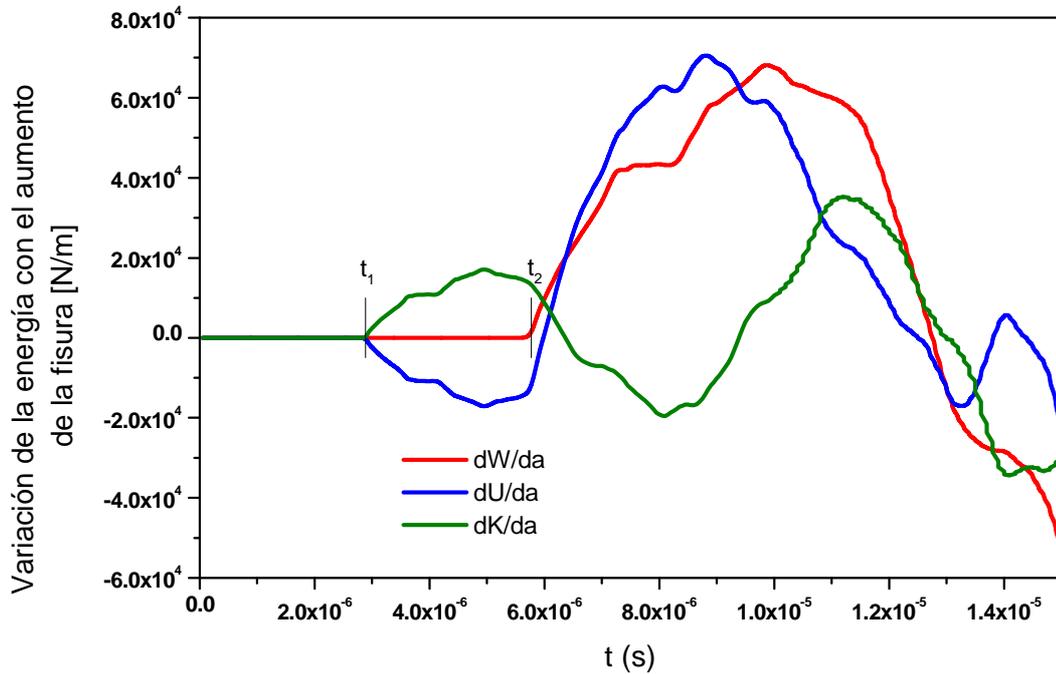


Figura 7-2 Términos que componen el balance energético.

Cuando las ondas de tensiones reflejadas en las superficies de la fisura llegan al borde nuevamente ($t_2 = 2t_1$), la variación del potencial de las fuerzas externas (dW/da) deja de ser nulo. Esto quiere decir que se comienza a captar que las deformaciones en los bordes de las placas difieren debido a la diferencia de rigidez dada por fisuras de longitudes diferentes. Esta explicación se ratifica con la ilustración del comportamiento de las ondas de tensiones dentro de la placa que se encuentra en la figura 7-5.

En la figura 7-3 se presenta el valor de K_{Id}/K_0 obtenido a partir del balance energético mostrado en la figura 7-2. También se colocaron los FIT normalizados obtenidos colocando distintos valores de amortiguamiento para disminuir o incluso anular las fuerzas de inercia. En esta figura se observa claramente que el valor de K_{Id}/K_0 varía de aproximadamente cero para el análisis dinámico (con amortiguamiento $D_f = 0$), hasta el valor del FIT normalizado estático (amortiguamiento $D_f = 1000000$).

Como se presentó en el trabajo de Barrios D'Ambra et al. (2006), utilizando el gráfico de Rooke y Cartwright (1976) que fue reproducido en la figura 6-2, el FIT estático normalizado para esta placa resulta $K_I/K_0 = 1.05$.

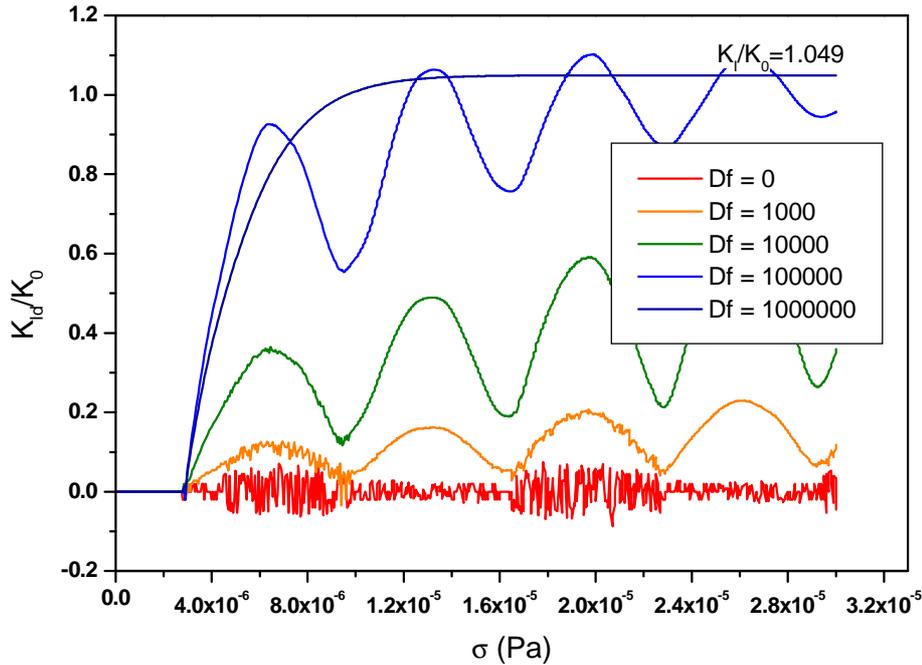


Figura 7-3 K_{Id} normalizado para distintos valores de amortiguamiento (Df).

En la figura 7-3 también se observa que el tiempo para el cual se comienzan a tener valores, coincide con el que las ondas de tensiones P llegan a la fisura (t_1 en figura 7-2).

En la figura queda claro que el FIT dinámico normalizado es prácticamente nulo. Esto se explica considerando las ondas de tensión que se desplazan por el cuerpo generando perturbaciones de las tensiones en las proximidades de la punta de la fisura. Como el K es un parámetro local resulta imposible medirlo mediante un balance global de energías de toda la placa, en el caso de tener un movimiento de ondas de tensión elásticas en la misma.

De esta forma queda demostrado que no es posible medir el G o K dinámico mediante la técnica de avance elemental de la fisura considerando el balance energético de toda la placa (ecuación 2-23).

7.1.2 Cálculo del K dinámico utilizando el COD

A continuación se realiza el cálculo del factor de intensidad de tensiones dinámico normalizado para el Modo I de cargas obtenido a partir de la determinación del COD.

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado para obtener el K_I estático, se calcula el valor de K_I en función del tiempo a partir de los valores medios de K_{Id}/K_0 calculados con la ecuación 3-6.

En la figura 7-4 se presentan los resultados en términos del K_{Id}/K_0 en función del tiempo. En esta figura es posible observar que los resultados logrados con el MED aplicando el COD tienen una muy buena concordancia con los obtenidos por Fedelinski et al. (1993), que utilizó elementos de contorno, Domínguez y Gallego (1992) con elementos de contorno en el dominio del tiempo y Chen (1975) que resolvió este problema con diferencias finitas.

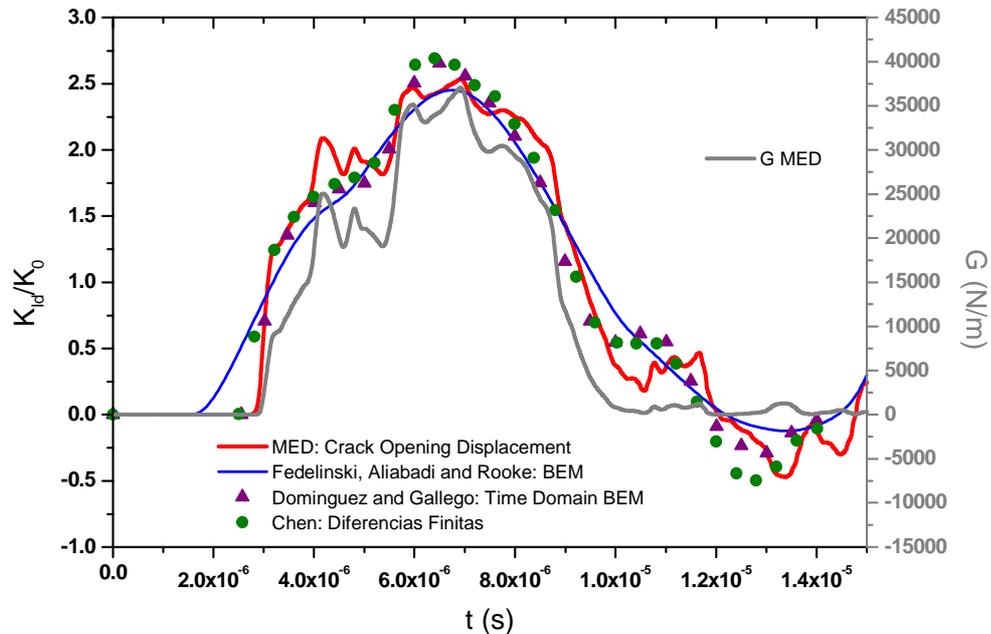


Figura 7-4 Comparación de resultados en términos del K dinámico vs tiempo obtenidos en este trabajo y los obtenidos por otros autores. G dinámico medido con el MED a partir del COD.

En la figura 7-4 se puede observar que para tiempos menores a $2.9 \mu s$ el FIT es nulo, y que el primer pico se da para un tiempo cercano a la llegada de las ondas de Rayleigh a la punta de la fisura ($5.4 \mu s$). Luego la interacción entre las distintas ondas de tensión se vuelve muy compleja.

7.1.3 Cálculo del K estático utilizando la integral J

De la misma forma que se realizó el cálculo de K estático por medio de la integral J (6.1.3), se realiza ahora el cálculo del K dinámico.

En la figura 7-5 se observa que a medida que se disminuye el tamaño de los contornos rectangulares los valores se aproximan a los resultados obtenidos con el COD y por otros autores (Fedelinski et al., 1993; Domínguez y Gallego, 1992; Chen, 1975). Para poder realizar una mejor comparación, se grafica en la figura 7-6 el valor de J realizando una regresión

lineal para el contorno tendiendo a cero y se lo compara con resultados obtenidos con el COD y por otros autores.

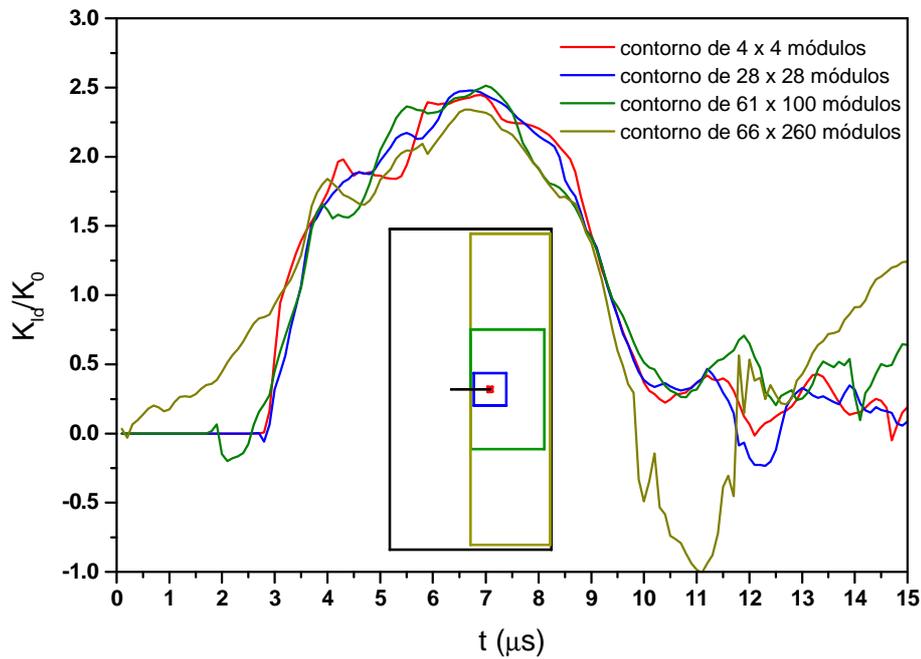


Figura 7-5 FIT dinámico normalizado calculado con la integral J versus tiempo para distintos contornos.

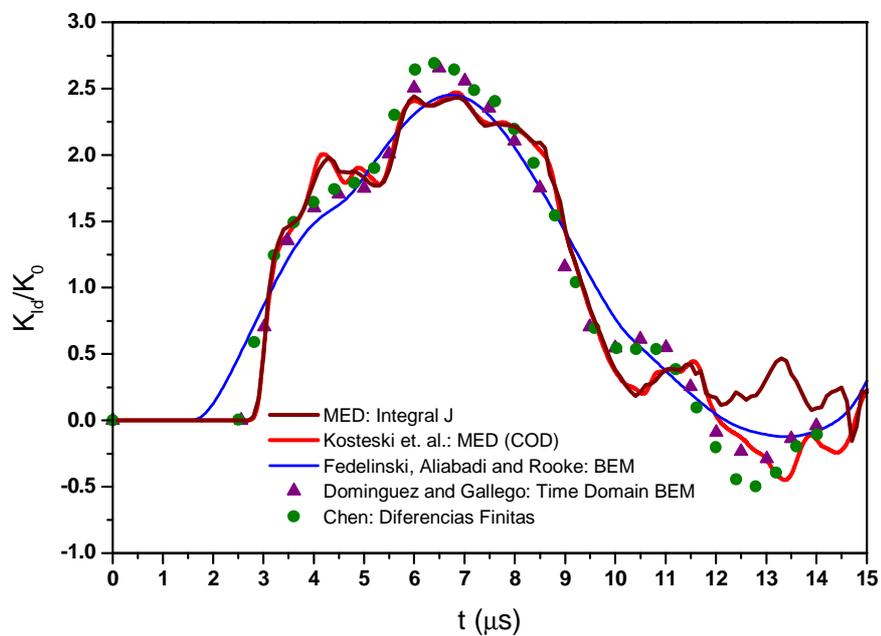


Figura 7-6 Comparación de resultados en términos del K dinámico calculado con la integral J vs tiempo obtenidos en este trabajo y los obtenidos por otros autores.

En esta última figura se puede apreciar que a partir de los 12 μs la curva obtenida con la Integral J vuelve a subir y no baja como lo hacen las otras (se observa que si se cambia el

signo en esta parte de la curva los resultados obtenidos coinciden con las de referencia y con los obtenidos con el COD). A partir de este tiempo la fisura comienza a cerrarse, por lo que el K es negativo. Cuando calculamos el valor de J en la metodología aquí implementada perdemos el signo del integrando. Esta limitación de la implementación será foco de futuros estudios.

7.1.4 Distribución de tensiones

En la figura 7-7 se presentan las distribuciones de tendones verticales σ_{yy} para distintos tiempos relacionada con la curva FIT normalizada versus el tiempo. En los primeros instantes de tiempo se observa como las ondas de tensiones se mueven paralelas a los bordes donde se aplicó la carga. Estas ondas llegan a la fisura en un tiempo de $2.85 \mu s$, como se puede observar en la figura 7-5, que coincide con el tiempo que tardan en llegar a la fisura la ondas de compresión ($2.89 \mu s$) cuya velocidad es de 6928 m/s (ecuación 2-19) considerando $\nu = 0.25$. Los resultados de referencia utilizaron un Poisson de $\nu = 0.3$, por lo que estas ondas tardan $2.73 \mu s$ en llegar a la fisura. Hasta un tiempo de $70 \mu s$ las tensiones en la punta de la fisura van aumentando como se observa en las figuras 7-4 a 7-7.

El FIT es un parámetro que describe las condiciones en la punta de la fisura (tensiones, deformaciones, etc.), la figura 7-7 muestra que las tensiones en las cercanías de la punta de la fisura están relacionadas en forma coherente con variación del FIT dinámico con respecto del tiempo. Se encuentran las mayores tensiones en la cercanía de la punta de la fisura para tiempos entre 6 y $8 \mu s$ y valores de tensiones muy bajos y hasta negativos para tiempos entre 12 y $14 \mu s$.

En la figura 7-8 se muestra un detalle de las tensiones cercanas a la punta de la fisura para un tiempo de $6 \mu s$, en donde se observa una buena concordancia con la forma que tiene la zona plástica (relacionada con la tensión de fluencia) en las proximidades de la punta de la fisura presentada en la bibliografía (Anderson, 2005).

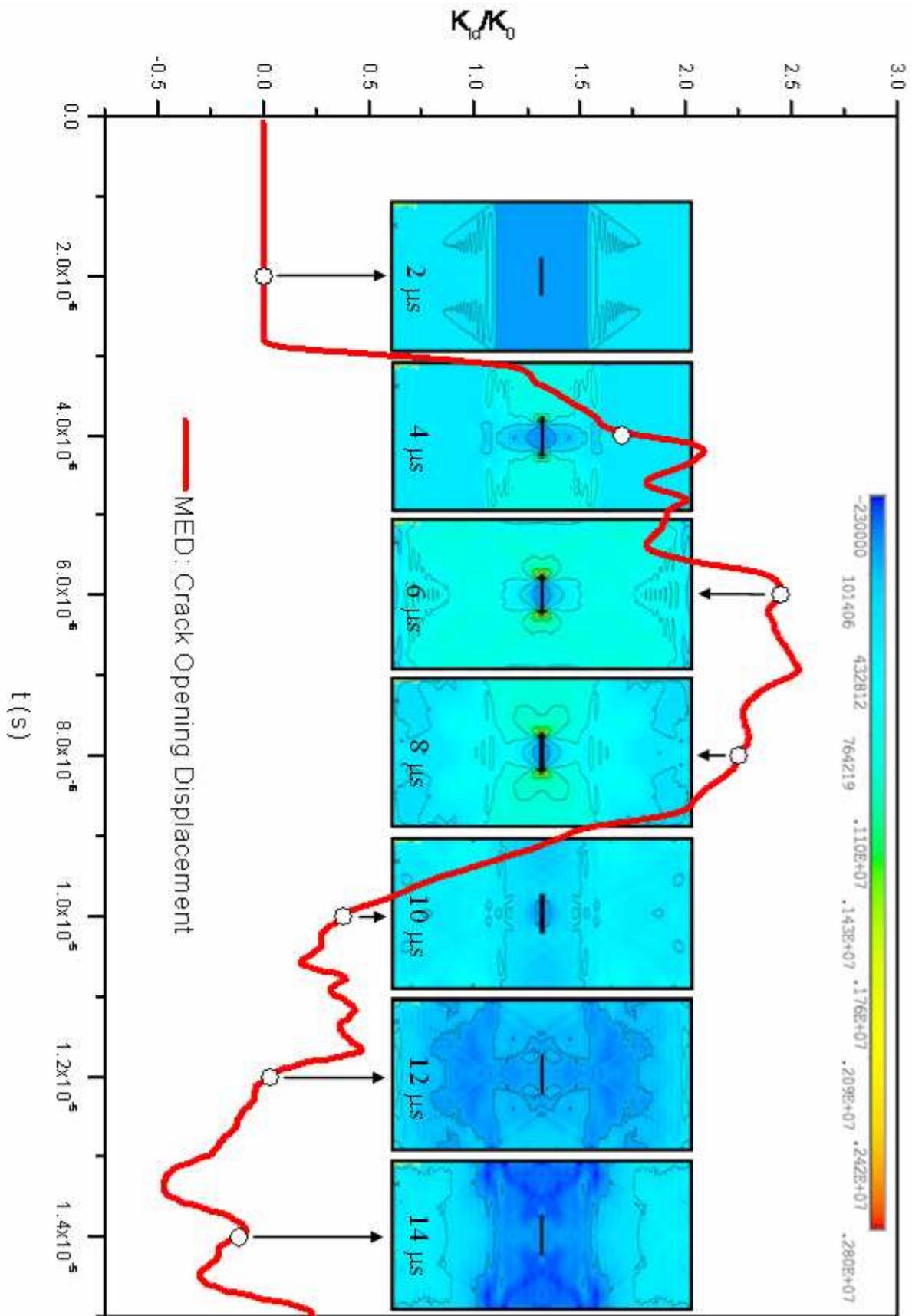


Figura 7-7 Distribución de tensiones verticales σ_{yy} para diferentes tiempos (Pa) y detalle, relacionadas con la curva de K_I/K_0 .

