“*Un estudio sobre razonamiento condicional: Apropiaciones de la lógica en estudiantes de matemática y física*”

Lic. Samuel Iván Noya

Tesis presentada ante la Facultad de Humanidades de la
Universidad Nacional del Nordeste
para aspirar al título de

MAGISTER EN METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

Director de tesis: Dr. Agustín Adúriz-Bravo
Co-Director de tesis: Mgter. Ricardo Fabián Espinoza

Octubre 2019

Dedicatoria

A Corina…
Mi eterna compañera…

Agradecimientos

Esta tesis es, en parte, el producto de un esfuerzo personal, pero sobre todo el resultado de un contexto que siempre me apoyó. Agradezco a mis padres por fomentar siempre la intelectualidad en mi niñez. A mis amigos por escucharme tantas veces hablar de mi tesis. En particular a Bruno y Corina y mi viejo por sentarse a leer lo que escribía y prestarse a corregir lo que ya me era imposible ver.

En un orden más académico a mis estudiantes por prestarse a realizar las actividades que les propuse para recabar datos. A mis colegas por revisar las versiones previas del instrumento y sumarse a resolver lo que les proponía.

Agradezco especialmente al Dr. Aníbal Bar por los años de formación junto a su grupo y por brindarme los lineamientos originales que luego terminaron en esta tesis. También destaco la labor que está llevando a cabo en esta nueva etapa como Director de este posgrado y el interés puesto en allanar el camino a los tesistas.

Otro agradecimiento especial es para mí estimado director el Dr. Agustín Adúriz-Bravo por su humanidad y por esa manera tan especial de darme ánimos para seguir, sus chistes y su increíble capacidad intelectual, pero sobre todas las cosas por animarse a darle la oportunidad a un joven de otro lado a ser dirigido por alguien con tanta trayectoria y tanto peso académico.

En otro orden de cosas agradezco a la ayuda económica brindada por CODIUNNE, tanto para la carrera de maestría como para la de especialista, así como también para poder viajar junto al Doctor Bar a exponer parte de estos resultados a la ciudad de Tandil.

Resumen

La presente tesis tiene por objetivo general *aportar datos de análisis* a la discusión, ya instaurada, acerca de la validez de la teoría de las disciplinas formales, ésta es la creencia de que la matemática desarrolla habilidades de pensamiento condicional con mejores resultados que otras disciplinas. A estos fines, se propone evidenciar la *habilidad lógica* alcanzada por alumnos universitarios avanzados de las carreras de matemática y física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, para resolver y justificar actividades donde aparecen modos inferenciales válidos y falaces, como así también para poner en contrastación las habilidades desarrolladas por los estudiantes de una ciencia estrictamente formal como la matemática, con otra fáctica, pero altamente formalizada.

Esta es una tesis de investigación disciplinar, acompañada de un capítulo dedicado al análisis, reflexión y discusión de algunas temáticas propias de la metodología implementada. Es una investigación que tiene por ámbito de competencia a la matemática y al mismo tiempo focaliza en el análisis metodológico del trabajo justificando así ser una tesis enmarcada dentro de la carrera antes mencionada, siendo este abordaje uno de los sugeridos por los docentes de la misma.

El marco teórico adoptado para el desarrollo del presente estudio es el de la *psicología cognitiva*.

La metodología que guía la investigación es de tipo *cualitativa*, alcanzada a través de la implementación de un *instrumento con contenido matemático,* conformado por una selección de problemas de razonamiento condicional relacionado con el teorema del valor medio del cálculo diferencial y propiedades básicas de los números reales.

El análisis de los resultados, hecho en función de las respuestas dadas por los estudiantes al instrumento presentado, pone en evidencia una *habilidad lógica acotada* en la resolución y justificación de tareas que involucran los modos falaces: Negación del Antecedente (NA) y Afirmación del Consecuente (AC). En contraste con esto, los estudiantes muestran habilidades mejor desarrolladas en actividades donde aparecen los modos inferenciales válidos: Modus Ponens (MP) y Modus Tollens (MT).

Índice

Introducción

Esta tesis aborda cuestiones de didáctica, de psicología cognitiva y de lógica y adopta como escenario la matemática para poner en diálogo dichas cuestiones. La misma constituye el trabajo final para aspirar al grado de Magister en Metodología de la Investigación Científica. Esta carrera de posgrado fue dictada por la Facultad de Humanidades de la Universidad Nacional del Nordeste en la Ciudad de Resistencia, Provincia de Chaco, República Argentina.

El **capítulo 1** contiene un planteamiento general del problema a tratar y se dan las delimitaciones del mismo. Se exponen algunas de las preguntas que servirán de guía a la investigación, y en función de éstas se plantean los objetivos generales y específicos que se propone la tesis.

El **capítulo 2** comienza con la construcción de un marco teórico general que contenga y dé carácter científico a la discusión que emerge de las preguntas de investigación. En este recorrido, el marco teórico adoptado fue tomando elementos de la *psicología cognitiva*, la *lógica y* la *didáctica.* Este trabajo se propuso como objetivo general aportar *datos de análisis* a la discusión sobre la creencia de que la matemática desarrollan habilidades de pensamiento condicional con mejores resultados que otras disciplinas. En relación a este primer objetivo, la respuesta es satisfactoria en tanto se considera que el trabajo aquí expuesto aporta datos para discutir, dentro de este marco, el interrogante inicial. Como objetivos específicos se propuso advertir y luego categorizar los modos inferenciales presentes en producciones de estudiantes, y establecer, de ser posible, una comparación entre el grupo de los matemáticos y el de los físicos que componen la población. También los objetivos antes mencionados fueron alcanzados con éxito y son tratados en detalle en el capítulo 4, encargado de la discusión de los resultados, y el capítulo 5, dedicado a las conclusiones.

El **capítulo 3** está dedicado a la metodología utilizada, comenzando por una descripción de los aspectos generales de la misma, para luego pasar a la presentación de la población y muestra que fue objeto de estudio. Luego de esto se da un detalle de la evolución atravesada por el instrumento implementado, acompañado de una descripción del contexto donde surgen las primeras versiones de éste. El detalle antes mencionado, así como las explicaciones que se brindan a través del capítulo, tienen por finalidad dar a entender el porqué del abordaje de tipo cualitativo elegido. En el apartado 3.6 se expone una reflexión epistemológica y metodológica del trabajo de acuerdo al encuadre sugerido por los docentes de la carrera.

En el **capítulo 4** se realiza el análisis de los resultados obtenidos por actividad y no por estudiante, separando las respuestas de los estudiantes de matemática por un lado y los de física por otro, para luego dar un análisis comparativo del desempeño de ambos grupos en cada actividad. Se describen los pormenores que llevaron a la categorización y clasificación elegida. En concordancia con el tipo de metodología adoptada, las categorías aquí mencionadas fueron propuestas a posteriori de las lecturas de los resultados.

El **capítulo 5** se aboca a las conclusiones del trabajo. Se establecen las diferencias observadas en ambos grupos de estudiantes y se repara en los aspectos que deberían subsanarse en la formación estos. Sin desatender a la intención exploratoria y heurística de lo trabajado, se permite concluir que existe una diferencia notoria entre el desempeño altamente satisfactorio ante los modos inferenciales válidos por sobre los falaces.

1 - Planteamiento de la investigación

1.1 Introducción

En este capítulo se delimita la problemática de la investigación. Se parte de una revisión histórica que hará emerger el marco teórico que se consideró pertinente.

En la sección **1.2** se dan los rudimentos básicos para comprender por qué lo aquí expuesto es un problema, y cuál será el alcance de lo posteriormente abordado.

En la sección **1.3** se formula el problema propiamente dicho y se plantean algunos de los interrogantes que servirán de guía a esta investigación.

En la sección **1.4** se plantean los objetivos generales y específicos del trabajo.

1.2 Delimitación de la problemática de investigación

A lo largo de la historia, muchos pensadores han destacado de la matemática dos aspectos fundamentales: por un lado, su capacidad modeladora de la realidad, y por otro, su naturaleza de herramienta capaz de promover con más eficiencia el desarrollo del pensamiento lógico, en particular el razonamiento condicional.

Se muestran a modo de ejemplo algunas citas famosas que hacen alusión a lo antedicho:

"Aquellos que tienen un talento natural para el cálculo generalmente son rápidos en cualquier otro tipo de conocimiento; e incluso los aburridos, si han tenido un entrenamiento aritmético [...] se vuelven mucho más rápidos de lo que hubieran sido de otra manera" (Platón – Citado por Attridge & Inglis 2013)

"Este libro [de la naturaleza] está escrito en lengua matemática, y los caracteres son triángulos, círculos, y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto" (Galileo 1623)

"La matemática deben enseñarse a todos aquellos que tienen tiempo y oportunidad, no tanto para hacerlos matemáticos como para hacerlos criaturas razonables" (John Locke – Citado por Attridge & Inglis 2013)

La actividad matemática consiste en "… la búsqueda de estructuras y pautas que aportan orden y simplicidad a nuestro universo. Se puede incluso, llegar a afirmar que ni el punto de partida ni el objeto de un estudio matemático son tan importantes como las pautas y la coherencia que emergen de él. Esas pautas y esa coherencia proporcionan a la matemática, su potencia, porque, con frecuencia, permiten iluminar con claridad, objetos y procesos completamente diferentes y que se hallan presentes en otras ramas de la matemática, en otras ciencias o en la sociedad en general" (Phillip Griffiths 2000)

"A través de la matemática también deseamos enseñar el pensamiento lógico; no se ha encontrado una herramienta mejor hasta ahora" (Shimshon Amitsur – Citado por Attridge & Inglis 2013)

Sin pretensiones de exhaustividad, la revisión dada pretende mostrar la fuerza de una matemática, modeladora por un lado, y facilitadora del pensamiento lógico, por otro. La primera de estas ideas goza de buena salud en la comunidad matemática y es, en gran medida, la que rige las corrientes didácticas actuales que se inclinan por una matemática basada en modelos y resolución de problemas (Biembengut & Hein 2004).

Este trabajo se propone exponer acerca del debate que mantienen actualmente algunos teóricos sobre la validez de la segunda idea antes mencionada.

Es menester entender la importancia de poner en observación esta idea de la matemática como facilitadora del desarrollo del razonamiento condicional, dado que, de encontrar debilidad en este argumento, podríamos colaborar con la base de una matemática orientada a la resolución de problemas y la modelización, aportando así a una temática actual y de suma importancia en el devenir de la enseñanza de la matemática. No estamos diciendo con esto que estas ideas sean antagónicas, pero se pretende marcar aquí que la inclusión de la matemática en la enseñanza obligatoria y post-obligatoria no puede sostenerse únicamente por la creencia no probada de que las mismas desarrollan habilidades de pensamiento lógico.

Es pretensión de este trabajo poner de manifiesto que la creencia de la matemática como una herramienta que facilita el desarrollo del razonamiento lógico se encuentra, al menos por el momento, poco sustentada por datos empíricos y, sin embargo, suele esgrimirse como piedra fundamental de la enseñanza de la matemática (Attridge y Inglis 2013).

En tal sentido, autores como Inglis y Simpson (2009), Attridge e Inglis (2013) sostienen que la matemática ha sido dotada de un status y un lugar privilegiado en la constitución de los programas de estudio de casi todas las carreras universitarias. Los autores antes citados, hacen un estudio pormenorizado desde Platón hasta la actualidad, mostrando el alcance de esta creencia que se ha dado a conocer como *Teoría de las disciplinas formales* (TDF). Destacan también, en los trabajos citados, la incidencia de la TDF en debates concernientes a políticas educativas de varios países, como también, un respaldo implícito del mercado laboral para aquellos trabajadores con formación matemática posobligatoria en Reino Unido, por citar un ejemplo. Cabe aclarar que, la TDF no es formalmente una teoría, sino un postulado, el cual podría ser descrito como la creencia bastante instaurada de que las personas que pasan por una instrucción formal en matemática, desarrollan mejores herramientas en el campo del razonamiento condicional del tipo, "si P entonces Q", permitiéndoles esto, entender la lógica interna de los discursos argumentativos que pudieran encontrar en diversos contextos. En otras palabras, que la matemática promueve el pensamiento lógico por sobre otras actividades intelectuales, y el pensamiento lógico es el necesario para la comprensión de cualquier disciplina.

Una breve revisión de los trabajos vinculados con esta temática, muestra comparaciones entre estudiantes de matemática, ingeniería y otras carreras con fuerte presencia matemática, con alumnos de carreras como psicología, artes, entre otras (ibíd.). A diferencia de las investigaciones mencionadas, aquí se pretende poner en comparación las respuestas ante las inferencias MP (Modus Ponens) y MT (Modus Tollens) por un lado, con las formas inferenciales falaces como ser NA (Negación del Antecedente) y AC (Afirmación del Consecuente), las que fueron dadas por alumnos del profesorado y licenciatura en matemática, y alumnos del profesorado y licenciatura en física, de la Universidad Nacional del Nordeste, República Argentina. Otro aspecto que marca diferencias entre las investigaciones citadas con el presente trabajo de tesis, es el hecho de que, los contenidos matemáticos involucrados en dichos estudios eran de baja complejidad, en pos de que las actividades pudiesen ser resueltas por alumnos sin formación matemática pos-obligatoria dado lo heterogéneo de los grupos que contenía la población de estas investigaciones. Se optó aquí por trabajar con matemática de dos niveles, básico y avanzado.

1.3 Formulación del problema

Como se ha hecho mención, las inferencias de tipo MP y MT serían trabajadas a lo largo de todo el trayecto de formación universitaria de los alumnos de matemática y física de la Universidad Nacional del Nordeste, mientras que las inferencias NA y AC parecerían estar siendo dejadas de lado en el trayecto de formación, al menos de modo explícito, dado que, una revisión hecha de los programas de estudio de ambas carreras, no mencionan en ningún momento las falacias antes citadas.

Por lo expresado anteriormente, y bajo el supuesto de encontrar evidencias de habilidades deficientes en el desempeño de tareas lógicas en los modos inferenciales NA y AC, y en vista de que los alumnos de estas carreras serán docentes y/o investigadores, surgen los siguientes interrogantes:

a) Siendo que estas inferencias se presentan en el quehacer matemático para quienes investigan, así también como en el quehacer áulico para quienes ejercen la docencia, ¿no sería éste un vacío de formación a subsanar?

b) Siendo la enseñanza de las demostraciones, ya sea en la forma directa MP, en su contrarrecíproca MT o, inclusive, en su vía de razonamiento por el absurdo, el contexto preferencial para la enseñanza del uso del razonamiento condicional, y teniendo en cuenta que las demostraciones se están dejando de lado en la enseñanza, optando por un enfoque netamente instrumental y algorítmico, ¿es posible seguir justificando la enseñanza de la matemática basados en la aceptación de la no probada TDF?