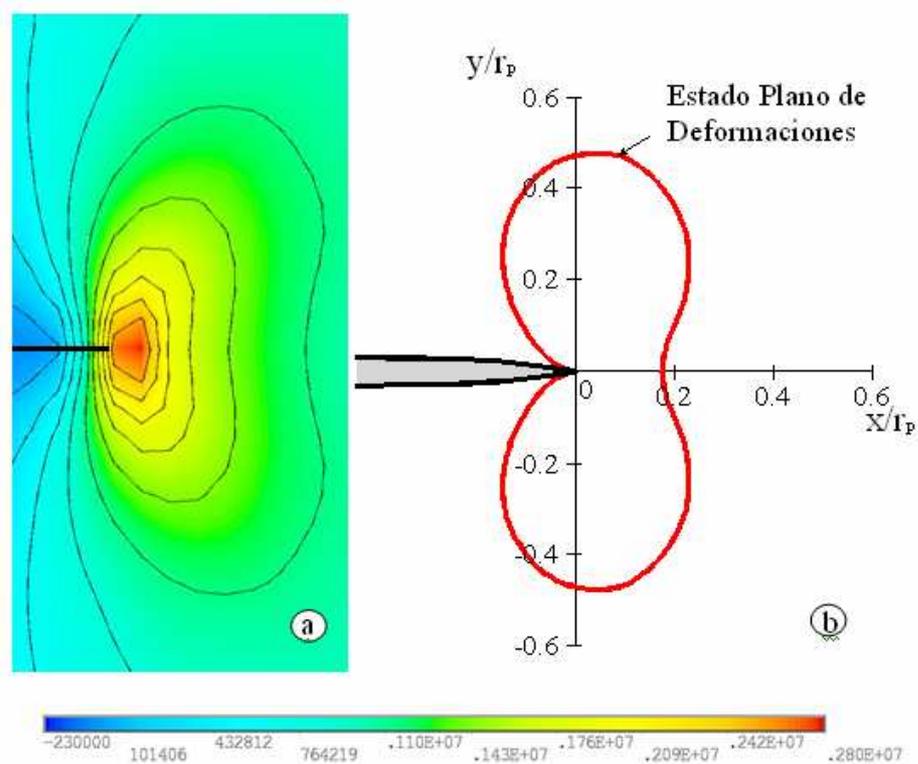


Figura 7-8 a) Detalle de las tensiones verticales σ_{yy} en la punta de la fisura (Pa) para $6 \mu s$, b) forma y extensión de la zona plástica alrededor de la punta de la fisura en el modo I, calculada a partir de la solución elástica (Anderson, 2005).

7.2 Cálculo del K dinámico para una placa con una fisura central inclinada

Este ejemplo trata la determinación de los FIT dinámicos en una placa rectangular con una fisura central inclinada a 45° . Es un problema con un modo de fractura mixto con factores de intensidad de tensiones de Modo I y Modo II. La placa es cargada dinámicamente según la dirección axial a lo largo de dos bordes opuestos con una función Heaviside a partir de $t = 0$. El material es lineal elástico y las propiedades utilizadas son: $E = 200000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 5000 \text{ kg/m}^3$ y $G_c = 300 \text{ N/m}$.

La figura 7-9 muestra la geometría del problema junto con la discretización adoptada con el MED.

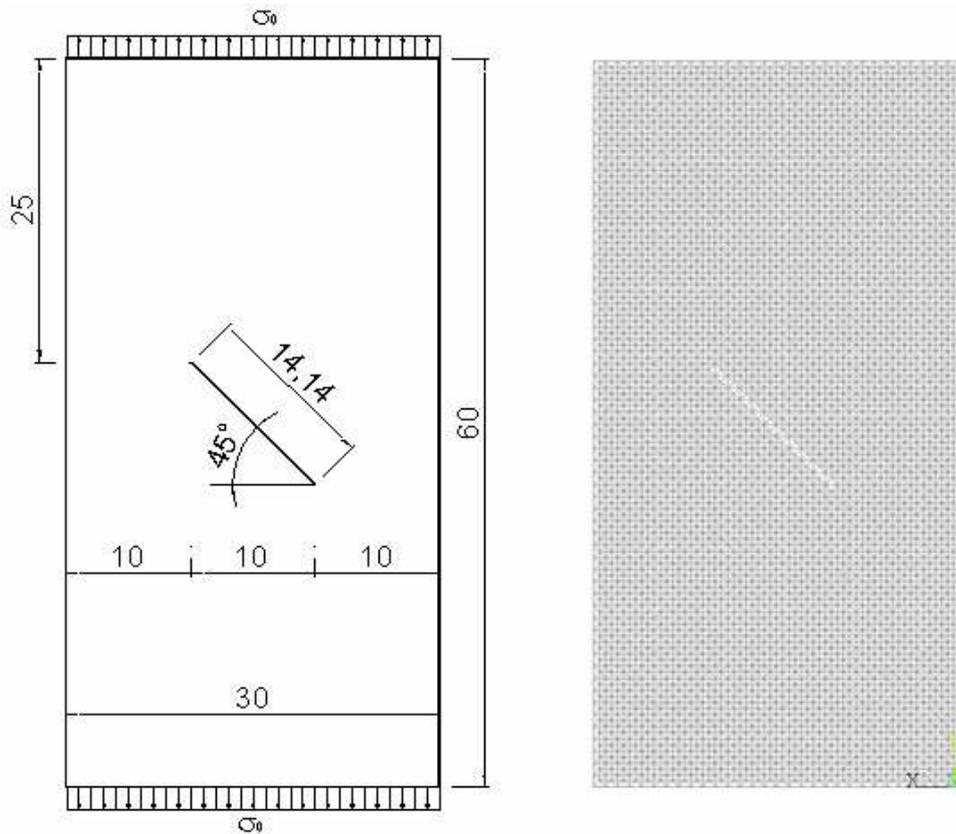
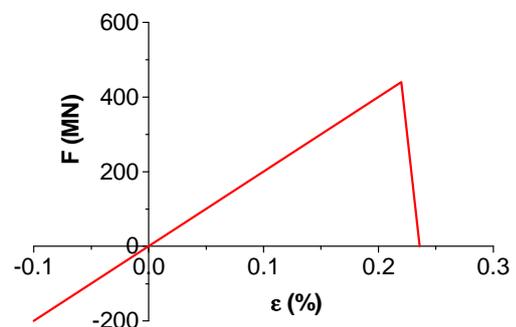


Figura 7-9 Esquema de la placa en estudio. Geometría de la placa, en mm y detalle modelo con MED

Este problema se modeló en el MED con 150 módulos de ancho, 300 de alto y un módulo de espesor. Se restringieron los desplazamientos en la dirección perpendicular a la placa en todos los nodos para poder simular un estado plano de deformaciones. Los parámetros más significativos están indicados en la tabla 7-2.

Tabla 7-2 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	200 GPa	Lc	$2.00 \text{ E}^{-4} \text{ m}$
ν	0.30	ν	0.25
ρ	5000 kg/m^3	t	$1.0 \text{ E}^{-8} \text{ seg}$
G_f	300 J/m^2	ϵ_p	0.220 %



Las figuras 7-10 y 7-11 muestran los valores de los FIT del Modo I y Modo II normalizados con K_0 versus tiempo, obtenidos aplicando el COD. Para la validación, en las figuras también se grafican los resultados de Domínguez y Gallego (1992) que utilizaron el Método de los elementos de Contorno en el dominio del tiempo (BEM) y Krysl y Belytschko (1999) que

utilizaron el método de Galerkin. Se pueden ver que los presentes resultados tienen una buena coincidencia con las soluciones de referencia.

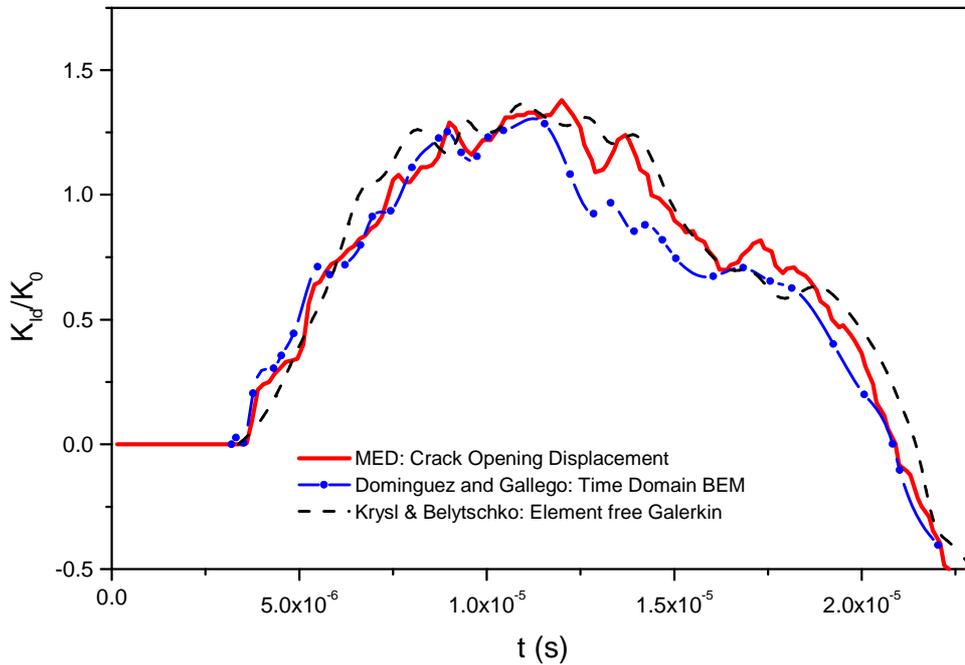


Figura 7–10 FIT dinámico normalizado para el modo I (K_I)

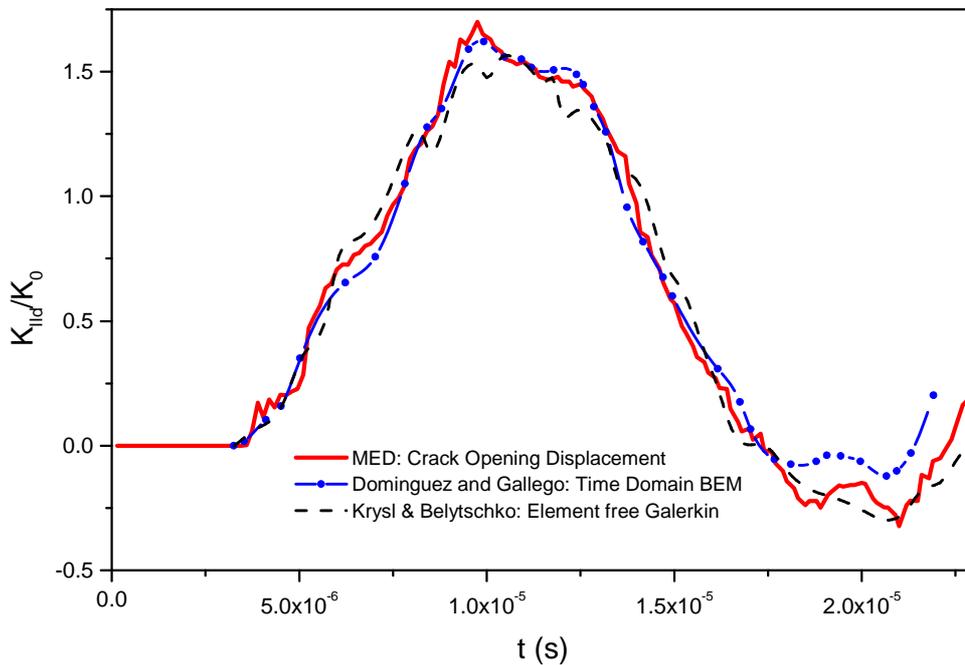


Figura 7–11 FIT dinámico normalizado para el modo II (K_{II})

En estas dos figuras se puede observar que antes que la onda longitudinal llegue a la punta de la fisura, es decir, para $t < 3.6 \mu s$ el FIT vale cero. Los valores máximos coinciden con el

tiempo en que la onda de Rayleigh proveniente del borde más alejado de la punta de la fisura llega a la misma ($9.5 \mu\text{s}$).

En la figura 7-12 se presenta un detalle de las tensiones cercanas a la punta de la fisura para un tiempo de $12 \mu\text{s}$.

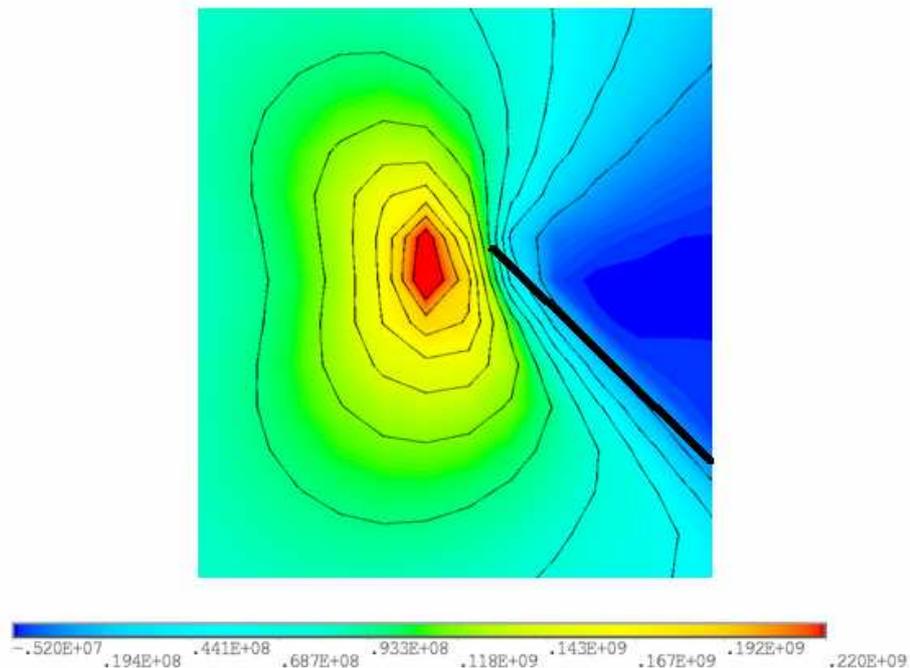


Figura 7-12 Detalle de distribución de tensión principal máxima en la punta de la fisura (Pa) en $12 \mu\text{s}$.

En la figura 7-13 se muestran una serie de gráficos que representan la distribución de la tensión principal máxima sobre la placa fisurada, para distintos tiempos. Se puede observar como el MED capturó las ondas de tensión, que en un principio se mueven paralelas al borde donde fue aplicada la tensión, $t = 3 \mu\text{s}$. La onda llega a la punta de la fisura a los $3.6 \mu\text{s}$ (instante en que se comienzan a tener valores en las figuras 7-10 y 7-11), coincidiendo con el tiempo en recorrer la distancia entre el borde y la punta de la fisura con la velocidad de las ondas de compresión para $\nu = 0.25$. A partir de este tiempo se comienzan a producir concentraciones de tensiones en ambas puntas de la fisura teniéndose los valores máximos entre 12 y $15 \mu\text{s}$. Luego las tensiones en las puntas de la fisura comienzan a disminuir de la misma forma que los gráficos de K dinámico de las figuras 7-10 y 7-11.

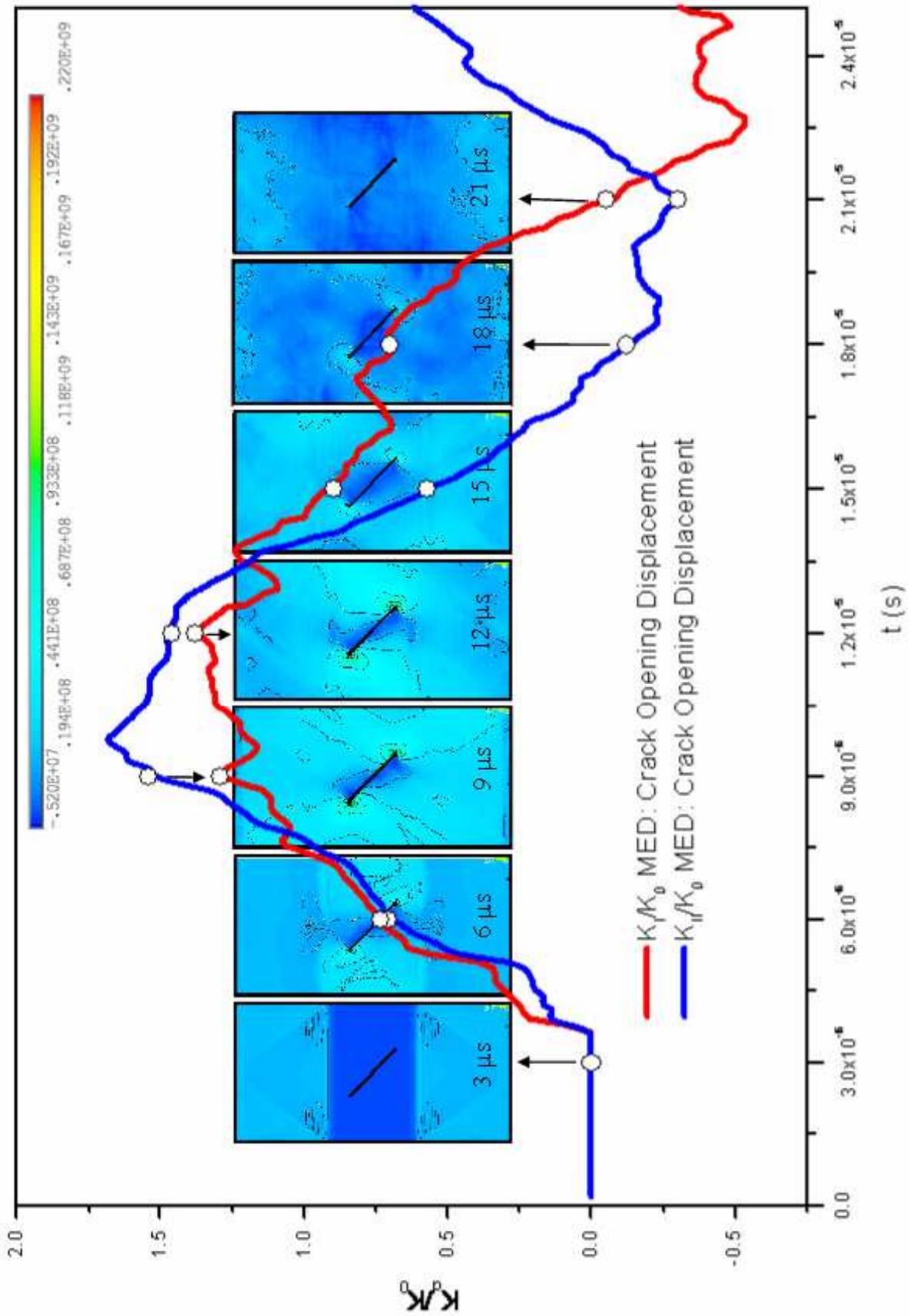


Figura 7-13 Distribución de tensiones principales máximas para diferentes tiempos y detalle (Pa).

7.3 Cálculo del K dinámico para una placa con una fisura en el borde inclinada 45°

Este ejemplo corresponde a una placa rectangular con una fisura inclinada a 45° que llega hasta un borde, ver figura 7-14. Se aplica a la placa una tensión con una función Heaviside a partir de $t = 0$. Las propiedades del material son: módulo de corte 29.4 GPa, módulo de Poisson 0.286 y densidad de 2450 kg/m³.

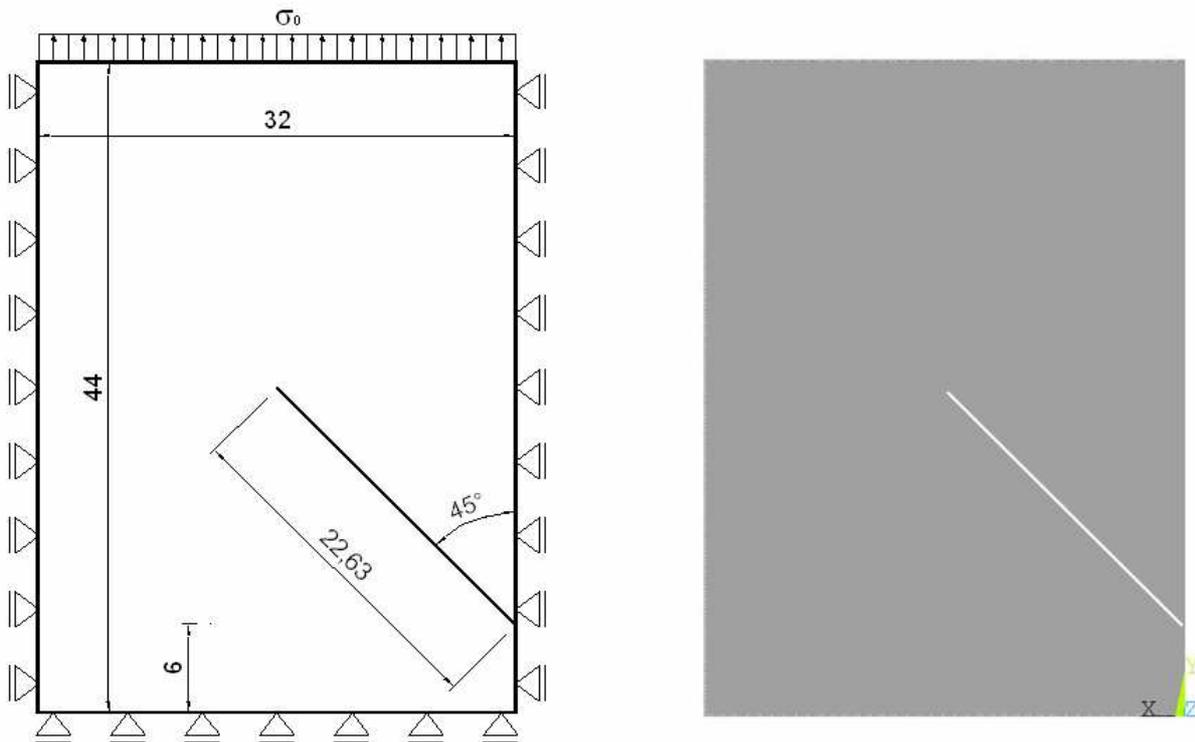
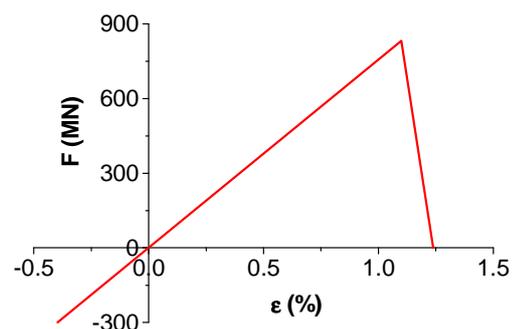


Figura 7-14 Esquema de la placa en estudio. Geometría de la placa, en mm y detalle modelo con MED

En la tabla 7-3 se muestran las propiedades del material para el ejemplo estudiado y parámetros utilizados en la simulación realizada con el MED, adoptándose además $\nu = 0.25$ por las razones expresadas anteriormente.

Tabla 7-3 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	75.6 GPa	Lc	2.00 E ⁻⁴ m
ν	0.286	ν	0.25
ρ	2450 kg/m ³	t	1.0 E ⁻⁸ seg
G _r	3000 J/m ²	ϵ_p	1.10 %



Las curvas de K_{Id} y K_{IIId} versus tiempo, obtenidas utilizando el COD para el cálculo de los valores de K , son mostradas en las figuras 7-15 y 7-16 junto con los resultados obtenidos por Domínguez y Gallego (1992) que utilizaron el método de los elementos de contorno en el dominio del tiempo, Kishimoto et al. (1980), el método de los elementos finitos y Fedelinski et al. (1993) con el método de los elementos de contorno (BEM). Se puede observar una buena correlación con los resultados de referencia.

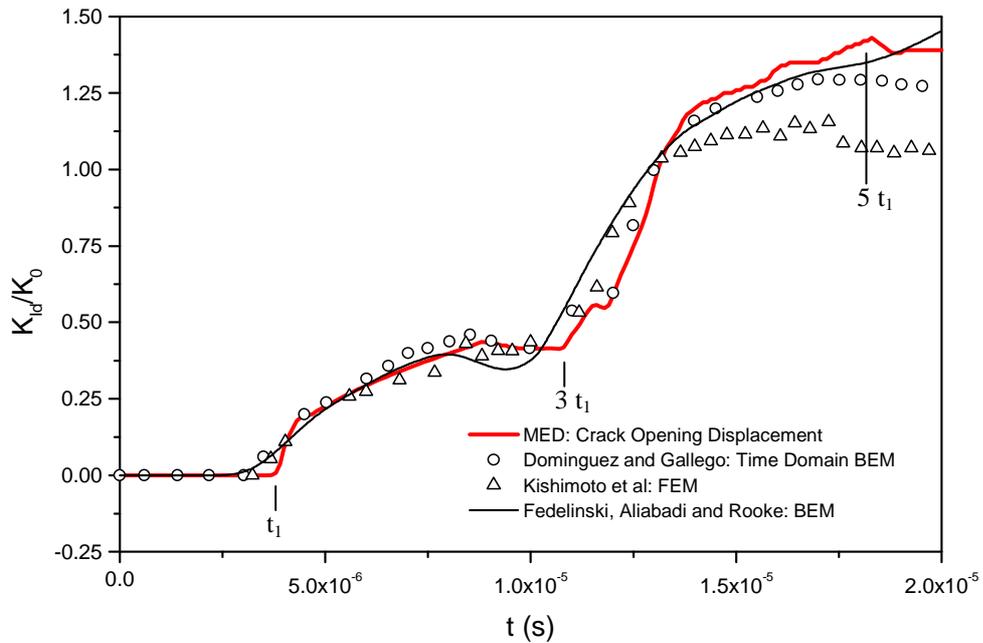


Figura 7-15 FIT dinámico normalizado para el modo I (K_I)

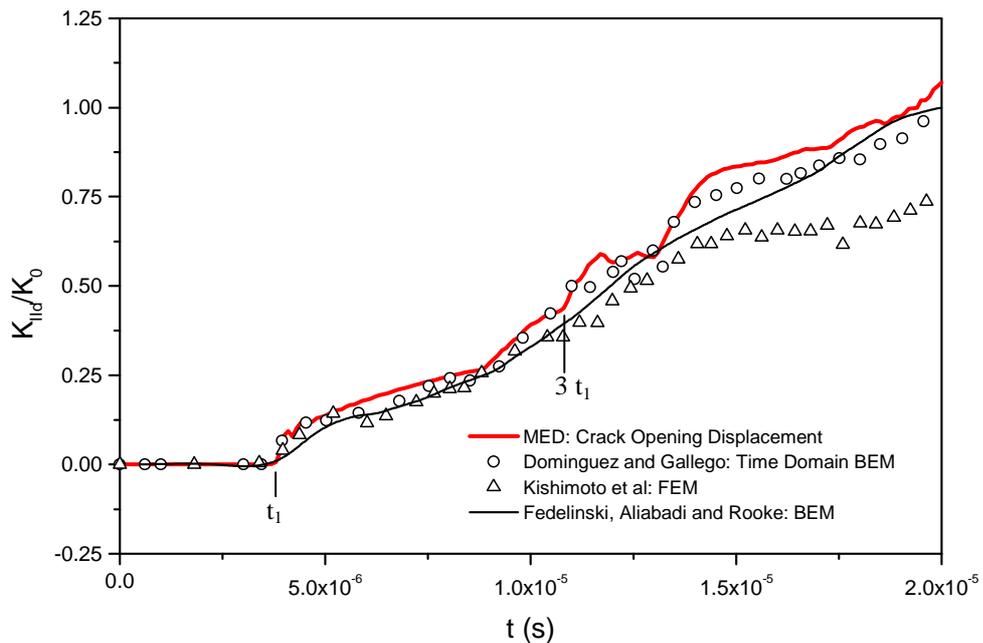


Figura 7-16 FIT dinámico normalizado para el modo II (K_{II})

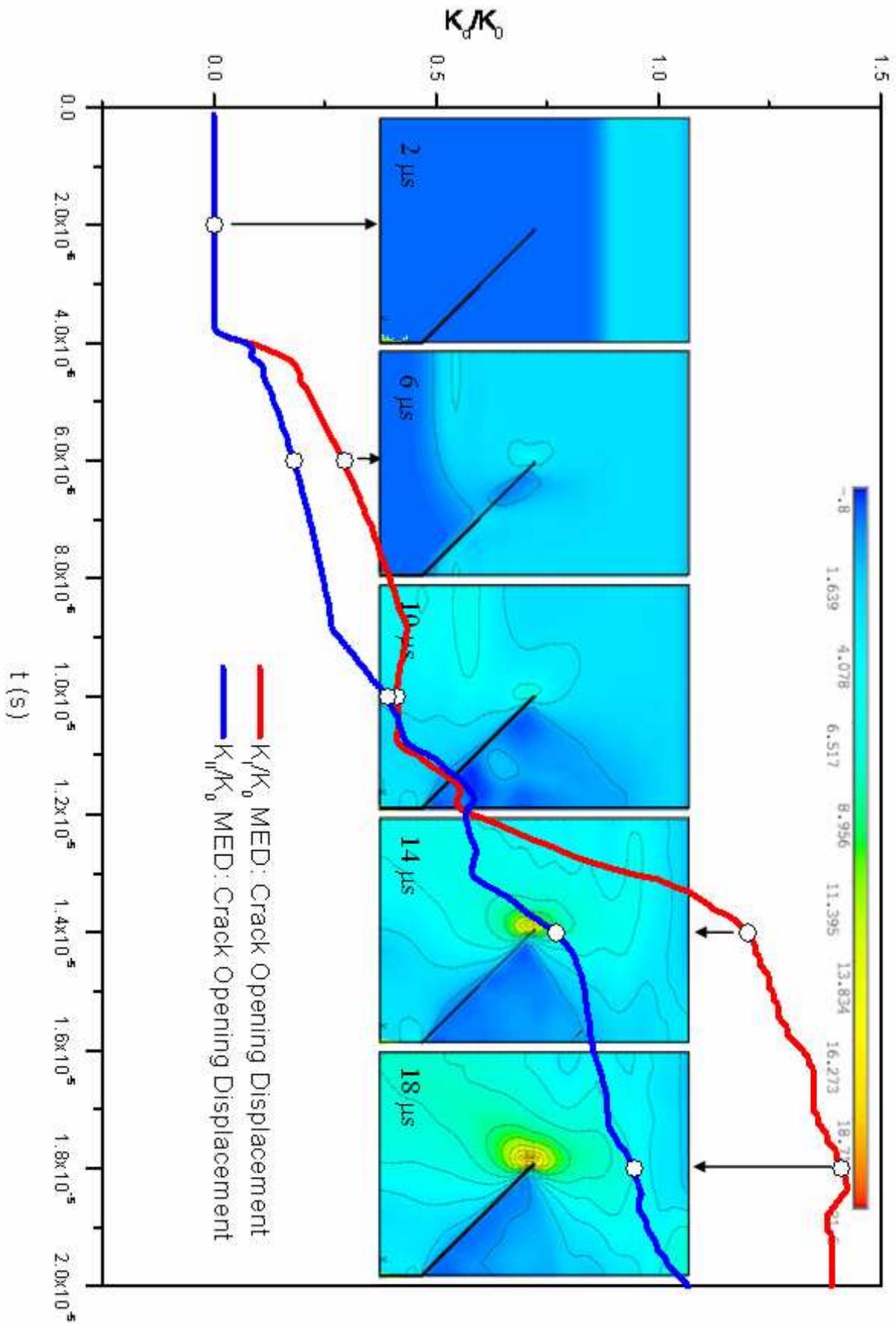


Figura 7-17 Distribución de tensiones principales máximas para diferentes tiempos y detalle (Pa).

En la figura 7-17 se mostró como es la distribución de las ondas de tensiones para distintos tiempos vinculados a las curvas de FIT versus tiempo. Se puede observar que para tiempos menores a $t_1 = 3.61 \mu\text{s}$, que es el tiempo en que la onda longitudinal llega a la punta de la fisura, no se tienen valores de FIT.

En la curva de K_I se observa una meseta alrededor de los $9 \mu\text{s}$ y para los $11 \mu\text{s}$ comienza a levantarse nuevamente. Esto sucede porque las ondas de compresión reflejadas en el borde inferior arriban nuevamente a la punta de la fisura ($3 t_1$). Para la curva de K_{II} en este punto también hay un aumento pero no es tan notorio. Las ondas de tensiones que una vez que llegaron a la punta de la fisura siguen su dirección y llegan hasta el borde derecho de la placa, rebotan y vuelven hacia la punta de la fisura. Cuando llegan, ayudan a aumentar el K_I y generan la meseta en el K_{II} para valores entre 11 y $13 \mu\text{s}$.

Finalmente los valores máximos de K_I se obtienen justo antes de que la primer onda de tensión haya rebotado sobre el borde cargado y esté llegando nuevamente a la punta de la fisura ($5 t_1 = 18.5 \mu\text{s}$).

En este ejemplo no hay simetría en la configuración ni en las cargas aplicadas y los bordes de la placa tienen restricciones, esto no pasa en ninguno de los ejemplos tratados anteriormente. Al estar la fisura inclinada una misma onda toca en diferentes tiempos el borde de la fisura y rebota. Algunas ondas de tensión llegan a los distintos bordes de la placa antes y después de haber rebotado como se puede apreciar más claramente en las primeras distribuciones de tensiones de la figura 7-17. Esto genera compleja interacción entre las distintas ondas de tensión y a pesar de esto los resultados obtenidos con el MED concuerdan con los de referencia.

7.4 Cálculo del K dinámico para un prisma rectangular que contiene una fisura elíptica

Para verificar la capacidad del MED de resolver problemas de mecánica de fractura en 3D, se determina el factor de intensidad de tensiones dinámico de un prisma rectangular que contiene una fisura de sección elíptica sujeta a una tensión Heaviside axial remota para $t > 0$. Como se muestra en la figura 7-18, la barra tiene 300 mm de altura, 180 de largo y 120 ancho. La fisura

de sección elíptica tiene sobre el eje mayor 70 mm y sobre el eje menor 40 mm y está ubicada en el centro de la sección transversal de la barra a la mitad de la altura de la misma. El material utilizado se asume lineal elástico con un módulo elasticidad de 200 GPa, módulo de Poisson 0.298, densidad de 7900 kg/m^3 y $G_c = 22170 \text{ N/m}$.

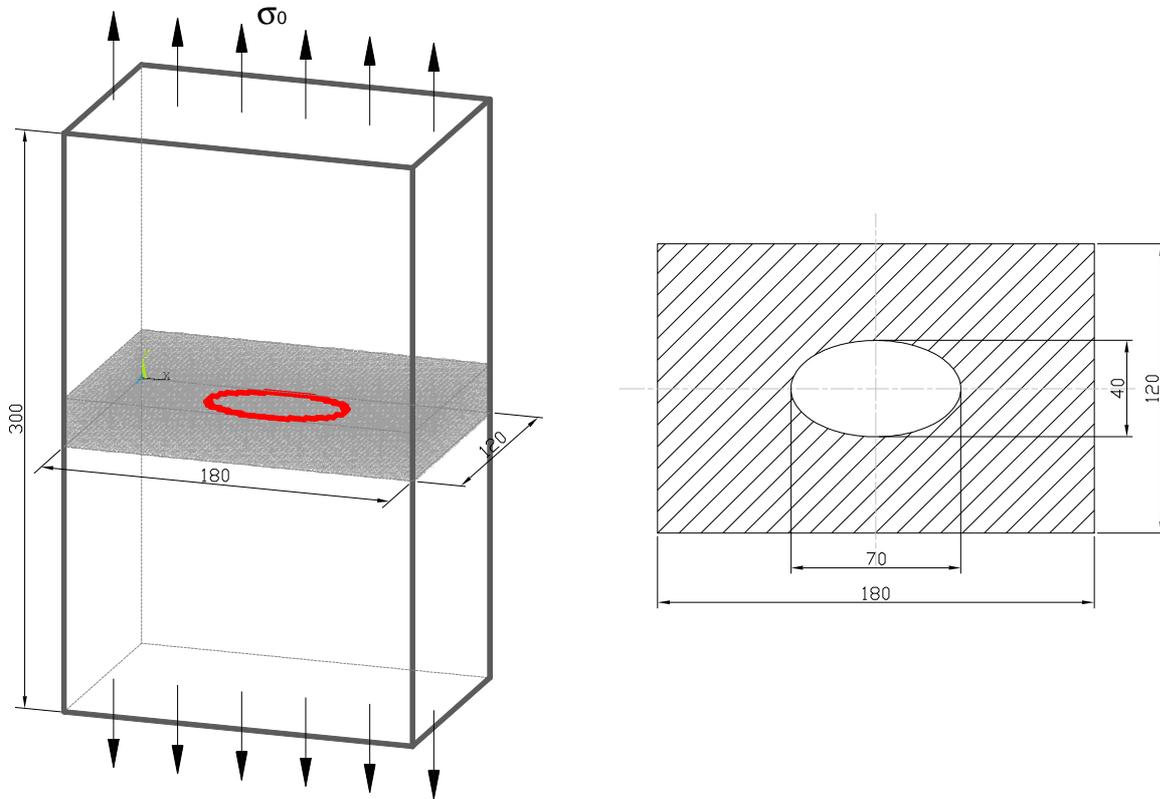
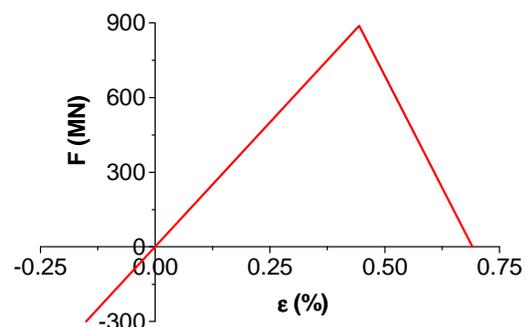


Figura 7-18 Esquema del bloque con una fisura de sección elíptica. Geometría en mm y detalle modelado con MED

El cuerpo modelado está compuesto de 122 módulos de altura, 72 de largo y 48 de ancho siendo las propiedades del material y los parámetros utilizados en la simulación con el MED, resumidas en la siguiente tabla.