En función de lo reseñado, y a la luz de las preguntas de investigación antes mencionadas, esta investigación se propone los siguientes objetivos de investigación.

1.4 Objetivos de la investigación

1.4.1 Objetivo General

Evidenciar la habilidad lógica alcanzada por alumnos universitarios avanzados de matemática y física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste para resolver y justificar actividades donde aparecen modos inferenciales válidos y falaces.

1.4.2 Objetivos específicos

- Advertir posibles problemas en la resolución de tareas que involucren los razonamientos válidos MP y MT tanto como las falacias NA y AC.
- Identificar los modos inferenciales que aparecen en las justificaciones dadas a las actividades propuestas.
- Categorizar las respuestas dadas a las actividades impartidas a fines de establecer comparaciones entre las habilidades lógicas adquiridas en la resolución de modos inferenciales, tanto falaces como válidos.
- Establecer similitudes y diferencias entre las respuestas dadas por los alumnos de matemática y física.

2 - Marco Teórico

2.1 Introducción

La lógica se propone, desde sus inicios, la distinción entre los razonamientos válidos e inválidos (Gianella 1998). Esta rama de las ciencias es, en términos de Copi (1962), el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el buen (correcto) razonamiento, del malo (incorrecto).

Se entenderá aquí por razonamiento un conjunto de dos o más proposiciones en el que una de ellas, llamada conclusión, se pretende esté fundada, o se infiera de la(s) otra(s), llamada(s), premisa(s) (Gianella 1998). Copi, por su parte, define a una inferencia como el proceso por el cual se llega a una proposición, y se la afirma sobre la base de otra(s) proposiciones aceptadas como punto de partida del proceso. En base a estas dos definiciones se entenderá aquí razonar e inferir como sinónimos.

Siguiendo a Gianella, un razonamiento se dirá válido cuando su forma es válida, y la forma de un razonamiento es válida cuando no hay ningún razonamiento de esa forma que contenga premisas verdaderas y conclusión falsa. De modo análogo, un razonamiento es inválido cuando su forma es inválida, y la forma de un razonamiento es inválida cuando existe al menos un razonamiento de esa forma que tiene premisas verdaderas y conclusión falsa. Los componentes de un razonamiento son las premisas, expresiones derivativas y la conclusión. Tanto las premisas como la conclusión son proposiciones, y lo que define qué rol ocupan en un razonamiento es si se encuentran antes o después del condicional. Las expresiones declarativas, por su parte, son los términos “entonces”, “por lo tanto”, o bien sus signos análogos en el campo de la lógica.

Si bien los orígenes del estudio del razonamiento en general se remontan a la filosofía, y en concreto a la lógica aristotélica, es dentro de la psicología cognitiva, con los trabajos pioneros de Brunner et al (1956) y años más tarde Wason (1966), en los cuales se enmarcan actualmente los estudios sobre razonamiento condicional. Dentro de los estudios del razonamiento condicional pueden diferenciarse, al menos, dos líneas de investigación, una de ellas con mayor énfasis puesto en la lógica y otra, en las capacidades de raciocinio con frases de uso cotidiano (Quillas & Csongor 2013). Estas últimas, en vínculos más estrechos con la psicología, y las primeras ligadas a estudios de carácter lógico-matemático. La línea lógica de las investigaciones se ha centrado en la justificación de la validez de los razonamientos, mientras que la línea psicológica con la forma en que la razón opera (ibíd.). Estudios posteriores a los inaugurados por los autores antes citados, han diferido tanto en sus abordajes metodológicos, como en sus propuestas teóricas.

Se exponen a continuación rudimentos básicos propios de la semántica y de la sintaxis, para lograr tener una compresión más acabada del contexto en el cual el condicional “entonces” es interpretado.

2.2 Elementos Semánticos

Las definiciones y relaciones entre los objetos matemáticos se dan en un contexto y con un lenguaje. La matemática, aún en sus ramas más abstractas, usa términos del lenguaje cotidiano, en mayor o menor medida, cuando define sus “objetos”. En busca de eliminar ambigüedades, matemáticos y lógicos realizan una codificación de sus ideas usando signos propios. Un signo (S) debe entenderse como una tríada conformada por S, su denotado (D) y un intérprete (I). Se considera aquí como signo la siguiente definición:

“*Diremos que S es signo de D para I, si I piensa en D cada vez que está en presencia de S*” (Gianella 1998).

Los signos, en general, no se presentan en forma aislada sino conjuntamente con otros signos, formando lo que se conoce como sistema sintáctico. Son de interés aquí, tres dimensiones posibles, que surgen de las relaciones entre los signos, dentro de estos sistemas sintácticos.

a) **Dimensión sintáctica**: relación entre un signo y otros signos.
b) **Dimensión semántica**: relación entre un signo y aquello a que hace referencia.
c) **Dimensión pragmática**: relación entre el signo (o sistema de signos) y los interpretes de estos signos.

Se pretende aquí evidenciar la complejidad involucrada, al estudiar las respuestas dadas por los estudiantes ante actividades donde las formas, “si P entonces Q” o “$P \Longrightarrow Q$”, estén presentes.

La matemática es una disciplina formal, esto es, una ciencia que se encarga de establecer relaciones y propiedades, de, entre y para, los “objetos” que ella misma define. Sobre estos objetos realiza afirmaciones que se categorizan de *axiomas,* cuando son aceptadas sin demostración, y de *proposiciones* o *teoremas* cuando son deducidas a partir de los axiomas. El proceso inferencial antes mencionado constituye parte de la dimensión sintáctica de ese sistema de signos. En tanto a una dimensión semántica, mencionemos que, a diferencia de la lógica, la matemática guarda vínculos más cercanos con los objetos del mundo que han servido de soporte para definir sus “objetos” de estudio. Las ideas primigenias de recta, punto, plano, que aparecen como axiomas en los *Elementos* de Euclides (325 a.C.) fueron inspiradas por objetos del mundo, pasando luego a ser “objetos” de la matemática. Se vuelve a retomar con más detalles estos aspectos en el parágrafo 3.6 dedicado exclusivamente a una discusión epistemológica y metodológica de la matemática.

2.3 Elementos de la lógica proposicional

En vista a nuevos avances en las lógicas no bivalentes, y el auge que estas tienen actualmente, como ser el caso de la lógica difusa, no está de más aclarar que, este trabajo está enmarcado en la lógica bivalente, es decir, aquella donde las operaciones lógicas sólo pueden asumir dos posibles resultados, a saber, verdadero (V) o falso (F).

En conocimiento de que las notaciones dentro del campo de la lógica pueden tener algunas variaciones, y en pos de eliminar ambigüedades, se listan a continuación las operaciones usuales, acompañadas de sus signos:

Conjunción “$\wedge$”
Disyunción inclusiva “$\vee$”
Disyunción excluyente “$\veebar$”

Negación "-" o también "~"
Condicional "⟹"
Bicondicional "⟺"

Se asume que el lector está familiarizado con la construcción de las tablas de verdad que acompañan el análisis de las operaciones antes citadas.

De entre las operaciones lógicas que se han presentado, se pondrá especial atención en este trabajo al condicional "⟹", leído usualmente "entonces". Esta operación, es una función binaria, en el sentido de que puede tomar solo dos valores, V (verdadero) o F (falso), y es tal que, se vuelve falsa cuando Q es falsa siendo P verdadera y es verdadera en sus otras tres posibilidades, a saber: P falsa y Q falsa; P verdadera y Q verdadera; y P falsa y Q verdadera.

Lo anterior puede sintetizarse mediante la siguiente tabla de verdad:

P	Q	P ⟹ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 1

Se dirá que una proposición "Q" es una consecuencia lógica de una proposición "P" o simplemente que "Q" se deduce de "P", y denotaremos "$P \Longrightarrow Q$", si la función "⟹" es verdadera, siendo P el antecedente y Q el consecuente. Es importante distinguir aquí que, tanto en matemática como en lógica, se habla de razonamiento condicional haciendo distinción entre los términos de *implicación* y *condicional*. Si bien los términos antes citados son usados indistintamente, aun entre los matemáticos, estos son formalmente distintos. Por ejemplo, sea P la proposición "Diciembre tiene 34 días" y sea Q la proposición "Navidad se festeja en marzo". Desde el punto de vista del razonamiento condicional, la proposición "Como diciembre tiene 34 días entonces Navidad se festeja en marzo" es correcta, dado que, tanto su antecedente como su consecuente, son falsos; sin embargo, el último razonamiento expuesto visto como una implicación, no tiene ningún asidero. El análisis realizado del condicional es estrictamente sintáctico, mientras que el de la implicación es semántico. La prevalencia del contenido por sobre la forma parecería indicar que razonamos por medio de la implicación y no solo del condicional. Puede verse una revisión más completa de la bibliografía que acompaña esta idea en el trabajo antes citado de Quillas & Csongor 2013.
Se exponen a continuación las formas inferenciales MP, MT, NA y AC.

2.3.1 El esquema Modus Ponens (MP)

Se conoce con este nombre a un tipo particular de razonamiento válido, cuya forma podría resumirse así: Se conoce la regla "P ⟹ Q" y además se conoce que se dio P, por lo tanto, se concluye Q. En forma esquemática suele ser presentado como:

$$\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \\ \underline{P \qquad\quad} \\ \therefore\ Q \end{array}$$

Figura 1: Modus Ponens

Una de las maneras de demostrar la validez de este esquema, es a través del estudio de la tabla de verdad de su condicional asociado. El condicional asociado al modus ponens es el siguiente:

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$$

La tabla de verdad de esta proposición arroja todos sus resultados verdaderos, lo cual, lo convierte en una ley lógica o **tautología**. Recuérdese que las otras posibilidades son obtener todos los resultados falsos, con lo cual se estaría ante una **contradicción**, o también resultados verdaderos y falsos, a lo cual se denomina **contingencia**.

El esquema Modus Ponens, constituye lo que se denomina **razonamiento deductivo**. En términos de Charles Sanders Peirce (*CP* 8.209, c.1905 – Citado por Hoffman, ver link en referencias) *existen tres clases elementales de razonamientos: abducción, deducción, e inducción.* El deductivo, a diferencia de los otros dos, tiene como particularidad que la conclusión se obtiene de forma necesaria de las premisas, ahora bien, el esquema deductivo funciona y es útil, siempre y cuando, uno cuente con una regla "$P \Rightarrow Q$" para poder establecer posteriores deducciones. Se reparará sobre este particular más adelante.

En otro orden de cosas, se propone aquí volver de momento la mirada al proceso de entrenamiento de los alumnos de disciplinas formales. A fines de entrenar a los mismos en su capacidad deductiva, durante su proceso de formación universitaria, los alumnos de matemática y física son expuestos a la tarea de: partiendo de la proposición P y a través de una cadena de deducciones intermedias, lograr arribar a la conclusión Q. Este proceso, es lo que suele expresarse comúnmente como el **camino directo**. Se exponen a continuación, otros caminos utilizados en el proceso de demostración, pero para esto deben considerarse otras implicaciones vinculadas con la forma directa "$P \Rightarrow Q$"

Como fue mencionado en el párrafo anterior, muñidas a la implicación "$P \Rightarrow Q$" vienen otras. Estas, se encuentran dadas por las negaciones de las proposiciones P, o Q, así como también, por el lugar que las mismas ocupan, a saber, a derecha, o a izquierda del signo "⟹". Se muestran a continuación las afirmaciones: contrarrecíproca (vinculada con el modus tollens), recíproca (vinculada con la falacia AC) y la afirmación obversa (vinculada con la falacia NA).

2.3.2 El esquema Modus Tollens (MT)

Afirmación contrarrecíproca de la proposición $P \Rightarrow Q$:
Es la proposición $-Q \Rightarrow -P$ la cual se lee "Si no Q, entonces no P". La tabla de verdad de esta proposición, arroja resultados idénticos a la tabla de verdad de "$P \Rightarrow Q$". Lo cual nos dice que las mismas son equivalentes y, por lo tanto, probar la verdad de una de ellas, conlleva a demostrar la verdad de la otra. Hasta aquí se muestran dos vías para demostrar una proposición: la directa, o la que se denominará aquí **camino indirecto** partiendo de "$-Q$", para luego de una lista de implicaciones intermedias, llegar a "$-P$". Más adelante se describirá una tercera posibilidad conocida como reducción al absurdo.

La equivalencia descrita, puede ser expresada en términos de la lógica simbólica como:

$$[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [-Q \Rightarrow -P]$$

Esta equivalencia justifica el siguiente modo inferencial denominado *modus tollens* (MT), y muestra la necesidad de la proposición Q para que haya ocurrido P. Destaquemos que las dependencias temporales mencionadas, como ser, "haya ocurrido", están puestas a fines de amenizar la compresión del presente parágrafo.

Se describe ahora el uso del *modus tollens*. Se conoce la regla " $P \Longrightarrow Q$" y además se conoce que no se produjo Q, por lo tanto, se concluye que no se produjo P. En forma esquemática suele ser presentado como:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{-Q \qquad\quad} \\ \therefore -P \end{array}$$

Figura 2: Modus Tollens

Al igual que para el modus ponens, puede demostrarse que este es un razonamiento válido, haciendo uso de la tabla de verdad de su condicional asociado. El condicional asociado al modus tollens es el siguiente:

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge -Q] \Longrightarrow -P$$

Nótese que, en términos formales, este condicional es idéntico al del modus ponens, es por esto que, intentar probar la verdad de "$P \Longrightarrow Q$" partiendo de "$-Q$" y arribando a "$-P$" no presenta diferencias en cuanto a la técnica de demostración, pero si en tanto a la complejidad de la comprensión del enunciado, dado que en el mismo figuran proposiciones negadas. La complejidad que agrega la presencia de proposiciones negadas ha sido ampliamente tratada por la psicología cognitiva (Evans 1972, Oaksford & Stenning 1992, Schaeken, Schroyens & Dieussaert 2001).