Tabla 7-4 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	200 GPa	Lc	$2.50 \text{ E}^{-3} \text{ m}$
v	0.298	v	0.25
ρ	7900 kg/m^3	t	$1.0 \text{ E}^{-7} \text{ seg}$
G_f	22170 J/m^2	ϵ_p	0.444 %



El factor de intensidad de tensiones normalizado con respecto a valor de la ecuación 6-1 medido al final del eje menor de la elipse (90°), es graficado en la figura 7-19 versus tiempo juntamente con los resultados obtenidos por Guo y Nairn (2006), que utilizaron el método de puntos materiales (MPM); Nishioka (1995), con el método de los elementos finitos (MEF) y Chen y Wilkens (1977) que utilizaron el método de diferencias finitas (FDM). Como se aprecia en la mencionada figura, los resultados obtenidos con el MED concuerdan con los de referencia.

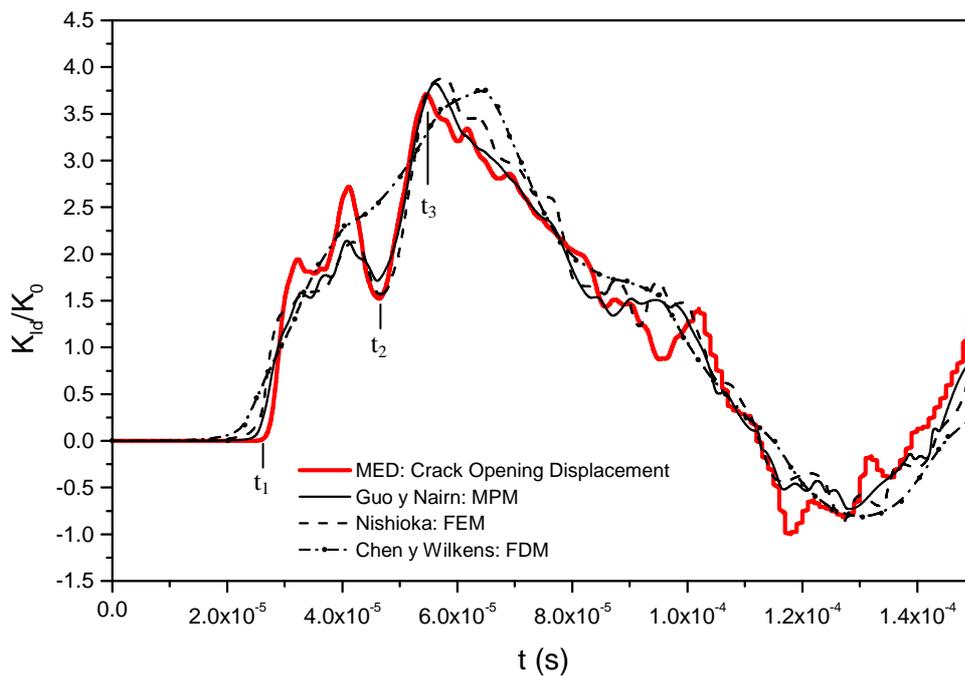


Figura 7–19 FIT dinámico normalizado para el modo I (K_I)

Para tiempos menores a t_1 ($27 \mu s$), tiempo en que llegan las ondas de tensión P o longitudinales a la fisura, no se tienen valores para el FIT. Alrededor de $t_2 = 47 \mu s$, que corresponde a la llegada de las ondas S a la fisura hay un valle en la curva de la figura 7-19. El pico de la curva del FIT dinámico versus tiempo se encuentra próximo a la llegada la onda P reflejada al borde de la barra nuevamente ($t_3 = 2 t_1 = 54 \mu s$). Desde este punto en adelante todas las ondas reflejadas en las caras del bloque generan perturbaciones siendo compleja la interpretación de otros puntos característicos dentro de la curva.

Con los ejemplos presentados en este capítulo se puede concluir que el MED es capaz de medir los factores de intensidad de tensiones dinámicos en problemas con modos de falla simples y mixtos, en dos y tres dimensiones. Además es apto para captar las distribuciones de tensiones por más compleja que sea la distribución de las mismas.

Capítulo 8 - PROBLEMAS DE PROPAGACIÓN DE FISURAS

En este capítulo se presentan análisis realizados con el MED, mostrándose la capacidad del mismo para la determinación de propagación de fisuras, velocidades de propagación y ondas de tensión, distribuciones de tensiones y configuraciones de rotura.

Se analiza la propagación de fisuras a través de varios ejemplos, determinándose la trayectoria de la fisura, la velocidad de propagación, el estado tensional y gráficas del FIT dinámico versus tiempo en uno de los ejemplos.

8.1 Desvío del camino de la fisura debido a un hueco circular

En este ejemplo se simula con el MED la evolución de una fisura cuando esta se acerca a un hueco de contorno circular.

Se estudia una placa rectangular con una fisura y un hueco circular ubicado más cerca de uno de los bordes, como se muestra en la figura 8-1, en donde se presenta un esquema del modelo estudiado. La placa está cargada con una tensión normal uniforme a lo largo del borde superior y se restringen los desplazamientos del borde inferior. En dicha figura se muestran las dimensiones de la placa en cantidad de módulos. El valor h es variable, encontrándose en la tabla 8-1 los valores que toma para cada modelo analizado.

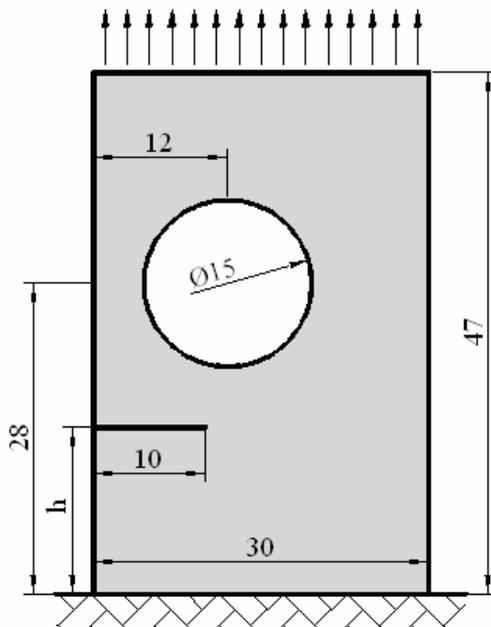


Figura 8-1 Esquema del modelo analizado.

Tabla 8-1 Valor de h para modelos analizados.

	h
Modelo A	15 módulos
Modelo B	10 módulos
Modelo C	5 módulos

En este ejemplo, presentado por Rashid (1998) y luego por Tabiei y Wu (2003), se consideran tres configuraciones iniciales diferentes (ver figura 8.1 y tablas 8.1). En la figura 8-2 se muestran las configuraciones resultantes obtenidas por los últimos autores. Las propiedades del material utilizado son de aleación de aluminio 2024-T3, $E = 71400 \text{ MPa}$, $\sigma_f = 345 \text{ MPa}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$.

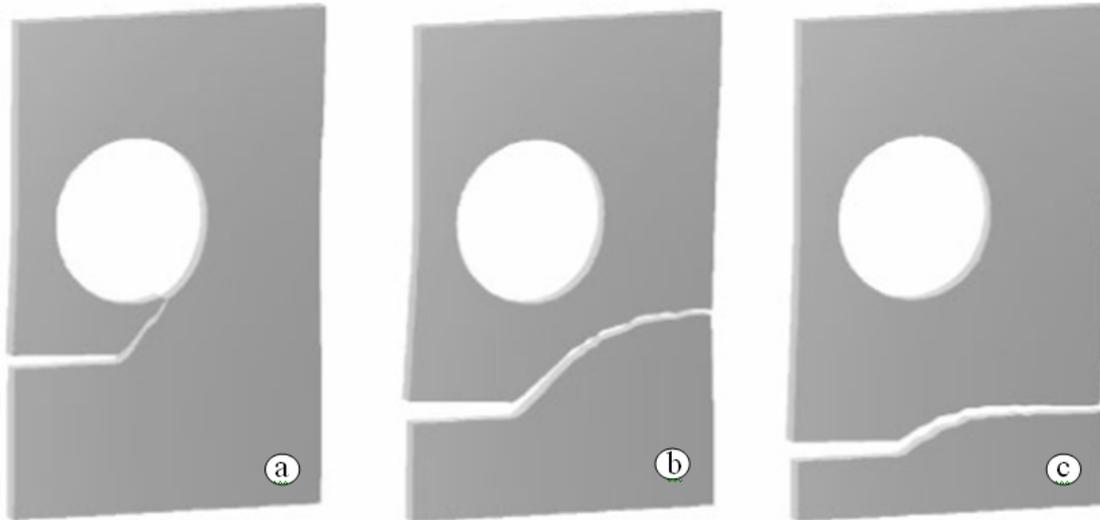
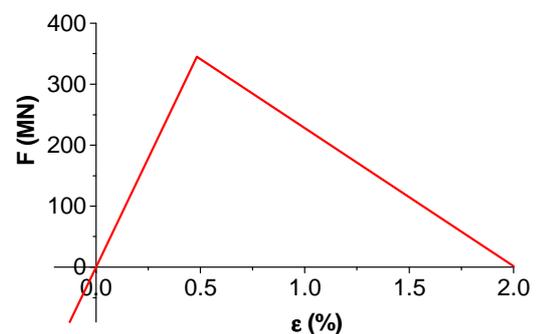


Figura 8–2 Desvío del camino de la fisura debido a un hueco: a) modelo A: Ubicación inicial de la fisura cercana al agujero; b) modelo B: Ubicación inicial de la fisura lejana al agujero; c) modelo C: Ubicación inicial de la fisura más lejana al agujero.

Con el MED se analizaron estas tres configuraciones, las propiedades del material y parámetros del modelo se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 8–2 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	71.4 GPa	Lc	$1.00 \text{ E}^{-4} \text{ m}$
ν	0.347	ν	0.25
ρ	2700 kg/m^3	t	$1.0 \text{ E}^{-8} \text{ seg}$
G_f	1000 J/m^2	ϵ_p	0.483 %



Se presentan las configuraciones finales de rotura obtenidas con el MED para los modelos A, B y C en la figura 8-3. Es posible apreciar la correlación de las mismas con las obtenidas por Tabiei y Wu (2003) presentados en la figura 8-2.

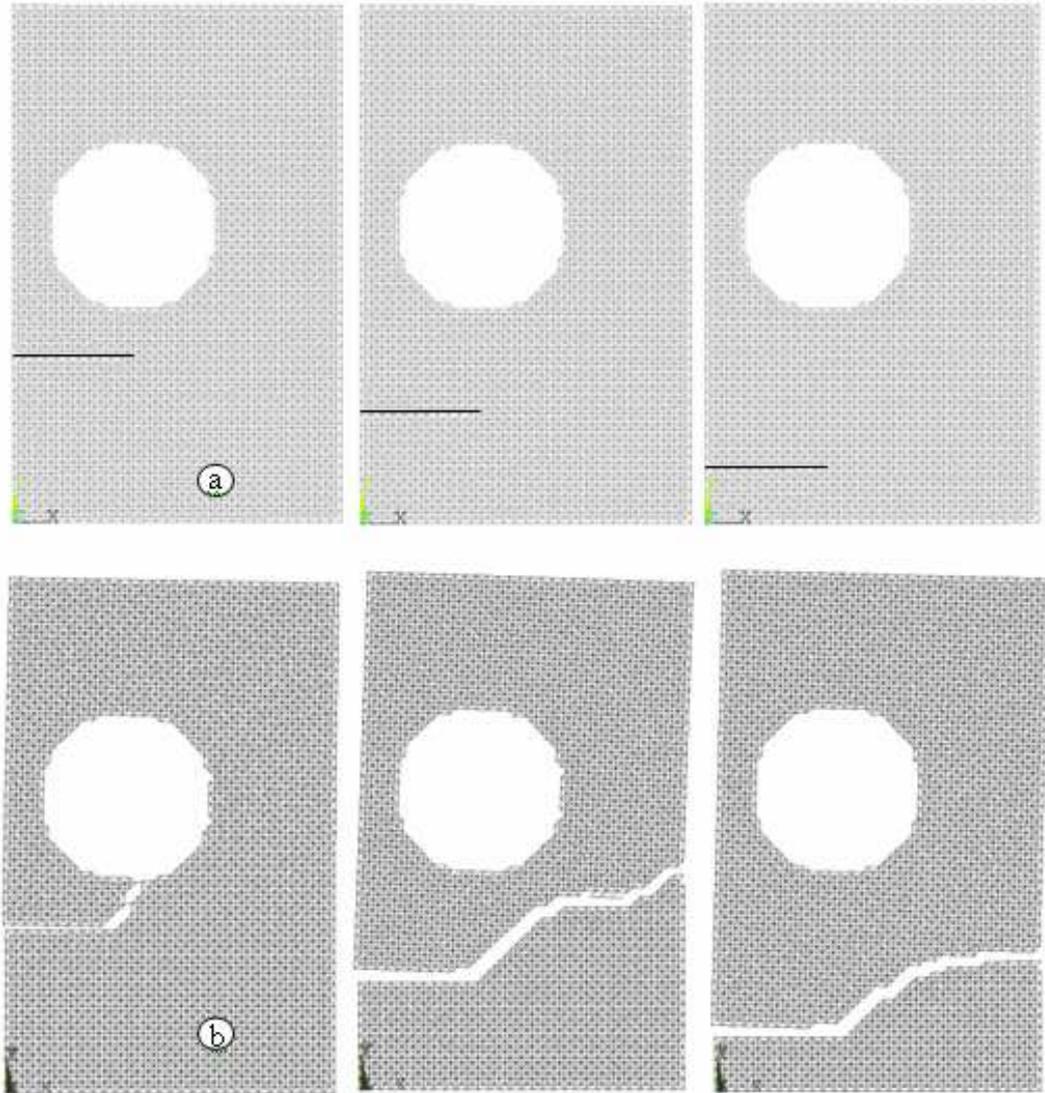


Figura 8–3 Configuraciones obtenidas con el MED para los tres modelos analizados. a) Discretización antes de aplicar cargas. b) Camino de la fisura.

El MED presenta como desventaja la imperfección con la que se pueden modelar curvas, ya que trabaja con módulos cúbicos. El hueco circular es imperfecto y se generan aristas que concentran tensiones. Para modelar este hueco se procedió a debilitar las barras que se encuentran dentro del mismo.

En las figuras 8-4 a 8-6 se grafican la máxima tensión principal para distintos tiempos y para cada uno de los modelos. En ellas se puede apreciar la evolución de las tensiones y el camino que recorre la fisura. En todas estas figuras se observan tensiones prácticamente nulas en el interior del agujero (salvo en zonas próximas al contorno donde existen gradientes muy elevados de tensiones) debidas a que el mismo fue modelado debilitando el material que quedaba dentro de él.

En la figura 8-4 se aprecia como varían las tensiones principales en el modelo A, es decir con $h = 15$ módulos. De los tres casos analizados este es el que tiene la fisura preexistente más cercana al hueco circular. Como se observa en la figura, el agujero circular genera una distorsión en las tensiones, ya que estas intentan de sortear el mismo. La fisura propaga hacia el hueco y las concentraciones de tensiones indican que la rotura proseguirá a la derecha del hueco, es decir, sobre la menor sección de la placa como es de esperar. También se puede apreciar que en la punta de la fisura siempre hay concentraciones de tensiones.

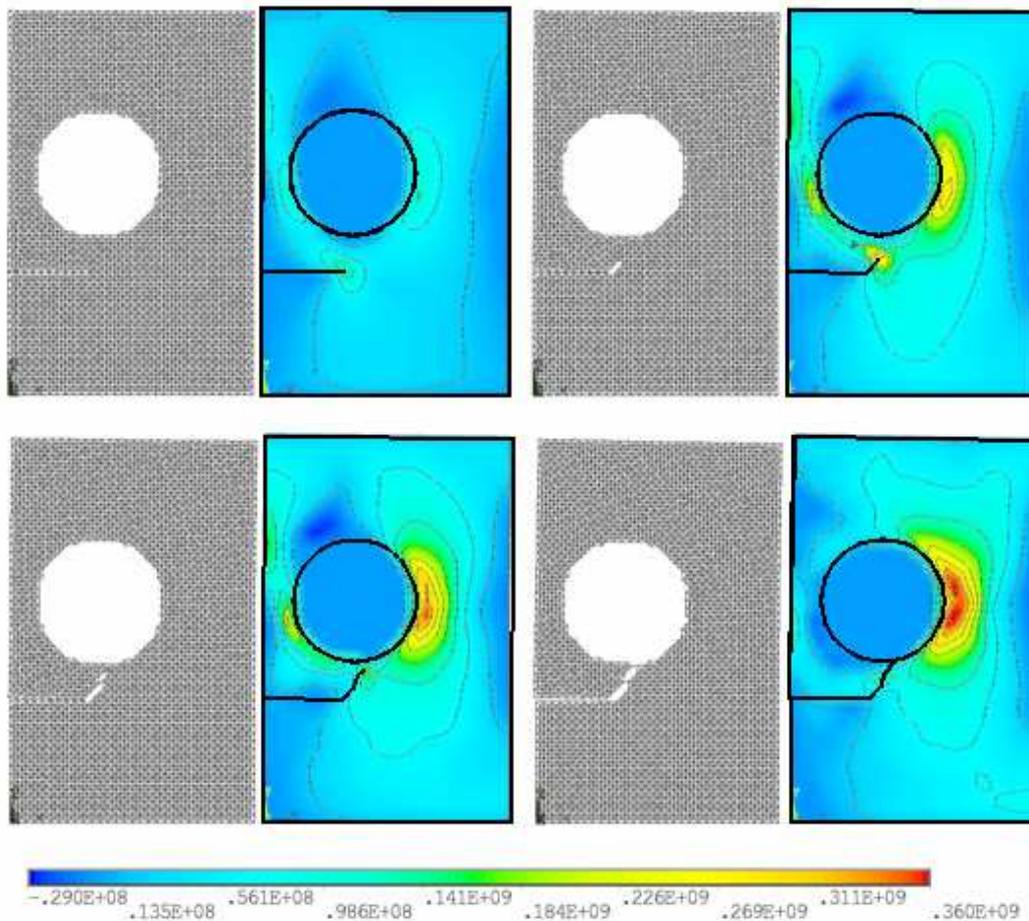


Figura 8-4 Camino recorrido por la fisura y evolución de tensiones principales para el modelo A (Pa).

En la figura 8-5 se grafican como varían las tensiones principales para distintos tiempos, en el modelo B, es decir con $h = 10$ módulos. Para este modelo la redistribución de tensiones generada por el hueco circular hace que la fisura propague acercándose hasta él. En las cercanías del agujero se desvía intentando volver a la horizontal. Esto se debe a que, en este punto la distancia al borde de la placa es similar a la existente entre el hueco y dicho borde. Por esto, es más fácil (menor gasto de energía) seguir hasta el borde con la energía cinética que trae la fisura que generar una nueva fisura desde el hueco.

En la figura 8-5 se nota también una concentración de tensiones en los costados de hueco, igual que en la última imagen del modelo A, pero estas tensiones no son suficientes para hacer que la placa rompa en este punto.