Como se mencionó anteriormente, no existen diferencias estructurales en cuanto al uso de los modos ponens y tollens en las demostraciones. Existe otra vía argumental para la demostración denominada **demostración por el absurdo**, cuya utilización, se encuentra registrada por primera vez en los *Elementos* de Euclides, para justificar la existencia de infinitos números primos. La estructura del mismo es la siguiente: Se supone falsa la proposición Q que se pretende probar, y se realiza una argumentación conjunta con lo que afirma P, que es la proposición que constituye la hipótesis. Si de la suposición conjunta de éstas, se arriba a una afirmación contradictoria del tipo "$R \wedge -R$ " a través de una cadena deductiva correcta, es porque el error proviene de haber supuesto a la proposición Q como falsa, lo cual nos dice que Q debe ser verdadera. Esta vía argumental, fue tratada de modo intuitivo en principio, pero tiene su validación en el marco de la lógica moderna, bajo la siguiente tabla de verdad, la cual muestra la equivalencia de los valores de verdad que se obtienen (ver la cuarta columna):

P	⟹	Q	⟺	[(P	∧	-Q)	⟹	(R	∧	-R)]
V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V

Tabla 2

Se destaca aquí, un vínculo existente entre la demostración por reducción al absurdo con el modus tollens, dado que en ambos casos aparecen negaciones de las premisas que constituyen la proposición "$P \Longrightarrow Q$". Si bien, la demostración por reducción al absurdo no constituye, al menos de forma directa, uno de los objetos de estudio de este trabajo, la misma tuvo que ser mencionada dado las veces que este método resulta ser erróneamente confundido con el modus tollens.

2.4 Las falacias NA y AC

Se entenderá aquí como falacia a un razonamiento que parece válido pero que no lo es. Se dan a continuación, dos breves descripciones de las falacias afirmación del consecuente AC y negación del antecedente NA, a fines de poder abordar, de manera conjunta y con más detalles, la problemática que las acompañan y dar, de ser posible, un marco teórico que explique el porqué de las mismas en alumnos de matemática y física.

2.4.1 Falacia AC / afirmación recíproca / abducción

Dada una proposición de la forma $P \Longrightarrow Q$ su **afirmación recíproca** es $Q \Longrightarrow P$, la cual se lee "Si Q, entonces, P". Esta afirmación NO es equivalente a la proposición directa de la que partimos. Esta falacia, puede ser descrita como la creencia de que ante el consecuente "Q" el individuo interpreta que estuvo presente previamente "P". Lo cual, pudo haber sido cierto, pero solo en términos probables y no en términos necesarios.

La forma esquemática de este tipo de razonamiento se presenta en la siguiente figura.

$$\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \\ \underline{Q \qquad\quad} \\ \therefore P \end{array}$$

Figura 3: Falacia Abductiva

Puede ser útil aquí expresar la falacia abductiva haciendo uso de las relaciones causa/efecto. Esta falacia se presenta cuando, ante un efecto determinado (la calle mojada), el intérprete del fenómeno entiende que se debe a una causa en particular (ha llovido). Si bien es cierto que *si llueve la calle se moja*, el hecho de que haya llovido, no es la única causa para que la calle esté mojada (Panizza 2005). Esto es, en otras palabras, la interpretación monocausal de un fenómeno multicausal.

La inferencia abductiva ya fue estudiada bajo el nombre de *apagogé* por Aristóteles, pero fue solo valorada por los estudios de Charles Sanders Peirce. Esta inferencia va del "caso" a la "regla", y es la inferencia que genera nuevos conocimientos. Es una inferencia no demostrativa, en tanto que un efecto puede ser producto de causas distintas.

Eco (1990) sostiene que la abducción es un acto creativo. Sostiene que la misma es un proceso intelectual mediante el cual un sujeto genera una hipótesis nueva. Hoffman (ibíd.) critica esta idea de Eco por entender que la hipótesis surge de la nada. Es por esta razón que prefiere pensar que el sujeto "elige" una hipótesis dentro de un conjunto de infinitas hipótesis y hace especial hincapié en el contexto, entendiendo que no existe una abducción en estado puro sino en interacción con un medio.

Un caso muy destacado a citar dentro de la matemática de la generación de una hipótesis explicativa, es la del concepto de "Distribuciones". Dicho concepto generaliza el concepto de "funciones". Durante casi 40 años los matemáticos, ingenieros y físicos manipularon este "objeto" sin entender realmente qué era, pero las aplicaciones que tenía hacían olvidar la necesidad de un formalismo. No fue sino a 40 años de su primera aparición en los trabajos del físico matemático Paul Dirac, que el matemático Laurent Schwarz propuso una teoría que daba rigor y claridad a este nuevo tipo de objeto.

La razón de esta anécdota es mostrar que el proceso de construcción, puesta a prueba y posterior validación de un conocimiento matemático, no escapa a lo que sucede en otras disciplinas. Es el proceso abductivo el que se encuentra presente en toda generación de nuevos conocimientos, sin embargo, la matemática es, a este particular, una ciencia que a menudo es considerada como únicamente deductiva. En la misma se afirman ciertas proposiciones y tomando a estas como antecedentes se deducen otras. Ahora bien, la generación de una explicación de la forma “$P \Longrightarrow Q$” que contiene contenido nuevo para la comunidad matemática, tuvo que darse necesariamente desde un razonamiento abductivo o analógico; sin embargo, esta parte de la construcción del conocimiento les es vedada a los estudiantes, y se cae en una replicación de conocimientos ya instaurados, con muy poco hincapié en los contextos que han generado su emergencia. Estos razonamientos “*son válidos pero no en el sentido de la lógica formal”*, sino “*porque ellos […] permiten conocer, operar, calcular, formular hipótesis*” (Panizza, 2005).

2.4.2 Falacia NA / afirmación obversa

Dada la proposición $P \Longrightarrow Q$ su **afirmación obversa** es $-P \Longrightarrow -Q$, la cual se lee “Si no P, entonces, no Q”. Esta proposición NO es equivalente a la proposición directa de la que partimos y, por tal motivo, es poco abordada en el proceso de enseñanza de la lógica. Sin embargo, existe una fuerte tendencia a considerar que la negación del antecedente trae consigo la negación del consecuente. Este es otro fenómeno también abordado ampliamente por la psicología cognitiva (Henle, 1962). Debe destacarse aquí que, ante la negación del antecedente, no puede asegurarse, ni la negación del consecuente, ni tampoco su afirmación, esto es, del conocimiento de la regla, $P \Longrightarrow Q$ no puede concluirse $-P \Longrightarrow -Q$, así como tampoco puede concluirse $-P \Longrightarrow Q$.

2.5 Posibles variantes de presentación de la premisa mayor

A fines de caracterizar de modo más preciso las dificultades que podrían agregarse a la determinación del valor de verdad de un razonamiento, se muestra a continuación una tabla en la que figuran, en la primera columna las cuatro formas que podría adoptar la premisa mayor y las siguientes columnas muestran la forma que adoptaría cada uno de los modos inferenciales que se abordan en este trabajo. Las cuatro formas que podría adoptar la premisa mayor, a saber: $P \Longrightarrow Q$, $-P \Longrightarrow Q$, $P \Longrightarrow -Q$ y $-P \Longrightarrow -Q$.

	Modo Inferencial			
Forma de la premisa mayor	MP	MT	AC	NA
$P \Longrightarrow Q$	$P \Longrightarrow Q$	$-Q \Longrightarrow -P$	$Q \Longrightarrow P$	$-P \Longrightarrow -Q$
$-P \Longrightarrow Q$	$-P \Longrightarrow Q$	$-Q \Longrightarrow P$	$Q \Longrightarrow -P$	$P \Longrightarrow -Q$
$P \Longrightarrow -Q$	$P \Longrightarrow -Q$	$Q \Longrightarrow -P$	$-Q \Longrightarrow P$	$-P \Longrightarrow Q$
$-P \Longrightarrow -Q$	$-P \Longrightarrow -Q$	$Q \Longrightarrow P$	$-Q \Longrightarrow -P$	$P \Longrightarrow Q$

Tabla 3

Cabe destacar que las dos últimas columnas contienen formas que no son equivalentes a la premisa mayor, además para la constitución de la última se adoptó como criterio lo prescrito por la psicología cognitiva, a saber, que ante la negación del antecedente en general se considera que el consecuente también debe ser negado. Ahora bien, el comportamiento antes mencionado no contiene originalmente antecedentes ni consecuentes negados. En base a lo anterior, se vuelve a destacar que la tabla 3 está simplemente expuesta a fines de contextualizar lo amplio del análisis del valor de verdad de una implicación.

2.6 Estructura básica de un teorema

A las dificultades mencionadas en el apartado anterior se suma un detalle no menor. Los teoremas, en general, están compuestos por la conjunción de varias proposiciones que conforman la hipótesis y una proposición/es que constituye/n la tesis. De forma simbólica lo anterior podría expresarse como:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Longrightarrow T$$

En este contexto, negar una hipótesis significa negar el conjunto conformado por las proposiciones p_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Ahora bien, he aquí una dificultad no menor, en tanto y en cuanto la negación $-(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$ puede tomar formas distintas, por ejemplo, negar sólo una de ellas y no las demás, o bien la negación de todas y cada una de ellas (la más usual en términos de la práctica).

Pongamos en consideración, por ejemplo, el MT. En este modo inferencial se sabe que ante "$-Q$" se puede deducir que "$-P$", ahora bien, si la proposición "P" está compuesta por la conjunción de varias proposiciones "p_i" nos vemos en las dificultades de negar un conjunto de proposiciones y esto no tiene una única respuesta. En base a esto, en un contexto como el recién citado, no sería de extrañar respuestas que estuvieren separadas en casos.

Otro aspecto a tener en cuenta acerca de las dificultades vinculadas en las interpretaciones de los teoremas es que, el conjunto total $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$ provee una condición suficiente para la consecución de la tesis, pero esto no quiere decir que cada una de las proposiciones p_i sea necesaria para poder afirmar la tesis. La historia de la matemática está colmada de teoremas en los que muchas veces se mencionan proposiciones que no son realmente necesarias para que ocurra la tesis, pero a veces son presentadas así para facilitar las demostraciones o, porque para el contexto en el que se exhiben solo basta con una versión débil del teorema. Con la expresión "débil" hacemos referencia a que, cuanto más cargada de proposiciones se encuentra una hipótesis, más restringido es el conjunto de objetos que la satisface, lo cual hace al teorema menos general. Con más fuerza que la tendencia antes mencionada, se observa que la tradición matemática siempre intenta mostrar las versiones más "fuertes" de los teoremas, es decir, aquellas de carácter más general y con menos restricciones en las hipótesis. Este último hecho se encuentra vinculado con un fenómeno que se describe más adelante conocido como "perfección del condicional" (López Astorga, 2008 y 2009).

2.7 Fenómeno de perfección del condicional

Se entiende por "perfección del condicional" al fenómeno de interpretación incorrecta del condicional "entonces" como si fuera equivalente al bicondicional "sí y sólo sí". En términos simbólicos, lo anterior puede ser representado como:

$$\boxed{[P \Longrightarrow Q] \Longleftrightarrow [P \Longleftrightarrow Q]}$$

Figura 4: Interpretación incorrecta del condicional

En 2.4.1 parafraseando a Panizza (2005) se mencionó como ejemplo de falacia abductiva la regla "*Si llueve, la calle se moja*". Si denotamos como P: "*Está lloviendo*" y como Q: "*la calle se moja*", la expresión utilizada por Panizza podría ser reescrita como $P \Longrightarrow Q$. Para el caso particular de este ejemplo, el fenómeno de perfección del condicional se da si el sujeto interpreta la regla antes mencionada como si fuese equivalente a decir "*llueve sí y sólo si la calle se moja*", esto es, de la forma $P \Longleftrightarrow Q$.

En este contexto surgen explicaciones que, en lugar de pensar que los sujetos razonan de modo incorrecto, consideran que interpretan de modo incorrecto el alcance de la premisa mayor $P \Longrightarrow Q$. En particular, consideran que los sujetos interpretan dicha premisa como $P \Longleftrightarrow Q$. Si este fuera el caso, se convierten en válidas las formas $-P \Longrightarrow -Q$ del caso NA, y la forma $Q \Longrightarrow P$ del caso AC.

En concordancia con lo sostenido por Lacués Apud (Actas del CUREM 5) se entiende aquí que los estudiantes podrían incurrir en la falacia NA por no advertir que el consecuente de una determinada implicación puede darse con antecedentes distintos. A esta explicación como causa probable del fenómeno de perfección se la conoce como **implicatura escalar conversacional** (López Astorga, 2008 y 2009).

A fines de ejemplificar lo antedicho se propone aquí el siguiente ejemplo. Supongamos tener como tesis la función proposicional T que afirma que "x es un número par" y supongamos tener también las funciones proposicionales:

A: "x es múltiplo de 8"
B: "x es múltiplo de 10"
C: "x es múltiplo de 12"

Notemos que tanto A, como B, como C, permiten deducir la tesis T. En términos de la implicatura escalar conversacional, las funciones proposicionales A, B y C son antecedentes alternativos que, si son conocidos, evitarían interpretaciones erróneas de tipo $A \Leftrightarrow T$, o bien $B \Leftrightarrow T$, o $C \Leftrightarrow T$. En concreto, el conocimiento de estas hipótesis alternativas a la tesis T evitarían deducciones erróneas de tipo "x es un número par entonces es múltiplo de 8" (6 por ejemplo es un número par y no es múltiplo de 8).

Es importante en este ejemplo destacar que, no sólo las hipótesis alternativas permitirían evitar la perfección del condicional, sino también el bajo nivel de dificultad de las funciones proposicionales involucradas. El hecho de tratar con propiedades básicas de los números reales, da la posibilidad de contar con contraejemplos inmediatos que evitarían que, ante el conocimiento de la regla "$A \Rightarrow T$ " uno cometa una falacia de tipo AC como la mencionada en "x es un número par entonces es múltiplo de 8".

En contraposición con el ejemplo anterior, de muy fácil manejo, teoremas como el TVM (Teorema del Valor Medio) del cálculo diferencial suelen ser presentados sin variantes en los componentes de las hipótesis. Esto probablemente se deba al mandato de una comunidad matemática que hace fuerte hincapié en presentar sus teoremas de la forma más general posible. Es importante que esto sea así para contar con herramientas de lo más generales, pero tiene como contrapartida que, ante una única versión de presentación de las hipótesis, los sujetos que estudian los teoremas perfeccionen el condicional, entendiendo algo de la forma $H \Rightarrow T$ como si fuese $H \Leftrightarrow T$ (siendo H la hipótesis y T la tesis).