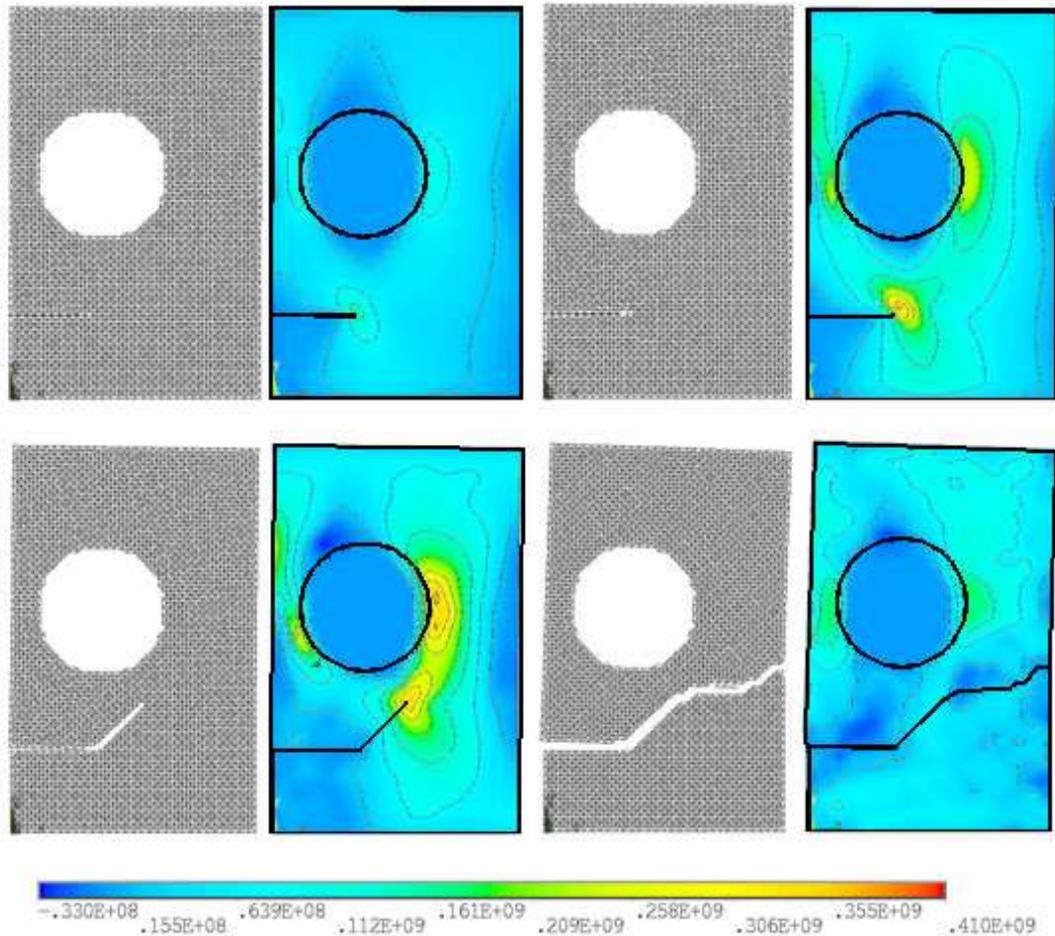


Figura 8–5 Camino recorrido por la fisura y evolución de tensiones principales para el modelo B (Pa).

La figura 8-6 muestra el progreso de las tensiones principales y de la fisura en el modelo C, con $h = 5$ módulos. Este modelo es el que tiene la fisura preexistente más alejada del agujero de sección circular. Como en el modelo B, la influencia del hueco hace que la fisura propague acercándose hacia él, pero no lo alcance volviéndose a la horizontal en la zona en que la presencia del hueco deja de perturbar el campo de tensiones en las proximidades de la punta de la fisura.

En las figuras 8-4 y 8-5 al igual que en la figura 8-6, se observan concentraciones de tensiones alrededor del hueco de sección circular debido al modelado del mismo aunque estas no son determinantes en las configuraciones finales obtenidas.

Estos ejemplos muestran una gran similitud con los obtenidos por Tabiei y Wu (2003) por lo que se puede destacar la capacidad de MED para observar el camino de propagación inestable de una fisura.

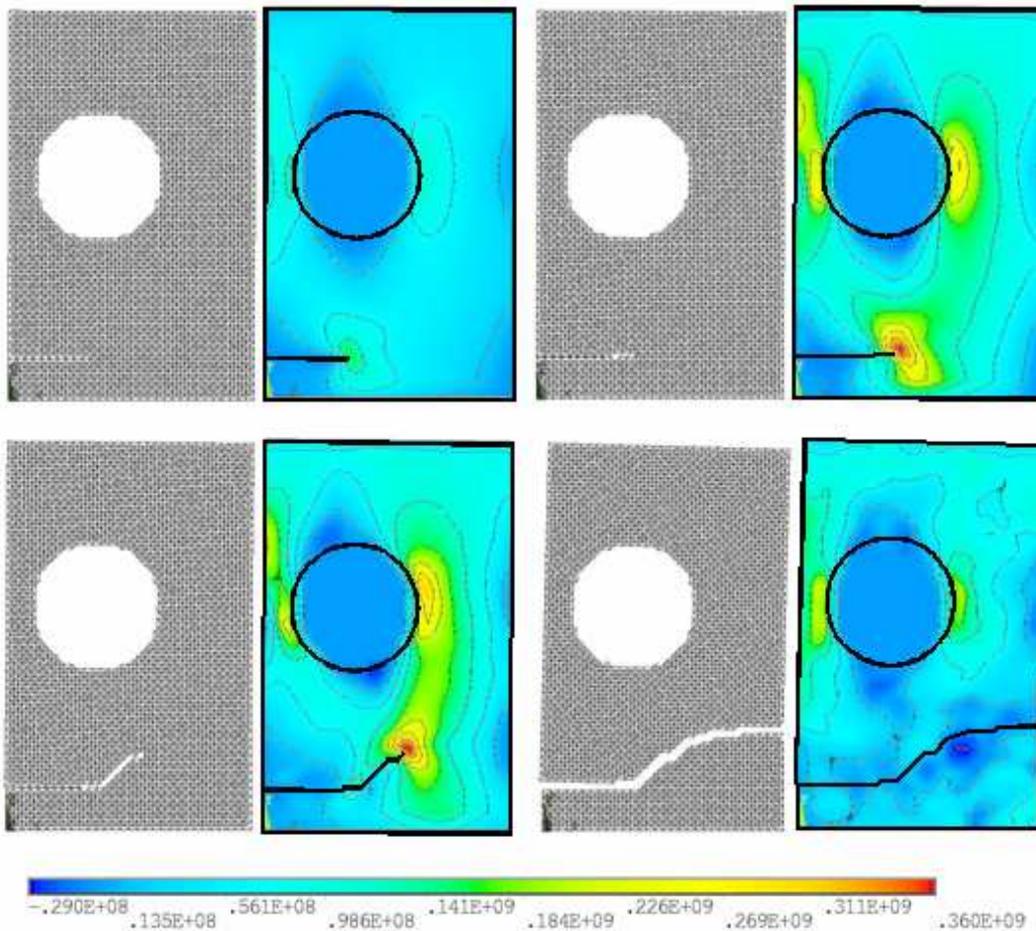


Figura 8-6 Camino recorrido por la fisura y evolución de tensiones principales en el modelo C (Pa).

8.2 Placa con una fisura sometida a una carga impulsiva. Simulación numérica del experimento de Kalthoff

En este ejemplo se pretende probar la capacidad del MED para captar fisuras ocasionadas por una carga impulsiva que activa modos de falla mixtos.

Este ejemplo fue realizado experimentalmente por Kalthoff y Winkler (1987) y consta de una placa como la graficada en la figura 8-7 que recibe el impacto de un proyectil entre las dos fisuras, el resto del contorno no tiene ninguna restricción. Las propiedades del material que compone la placa son $E = 190 \text{ GPa}$, $\nu = 0.30$, $G_c = 22170 \text{ N/m}$, $\sigma_u = 844 \text{ MPa}$ y $\rho = 8000 \text{ Kg/m}^3$. La velocidad de la onda de Rayleigh para este material es $V_R = 2799 \text{ m/s}$.

Con el objeto de comparar los resultados numéricos obtenidos en este trabajo, se toman como referencia las simulaciones numéricas realizadas por Belytschko et al. (2003) y Huespe et al. (2006) quienes representaron la falla frágil del experimento realizado por Kalthoff y Winkler (1987).

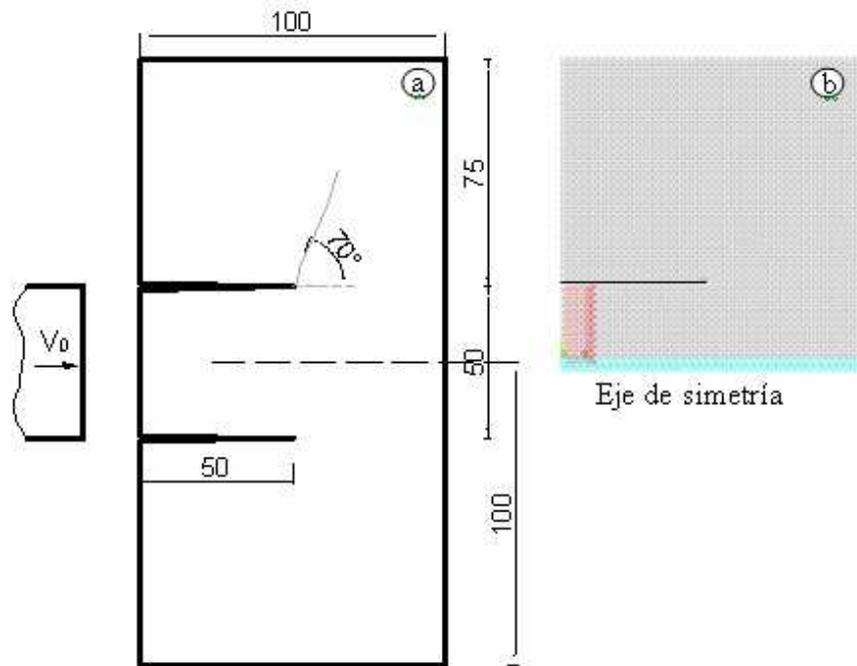
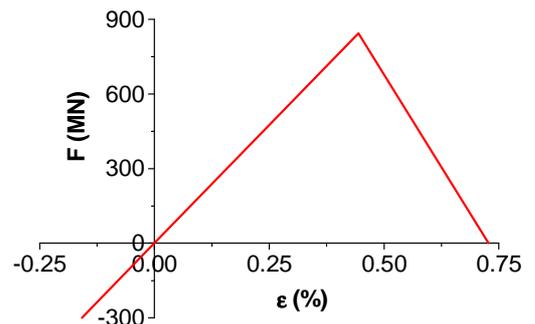


Figura 8-7 (a) Geometría y condiciones de contorno de la placa ensayada por Kalthoff y Winkler (1987) en mm y (b) configuración realizada con el MED

Para la simulación numérica realizada en este trabajo (figura 8-7 b), se discretizó la mitad de la placa impidiendo que el borde inferior, correspondiente con el eje de simetría, tenga desplazamientos verticales. La placa quedó formada de 40 módulos de cada lado y uno de espesor. Se consideró una carga con una velocidad de aplicación constante de 16.5 m/s. Esta velocidad, así como las propiedades del material, fueron reportadas también por Huespe et al. (2006) y Belytschko et al. (2003). Las características tanto del material como del modelo se encuentran en la tabla 8-3.

Tabla 8-3 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	190 GPa	Lc	$2.50 \text{ E}^{-3} \text{ m}$
ν	0.30	ν	0.25
ρ	8000 kg/m^3	t	$1.0 \text{ E}^{-7} \text{ seg}$
G_f	22170 J/m^2	ϵ_p	0.444 %



Como se aprecia en la figura 8-8, la configuración de rotura obtenida con el MED es muy parecida a las obtenidas por Huespe et al. (2006) y Belytschko et al. (2003). También se capta la segunda fisura que se dirige a la posición original de la grieta. El ángulo que forma la fisura propagada con la horizontal es de 60° , valor cercano al observado experimentalmente y al resultado de las otras simulaciones.

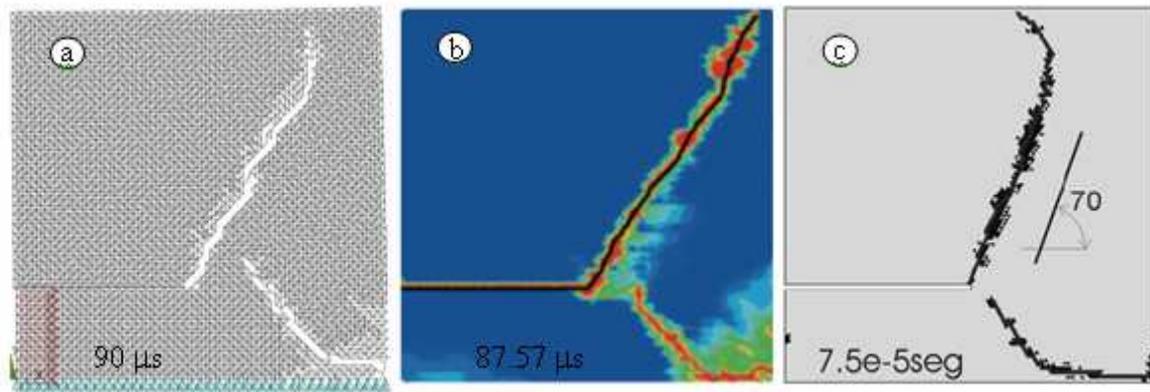


Figura 8–8 Configuraciones de rotura, a) obtenida con el MED; b) XFEM with loss of hyperbolicity criterion, Belytschko et al. (2003); c) Simulación de Huespe et al. (2006).

Un parámetro de comparación de interés es la velocidad de propagación de la fisura principal. Para medir estas velocidades en el MED, como se mencionó en el capítulo 5, se tomaron imágenes de las configuraciones para distintos tiempos, con intervalos constantes entre cada una de ellas y se observó cuanto avanzó la fisura en cada intervalo. En la figura 8-9 se presentan las velocidades medias para cada intervalo de tiempo contrastadas con las velocidades de propagación de fisuras obtenidas por Belytschko et al. (2003) y Huespe et al. (2006). En la misma se observa que la propagación comienza a los $24 \mu\text{s}$, manteniéndose la velocidad media de la propagación durante el proceso siempre por debajo del límite teórico presentado por Freund (1972), 0.7 de la velocidad de propagación de las ondas de superficie de Rayleigh que en este caso es de 2799 m/s (para el material modelado con el MED, $\nu = 0.25$, la velocidad de Rayleigh es $V_R = 2778.8 \text{ m/s}$). Al principio, el promedio de la velocidad obtenida con el MED es de 1600 m/s lo que equivale a 57 % de la velocidad de Rayleigh.

En la figura 8-10 se muestra la distribución de tensiones en la dirección x antes de que comience la propagación de la fisura. Se aprecia el efecto de corte o cizallamiento que se genera en la punta de la fisura, ya que con los distintos tonos de azul y verde están graficadas las tensiones con dirección hacia la derecha de la placa, y con naranja y rojo las que se dirigen hacia la izquierda.

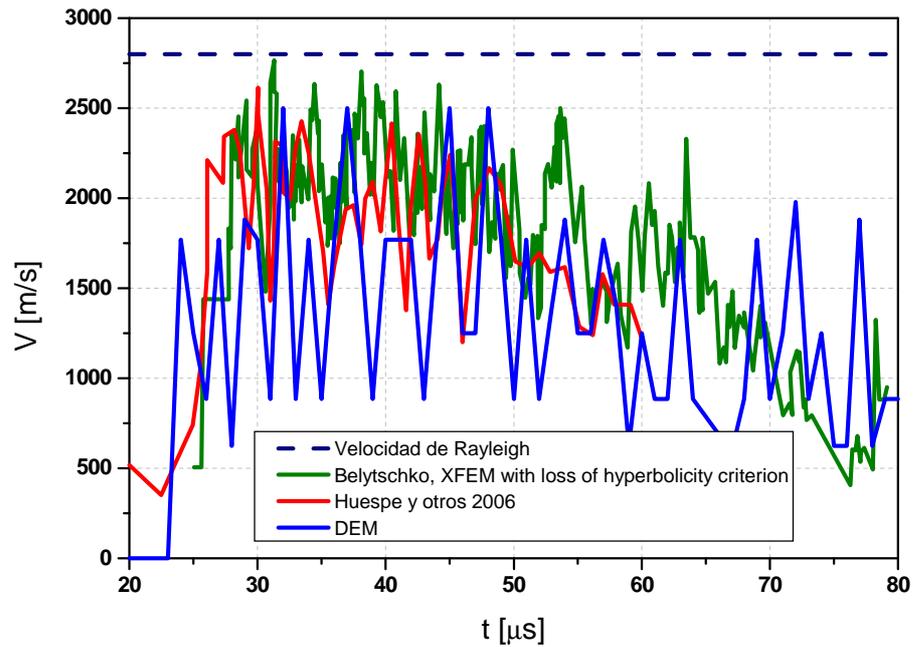


Figura 8–9 Velocidad de propagación de la punta de la fisura para las simulaciones de Belytschko et al. (2003) con XFEM with loss of hyperbolicity criterion, la simulación de Huespe et al. (2006) y resultados obtenidos con el MED.

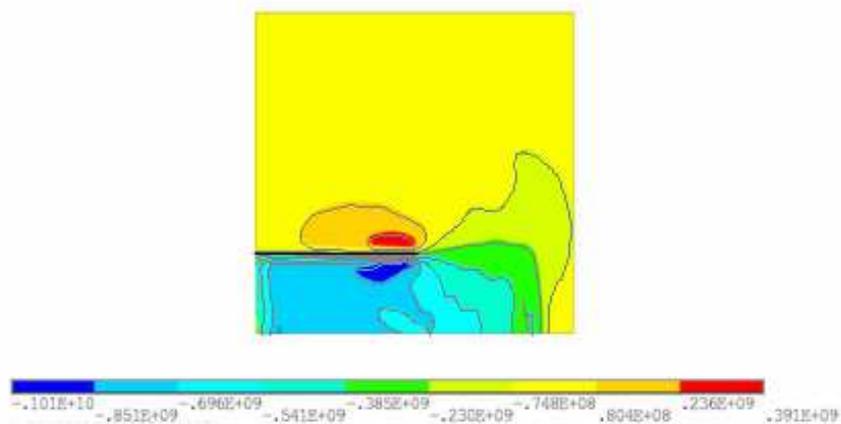


Figura 8–10 Distribución de tensiones σ_x antes de que la fisura comience a propagar (Pa) obtenida con el MED.

La secuencia de imágenes de la figura 8-11 ilustra cual es el camino que siguen las fisuras y la evolución de las tensiones. Se puede apreciar que las zonas de tensión máxima se dan siempre en la punta de la fisura.