Se pasa a continuación al último apartado teórico que habrá de ser necesario para desarrollar los capítulos siguientes.

2.8 Estructura formal de los ejemplos y contraejemplos.

Supongamos tener una función proposicional P y una función proposicional Q que afirmen algo acerca de una cierta variable "x". Aceptemos también la existencia de una implicación de la forma $P \Rightarrow Q$. Desde un punto de vista formal, brindar un ejemplo a una proposición de la forma $P \Rightarrow Q$ es mostrar un caso en el que se cumple $P(x_0)$ es V y también $Q(x_0)$ es V. Recuérdese que, en matemática, por más de que se tenga el conocimiento de muchos valores de "x" que hagan verdaderas tanto a P como a Q, esto no constituye una demostración de la validez para todo valor de P y de Q. Ahora bien, a la hora de mostrar la falsedad de una implicación bastará mostrar un caso donde habiéndose cumplido P se tiene que no se cumple Q, es decir, encontrar un caso donde valga $P(x_0)$ es V y $Q(x_0)$ es F o, dicho de otra forma, se cumpla, $P \wedge -Q$.

Los apartados teóricos que se desarrollaron hasta aquí tienen pretensiones de exhaustividad e intentan cubrir lo necesario para dar seguimiento a la lectura del presente trabajo de tesis. De todos modos, comentarios teóricos de menor envergadura serán desarrollados oportunamente para dar sustento teórico a la investigación. Se pasa, ahora sí, al apartado metodológico de esta tesis.

2.9 Una mirada desde la didáctica.

En los apartados precedentes se ha delimitado la problemática abordada en esta tesis y fueron expuestos algunos antecedentes que dan cuenta de su estado del arte. Se hace a continuación un breve repaso sobre algunas cuestiones en vínculo más estrecho con la didáctica. La mirada estará puesta sobre la relación de la lógica con otros campos del saber, el logro de ciudadanos críticos y la demostración matemática. Se intentará dar respuesta a los siguientes interrogantes: ¿qué dice la didáctica acerca de las habilidades de razonamiento? ¿cómo se las vincula con el aprendizaje de la lógica y/o la matemática?, y si ¿hay consenso sobre esa vinculación?

Entenderemos por “habilidad de razonamiento” a la facultad mental que tiene un individuo para utilizar un modo inferencial que le permita obtener nueva información, o bien, dar evidencia de la verdad o falsedad de información que ya posee. Actualmente la Didáctica sostiene que las habilidades de razonamiento deben estar al servicio de la formación de ciudadanos críticos y de ahí su interés por el desarrollo de éstas. En concordancia con lo planteado por la teoría de las disciplinas formales, las habilidades de razonamiento encuentran en la matemática un escenario en el cual desplegarse, ahora bien, como se expuso, no existe consenso en que el estudio en matemática de condiciones suficientes para asegurar el desarrollo de dichas habilidades.

En principio cabe destacar los esfuerzos de algunos grupos de investigación por poner sobre relieve algunas de las problemáticas en didáctica de la lógica. Como reseña sobre este particular puede visitarse el artículo de revisión de Henao y Moreno (2016) en el que destacan los trabajos que se llevan actualmente en Cuba, Colombia y México. Señalan en el artículo (op. cit.) que las problemáticas actuales no están puestas solo en qué contenidos sobre lógica se deben enseñar, sino también en los vínculos que existen o deberían de existir entre la lógica y otros campos del saber como la matemática, por ejemplo. Esto permite traspasar las fronteras de la lógica formalista y aportar elementos que puedan extrapolarse a otros ámbitos, con la pretensión de lograr ciudadanos críticos. Abonando a este postulado hacen enumeración de aquellos institutos que se dedican actualmente al estudio del pensamiento crítico, inferencias y argumentación. En relación a esto se plantea aquí que las habilidades de razonamiento están puestas actualmente en consideración porque son estas las que, entre otras habilidades, pueden dar ciudadanos críticos.

Autores como Anton Lawson (1985) sostienen que la educación debe tener como uno de sus propósitos centrales el mejorar las habilidades de razonamiento de los estudiantes. Lawson (ibíd.) intenta evaluar la validez de la teoría del pensamiento formal de Piaget y su relación con la práctica educativa. Deja entrever que parte de la herencia de los trabajos de Piaget puede observarse en la fuerte apuesta al desarrollo de habilidades de razonamiento y al vínculo entre éstas y la maduración biológica. El análisis pormenorizado que realiza en este artículo muestra deficiencias en algunas cuestiones metodológicas de los primeros trabajos de Piaget, pero valora a la psicología del desarrollo por ser capaz de proporcionar información importante sobre cómo las escuelas pueden ser más eficaces para trabajar en armonía con este desarrollo biológico. Sostiene que, *si bien existen problemas teóricos y metodológicos, la investigación de Piaget y la investigación que surgió a partir de ella, brindan una base importante a partir de la cual construir programas de instrucción que pueden ayudar en el objetivo más central de todos los objetivos educativos. Ayudando a los estudiantes a pensar bien* (Lawson 1985).

En miras de consumar el objetivo de lograr ciudadanos críticos sale al encuentro otra temática de interés, *la argumentación y la demostración en el aula de matemática*. Los recursos argumentativos de la matemática tienen su fundamento en la lógica. Esta vinculación entre la matemática y la lógica tiene sus orígenes en la antigua Grecia donde se dio el paso de argumentaciones basadas en figuras a aquellas que estaban apoyadas estrictamente en los postulados axiomáticos que eran tomados como base para la construcción de otras proposiciones (Arsac, G. 1987) (se explica esto con más detalle en 3.6.1.). Gran parte de la didáctica ha concentrado esfuerzos en poner de manifiesto la importancia de la demostración y la argumentación en el aula (Crespo Crespo, C. 2014), y es, en este sentido, su interés por desarrollar estrategias que permitan la incorporación de habilidades de razonamiento científico. En términos de Lawson la argumentación y el descubrimiento constituyen el núcleo del razonamiento científico (Lawson 2010). Por esta razón "*ayudar a los estudiantes a comprender mejor cómo los científicos razonan y discuten para realizar conclusiones científicas ha sido visto como un componente crítico de la alfabetización científica, por lo tanto, sigue siendo un objetivo central de la instrucción de la ciencia*" (Lawson 2010).

Debido a que, en términos de Lawson, "*existe evidencia sustancial de que las deficiencias (*en habilidades de razonamiento*) son reales y que pueden conducir a un rendimiento pobre no solo en las ciencias naturales y la matemática, sino también en las ciencias sociales y las humanidades*", las investigaciones se han centrado sobre si las deficiencias pueden o no ser remediadas. Por lo tanto, el interés en los estudios de capacitación no es acelerar el desarrollo intelectual entendido como un punto al cual se habría de llegar en términos biológicos, sino descubrir si algún tipo de intervención educativa puede ser valiosa para propender dicho desarrollo. En relación a los resultados negativos de las investigaciones cabe aclarar que la didáctica ha concentrado esfuerzos en determinar si los malos resultados son indicadores de deficiencias generales en el razonamiento o simplemente un conjunto de factores como la falta de conocimiento declarativo específico, la falta de motivación o demasiada ansiedad ante los exámenes (Lawson 1985). Es decir, a fines de evitar sesgos como los que fueron criticados en Piaget, la didáctica actual pone foco en si las tareas mediante las cuales se estudia el razonamiento formal miden lo que dicen medir.

En vínculo con la problemática de la enseñanza de recursos argumentales como el de la demostración aparecen las concepciones de los docentes de matemática acerca de la demostración. Cecilia C. (ibíd.) entiende que el docente de matemática enseña de acuerdo a las concepciones que tiene de esta disciplina. En particular, su abordaje de la demostración lo hará de acuerdo a la concepción que tenga de ésta. Así, si "*la demostración es considerada como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos*". En contraposición con esto entiende que las demostraciones pueden convertirse en "*elemento dinámico y modificable*" que permita un espacio a la argumentación y en consecuencia a la formación de estudiantes pensantes que se entrenen en el explicar, verificar, comunicar, sistematizar y descubrir.

Por último, cerrando así esta revisión sobre los vínculos entre las habilidades de razonamiento y la didáctica, se menciona, al igual que como sostienen Henao y Moreno (2016), que la enseñanza de la lógica debe ganar espacios de debate en los congresos de educación. También se adscribe aquí a la necesidad de seguir en búsqueda de una lógica de la abducción. Es importante destacar aquí los avances de Hoffman (ibíd.) en esta dirección. Se pretende también que dentro de la comunidad docente la abducción juegue un papel protagónico en el desarrollo de hipótesis educativas que generen nuevos conocimientos didácticos (Henao y Moreno 2016), así como también un entrenamiento en experiencias educativas que propendan el pensamiento crítico y el abductivo que conllevarían mejores maneras de actuar fuera y dentro del aula. *La abducción se puede convertir en un proceso de formación alternativa para la enseñanza de la lógica y su didáctica… Este proceder abductivo puede tener como mediación didáctica una ecuación, un problema, un texto literario, la lectura de un artículo de investigación* (Henao y Moreno 2016). Estas citas intentan poner de manifiesto la necesidad de utilizar la abducción como un recurso explícito de generación de nuevos conocimientos y pretenden revelar la importancia de la lógica abductiva en los procesos de creación y formación de un espíritu crítico.

3 - Metodología de la Investigación

3.1 Introducción

A través de este capítulo se desarrolla el marco metodológico general que ha servido de guía al presente trabajo. Se divide la exposición del mismo en cinco secciones.

En la sección **3.2**, se exponen aspectos generales de la metodología implementada.

En la sección **3.3**, se caracteriza la población y la institución donde tuvo lugar la implementación del instrumento.

En la sección **3.4**, se expone una descripción general del instrumento.

En la sección **3.5** se realiza una descripción del contexto en el que surge la primera versión del instrumento y el desarrollo del mismo hasta llegar a su última versión.

Hay además una última sección, **3.6**, donde se realiza una reflexión epistemológica y metodológica del trabajo en su conjunto.

3.2 Consideraciones generales de la metodología implementada

La metodología que ha guiado esta investigación es de tipo *cualitativa*, mediada por la implementación de un *instrumento con contenido matemático*, conformado por problemas de razonamiento condicional relacionado con propiedades de los números reales y con el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Dichos problemas fueron construidos ad hoc para la investigación y son el resultado de versiones previas del instrumento (Noya, S., Bar, A. 2016).

Si bien se contaba con la experiencia antes mencionada, fue durante el mismo proceso de investigación que fue delineado el problema, no habiendo logrado operacionalizar los conceptos de manera efectiva desde un comienzo.

En todo momento se intentó tener una mirada holística del proceso que se estaba investigando, lo cual, tal vez, haya alejado un poco de pretensiones generalistas y propició centrarse en lo particular del fenómeno en estudio. Por sobre todo se destaca el fuerte énfasis inductivo puesto en toda la investigación y los cuidados que habría que tener ante posibles generalizaciones.

Atendiendo a lo complejo de los datos recabados y en orden con el tipo de investigación que aquí se propone, se hizo hincapié en la complejidad del dato y en lo no medible de los mismos.

Si se quiere, y a modo de autocrítica, tal vez pueda no cumplirse enteramente con la mirada holística que pretenden este tipo de investigaciones, dado que lo que se muestra aquí es una mínima parte de lo que debería entenderse como el estudio de las habilidades en el campo de la lógica de un grupo de estudiantes.

Se destaca también, dentro de las características que le son propias a una investigación de tipo cualitativa, el proceso de categorización que se hizo de las respuestas. Las categorías que se encuentran en el capítulo 4 fueron construidas a posteriori y con una fuerte impronta heurística, puesta en lo específico de cada respuesta y no en busca de generalizaciones forzadas. Si bien se cumplió con el objetivo de dar categorías a las respuestas, las mismas fueron propuestas como categorías posibles y se deja entrever en todo el trabajo lo prometedor de otro tipo de análisis.

Por último, dentro de las características de tipo “cuali”, tan presentes aquí, por sobre las de tipo “cuanti”, mucho menos remarcadas, que tuvo la investigación, se destaca lo reflexivo y recursivo del análisis de los resultados y la fuerte traza puesta en la particularidad de población estudiada.

El día que se llevó a cabo la implementación del instrumento, fue pactado con los alumnos de modo tal que contasen con tiempo para realizar con tranquilidad las actividades y no estuviesen apremiados por exámenes u otras actividades.

La participación de los estudiantes fue voluntaria y las actividades se realizaron sin límite de tiempo, aunque las mismas fueron resueltas cuanto mucho en 2 horas.

Los estudiantes se mostraron interesados en la resolución de las mismas y en ser comunicados más delante de los avances de la investigación, para contar con una devolución de sus tareas, cosa que no se hizo en ese momento en caso de necesitar futuras aclaraciones sobre sus resoluciones. Las devoluciones hechas a los alumnos una vez concluido este análisis, los dejaron sorprendidos en relación a las respuestas que dieron de modo incorrecto en los modos falaces NA y AC.

Se entiende a este proceso de investigación como plausible de ser continuado, ya sea en esta dirección, o tal vez con vínculos más estrechos con la didáctica de la matemática, buscando sí, en ese caso, subsanar algunas de las habilidades acotadas detectadas en esta investigación.

3.3 Población, muestra e institución en la que tuvo lugar la investigación

3.3.1 La **población** considerada para esta investigación estuvo constituida por los estudiantes de cuatro carreras de la facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, a saber: Profesorado y Licenciatura en matemática y, Profesorado y Licenciatura en física. Es importante destacar qué, si bien desde un punto de vista nominal estamos hablando de 4 carreras, a los fines de la presente investigación se ha considerado a esta población como bipartita, conformada, una parte por los estudiantes de matemática y la otra por los estudiantes de física. De los estudiantes de estas carreras solo podían ser citados aquellos que estuviesen cursando materias actualmente, lo cual nos remite a la cohorte 2015 dado que el instrumento iba a ser implementado lunes 11 de junio de 2018. Los estudiantes de matemática que contaban con Análisis Matemático I al 11 de junio de 2018 eran un total de 17 correspondientes a las cohortes 2015, 2016 y 2017. Los estudiantes de física que contaban con la materia Cálculo Diferencial e Integral I aprobada al 11 de junio eran 12 y corresponden a las cohortes 2015, 2016 y 2017. Estos datos fueron suministrados por los encargados del SIU GUARANÍ de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNNE[1].