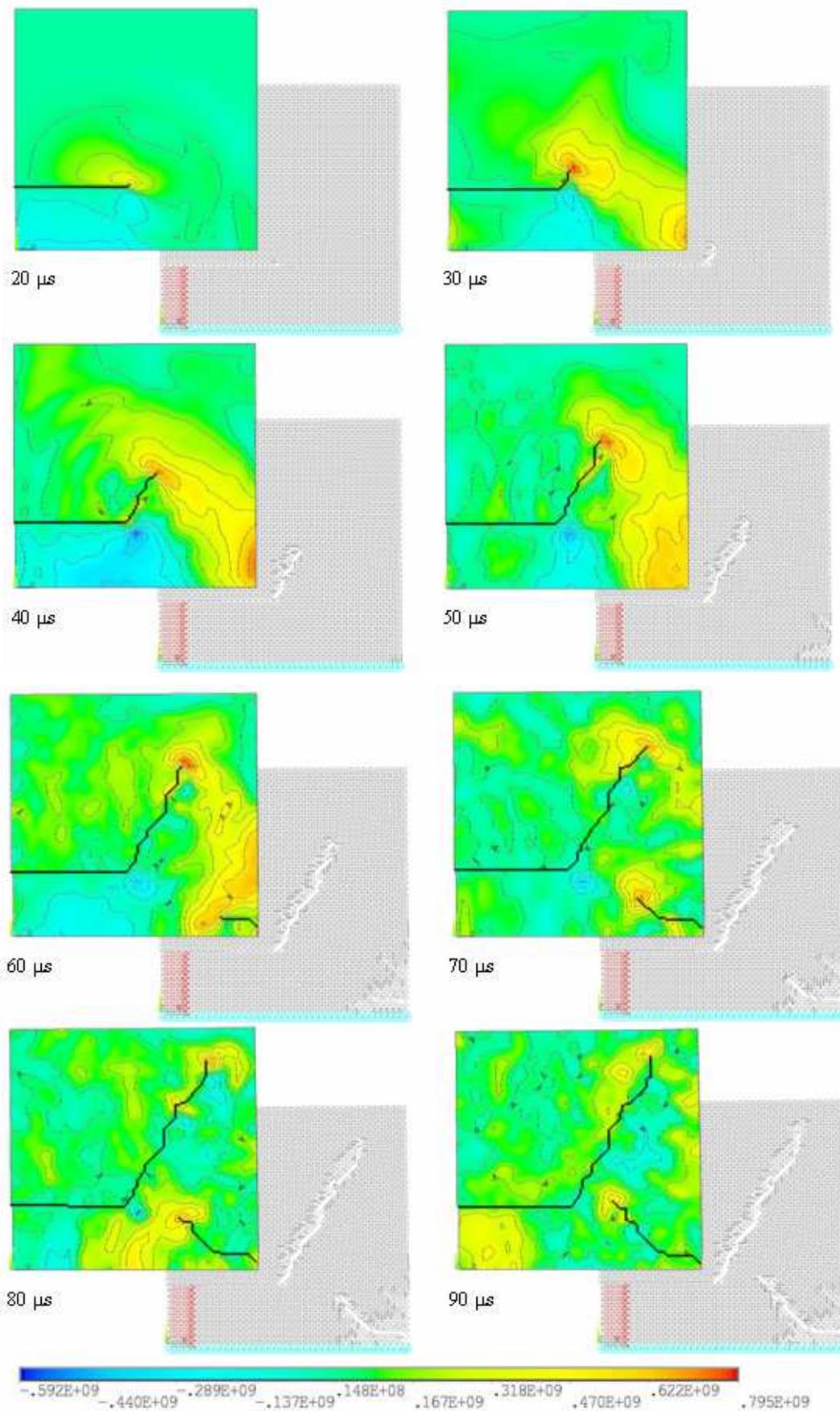


Figura 8–11 Evolución de la propagación de la fisura y tensión principal (Pa)

Batra y Ching (2002) y Guo y Nairn (2004) simularon este ejemplo midiendo los factores de intensidad de tensiones dinámicos (FITd). En estos trabajos fue aplicada una tensión prescripta constante de 20 Mpa a partir de $t = 0$, en vez de la velocidad prescripta de 16.5m/s utilizada por Belytschko et al. (2003) y Huespe et al. (2006).

Para poder comparar los resultados de la bibliografía consultada se modificó la forma de aplicar la excitación en el modelo de MED, imponiendo una tensión prescripta de 20 MPa. En la Figura 8-12 se observan los resultados obtenidos con el MED utilizando el COD contrastados con los de Batra y Ching (2002) y Guo y Nairn (2004). En esta figura se presentan los valores de los factores de intensidad de tensiones dinámicos del modo I y modo II obtenidos con el MED utilizando la expresión 3-4.

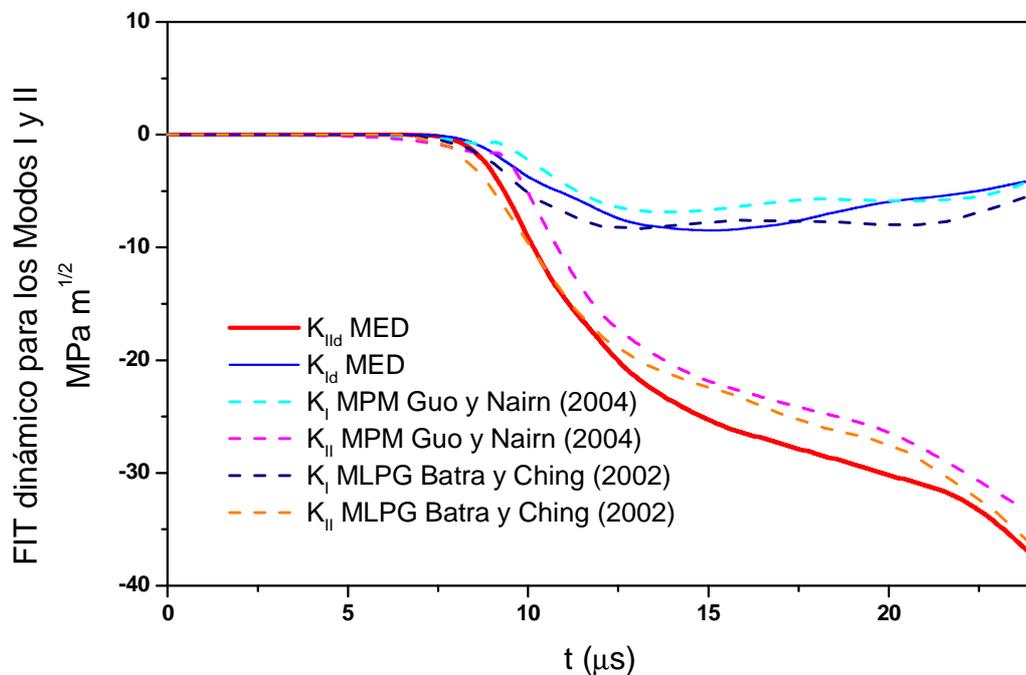


Figura 8–12 FIT dinámico para los Modos I y II.

Cabe aclarar que los FIT dinámicos presentados en la figura 8-12 son obtenidos para tiempos anteriores al comienzo de la propagación de la fisura.

Como se observa en la figura 8-12 tanto el K_{Id} como el K_{IIId} son negativos. Que el K_{IIId} sea negativo significa que el nudo o labio inferior de la fisura se desplaza hacia la derecha respecto del labio superior. Por esto el signo de K_{IIId} es arbitrario, depende de cómo se realice la medición de v_x . Que el K_{Id} sea negativo significa que se cierra la fisura o se acercan los labios superior e inferior de la misma.

Como queda demostrado en las figuras 8-9 y 8-11, en la simulación del experimento de Kalthoff, el modelo con MED reprodujo adecuadamente los resultados en términos de configuración final y la velocidad de propagación de la fisura principal. Para un estado con una tensión prescrita impulsiva, representó satisfactoriamente la variación del FITd para los Modo I y Modo II de falla.

8.3 Propagación de una fisura en una placa de PMMA

El ejemplo modelado consiste en una placa plana cuadrada de 3 mm de lado con una fisura en el borde de 0.25 mm sometida a una velocidad de desplazamiento prescrito vertical constante $V_f = 3$ m/seg (tasa de deformación 0,002).

En la Figura 6-12 se presenta el modelo analizado.

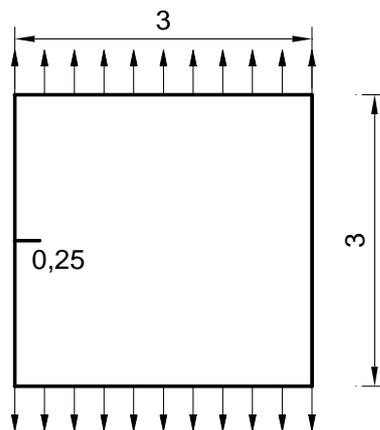
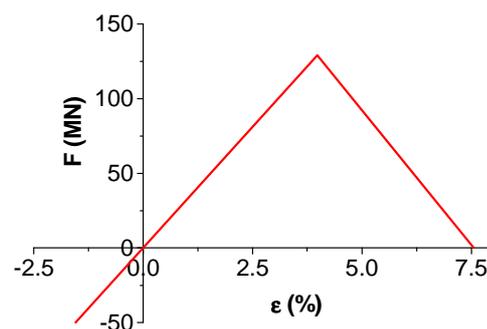


Figura 8–13 Configuración de la placa de PMMA modelada en mm.

El material del que está compuesta la placa es PMMA (Polimetacrilato de Metila–Acrílico), cuyas propiedades y parámetros utilizados para el modelado numérico con el MED son presentados en la tabla 8-4. La pieza fue considerada en estado Plano de Deformaciones.

Tabla 8–4 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	3240 MPa	Lc	$2.50 E^{-5}$ m
ν	0.35	ν	0.25
ρ	1190 kg/m ³	t	$5.0 E^{-9}$ seg
G_f	352 J/m ²	ϵ_p	3.981 %



En la figura 8-14, que se presenta a continuación, se muestran las energías durante el proceso de fractura. La fisura comienza a propagar cuando aumenta la energía disipada por daño, y atraviesa la placa cuando esta se estabiliza. A partir de este tiempo la placa original se partió en dos pedazos que se desplazan cada una por separado.

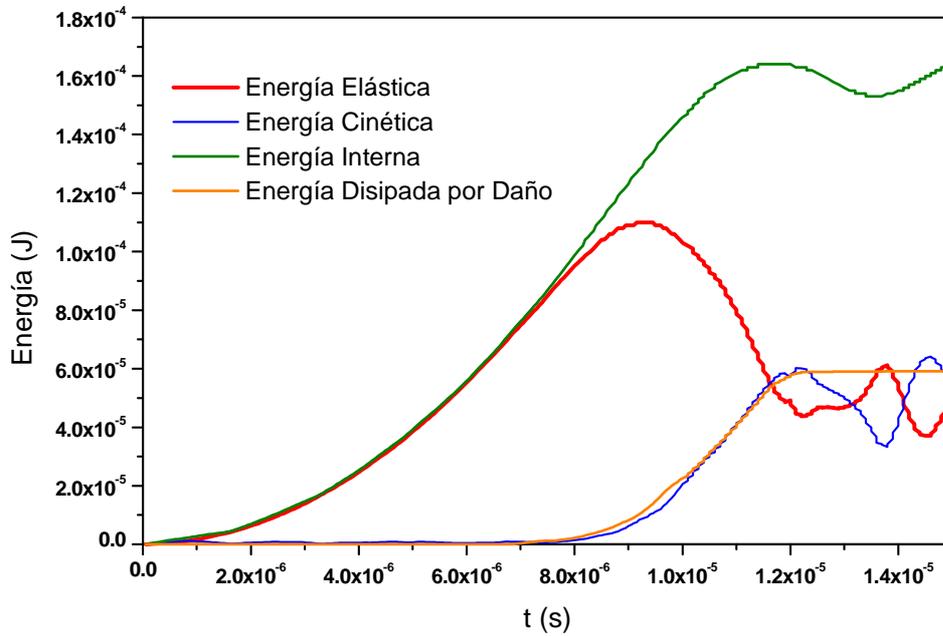


Figura 8–14 Energías desarrolladas durante el proceso de fractura.

En la figura 8-15 se presentan las configuraciones obtenidas a) con el MED, b) obtenida por Huespe et al. (2006) con los métodos de elementos finitos y c) resultado experimental de Murphy et al. (2006). Este último, no estudió la misma placa analizada en este ejemplo y por Huespe et al. (2006), pero dentro de los resultados que presenta ese trabajo es el que tiene a misma relación espesor/indentación a la simulada.

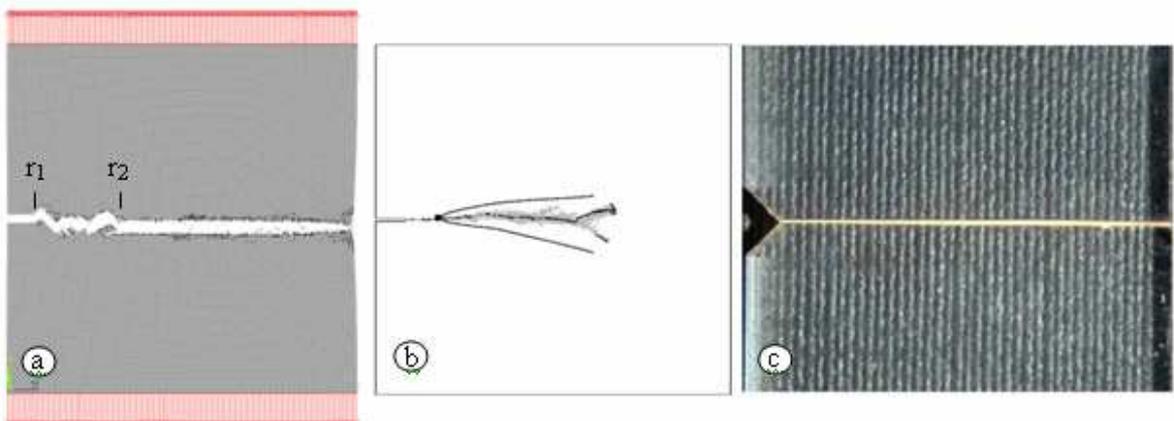


Figura 8–15 a) Configuración obtenida con el MED, b) Huespe et al. (2006) y c) resultado experimental Murphy et al. (2006), con una relación espesor/indentación similar a la simulada.

Como se puede observar en la configuración final obtenida con el MED (figura 8-15 a), para una velocidad de deformación de 3 m/s, se generan varios puntos en donde se bifurcan las fisuras pero se frenan rápidamente. Solamente propaga la fisura principal.

En contraposición, en la figura 8-15 b) se observa que el resultado obtenido por Huespe et al. (2006) tiene una bifurcación.

La configuración de Murphy et al. (2006) no se puede comparar directamente con este ejemplo ya que las dimensiones de la placa son significativamente diferentes, además de la velocidad de aplicación de la carga también es distinta. Pero se puede ver que para placas con una relación entre la longitud inicial de la fisura y el ancho de la placa similares a las simuladas, la propagación se da sin bifurcaciones (figura 8-15 c). Esta relación (longitud inicial de la fisura - el ancho de la placa) debe ser muy chica para que se presenten bifurcaciones según se muestra en Murphy et al. (2006).

En la figura 8-16 se grafican las curvas de velocidad de propagación versus la longitud de la fisura. Están representados los resultados obtenidos con el MED y los dos obtenidos por Falk et al. (2001) que utilizaron el método de zonas cohesivas, así como también los resultados extremos obtenidos por Huespe et al. (2006) utilizando el método de elementos finitos.

Los resultados obtenidos son coherentes ya que en ningún momento se supera la velocidad de Rayleigh (938 m/seg).

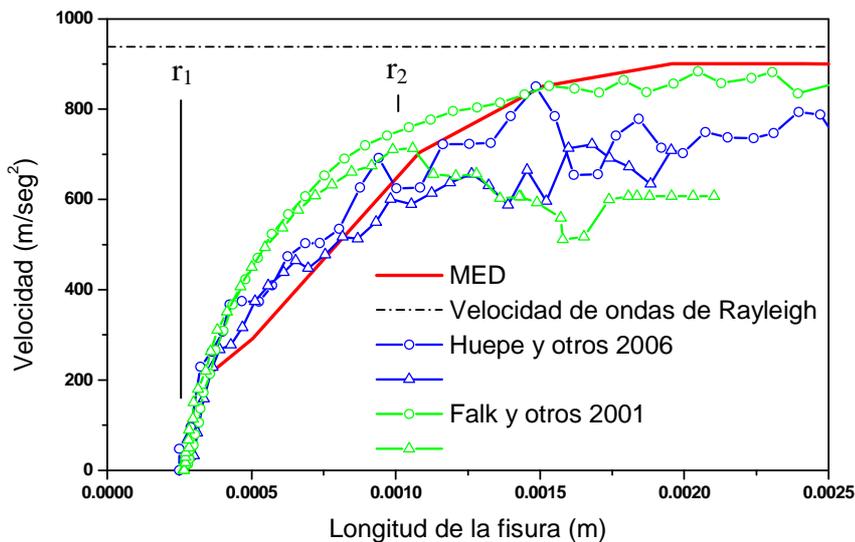


Figura 8-16 Curvas de velocidad de propagación versus longitud de la fisura propagada.

Como se aprecia en la figura anterior, la concordancia es muy buena. Inclusive coincide con la forma de las curvas y rangos de velocidades máximas obtenidos en ensayos experimentales realizados por Zhou et al. (2004), Murphy e Ivankovic (2005) y Murphy et al. (2006) en PMMA, aunque en estos trabajos las dimensiones de las placas sean diferentes y las condiciones de borde también.

Es interesante destacar que la curva obtenida con el MED presentada en la figura 8-16, para la propagación de la fisura entre $r_1 = 0.25$ mm y $r_2 = 1.0$ mm tiene valores bajos de velocidad en comparación con las otras curvas. Esto se debe a que para este rango de longitudes la fisura presenta pequeñas oscilaciones y bifurcaciones (como se aprecia en la figura 8-15 a) que no fueron observadas en la configuración de Huespe et al. (2006) (figura 8-15 b).

8.4 Impacto en Disco de PPH

Se analiza a continuación un disco de material polimérico sometido a una carga de impacto en su centro. Este modelo fue inspirado en el trabajo de Fasce (2002), la que ensayó probetas circulares planas de un homopolímero de polipropileno identificado como PPH, sobre la cual impacta una barra de acero con extremo hemisférico a una velocidad controlada. La altura de caída de la barra de acero varía en función del tipo del material estudiado. Para el material ensayado la altura de caída fue de $h = 0.225$ m y el peso del impactador de 5.49 Kg.

En la figura 8-17 se muestra la vista superior y el corte a lo largo del diámetro del disco, donde los símbolos D y t indican el diámetro y espesor respectivamente. La zona rayada esquematiza el aro metálico de sujeción de diámetro exterior D y diámetro interior S.

Se modeló una placa de 84 módulos por 84 módulos y 3 de espesor. Se colocaron apoyos horizontales y verticales en los cinco módulos exteriores a la placa circular para simular el empotramiento generado por el aro de sujeción. También la forma hemiesférica del impactador es tenida en cuenta en la simulación.

En el trabajo realizado por Kostas et al. (2004) se realizó una exploración sobre la influencia de los parámetros de este problema considerando solamente un cuarto del disco, aunque en dicho trabajo no se había implementado la forma hemiesférica del impactador.