3.3.2 La **muestra** fue seleccionada teniendo en cuenta aquellos 17 estudiantes de matemática y 12 estudiantes de física de tal modo que quedasen 10 de cada grupo. La invitación a participar fue hecha de modo abierto a través de un mensaje telefónico que se fue reenviando y en cual se constató que haya sido recibido por los 29 estudiantes disponibles para la investigación. De los interesados iniciales, 9 de matemática y 7 de física, se invitó a 1 más de matemática y 3 más de física, a fines de tener dos grupos iguales de 10 individuos cada uno. Las cantidades mencionadas 10 de 17 en el caso de

[1] SIU GUARANÍ: Sistema de gestión académica que registra y administra todas las actividades académicas de la Universidad y sus Facultades en Argentina.

matemática y 10 de 12 en el caso de física dan cuenta de la representatividad de la muestra.

3.3.3 La **Institución** donde tuvo lugar la investigación es la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FaCENA) dependiente de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). La UNNE es una universidad pública del Noroeste de la República Argentina, con sus sedes situadas en las provincias de Chaco y Corrientes. La FaCENA, en particular, se encuentra ubicada en la ciudad de Corrientes Capital.

3.4 Descripción general del instrumento

El instrumento constaba de 8 actividades, dos por cada modo inferencial a estudiar, a saber: MP, MT, NA y AC. Las actividades fueron entregadas todas juntas el día de la implementación. Se entregaron 4 hojas impresas de ambos lados, las cuales contenían una actividad por carrilla. Debajo de cada actividad había un espacio para que pudieran plasmar sus respuestas.

Las actividades 1 y 2 correspondían al modo inferencial MP.

La actividad 1 contenía 5 proposiciones bajo la carátula de "premisas" de las cuales, en el ítem a) debían ser seleccionadas aquellas que permitiesen arribar a otra proposición caratulada como "tesis". Contenía además un ítem b) en el que se requería que diesen una explicación de la cadena lógica que permitía deducir la tesis. Las 5 premisas contenían información en la que fueron propuestos contenidos de álgebra moderna avanzada, pero con la particularidad de contar con los nombres de los contenidos cambiados. Este cambio en los nombres de los contenidos se realizó a fines de forzar el uso del MP, dado que obligaba a los estudiantes a valerse de la deducción y no de ningún contenido previo. Esta es la única actividad en la que se tuvo que alentar a la realización de la misma, dado que la primera reacción fue evasiva por no contar con conocimiento de los "teoremas" ni los "autores" allí mencionados. Esta actividad podría ser equiparada a aquellas en las que se utilizan silogismos categóricos de tipo "si todo A es B y todo B es C entonces todo A es C" (ver figura 5).

Actividad 1:

a) Seleccione con un círculo cuáles de las siguientes premisas son necesarias para afirmar la tesis.

Premisas

P1: Los polinomios de Klafenbach son inversibles en un Anillo de Klein.

P2: Los Anillos de Klein son Isomorfos a los Espacios de Hannan-Pinen.

P3: Todo Polinomio de Klafenbach par puede ser descompuesto como el producto de un inversible por un elemento del núcleo.

P4: Los elementos del dual de un Espacio de Hannan-Pinen son polinomios primos dentro de un Anillo de Igortsky-Pluchevncoff.

P5: Los únicos anillos isomorfos a los Espacios de Hannan-Pinen son los Anillos de Polinomios.

Tesis: Los elementos de un Anillo de Klein son polinomios.

b) Proponga un orden deductivo para llegar a la tesis entre las premisas que seleccionó anteriormente y explique su razonamiento.

Figura 5: Actividad 1 presentada a los estudiantes.

La actividad 2 era una versión del teorema del valor medio enunciada para el caso particular de las funciones polinómicas de grado menor o igual que 10. Los polinomios son un caso particular de las infinitas funciones que satisfacen lo que el TVM propone y es por esta razón que estamos ante un caso MP. En términos de la justificación, esta actividad sólo requería por parte de los estudiantes que lograsen identificar que estaban ante un caso particular del TVM y que aclarasen que los polinomios cumplen con su hipótesis.

Actividad 2: Conteste si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando su respuesta de la manera más detallada posible, ya sea a través de contraejemplos, demostraciones o la cita de propiedades o teoremas que usted conozca.

Afirmación: Si $P(x)$ es una función polinómica y de grado menor o igual que 10 en $[a, b]$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$P'(c) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}$$

Recuadre la opción que considere correcta: VERDADERA FALSA

Justifique su respuesta:

Figura 6: Actividad 2 presentada a los estudiantes.

Las actividades 3 y 4 eran de tipo MT. En la actividad 3 se encontraba una proposición “p” que hacía referencia al conjunto numérico al que pertenecían 3 elementos y una proposición “q” que mencionaba una cualidad del producto de estos tres. La actividad, a su vez constaba de dos ítems, el ítem a) preguntaba si la proposición “$p \Longrightarrow q$” era verdadera y el ítem b) preguntaba que puede decirse sobre el antecedente “p” si se sabe que no ocurre “q”. Esta actividad tenía como objetivo primordial resultar facilitadora de la actividad 4, la cual, si bien constaba de la misma estructura, estaba dotada de proposiciones de un contenido más avanzado, en este caso el TVM.

Actividad 3:

Considere las siguientes proposiciones:

p: Los números reales a_1, a_2, a_3 son todos pares. (p: antecedente)

q: El producto de los números reales a_1, a_2, a_3 es par. (q: consecuente)

a) Determine el valor de verdad de la proposición $p \Longrightarrow q$
b) Si se sabe que no ocurre q, ¿Qué puede concluirse sobre el antecedente?

Figura 7: Actividad 3 presentada a los estudiantes.

La actividad 4, como se mencionó anteriormente, era de tipo MT. En la misma se encontraba negada la tesis del TVM y se preguntaba acerca del cumplimiento de las proposiciones que constituyen las hipótesis del mismo.

Actividad 4:

Dada la función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Se sabe que no existe un punto "c" dentro de (a, b) en el que la pendiente de la recta tangente coincida con el de la recta que pasa por $(a\,; f(a))$ y $\big(b\,; f(b)\big)$.

¿Qué puede decir sobre f? Explique el porqué de su respuesta.

Figura 8: Actividad 4 presentada a los estudiantes.

Las actividades 5 y 6 eran de tipo NA. En la actividad 5 se encontraban expuestas nuevamente las proposiciones que fueron presentadas en la actividad 3. A diferencia de ésta, la actividad 5 solo constaba de un ítem, en el mismo se preguntaba si ante el conocimiento del no cumplimiento del antecedente se podía afirmar algo sobre el cumplimiento, o no, del consecuente.

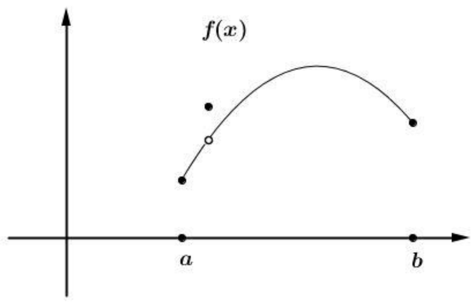
Actividad 5:
Retomando las proposiciones de la actividad 3:
p: Los números reales a_1, a_2, a_3 son todos pares. (p: antecedente)
q: El producto de los números reales a_1, a_2, a_3 es par. (q: consecuente)
Si se sabe que no ocurre p, ¿Qué puede concluirse sobre el consecuente? Explique el porqué de su respuesta.

Figura 9: Actividad 5 presentada a los estudiantes.

La actividad 6 tenía la misma estructura lógica pero el contenido de la misma nuevamente trataba del TVM. Se mostraba una gráfica, la cual dejaba apreciar una discontinuidad en la función involucrada, esto es, un incumplimiento en las hipótesis del TVM. La psicología cognitiva prescribe que, ante la negación del antecedente los encuestados contestan, en su gran mayoría, que el consecuente también será negado. La idea de la actividad 5, previa a la 6, estuvo diseñada a fines de mostrar que ante un contenido más sencillo los estudiantes no caerían en la falacia lógica NA, sin embargo, sí lo harían ante la presentación hecha en la actividad 6.

Actividad 6: Conteste si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando su respuesta de la manera más detallada posible, ya sea a través de contraejemplos, demostraciones o la cita de propiedades o teoremas que usted conozca.
Afirmación: En la gráfica que se muestra a continuación existe un punto "c" en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Recuadre la opción que considere correcta: VERDADERA FALSA
Justifique su respuesta:

Figura 10: Actividad 6 presentada a los estudiantes.

Las actividades 7 y 8 eran de tipo AC. La actividad 7 retoma las premisas utilizadas en las actividades 3 y 5 pero en esta ocasión pregunta ¿qué puede afirmarse acerca del valor de "p" si se sabe que ha ocurrido "q"?

Actividad 7:
Retomando las proposiciones de las actividades 3 y 5:
p: Los números reales a_1, a_2, a_3 son todos pares. (p: antecedente)
q: El producto de los números reales a_1, a_2, a_3 es par. (q: consecuente)
Si se sabe que el producto de los tres números a_1, a_2, a_3 es par ¿Qué puede concluirse sobre antecedente? Explique el porqué de su respuesta.

Figura 11: Actividad 7 presentada a los estudiantes.

Actividad 8: Conteste si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando su respuesta de la manera más detallada posible, ya sea a través de contraejemplos, demostraciones o la cita de propiedades o teoremas que usted conozca.

Afirmación: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de la cual se sabe que existe un punto "c" en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

entonces $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Recuadre la opción que considere correcta: VERDADERA FALSA
Justifique su respuesta:

Figura 12: Actividad 8 presentada a los estudiantes.

Durante la realización de las actividades, los estudiantes fueron animados a preguntar sobre las dudas que pudieren tener en la elaboración de las mismas. En varias ocasiones se hicieron salvedades de manera grupal, de las dudas que planteaban algunos de los participantes y varios estudiantes se acercaban con sus consultas sobre la notación que utilizaban o detalles de interpretación. No se observó, durante la implementación del instrumento, ninguna situación que pudiera dar cuenta de alguna consigna mal planteada o escrita de manera poco clara. Tal vez lo anterior sea el resultado de que el instrumento de recolección de producciones tuvo la posibilidad de ser testeado con anterioridad en otros estudiantes, antes de su versión final. Se detalla en el siguiente parágrafo la mencionada evolución del instrumento.

3.5 Contexto y evolución del instrumento

Las ideas primigenias del instrumento surgen en el marco de la cátedra Análisis Matemático I de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste. La búsqueda de maneras concretas de mostrar la importancia de la correcta interpretación de los componentes de los teoremas que se imparten en clases siempre fue motivo de preocupación de quien suscribe. Tal vez lo anterior se deba a los problemas propios de interpretación que tuviere otrora como estudiante de la misma carrera. En particular, como estudiante, me topé en clases con la falacia NA. Cabe resaltar que no se hizo mención en ese momento de que se trataba de una falacia lógica NA, ni mucho menos que las mismas son estudiadas y se encuentran harto categorizadas. Podríamos ver aquí un sesgo de la herencia positivista que aún impera, la cual sólo repara en los procedimientos válidos.

El contacto antedicho con la falacia NA fue un incentivo para la producción de materiales didácticos en los que se pudieran observar antecedentes distintos para la producción de una determinada tesis. En el transcurso de estas producciones, en conjunto con los estudiantes, puse énfasis en el hecho de que las hipótesis alternativas que proponíamos, para diferentes tesis, eran en principio probables hasta dar con la prueba formal. Sin saberlo estaba trabajando la falacia AC de inferencia abductiva.

No es sino hasta la instancia final de la maestría, en la que se enmarca este trabajo, que me es presentado un posible marco teórico/metodológico pertinente a mi inquietud y, es el que aquí se delinea. Hacemos referencia aquí a un "posible marco" dado que, bien podría haberse abordado la temática con una orientación de tipo estrictamente didáctica. Enfoques de esta clase están pensados para trabajos futuros. Vale destacar aquí, que la sugerencia y el lineamiento un tanto más cercano al de la psicología cognitiva fueron marcados por el Doctor Aníbal Bar. En el marco del grupo de investigación, que por entonces dirigía el Doctor Bar, se comienza la producción de las primeras versiones del instrumento. Una versión de menor alcance, en tanto a cantidad de modos inferenciales y extensión de las actividades, fue presentado a una población bipartita como la de este estudio, pero en otra cohorte de las carreras que ya conocemos. Los resultados de esta investigación, que han servido de base, y que constituyen una precuela de la presente, se encuentran publicadas en (Noya, S., Bar, A. 2016).

3.6 Discusión epistemológica y metodológica del trabajo

La siguiente reflexión es fruto, en gran medida, de las múltiples discusiones mantenidas a lo largo del cursado de la carrera de Maestría, de la cual este trabajo constituye su instancia final. Durante la misma quien suscribe tuvo la oportunidad de realizar un análisis de los aspectos constitutivos de su disciplina, en este caso la matemática, y ponerlos en comparación con las características básicas de las disciplinas representadas por otros estudiantes de este posgrado.

En particular, son abordadas en este capítulo las posibles causas que dan a la matemática su estatus de ciencia hipotético-deductiva, el concepto de lo verdadero en matemática, las diferencias entre pruebas y demostraciones y, por sobre todo, una crítica al uso de la lógica como modelo de pensamiento racional.

Se propone una reflexión acerca de este último aspecto, tomando como elementos de debate los trabajos críticos a Piaget (Wason 1966). Se plantea aquí acerca de cuáles son los alcances y límites de usar patrones lógicos para capturar el razonamiento de los estudiantes. Se retoman elementos de la Teoría de las disciplinas formales. Se comentan sobre las estrategias metodológicas más usadas para investigar esto en ciencias cognitivas. Por último, se expone una reflexión personal sobre el abordaje planteado y una prospectiva del trabajo en relación a la posibilidad de ahondar en los razonamientos ampliativos o no demostrativos, en particular el abductivo.

3.6.1 La matemática como ciencia hipotético-deductiva, normativa y no historicista

> *La ciencia, como ese sistema de conocimiento y de creencias que se rige por ciertos cánones de validación y apela a ciertos artificios de descubrimiento, no es totalmente autónoma… está parcialmente abierta a todos los otros sistemas cognitivos o culturales en los que los seres humanos procesan sus diversos tipos de praxis.* Samaja (2004, pp. 141)

Esta cita de Samaja nos servirá de guía para la discusión planteada acerca de los cánones de validación y la metodología para la producción de nuevos conocimientos.