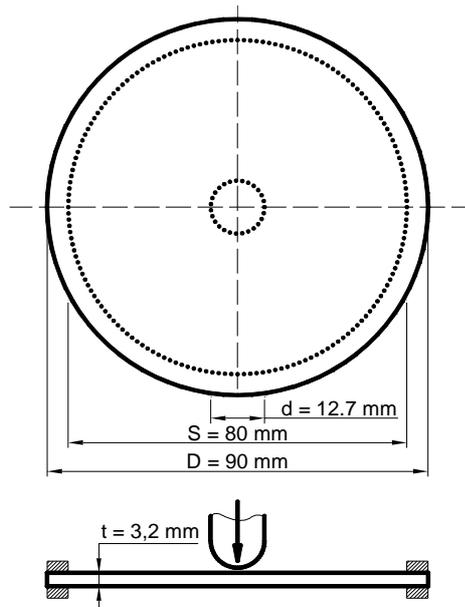
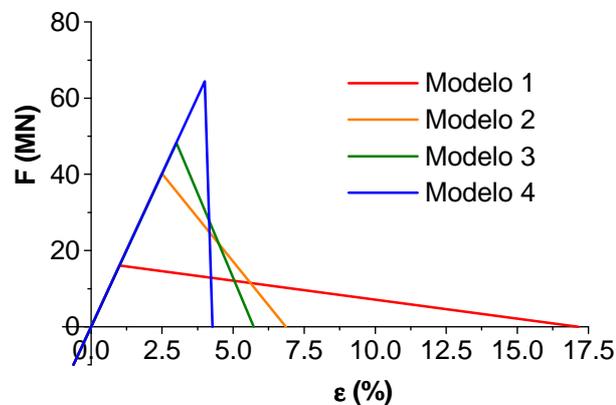


Figura 8-17 Esquema del disco analizado – a) Planta, b) corte

En este ejemplo se pretende mostrar los resultados que se obtienen variando el parámetro ϵ_p , es decir modificando la tensión de fluencia del material. En la tabla 8-5 se presentan las propiedades mecánicas del material y los parámetros utilizados en la simulación además de las diferentes relaciones constitutivas elementales empleadas.

Tabla 8-5 Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación y RCE utilizada.

Propiedades del material		Parámetros del MED		Modelo 1	$\epsilon_p = 1.0 \%$
E	1610 MPa	Lc	$1.0666 \text{ E}^{-3} \text{ m}$	Modelo 2	$\epsilon_p = 2.5 \%$
ρ	908 kg/m^3	v	0.25	Modelo 3	$\epsilon_p = 3.0 \%$
G_f	4250 J/m^2	t	$4.0 \text{ E}^{-7} \text{ seg}$	Modelo 4	$\epsilon_p = 4.0 \%$



Como se aprecia en la relación constitutiva elemental de cada modelo, el área debajo de las mismas es constante. Esto se debe a que se adoptó el mismo G_f para los cuatro modelos.

Modelo 1:

En esta simulación se colocó un $\epsilon_p = 0.01$ como se aprecia en la tabla 8-5, por lo que la tensión de fluencia o tensión máxima alcanzada por los elementos será de 16.1 MPa.

En la figura 8-18 se observan la vista superior con la configuración de rotura y un detalle de esta configuración obtenida con el MED y dos vistas laterales de la placa, una deformada y la otra rota (abajo). Para comparar estas imágenes se presenta también una fotografía de la placa estudiada experimentalmente.

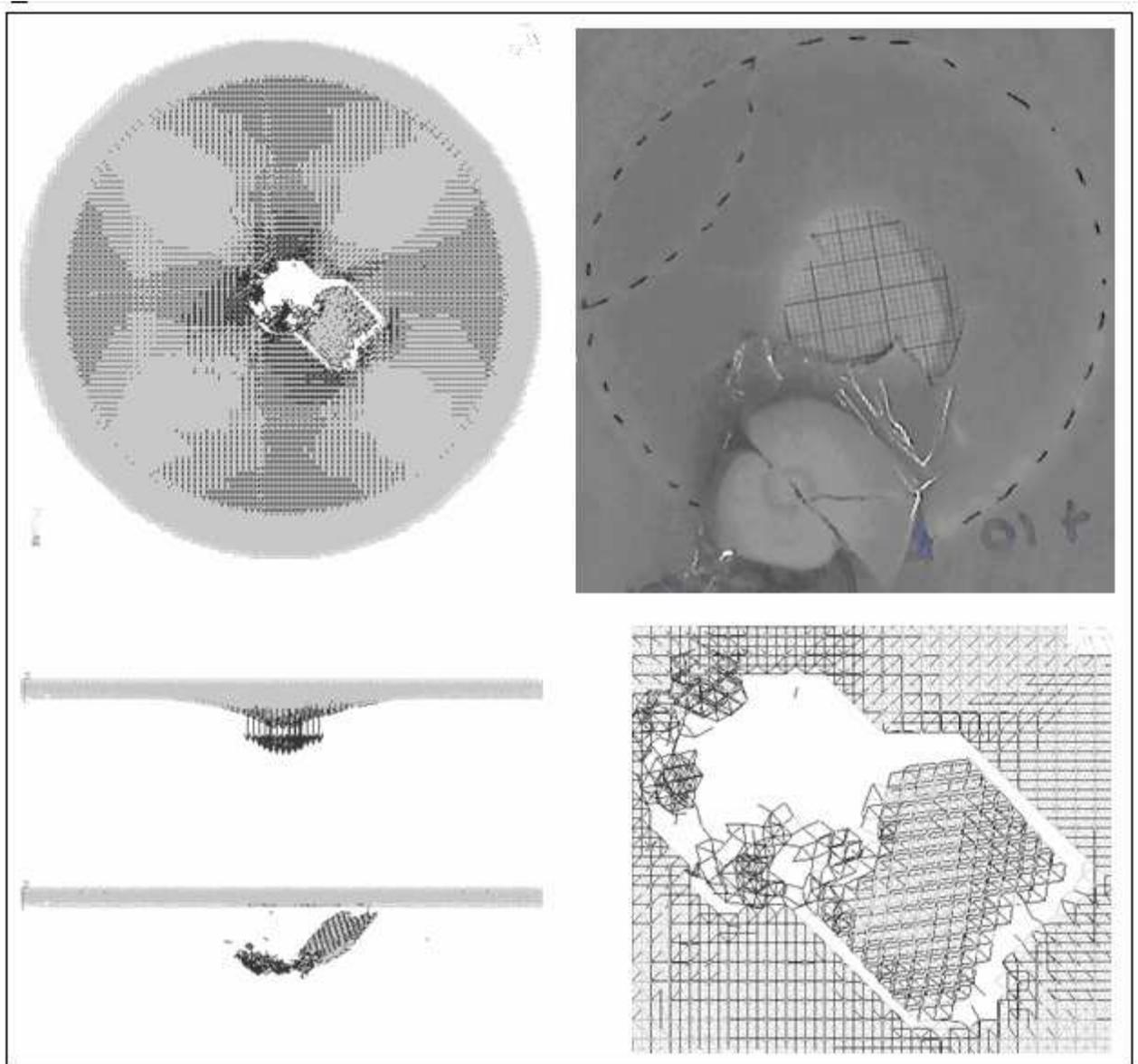


Figura 8–18 Configuración final y detalles del Modelo 1 (con $\epsilon_p = 0,01$).

Modelo 2:

Este modelo tiene un $\epsilon_p = 0.025$ lo que equivale a una tensión de fluencia o tensión máxima de 40.25 MPa.

En la figura 8-19 se presentan la vista superior de la placa con la configuración de rotura y una vista lateral de la placa deformada. También se muestra una fotografía de la placa obtenida en los ensayos experimentales realizados por la doctora Fasce en los laboratorios del INTEMA de la Universidad nacional de Mar del Plata

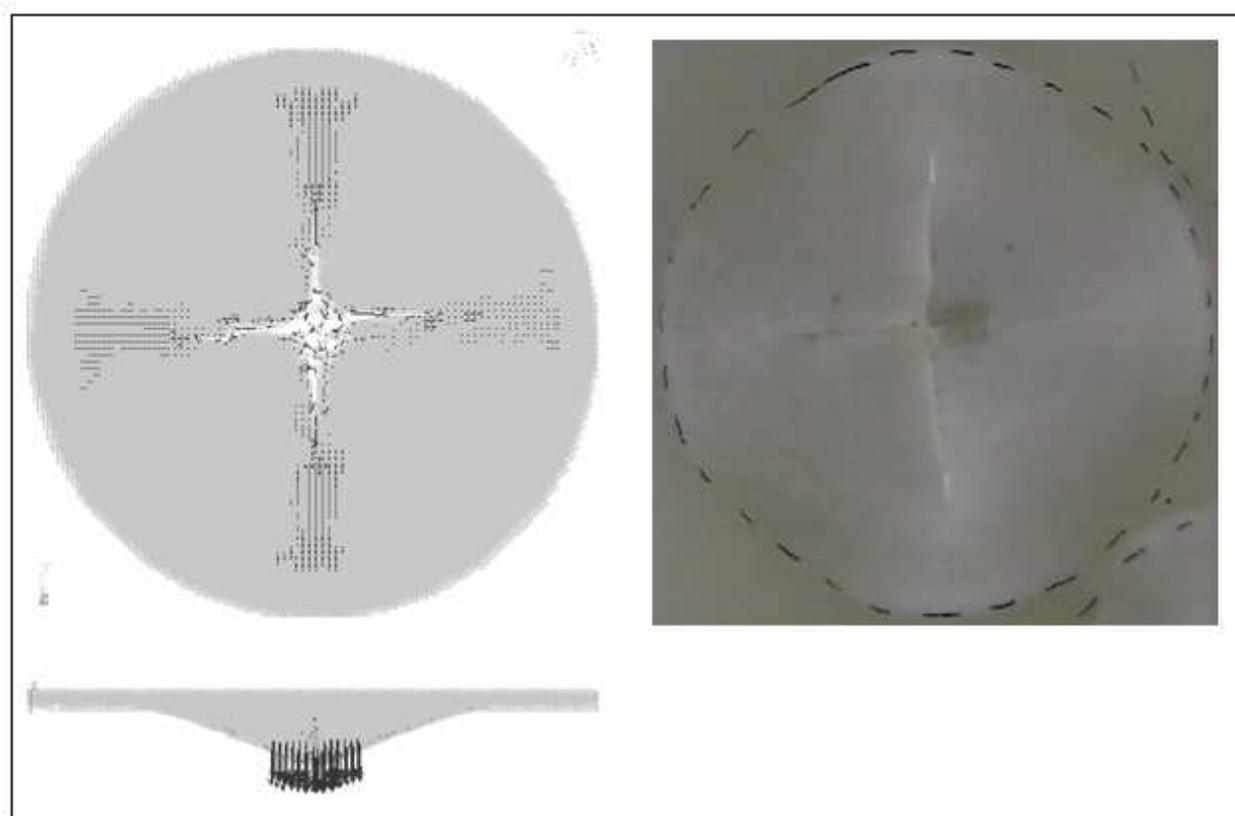


Figura 8–19 Configuración final y detalles del Modelo 2 (con $\epsilon_p = 0,025$).

Modelo 3:

Para este modelo se adoptó un $\epsilon_p = 0.03$, por lo tanto la tensión de fluencia o tensión máxima será de 48.3 MPa.

En la figura 8-20 están graficadas la vista superior de la placa con la configuración de rotura y un detalle de la misma. También una vista lateral de la placa deformada.

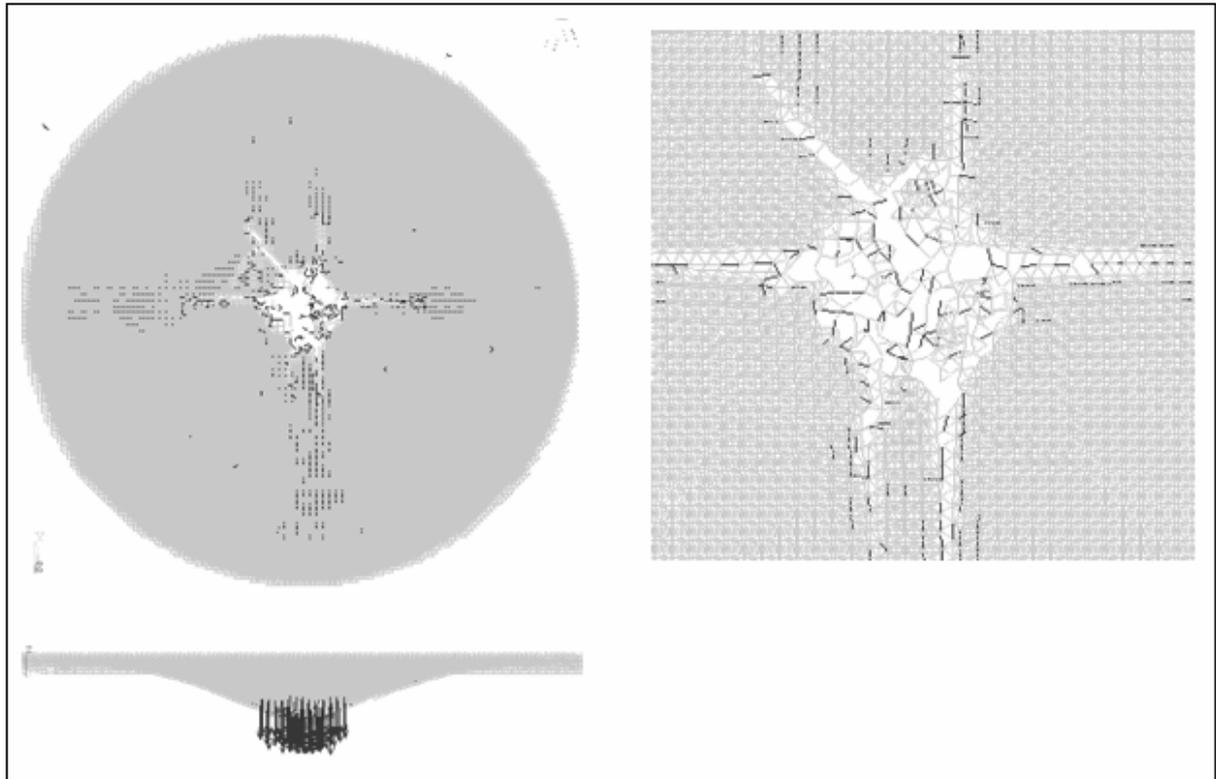


Figura 8–20 Configuración final y detalles del disco entero con impactador hemiesférico con $\epsilon_p = 0,03$.

Modelo 4:

Finalmente en esta simulación se colocó un $\epsilon_p = 0.04$ como se aprecia en la tabla 8-5, por lo que la tensión de fluencia o tensión máxima alcanzada por los elementos será de 64.4 MPa.

En la figura 8-21 se observan la vista superior con la configuración de rotura de la placa, un detalle de esta configuración y dos vistas laterales de la placa, una deformada y la otra rota (abajo). A modo de comparación y de la misma forma que en las figuras 8-18 y 8-19, se presenta una de las fotografías obtenidas durante los ensayos experimentales.

Observando las imágenes obtenidas en los ensayos experimentales se nota que existe mucha diferencia en la configuración de rotura aunque los discos hayan sido realizados con el mismo material. Como es sabido los plásticos y polímeros son muy sensibles a los parámetros durante su proceso de fabricación y dentro de una misma placa de un material se pueden encontrar distintas propiedades en diferentes zonas de la misma. Inclusive en algunos de los ensayos el impactador solamente marcó el disco, es decir ocasionó deformaciones plásticas pero no lo fracturó.

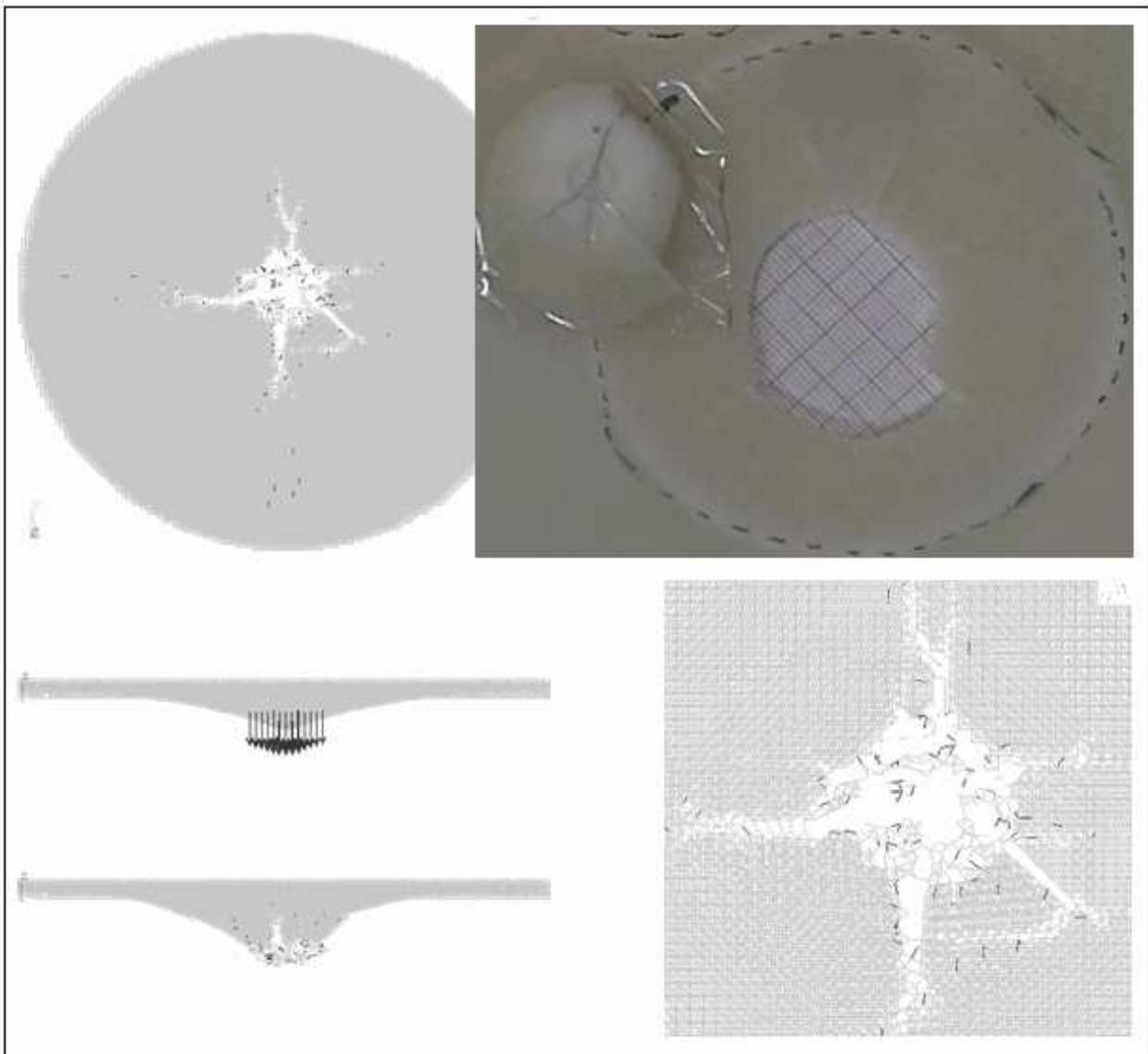


Figura 8–21 Configuración final y detalles del disco entero con impactador hemiesférico con $\epsilon_p = 0,04$.

En la simulación realizada con el MED también se puede observar una gran diferencia en la forma de colapso. En algunos casos la rotura se da principalmente por flexión y en otros por punzonado. La forma de las fisuras varía notablemente, tanto en dirección y sentido como en longitud.

La simulación de impacto en el disco forma parte de una investigación realizada en conjunto con la Universidad Nacional de Mar del Plata y la Universidad de Río Grande Do Sul (Porto Alegre, Brasil). En este, no solamente se tiene en cuenta la configuración de rotura (como se hizo en el análisis paramétrico presentado en este ejemplo), sino también la deformación, la carga máxima, las energías; no solo de este ensayo sino también de ensayos de tracción

estáticos y dinámicos y ensayos SE(B) de vigas simplemente apoyadas con una fisura central sometidas a una carga de impacto.

Con los ejemplos presentados en este capítulo se puede concluir que el MED capta satisfactoriamente a velocidad de propagación de una fisura así como también el camino que esta recorre. Capta también los mecanismos de falla y es capaz de obtener configuraciones de rotura complejas con cierto grado de precisión.

Capítulo 9 - CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se realizó la evaluación de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos, y se analizaron también problemas de propagación inestable de fisuras.

En el transcurso de esta tesis fue posible extraer las siguientes conclusiones:

Referidas a la obtención de parámetros fractomecánicos en cuerpos solicitados estáticamente

- El MED se presenta como una herramienta confiable para la determinación de parámetros fractomecánicos estáticos en configuraciones en 2 y 3 dimensiones, como lo ilustraron la comparación de los ejemplos modelados con resultados disponibles en la bibliografía técnica.
- Para medir los Factores de Intensidad de Tensiones estáticos se mostraron adecuados tanto el método del avance elemental de la fisura (balance energético) como el basado en el cálculo del COD (crack opening displacement).
- Se observó una ventaja en medir el FIT estático con el COD sobre el método del balance energético, ya que con el mismo modelo, en el primero se tiene una mayor precisión, además de necesitar una sola simulación para obtener el resultado buscado.
- Las implementaciones realizadas en el MED (modelado de fisuras en forma más precisa, determinación del tensor de tensiones en los distintos módulos del modelo), permitieron ganar mayor flexibilidad en el cálculo de los FIT y también en la visualización de los resultados.
- La distribución de tensiones en las proximidades de la punta de la fisura se mostró coherente con la distribución teórica esperada.

Referidas a la obtención de parámetros fractomecánicos en cuerpos solicitados dinámicamente

- El MED se presenta como una herramienta confiable para la determinación de parámetros fractomecánicos dinámicos en configuraciones en 2 y 3 dimensiones, con modos de falla

simples y mixtos como lo ilustraron la comparación de los ejemplos modelados con los resultados disponibles en la bibliografía.

- Para medir los Factores de Intensidad de Tensiones dinámicos se mostró adecuado el método el basado en el cálculo del COD (crack opening displacement).
- Quedó demostrada y explicada la imposibilidad de medir el factor de Intensidad de tensiones dinámico utilizando el método del avance elemental de la fisura, haciendo el balance energético de toda la placa analizada ya que, como se comentó anteriormente, el FIT es un parámetro local y es fuertemente influenciado por el movimiento de las ondas de tensiones en las cercanías de la punta de la fisura.
- Se captó el comportamiento de las ondas de tensión. En los primeros instantes de tiempo se pudo observar como las ondas de tensiones se mueven paralelas a los bordes donde se aplicó la carga. Estas ondas llegan a la fisura en un tiempo coincidente con el que tardan en recorrer esa distancia las ondas elásticas de compresión. A partir de este tiempo se comenzaron a tener valores en la curva de FITd versus tiempo.
- Como el FIT es un parámetro que describe las condiciones en la punta de la fisura (tensiones, deformaciones, etc.), se mostró que las tensiones en las proximidades de la punta de la fisura están relacionadas en forma coherente con variación del FIT dinámico con respecto del tiempo. Se encuentran las mayores tensiones en la cercanía de la punta de la fisura para tiempos en que la curva de FITd versus tiempo presenta los picos y valores de tensiones muy bajos y hasta negativos cuando se tienen los mínimos del FITd.
- Cuando se tienen fisuras inclinadas, una misma onda toca en diferentes tiempos el borde de la fisura y rebota. Algunas ondas de tensión llegan a los distintos bordes de la placa antes y después de haber rebotado. Esto genera una compleja interacción entre las distintas ondas de tensión y a pesar de esto los resultados obtenidos con el MED concuerdan con los de referencia.

Referidas a la propagación de fisuras

- Los modelos realizados con MED también reprodujeron adecuadamente la velocidad de propagación de la fisura principal además de la configuración final, obteniéndose una muy buena concordancia con los resultados presentados en la bibliografía.

- Cuando se realizó la simulación del hueco circular, se observaron concentraciones de tensiones alrededor del mismo debido a limitaciones en la discretización, aunque estas no fueron determinantes en las configuraciones finales obtenidas.
- La velocidad de propagación de la fisura de los modelos simulados con el MED fueron coherentes con los valores máximos teóricos previstos en la bibliografía técnica.
- En el ejemplo en el cual se simuló el impacto de un disco de material polimérico fue posible explorar las potencialidades del MED para simular este tipo de procesos y como herramienta para entender como se produce la falla.

9.1 Consideraciones Finales

Se indican a continuación algunas actividades que podrían ser realizadas como continuación de ese trabajo.

Para evitar un gran número de elementos, sobre todo en zonas donde se sabe que no se presentarán rupturas, y disminuir la capacidad computacional necesaria, sería conveniente implementar un modelo mixto entre, por ejemplo, elementos discretos y elementos finitos, así mallar con elementos discretos solamente la parte donde se prevén las fisuras y el resto con elementos discretos. Otro punto a mejorar en el método de los elementos discretos es el modelado de formas distintas a las prismáticas. Se debería trabajar en una forma alternativa de modelar curvas o contornos irregulares.

Otra implementación sería poder medir el factor de intensidad de tensiones tanto estático como dinámico utilizando la integral J. Ya fueron realizados avances en este sentido.

También está previsto el cálculo del FIT dinámico cuando la fisura está propagando. Este problema tiene la dificultad extra de que los parámetros fractomecánicos dependen de la velocidad de propagación y como la punta de la fisura va cambiando de posición también cambian los ejes de referencia locales y es necesario determinar su localización en cada paso del tiempo.

Estudiar en forma más exhaustiva el efecto de la bifurcación (branching) en el proceso de propagación inestable de fisuras y la variación de la velocidad de propagación durante este efecto, resulta otro de los campos que debería ser más explorado.

Por último aprovechar esta herramienta desarrollada en el estudio de otros problemas de ingeniería como materiales cerámicos, materiales con planos de debilidad definidos, materiales con propiedades estadísticamente determinadas (la implementación de las propiedades como campo aleatorios en el MED ya fue utilizada y verificada con éxito). Estos se muestran como otro de los caminos que pueden ser explorados.

BIBLIOGRAFIA

- Abraham F. F., Brodbeck D., Rudge W. E. y Xu X.; (1997):** A molecular dynamics investigation of rapid fracture mechanics. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 4, pp 1595-1619, 1997.
- Aliabadi M. H. y Rooke D. P.; (1991):** Computational Mechanics Publications. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. ISBN 1-85312-057-X.
- Anderson T.L. (2005):** Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. CRC Press. ISBN: 978-0-8493-1656-2.
- Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Fasce L. A., Frontini P. M., Cisilino A. P.; (2002):** Utilización del método de los elementos discretos en la simulación numérica de ensayos de impacto para caracterización de materiales compuestos poliméricos MECOM 2002- Santa Fé - Paraná, Argentina, Octubre 2002. *Mecánica Computacional Vol XXI*. ISSN 1666-6070. Pp.1121-1134.
- Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Fasce L. A., Frontini P. M., Cisilino A. P.; (2003):** Simulación numérica del ensayo de impacto en probetas de polímeros utilizando el método de los elementos discretos”- *Cilamce 2003*.
- Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Cóceres H., Kostascki L.; (2006):** Determinación del Factor de Intensidad de Tensiones aplicando el Método de los Elementos Discretos. XXXII Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural. Campinas – Brasil. Fecha: Mayo de 2006.
- Bathe, K. J.; (1996):** Finite element procedures., Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Batista R. G., Iturrioz I., Cisilino A.; (2003):** Mapeamento das tensões utilizando Elementos Discretos. Iberian Latin-American Congress On Computational Methods In Engineering. *Annais do Cilamce 2003*. Ouro Preto : UFMG, 2003.
- Batista R. G.; (2007):** Aplicação do Método dos elementos discretos ao estudo de micromecânica do dano de materiais microporosos de matriz metálica. Dissertação (Doutorado), Programa de pós-graduação em engenharia mecânica da UFRGS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

- Batra R. C.; Ching H. K.; (2002):** Analysis of Elastodynamic Deformations Near a Crack/Notch Tip by the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 3, pp.717-730.
- Belytschko T., Chen H., Xu J., Zi G.; (2003):** Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2003, vol.58, pp.1873-1905.
- Brara A., Camborde F., Klepaczko J. R., Mariotti C.; (2001):** Experimental and Numerical Study of Concrete at High Strain Rates in Tension. *Mechanics of Material*, vol. 33, pp. 33-45.
- Burden R. y Faires J. D.; (1996):** Análisis Numérico, Grupo Edit. Iberoamérica.
- Camborde F., Mariotti C., Donzé F. V.; (2000):** Numerical Study of Rock and Concrete Behavior by Discrete Element Modeling. *Computer Geotechnics*, vol. 27 pp. 225-247.
- Chen Y. M.; (1975):** Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code), *Engng Fracture Mech.*, 1975, 7, 653-60.
- Chen Y. M.; Wilkens M. L.; (1977):** Numerical Analysis of Dynamic Crack Problems, pp-317-325. In *Elastodynamic Crack Problems*, Noordhoff International Publishing, The Netherlands, 1977.
- Chou C. S., Tseng C. Y., Smid J., Kuo J. T., Hsiau S. S.; (2000):** Numerical Simulation of Flow Patterns of Disks in the Asymmetric Louvered-Wall Moving Granular Filter Bed. *Powder Technology*, vol.110, pp. 239-245.
- Cundall P. A., Strack O. D. L.; (1979):** A distinct element model for granular assemblies. *Geotechnique*, vol.29:47, pp. 65.
- Cundall P. A.; (1971):** A computer model for simulating progressive large scale movements in block rock systems. *Symposium International Society of Rock Mechanics*, Nancy, France.
- Curbach M.; (1987):** Festigkeitssteigerung Von Beton bei hohen belastungsgeschwindigkeiten. Dissertation, Heft 1, Schriftenreihe des institutes für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.

- Dalguer A., Irikura K., Riera J. D.; (2003):** Generations of New Cracks Accompanied by Dynamic Shear Rupture Propagation of the 2000 Tottori (Japan), Earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 93, pp. 2236-2252.
- Dominguez J. y Gallego R.; (1992):** Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 1992, 33, 635-647.
- Falk M. L., Needleman A., Rice J. R.; (2001):** A critical evaluation of dynamic fracture simulation using cohesive surfaces. *Journal de Physique IV*, 2001. Presented at the 5 th European Mechanics of Materials Conference in Delft, The Netherlands, March 5-9, 2001.
- Fasce, Laura A.; (2002):** Comportamiento mecánico de polipropileno modificado con una poliiolefina elastomérica. Tesis doctoral, INTEMA, UNMdP, Agosto 2002.
- Fedelinski P., Aliabadi M.H., Rooke D.P.; (1993):** The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 12 (1993) 203-210.
- Feenstra P.H., borts R.; (1993):** Aspect of robust computational modeling for plain on reinforced concrete. *Heron* 38 (4) pp. 1-76.
- Fineberg J., Gross S. P., Marder, M. and Swinney H. L.; (1992):** Instability in the propagation of fast cracks. *Phys. Rev.*, No. 45, pp 5146-5154, 1992.
- Gao H.; (1996):** A theory of local limiting speed in dynamic fracture. *J. Mech. Phs. Solids*, Vol. 44, No. 9, pp. 1453-1474, 1996.
- Gethin D. T., Ransing R. S., Lewis R. W., Dutko M., Crook A. J. L.; (2001):** Numerical Comparison of a Deformable Discrete Element Model and an Equivalent Continuum Analysis for the Compaction of Ductile Porous Material. *Computers and Structures*, vol. 79, pp. 1287-1294.
- Goth H., Sakai T.; (1997):** Numerical Simulation of Sheet flow as Granular Material. *Journal of Waterway Port Coast and Ocean Engineering*, vol. 123, pp. 329-336.
- Guo Y. J., Nairn J. A.; (2004):** Calculation of J-Integral and Stress Intensity Factors using the Material Point Method. *Computer Modeling in Eng. & Sci.*, vol. 6, 295-308 (2004)
- Guo Y. J., Nairn J. A.; (2006):** Three-Dimensional Dynamic Fracture Analysis Using the Meterial Point Method. *CMES*, vol. 1 no. 1, pp. 11-25, 2006 Tech Science Press.

- Hayashi Y.; (1982):** Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear. Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1982.
- Huespe A.E., Oliver J., Sanchez P.J., Blanco S., Sonzogni V.; (2006):** Strong Discontinuity Approach in Dynamic Fracture Simulations. *Mecánica Computacional Vol XXV*, pp. 1997-2018. Santa Fe, Argentina, Noviembre 2006
- Iturrioz I. y Riera J.D.; (2001):** Estudio numérico del efecto de explosivos sobre una superficie plana. ENIEF XII, Córdoba, Argentina (2001). *Mecánica Computacional Vol 20* pp.422-429. Córdoba, Noviembre de 2001.
- Iturrioz I.; (1995):** Aplicação de Método dos Elementos Discretos ao estudo de Estruturas laminares de Concreto armado. Porto Alegre. Dissertação (Doutorado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.
- Kalthoff J.F., Winkler S.; (1987):** Failure mode transition at high rates of shear loading. *International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials 1987*; 1:185–195.
- Kanninen M. F.y Popelar C. H.; (1985):** *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press 1985. ISBN 0-19-503532-1.
- Kosteski L., Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Fasce L., Frontini P., Cisilino A.; (2004):** Estudio Paramétrico de ensayos mecánicos de un material polimérico - Utilizando el Método de los Elementos Discretos. XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural. Mendoza – Argentina. Mayo de 2004.
- Kosteski L., Cóceres H., Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Cisilino A. P.; (2006):** Aplicación del Método de los Elementos Discretos para la determinación del factor de Intensidad de Tensiones Estático y Dinámico. XV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. ENIEF 2006. *Mecánica Computacional*, Vol: 25 N° 22, pp 2109-2123 (ISSN 1666-6070). Santa Fé. Argentina.
- Krysl P., Belytschko T.; (1999):** The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1998; 154: 133 – 150.

- Ladislav E. E., Dutko M.; (2003):** Large Scale Fracturing and Rock Flow Using Discrete Element Method, 2D Application for Block Caving. Numerical Methods in Continuum Mechanics, Žilina, Slovak Republic.
- Lin C. J., Wei C. J., Iwai T., Hong C. W., Greil P.; (2000):** Discrete Element Method (DEM) Simulation and Processing of Mo/Al₂O₃ Granules in a Fluidizing Bed. Proceeding of the National Science Council of the Republic of China, vol. 24, pp. 394-404.
- Linde P.; (1993):** Numerical modeling and capacity design of earthquake-resistant reinforced concrete walls. Inst. fur Baustatik and Konstruktion, ETH Zurich, Ag, Bericht 200.
- Moura B. C., Fernandez A. A., Tavares de Castro P. M. S.; (1986):** Fadiga de Estruturas Soldadas. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa. ISBN: 978-0-8493-1656-2.
- Munjiza A., Bangash T., John N. W. M.; (2004):** The Combined Finite-Discrete Element Method for Structural Failure and Collapse. Engineering Fracture Mechanics, vol. 71, pp469-483.
- Murphy N., Ivankovic A.; (2005):** The prediction of dynamic fracture evolution in PMMA using a cohesive zone model. Engineering Fracture Mechanics 72 (2005) 861–875.
- Murphy N., Ali M., Ivankovic A.; (2006):** Dynamic crack bifurcation in PMMA. Engineering Fracture Mechanics 73 (2006) 2569-2587. doi: 10.1016/j.engfracmech.2006.06.008.
- Nayfeh, A. H., Hefzy M. S.; (1978):** Continuum Modelling of Three-Dimensional Truss-Like Space Structures. AIAA Journal, Vol. 16 pp. 779-787.
- Nishioka T.; (1995):** Recent Developments in Computational Dynamic Fracture Mechanics, pp. 1-58. In Dynamic Fracture Mechanics, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1995.
- Nishioka T.; (1998):** Fracture a Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Chapter 30. Edited by G. P. Cherepanov. Krieger Publishing Company Malabar Florida 1998. 870 pp.
- Oliver J., Huespe A. E., Pulido M. D. G., Chaves E.; (2002):** From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. Engineering Fracture Mechanics 69 (2002) 113-136.
- Ostoja-Starzewski M.; (1995):** Spring-Networks in thermomechanics: Effective properties and fracture phenomena. Applied Mechanics in the Americas Vol. III, pp. 179-184. Edited

by L.A. Godoy, S.R. Idelson, P.A.A. Laura and D.T. Mook. AAM and AMCA, Santa Fe Argentina.

Procházka P. P.; (2004): Application of Discrete Element Methods to Fracture Mechanics of Rock Bursts. Engineering Fracture Mechanics, vol. 71, pp. 601-618.

Riera J. D.; (1980): A Critical Reappraisal of Nuclear Power Plant Safety Against Accidental Aircraft Impact. Nuclear Engineering and Design, vol. 57, pp. 193-206, North Holland Publishing Company.

Riera, J.D., (1984): “Local Effects in Impact Problems on Concretes Structures”, Proceedings, Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, Porto Alegre, Brasil, CPGEC/UFRGS, Porto Alegre V. III, pp.57-79.

Riera J. D., Rocha M. M.; (1991): A note on the velocity of crack propagation in tensile fracture. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, v. 13, n. 3, pp 217-240. 1991.

Rashid M.M.; (1998): The arbitrary local mesh replacement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1998; 154:133–150.

Riera J.D. e Iturrioz I.; (1998): Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. Nuclear Engineering and Design, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 179, 135-144.

Rocha M. M.; (1989): Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil. Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.

Rooke D.P. y Cartwright D.J. (1976): The compendium of stress intensity factors. Her Majesty's Stationery Office.

Sawamoto Y., Tsubota H., Kasai Y., Kosjika N., Morikawa H.; (1998): Analytical Studies on Local Damage to Reinforced Concrete Structures Under Impact Loading by Discrete Element Method. Nuclear Engineering and Design, vol. 179, pp. 157-177.

Schlangen E.; (1993): Experimental and Numerical analysis of fracture processes in concrete. Heron 38 (3) pp 1-118.

- Song S. H., Paulino G. H.; (2006):** Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 4830–4866.
- Spellmeyer T., Barrios D’Ambra R., Iturrioz I.; (2001):** Simulación numérica de la propagación de fisuras en sólidos utilizando el método de los elementos discretos. ENIEF XII, Córdoba, Argentina (2001). *Mecánica Computacional Vol 20* pp.506-513. Córdoba, Noviembre de 2001.
- Tabiei A. y Wu J.; (2003):** Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003; 57:000–000 (DOI: 10.1002/nme.742)
- Tech T.W., Batista R., Iturrioz I., Cisilino A.; (2003):** Aplicação do Método dos Elementos Discretos em Mecânica de Fratura Estática e Dinâmica. *Cilamce* 2003.
- Timoshenko y Goodier; (1968):** Teoría de la elasticidad. Ed. URMO 1968.
- Vieira Chaves E. W.; (2003):** A three dimensional setting for strong discontinuities modeling in failure mechanics. Doctoral Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya, Escola Tècnica Superior D’Enginyers de Camins, Canals i Ports. Barcelona, February 2003.
- Vonk R. A.; (1993):** A micromechanical investigation of softening of concrete loads in compression. *Heron* 38 (3).
- Wen P. H., Aliabadi M.H., Rooke D. P.; (1998):** Cracks in three dimensions: A dynamic dual boundary element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 167, pp. 139-151, 1998.
- Wittel F. K., Schulte_Fishedick J., Kun F., Kroplin B. H., Frieb M.; (2003):** Discrete Element Simulation of Transverse Cracking During the Pyrolysis of Carbon Fibre Reinforced Plastics to Carbon/Carbon Composites. *Computational Materials Science*, vol. 28, pp. 1-15.
- Zhou F., Molinari J. F., Shioya T.; (2004):** A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005) 1383–1410.