De común acuerdo con una visión historicista, no normativa, y mucho menos prescriptiva de la ciencia, se menciona aquí parte del proceso de construcción y de constitución de la matemática como disciplina científica. Es menester poner sobre tablas estas nociones para entender la crítica que durante este trabajo se realiza a la Teoría de las disciplinas formales, o mejor dicho a la creencia de que la matemática constituye un escenario que promueve con mejor alcance el desarrollo del pensamiento lógico formal.

En la introducción de este trabajo se hizo mención de algunas citas que muestran esta demanda que tienen las demás ciencias para con la matemática. No solo se le pide a la matemática que provea modelos, sino que además sea una herramienta para desarrollar el pensamiento lógico formal. Esta creencia que se denomina Teoría de las disciplinas formales podría tener sus orígenes en la génesis misma de la matemática, vale para esto recordar que lo "válido", lo "verdadero" y la "metodología" de trabajo de esta disciplina tiene una tradición mucho más larga que otras. Se hace a continuación un breve repaso de estos orígenes.

La matemática se constituye como una ciencia hipotético-deductiva en la Grecia del siglo V antes de Cristo (Arsac, G. 1987). En este contexto, dicha disciplina da un cambio cualitativo, pasando de pruebas basadas en la evidencia de las figuras a demostraciones en las que las representaciones geométricas son solamente un soporte para la comprensión de las mismas. Aparecen en escena los tres aspectos de la revolución griega, a saber: *idealidad de los objetos matemáticos, método demostrativo, enunciados generales (axiomas)*. Existen dos tesis que dan razones del porqué del origen de la demostración en este contexto particular. Una de ellas sitúa las causas en la vida política de la antigua Grecia y en sus recursos argumentativos, la otra en el problema particular de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2. La primera de estas posturas se conoce como *tesis externalista* y la segunda como *tesis internalista*. Se sigue aquí la postura intermedia adoptada por Arsac (ibíd.) y se recomienda la lectura de éste para más detalles. Se considera, al igual que dicho autor, que tanto los factores internos como los externos dieron lugar en Grecia a este desarrollo de la matemática y no en otros grandes centros matemáticos de la antigüedad, como ser China o India. Es importante aquí, para distinguir lo acontecido en Grecia, destacar que no estamos hablando de pruebas sino de demostraciones, pero para poder dar una discusión rigurosa debemos definir estos conceptos. Para lo anterior haremos una transcripción de las definiciones dadas por Balacheff (1987) a quien se considera el referente a seguir sobre estos aspectos.

> *Llamamos **explicación** a un discurso que trata de hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido por el locutor, de una proposición o de un resultado.*

> *Llamamos* ***prueba*** *una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado.*
> *Llamamos* ***demostraciones*** *a una secuencia de enunciados organizada según reglas determinadas: un enunciado se reconoce como verdadero, o bien es deducido a partir de los que lo preceden con ayuda de una regla de deducción tomada en un conjunto de reglas bien definidas.*
>
> *Estas distinciones de vocabulario ponen en relieve las dimensiones sociales de la demostración como resultado de un proceso particular de prueba.*

Lo planteado aquí sobre explicaciones, pruebas y demostraciones se enmarcan en la idea más general de argumentación, entendiendo a esta como un discurso que tiene por finalidad cambiar el valor epistémico de las tesis sostenidas por el destinatario aportando razones significativas para él, de modo de hacerle ver que las nuevas ideas están justificadas por la evidencia u otros medios (Adúriz-Bravo 2016).

En matemática “lo demostrado” es considerado como sinónimo de “verdadero”. La noción de verdad en matemática, al menos para la comunidad en su gran mayoría, difiere de la noción de verdad que tienen otras ciencias sobre sus principios o teorías fundamentales. Por ejemplo, nadie puede negar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo contenido en un plano da 180°, dado que es la misma matemática quien define sus “objetos” de estudio y quien describe sus propiedades. A diferencia de esto, en el mundo de la física, por más ejemplos que tengamos de la gravitación, nadie puede asegurar que los cuerpos con masa se atraigan recíprocamente. Los físicos suelen decir “todo se comporta como si…”. Otra teoría que explique los mismos fenómenos desde otra óptica puede suplantar a la idea de que los cuerpos se atraigan como ya nos ha mostrado la historia con la teoría de la relatividad.

El ejemplo anterior, referido a la suma de los ángulos interiores de un triángulo plano, muestra una cara del asunto, ahora bien, hay un aspecto social de la noción de “lo verdadero” en matemática que es oportuno mencionar. Por citar un ejemplo, en 1993 Andrew Wiles (ver cita en las referencias) ofrece una demostración del conocido “Último teorema de Fermat”. Los matemáticos que revisaron la demostración antes de ser validada públicamente fueron tres, luego de esto la demostración salió publicada y se estima que son pocas personas en el mundo las realmente capacitadas para comprenderla en profundidad, con lo cual, el resto de la comunidad matemática simplemente acepta que la misma es verdadera como quien adhiere a un dogma.

Se pretende dar cuenta con todo esto del escenario a nivel macro de la cuestión argumentativa de la matemática. Toda disciplina científica tiene por objetivo argumentar y convencer, y la matemática no está exenta de eso, por más que se la idealice como un constructo teórico que tiene independencia de todo. En este sentido Adúriz-Bravo (2014) plantea su inclinación para con aquellas posturas que, al menos en algunos aspectos, asimilan la ciencia como una argumentación razonada entorno a algunos aspectos del mundo natural con el fin de “cubrirlos” con explicaciones parsimoniosas y robustas y convencer a otros de que tales explicaciones son fructíferas. Tanto la matemática como las demás disciplinas tienen una finalidad intrínseca, cultural e instrumental que debe ser abordada y discutida en el proceso de formación de sujetos críticos (Adúriz-Bravo 2015).

El repaso hecho hasta aquí de este aspecto social y constructivo de la matemática, tiene como finalidad dar un contexto lo más acabado posible y lograr explicar que, en gran parte, los problemas que se evidencian en esta tesis podrían no ser aislados sino el producto de las concepciones epistemológicas y metodológicas que tienen los matemáticos sobre su disciplina. Gran parte de lo aquí reseñado es desconocido por los formadores y luego por sus estudiantes. Los grandes devenires de la historia de la matemática y los problemas fundacionales que ha tenido y que aún tiene, son dejados de lado en la formación de los sujetos. Puede tomarse como ejemplo de esto el golpe que le significó a la matemática la demostración de la incompletitud de los algunos sistemas axiomáticos por parte de Kurt Gödel en 1931 (ver cita en las referencias) y su ausencia en los planes de estudio o en las unidades de las materias más afines.

Otro ejemplo que podría arrojar luz a lo expuesto es el de la definición formal de límite. La misma adopta la forma que es hoy conocida de la mano de Weierstrass a mediados del siglo XIX. En un curso clásico de análisis matemático suele darse primero el concepto de límite, luego el de derivada de una función y por último el de integral definida. Muchos docentes consideran que no es posible dar la noción de derivada y de integrales sin dar la noción de límite, pero desconocen que el concepto de límite (en su expresión formal dada por Weierstrass) es muy posterior a los conceptos de derivada e integrales. El desconocimiento de estas cuestiones históricas trae como consecuencia una falta de interés en comprender cuales son los conceptos que generaron la emergencia del concepto de límite y poder así lograr situaciones que permitiesen una réplica de esos contextos.

Nuevamente y para finalizar este apartado, se deja sentado aquí que parte de la problemática podría no ser una falencia aislada, sino el resultado de las concepciones que los docentes de matemática tienen sobre su disciplina.

3.6.2 La lógica como modelo del pensamiento racional

Las primeras teorizaciones presentadas por Piaget (Piaget, 1955) equiparan el funcionamiento de la mente con las reglas de cálculo proposicional, lo cual muestra proximidades con la tradición filosófica donde razonamiento y lógica eran vistos como equivalentes (Quillas & Csongor 2013). Sin embargo, casi en simultaneo, salieron en contraposición a esta postura otras con menor cantidad de adeptos, sosteniendo que el raciocinio humano es apoyado por un proceso temático y no por una lógica abstracta. Se deja sentado aquí que se toma distancia de esta idea de Piaget, más no así del resto de su constructo teórico.

Piaget no se aleja de Kant o Descartes en tanto que considera a la mente como imbuida de una lógica intrínseca, planteando sus estadios de desarrollo cognitivo como instancias previas a las que debería llegar un sujeto hasta que la equiparación entre mente y lógica proposicional aparezcan en el estadio de pensamiento lógico formal.

De las posturas antes mencionadas como contrapuestas a Piaget se hace foco aquí en las teorías de la representación. Entenderemos por representación a cualquier notación, signo, o conjunto de símbolos que representa (vuelve a presentar) alguna cosa en su ausencia. La palabra “árbol” o el dibujo de un árbol son representaciones externas que nos permiten evocar dicho objeto en su ausencia.

En la actualidad conviven varios enfoques distintos que abordan el problema del razonamiento condicional, pero todos ellos distan ampliamente de equiparar el funcionamiento de la mente con la del sistema proposicional de la lógica clásica. Entre los enfoques antes mencionados citamos la Teoría de los modelos mentales, los enfoques probabilísticos del condicional, el enfoque dualista, entre otros. Estos enfoques cobraron fuerza principalmente en los años 80 como mencionan Quillas & Csongor (ibíd.). La evidencia acumulada durante esta década pone de relieve que los sujetos no necesariamente operan en términos de la lógica proposicional, sino que tienen interpretaciones particulares del condicional, que no se encuentran necesariamente en concordancia con la lógica proposicional. Surge con más fuerza aquí la necesidad de proponer un constructo teórico que permita entender cómo razonamos.

Las teorías o enfoques mencionados anteriormente tienen como supuesto fundamental la naturaleza representacional del conocimiento. Es decir, asumen que no aprehendemos el mundo directamente, sino que lo hacemos a partir de las representaciones que de ese mundo construimos en nuestras mentes. El estudio de la estructura y del contenido de esas formas representacionales, con las cuales internamente asimos los conceptos, se ha convertido en una importante línea de investigación.

A fines de ejemplificar las diferencias entre la postura de Piaget con algunos de los postulados representacionistas, se toma aquí a modo de ejemplo la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird (Johnson-Laird, 1968).

La teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird está inscripta dentro de las teorías representacionistas del conocimiento. Si bien hay indicios anteriores de las nociones propuestas por Johnson-Laird, no menos cierto es que, la presentación que él propone, provee de elementos teóricos que, con mucho más detalle que cualquier otra teoría anterior, describen las representaciones mentales y los procesos que subyacen al desempeño de los expertos en un área de conocimiento particular (Greca et al., 1997).

Johnson-Laird (Johnson-Laird, P.N. & Tagart, J. 1969) ofrece una teoría unificada y explicativa de distintos fenómenos cognitivos, como el razonamiento deductivo y la comprensión del discurso (Barquero, 1995).

La Psicología Cognitiva intenta describir las representaciones internas que las personas construyen en su interacción con el mundo; sobre este aspecto Johnson-Laird postula la existencia de tres tipos de representaciones mentales distintas (Otero, M. y otros):

- Representaciones proposicionales: definidas como cadena de símbolos, similares al lenguaje natural, en el sentido que necesitan de reglas sintácticas (relaciones de la lógica formal o reglas de producción) para combinarse, pero que no se confunden con el lenguaje en sí.
- Modelos Mentales: Análogos estructurales del mundo. Son modelos de trabajo de situaciones y acontecimientos del mundo que, mediante su manipulación mental, nos permiten, comprender y explicar fenómenos de ese mundo y actuar de acuerdo con las predicciones resultantes.
- Imágenes: Visuales de modelos. En general contienen mayor información video-espacial. Es la representación interna con mayor grado de aproximación analógica a la realidad.

Estos tres tipos de representaciones mentales se diferencian no solo estructuralmente sino también en su función. Es decir, que el sujeto usa unas u otras según sea el caso.

Antes de la propuesta hecha por Johnson-Laird, el eje de la discusión giraba en torno a si el cerebro representaba el mundo en términos proposicionales o en términos de imágenes. Es Johnson-Laird quien propone otro tipo de representación. A la corriente que sostenía que las representaciones eran solo de tipo proposicional la llamaron "instruccional", dado que sostiene la idea de construcciones sintácticas que conforman reglas. Por otro lado, a la corriente vinculada con Johnson-Laird se la llamó "Teórica", tal vez basados en el hecho de que, como se mencionó en la cita de Barquero, es Johnson-Laird quien propone una teoría unificada y explicativa de estos distintos fenómenos.

La característica más saliente de la teoría de Johnson-Laird es que los modelos mentales son representaciones analógicas de la realidad. Los modelos que son elegidos para interpretarla, así como las relaciones percibidas o imaginadas entre ellos, determinan una representación interna que actúa como "sustituto" de esa situación. A diferencia de las representaciones de tipo proposicional, la característica remarcable de los modelos mentales, resultante de su carácter analógico, es la especificidad de su contenido. Otro aspecto a destacar de los modelos mentales es que lo importante es su funcionalidad para el sujeto, es por esto que los modelos mentales que le son operativos a un sujeto no serán modificados. La corriente teórica entiende que en las representaciones no hay reglas explícitas y que los modelos representan propiedades implícitamente. La analogía entre los modelos mentales y el sistema que representan permite que ciertas propiedades de las componentes del sistema, y ciertas relaciones entre ellos, puedan leerse o inferirse directamente, sin que sea necesario postular que las personas tienen reglas de producción o una lógica imbuida en sus cabezas (Greca, 1997).

Esta especificidad de los modelos mentales los hace recursivos, en términos de que siempre se están retroalimentando en la interacción del sujeto en acción. Es por esto, que nunca son completos, son abiertos, se van ampliando y mejorando a medida que ingresa nueva información.

En contraposición a la naturaleza individual y subjetiva que tienen los modelos mentales, Johnson-Laird (1968) plantea la existencia de modelos que deben ser compartidos y construidos por la comunidad, estos son los modelos conceptuales.

Los modelos conceptuales son una representación externa, simplificada de objetos, fenómenos o situaciones reales, compartidas por una determinada comunidad y consistentes con el conocimiento científico que esa comunidad posee. Un modelo conceptual es una representación externa. Los modelos conceptuales son representaciones precisas, completas y consistentes con el conocimiento científicamente compartido.

Puede resultar útil aquí poner en comparación con lo mencionado en 2.2 acerca de los aspectos semánticos de las proposiciones. La tríada conformada por Signo (S), Denotado (D) e Interprete (I). Lo denotado por el signo será siempre de carácter individual para I, o en términos de Johnson-Laird un modelo mental, siendo el proceso de enseñanza un mecanismo tendiente a unificar quienes es D para diferentes I, es decir, proponiendo Modelos Conceptuales que permitan enriquecer los modelos mentales de dichos intérpretes (Otero, M. y otros).

Los resultados de las investigaciones científicas no son otra cosa que los modelos conceptuales fruto de la construcción de sus modelos mentales, lo cuales les han servido para la interpretación del fenómeno en cuestión.

Este constructo teórico es uno de los tantos que se apartan de la idea de una lógica imbuida en la mente a la que deberíamos aspirar en la formación de sujetos. Tanto la teoría de los modelos mentales como otros que salieron en contraposición a la postura de Piaget son paradigmáticos en el estudio de la educación.

3.6.3 Reflexión personal de los alcances de este trabajo

Si las reglas de la mente son equivalentes a las leyes de la lógica, entonces si enseño lógica estoy enseñando a pensar bien, ergo si enseño matemática enseño a pensar correctamente.

En términos muy sintéticos y reduccionistas me atrevo a decir que muchos docentes de matemática adhieren a la frase anterior, más aún la misma está presente de modo indirecto en los lineamientos, incluso, de algunas decisiones de nivel curricular como ya hemos mencionado en apartados anteriores.

La frase que abre este parágrafo resume muy bien parte de una creencia denominada Teoría de las disciplinas formales de la cual tuve noción en la construcción de un marco teórico que dé carácter científico a esta tesis. La búsqueda de dar respuesta a los interrogantes que han ido apareciendo en el trabajo son de carácter realmente personal y han sido motivo de grandes cavilaciones. Todo lo reseñado hasta aquí como los capítulos que siguen me ha permitido avanzar y arrojarme un poco de luz, pero de ningún modo cierran la cuestión.

Este trabajo, al menos en sus intenciones originales, propone poner en evidencia que sujetos entrenados en matemática pueden no operar con las reglas de la lógica proposicional. Si bien se toma distancia con esta doctrina de la lógica mental, lo trabajado aquí puede servir para proponer un trabajo más detallado en los modos inferenciales a fines de que, tanto docentes como estudiantes, puedan identificar dichos procesos y aprovechar al máximo lo que estos ofrecen. Los resultados que se muestran en el análisis del próximo capítulo da claras muestras de esto y permiten observar una debilidad en los modos inferenciales falaces. Se insiste aquí en que no se trata de una cuestión nominal simplemente, es decir, no se limita aquí a observar que los estudiantes no conocen los nombres de estas falacias, sino al hecho de que, por no conocerlas, no pueden identificarlas, con lo cual es mucho más difícil no incurrir en las mismas. Parte de lo trabajado en esta tesis ya pudo ser expuesto y tratado con otros colegas y una breve revisión da muestras que, tanto docentes como estudiantes, desconocen al menos de nombre la existencia de los modos inferenciales falaces trabajados aquí.

En un orden más general entiendo que si uno tiene un modelo prescriptivo y normativo de la ciencia, una idea de la matemática como estrictamente deductiva y una idea del funcionamiento de la mente como similar a la lógica proposicional, se encuentra imposibilitado de una mirada constructiva del proceso enseñanza-aprendizaje. Estos aspectos pueden convivir sin contradicciones en el quehacer docente, sin embargo, no evidenciarlos puede ser un error.

Los supuestos mentales que tengamos acerca de cómo funciona la mente humana nos posicionarán en un modelo didáctico u otro. Si construimos el conocimiento ¿cómo lo construimos? La respuesta de este interrogante o al menos su puesta en discusión deben ser un punto de partida para una construcción seria de nuestros paradigmas educativos.

El abordaje a estos interrogantes ya lleva décadas. La colaboración que se pretende aquí es abonar a esta discusión exponiendo resultados con contenido matemático más elevado y puesto a prueba en dos grupos con características similares en tanto a lo pretendido por su alto entrenamiento matemático. Los contenidos matemáticos involucrados en otras investigaciones eran de baja complejidad en pos de que las actividades que los contenían pudiesen ser resueltas por alumnos sin formación matemática pos-obligatoria y a fines de poder agregar algo distinto se hizo esta propuesta que esperamos sea de ayuda para otras investigaciones.

4 - Discusión de los resultados

En este apartado se presentará un análisis hecho por actividad, separando las respuestas de los estudiantes de matemática por un lado y los de física por otro, para luego dar un análisis comparativo del desempeño de ambos grupos en cada actividad.

En líneas generales, sólo se hablará de respuestas correctas o incorrectas intentando, por sobre todo, una descripción de las mismas y del porqué de dicha clasificación. Se hará hincapié en lo particular de las producciones de los estudiantes, buscando un modo inferencial que contenga dichas respuestas.

En el proceso de análisis de los resultados resultó más sencillo el análisis de aquellas respuestas que fueren clasificadas como "correctas", no así las respuestas que fueron clasificadas como "incorrectas". Las respuestas incorrectas presentan variaciones que van desde aquellas ininteligibles para el investigador, hasta las que pueden enmarcarse en algún tipo particular de error. En este sentido, para aquellas actividades en las que se pretendían justificativos en vínculo con los modos inferenciales correctos de tipo MP y MT, las categorías simplemente serán "Justificativo correcto de tipo MP" y "Justificativo correcto de tipo MT". En la orilla opuesta, los justificativos incorrectos podrían venir acompañados por errores de tipo algebraico, de omisión, de desconocimiento, o bien, tratarse de algún tipo de falacia en particular, como ser, de tipo AC y NA, en cuyo caso serán así mencionadas. Se enmarcan en las categorías mencionadas, muchas variantes, a saber: justificativos correctos dados por referencia a una contingencia, o de falsedad mediante contraejemplos, mediado por análisis de casos. O, dentro de los incorrectos, aquellos dados por negación incorrecta de la conjunción, o por una compresión incorrecta de algún concepto teórico involucrado, etc.

El análisis que se presenta aquí fue hecho por actividades y no por estudiante, es decir que, salvo excepciones, no se vuelve atrás en las respuestas de un estudiante para ver su evolución. Se deja asentado aquí que este tipo de análisis aparenta ser muy prometedor, pero no constituye parte de los objetivos fijados para este trabajo.

En concordancia con el tipo de metodología elegida, las categorías aquí mencionadas fueron propuestas a posteriori de las lecturas de los resultados y pensadas de modo que, una de ellas sea la óptima para la actividad en cuestión, y las otras permitan agrupar resultados con menor nivel de precisión, o bien, directamente incorrectos. Si bien no son estrictamente excluyentes, a los fines del presente análisis, no serán superpuestas las respuestas de los estudiantes en categorías distintas. De este modo, el total de las respuestas de las categorías presentes debe dar 20. Lo anterior tiene como finalidad facilitar la lectura de los resultados. En particular, para mencionar a aquellas respuestas que, no siendo incorrectas, pero tampoco representativas de una respuesta óptima, se las mencionará como representantes de una *habilidad lógica acotada*.

Se transcribirá para el análisis una respuesta representativa de cada categoría.
Entiéndase también que estas categorías no son ordinales y, como todo proceso de categorización, constituyen necesariamente un recorte parcializado del total. En relación a los justificativos de tipo NA y AC debe entenderse que, si bien desde un punto de vista formal, se trate de las falacias lógicas antes mencionadas, no se descarta que las mismas podrían estar dadas por una interpretación incorrecta de la premisa mayor "si P entonces Q".

Se hará mención en cada actividad cuál era la categoría óptima esperable. Debe entenderse por "óptima" la respuesta pretendida por estudiantes avanzados de la carrera, en el contexto descrito en el capítulo anterior y de acuerdo a los cánones actuales de validez, dado que lo "válido" como tal no existe sino en un contexto sociohistórico.

4.1 Análisis de la actividad 1 (MP):

Esta actividad se encontraba divida en dos partes, por un lado, se solicitaba la selección de las proposiciones que permitían arribar a la tesis y por otro lado se requería la cadena deductiva que, a su parecer, era la que demostraba el porqué de la selección que hicieron previamente.

Los 20 estudiantes realizaron una selección correcta de las premisas que permitían deducir la tesis, lo cual era requerido en el ítem a). De estos 20, los estudiantes de matemática dieron justificativos perfectamente válidos desde la lógica, lo cual era requerido en el ítem b). En cambio, para esta segunda parte, los estudiantes de física tuvieron algunas dificultades. 1 estudiante de física hace una selección correcta de las premisas, pero no explica el porqué de su razonamiento, lo cual era requerido en la consigna. Otros 2 estudiantes dejan plasmada una selección de las premisas que darían lugar a la tesis, acompañando dicha selección con una difusa explicación de la cadena lógica que las vincula. Por último, 7 estudiantes hacen una selección correcta de las premisas, y explican con precisión cuál es el vínculo entre ellas que permite deducir la tesis. Dentro de estos 7 estudiantes se encuentran 2 que acompañaron su razonamiento de representaciones gráficas, con diagramas de Venn, como sustento de la validez de su argumento.

Más allá del entrenamiento en la escritura propia de una disciplina estrictamente formal y otra altamente formalizada, lo cierto es que, no se observan diferencias significativas entre las respuestas correctas, esto es, 10 para el caso de matemática y 7 para el caso de física. Tanto los estudiantes de matemática, como los de física, lograron sortear la aparente dificultad que representaba el hecho de no conocer los nombres de los "autores" de las proposiciones que se encontraban en las premisas. Debe considerarse aquí que 3 respuestas de los estudiantes de física no fueron seleccionadas como correctas, una por no tener el justificativo de selección de las premisas, y las otras dos por tener justificativos difusos.

Eran esperables, para esta actividad, justificativos correctos de tipo MP, por ser el modo inferencial más abordado dentro de su formación. Los 17 estudiantes pueden enmarcarse dentro de la categoría óptima esperable. Por lo anterior, podemos etiquetar como muy bueno el desempeño de ambos grupos dentro del MP.

A fines de ejemplificar las respuestas dadas por los estudiantes, se cita a continuación la respuesta de uno de los estudiantes de matemática y la respuesta de uno de los estudiantes de física.

> "Llamemos A*: Anillo de Klein y E: Espacio de H-P. Como A* es isomorfo a E (por la premisa 2) y además los únicos isomorfos a los Esp. de H-P son los anillos de Polinomios (premisa 5). Resulta que A* es un anillo de polinomios, es decir que sus elementos son polinomios. Con lo cual queda probada la Tesis"

Participante 7 de matemática – Justificativo correcto de tipo MP.

"Como los Anillos de Klein son isomorfos a espacios de H-P, dentro de ese espacio los únicos anillos que son isomorfos son los anillos de polinomios. Por lo tanto, puede deducirse que un Anillo de Klein está compuesto por polinomios"

Participante 5 de Física – Justificativo correcto de tipo MP.

4.2 Análisis de la actividad 2 (MP):

Como se mencionó en el apartado metodológico, la actividad 2 era una versión restringida del teorema del valor medio. La misma, tenía por finalidad que los estudiantes identificasen que se trataba de un caso particular del TVM, ergo la proposición enunciada en la actividad era verdadera. En este sentido, retomando lo mencionado en 2.2 se entiende que la expresión $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es un signo con una interpretación casi única por parte de los estudiantes de esta población. Es decir, el signo S en cuestión denota D para todos los intérpretes I. Es de uso tan común por parte de matemáticos y físicos dicha ecuación que se parte aquí del supuesto de que todos los estudiantes entienden que se trata de una temática relacionada al TVM. Esto además pudo evidenciarse en los justificativos que daban a sus respuestas.

De los estudiantes de matemática, se observaron los siguientes resultados: 1 estudiante contesta que la afirmación propuesta en la actividad es verdadera, pero sin agregar nada que justifique su elección, razón por la cual, no podemos inferir cuál es el modo inferencial que medió su conclusión. 2 estudiantes contestan verdadero y justifican su respuesta basándose en que se trata de un caso particular del TVM y agregan la réplica de la demostración del TVM. 7 contestan verdadero y justifican su respuesta basados en que se trata de un caso particular del TVM, lo cual marca una correcta compresión del MP. En resumen, tenemos 9 respuestas correctas entre las 10 dadas por los matemáticos.

De los estudiantes de física, 2 contestan que la afirmación propuesta en la actividad es falsa, argumentando que la misma no tiene por qué contener la restricción de tratarse de polinomios de grado menor que 10. En particular, uno de ellos argumenta su respuesta exhibiendo la demostración del TVM, destacando que en la misma no hizo uso de la restricción antes mencionada. El otro estudiante sólo se limita a contestar que la proposición es falsa por encontrar una negación en el antecedente. En vista de lo anterior podríamos estar ante un justificativo incorrecto de tipo NA.

Por último, 8 de los estudiantes de física contestan correctamente que la proposición es verdadera y justifican su respuesta argumentando que las condiciones mencionadas en la consigna se adscriben a lo pedido por el TVM. En particular, un estudiante menciona que no hay necesidad de la restricción de que el polinomio sea de grado menor que 10 y otro estudiante consideró verdadera la misma, solo mencionando la necesidad de la continuidad y no habla de la derivabilidad. En resumen, registraron 8 respuestas correctas y 2 de respuestas incorrectas dadas por incurrir en la falacia NA. En este caso, 17 estudiantes de un total de 20 pueden enmarcarse dentro de la categoría óptima deseada, lo cual puede etiquetarse nuevamente como un muy buen desempeño para el MP.

Ambos grupos atinaron en explicar que la verdad de la proposición viene dada por tratarse de un caso particular del TVM. De todos modos, y como era de esperarse, algunos alumnos de matemática dieron la demostración del teorema aplicado al caso de polinomios, otros simplemente expusieron que los polinomios cumplen con lo requerido en las hipótesis del teorema, lo cual es óptimo en este caso, dado que es innecesario volver a exhibir la demostración.

En relación a las demostraciones dadas por 2 de los alumnos de matemática, más que una compresión débil del MP, podríamos pensar en la marcada herencia matemática que los obliga a exhibir la demostración clásica a modo de enriquecer la respuesta.

En los estudiantes de física se observa una tendencia a resaltar el hecho de que la proposición no tiene por qué señalar que el polinomio debe tener grado menor que 10. Esta condición es totalmente innecesaria y fue puesta con la finalidad de generar un desequilibrio en quien conoce lo que el teorema afirma. En particular, en dos alumnos, éste hecho los llevó a afirmar que la misma era falsa. Podríamos estar ante una falacia del tipo NA, dado que pudieron interpretar la restricción mencionada como una negación de la hipótesis del TVM, luego ante "$-P$" contestaron "$-Q$".

Esta particularidad podría explicarse por el hecho de que siempre se exhiben las versiones más fuertes de los teoremas, es decir, aquellas que contienen la familia más amplia posible de objetos que cumplen con la hipótesis. Lamentablemente ni siquiera son dejadas como ejercicios versiones más débiles de los teoremas. Esta actividad podría subsanar un error como el que observamos en estos dos alumnos de física.

También cabe destacar que, tanto para los alumnos de matemática como para los de física, el tratamiento de los teoremas, al menos en este aspecto de su presentación, no difiere y, sin embargo, el error sólo se observó en los de física.

Veamos algunas respuestas en particular:

> "Si $P(x)$ es una función polinómica de grado ≤ 10 en $[a, b]$. Toda función polinómica es continua en (a, b) y derivable. Por el teorema del valor medio voy a encontrar un "c" / $P'(c) = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}$"

Participante 8 de matemática – Justificativo correcto de tipo MP.

Este es tipo de respuesta es la mejor formulada dado que evita la repetición innecesaria de la demostración del teorema. Como se mencionó anteriormente, no se consideró aquí que los alumnos que exhibieron la demostración no se hayan percatado de lo innecesario del caso, sino más bien que atiende a un entrenamiento y modismo propio de la colectividad matemática.

> "Verdadera. Por el Teorema del valor medio, si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en dicho intervalo, y $c \in [a, b]$ entonces hay al menos un punto c que cumple que
> $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
> Una función polinómica es continua y diferenciable $\Longrightarrow$ la afirmación es verdadera, aún si $P(x)$ es de grado mayor a 10"

Participante 7 de Física – Justificativo correcto de tipo MP.

"…
La afirmación es falsa porque no hay restricción en el grado de un polinomio para que se satisfaga la ecuación.
…"
Nota: Luego de esto da la demostración del teorema.

Participante 6 de Física – Justificativo incorrecto de tipo NA.

El hecho de que este estudiante haya decidido dar la demostración no es menor. Entendemos aquí que fue su manera de mostrar que la restricción en el enunciado es totalmente innecesaria. En su demostración (replica de la ya instaurada en la comunidad matemática por Lagrange) no hace uso de esas restricciones y, por ende, argumenta que la afirmación es falsa. Lo anterior nos muestra que esto es un caso de un justificativo incorrecto de tipo NA. Es decir, en lugar de interpretar que dentro de las funciones que cumplen el TVM las polinómicas de grado menor o igual a 10 constituyen un subconjunto de este, y por lo tanto el TVM se cumple, este estudiante detecta que lo escrito difiere del enunciado del TVM y ante una negación de los antecedentes que le son conocidos afirma que el consecuente no se cumple.

4.3 Análisis de la actividad 3 (MT):

La actividad 3 planteaba que, dados tres números reales pares, el producto de ellos tres sería par también, pero en términos de una proposición p y una proposición q, como ya se vio en el apartado metodológico. El ítem a) de esta actividad preguntaba si lo anterior era cierto a fines de asegurar la compresión de la consigna y evitar algún sesgo en el análisis. El ítem b) preguntaba, si sabiendo que no ocurrió q, qué podían asegurar sobre el antecedente.

Se hace a continuación un análisis detallado de la actividad 3 a fines de poder mostrar con claridad la profundidad y dificultad de la consigna. En primer lugar, debemos distinguir la influencia del conjunto numérico (los números reales) en el que está propuesta la actividad. Los conceptos de paridad e imparidad comúnmente se hallan circunscritos al conjunto de los números enteros. En dicho contexto solo caben dos posibilidades, o un número es par o es impar. Ahora bien, en el contexto de los números reales decir que un número no es par da cabida, por ejemplo, al número π, o al número $\frac{1}{5}$, los cuales no son pares, ni impares.

Retomando la consigna, la proposición p afirmaba que "Los números reales a_1, a_2, a_3 son todos pares" y la proposición q exponía que "el producto de los números reales a_1, a_2, a_3 es par". La actividad planteaba lo siguiente: si a sabiendas del no cumplimiento de q ¿qué podría afirmarse sobre el antecedente? Decir que no ocurre q es simplemente decir que el producto de los tres números reales no daba un número par, por lo tanto, podemos pensar como resultados un número impar, un racional no entero, o un irracional. Veamos a continuación algunas ternas de números que ofrecen resultados que no son pares:

a) $\pi.\frac{1}{\pi}.5 = 5$
b) $3.5.7 = 105$

c) $2.\frac{1}{2}.9 = 9$
d) $3.\frac{1}{3}.\sqrt{2} = \sqrt{2}$
e) $4.\frac{1}{4}.\frac{3}{7} = \frac{3}{7}$

Posibles formas de negar “p” en el contexto de los números reales.

Si se hubiese estado en el contexto de los números enteros, la única posibilidad que daría como resultado un número impar es la planteada por ejemplo en el ítem b), donde todos son enteros impares. Esto sucede dado que, si uno solo de los tres números que componen la terna fuese par, el resultado final sería par.

Imbuidos en el contexto usual en el que suelen tratarse los conceptos de paridad e imparidad, casi la totalidad de los estudiantes paso inadvertido que se les planteaba trabajar con números reales, con lo cual la única negación p que podría darles como resultado un número que no sea par, era que todos fuesen impares. He aquí donde, contar con una fuerte formación lógica juega un rol fundamental. De la mano de la lógica, negar la proposición p hubiese sido decir “no todos los números reales a_1 , a_2, a_3 son pares” y, nótese que lo mismo puede inferirse de los ejemplos señalados más arriba. Lo único que tienen en común los ítems del a) hasta el e) es que al menos uno de los números que componen la terna NO es par, y esto es lo único que podría asegurarse al saber que el consecuente q no había ocurrido. La respuesta más económica y más precisa venía dada de la mano de la lógica y no de una distinción exhaustiva de los casos. Con esto, no estamos diciendo que aquellos pocos estudiantes que hicieron esta distinción de casos dentro del contexto de los números reales, hayan operado fuera de la lógica, sino que, no hicieron un uso de las herramientas lógicas con las cuentan, en un contexto donde hubiese sido óptimo hacerlo a fines de lograr una cierta economía en su pensamiento. De hecho, es destacable que hayan utilizado correctamente el contexto de los números reales, pero es de extrañar lo infructuoso de dicho análisis, dado que, si bien permite obtener la misma respuesta que de la mano de la lógica, los estudiantes que optaron por esta vía no obtuvieron conclusiones al respecto, o al menos no las explicitaron.

Se pasa a continuación al análisis de las respuestas de los estudiantes de matemática.

Los 10 estudiantes de matemática dejan entrever en sus respuestas que entienden que debe darse “$-P$”, lo cual es correcto, pero se observa una menor claridad en las respuestas en comparación con las dadas para las actividades 1 y 2 del MP. Lo anterior se ajusta a lo ya estudiado por la psicología cognitiva en relación a la dificultad que agrega la introducción de proposiciones negadas y a lo cual se suma la dificultad particular de esta negación que hemos mencionado anteriormente.

En realidad, y como veremos a continuación, de estos 10 estudiantes de matemática, 6 hacen uso claro y conciso del contrarrecíproco y evitan hacer una distinción innecesaria o incompleta de los casos.

Se cita, por ejemplo:

“ …

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-q \Rightarrow -p)$$

Si no ocurre q, se puede concluir que no ocurre p. Es decir que no todos los números a_1, a_2, a_3 son pares. (Es decir, existe al menos uno de ellos que no es par) Es decir, p es falso.

…”

Participante 3 de matemática – Justificativo correcto de tipo MT.

De los 4 estudiantes restantes de matemática, 2 encuentran la necesidad de separar en casos su respuesta. Uno de estos estudiantes propone formas distintas de negar el antecedente “P” y analiza cuál será el valor del consecuente “Q”, dejando entrever que considerará válidos para la consigna solo aquellos en los que resulte “$-Q$”. Se observa además en dicha respuesta una manipulación algebraica incorrecta de los conceptos de paridad e imparidad de los números. Puede verse también una negación incorrecta de la premisa “Q”, en tanto que el universal planteado en la consigna es el conjunto de los números reales.

“

- Si los tres son impares entonces no se cumple q.
- Si son dos pares y un impar entonces se cumple q, ya que, $(2n+1)(2n)^2 = 8n^3 + 4n^2$.
- Si son los tres pares entonces se cumple q.

Probamos: $(2n+1)(2n+1)(2n+1) = (2n+1)^2.(2n+1) = (4n^2+4n+1).(2n+1) =$

$$= (8n^3 + 8n + 2n + 4n^2 + 4n) + 1 = 2k + 1$$

Ej:

1.3.5=15
1.2.4=8
4.3.5=2.(2.3.5)=60

”

Participante 9 de matemática – Justificativo mediado por análisis de casos que muestra una habilidad lógica acotada.

Se observa en el cuadro anterior un desarrollo algebraico incorrecto de las expresiones, sumado al hecho de que siempre utiliza una sola expresión $(2n+1)$ para lo que pareciera ser un intento de proponer tres impares cualesquiera, o al menos eso sugieren sus ejemplos numéricos. Por último, lo que se destaca es que si bien tiene a su alcance ejemplos que le permitirían afirmar que ante $-q$ se concluye $-p$, no rescata nada de eso en su producción. Este es un ejemplo de respuesta que se ajusta al ítem b) de los que hemos mencionado como posibles, esto es, un ejemplo donde son todos impares.

El otro estudiante hace una mención explícita del hecho que la proposición está enmarcada en los números reales y menciona una posible negación de P, en la que aparecen números racionales. Propone también otra negación en el marco de los números enteros y con un correcto manejo algebraico. Esta respuesta también estaría enmarcada dentro de un justificativo por análisis de casos, con la salvedad de que el manejo algebraico es correcto, aunque también sin sacar en limpio una conclusión final.

De los 2 estudiantes de matemática que quedan por analizar, uno confunde lo requerido acerca del valor de verdad de "P" y hace mención de cómo deberían ser las proposiciones para que la implicación sea verdadera. Si bien, la redacción es confusa ambos dejan entrever que debería darse "$-P$" y por eso se considera a estas repuestas como justificativo de tipo MT, pero dejando ver una habilidad lógica acotada.

El último estudiante de matemática por analizar deja planteado lo siguiente:

"

a) Verdadera

Los números reales $a_1, a_2\ a_3$ son todos pares entonces $2|a_1\ \wedge\ 2|a_2\ \wedge 2|a_3$ entonces existen $m, n, s \in \mathbb{R}\ /\ a_1 = 2m\ \wedge\ a_2 = 2s\ \wedge a_3 = 2n,$ luego $a_1.a_2.a_3 = 2m.2n.2s = 2(4.m.n.s)\ \therefore$ $2|\ a_1.a_2.a_3$ $\therefore$ el producto es par.

b) Si no ocurre q se puede afirmar que no es suficiente decir que si los números reales son pares su producto también será par.

"

Participante 5 de matemática – Justificativo que deja entrever una habilidad lógica acotada.

Se aclara aquí para el lector no matemático que la demostración que este estudiante hace en el ítem a) es correcta. Lo sorprendente de esto es que, como respuesta al ítem b), este estudiante afirma que: si no se diese que el producto de los tres números fuese par ("si no ocurre q"), entonces no es posible afirmar que es suficiente que los tres sean pares para asegurar que el resultado sea par. Esa última afirmación es incorrecta y por sobre todo es contradictoria, con la demostración que él mismo ofrece en a). Su demostración deja claro que si los tres son pares el resultado será par, es decir, que el hecho de que los tres sean pares es una condición suficiente para asegurar que el resultado ser par.

En resumen, tenemos 6 respuestas enmarcadas dentro de un correcto uso del modus tollens y 4 respuestas que dejan entrever una habilidad lógica acotada en relación a lo esperado por estudiantes avanzados de la carrera de matemática.

Se pasa a continuación al análisis de las respuestas dadas por los estudiantes de física a la actividad 3, pero antes de comenzar retomemos un aspecto general del uso del modus tollens.

En relación a lo mencionado sobre la interpretación de la consigna, se hace la siguiente salvedad. La misma decía: "Si se sabe que no ocurre Q, ¿Qué puede concluirse del antecedente?". En la expresión "qué puede concluirse" está contenido "¿qué puede concluirse de manera correcta?" o "mediante una implicación verdadera". Este es el uso que se hace de una expresión de este tipo, pero podría no ser la manera en la que fue interpretada.

El método de demostración por el contrarrecíproco que establece el MT se basa en la equivalencia de las proposiciones "$P \Longrightarrow Q$" con la proposición "$-Q \Longrightarrow -P$". A fines de mostrar dicha equivalencia se muestra a continuación la tabla de verdad de $P \Longrightarrow Q$ conjuntamente con la de su afirmación contrarrecíproca.

P	$\Longrightarrow$	Q	$\Longleftrightarrow$	$-Q$	$\Longrightarrow$	$-P$
V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V

Tabla 4

La columna del centro con todas las casillas "V" indica que, tanto la afirmación directa "$P \Longrightarrow Q$" como su contrarrecíproca "$-Q \Longrightarrow -P$", son equivalentes. En las producciones de algunos estudiantes de física se encontraban, de manera total en algunos casos, y de manera parcial en otros, reconstrucciones de la primera mitad de la tabla, a saber:

P	$\Longrightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Tabla 5

Por las producciones escritas por los estudiantes de física, se infiere que algunos estudiantes operaron de la siguiente forma: la consigna pregunta "Si se sabe que no ocurre Q ¿Qué puede afirmarse del antecedente?". Las casillas de la tabla 5 que contienen resultados falsos para Q, son las ubicadas en fila 3, columna 3 y en la fila 5, columna 3. En estos casos, las casillas de la primera columna contienen los valores V, en el primer caso y F en el segundo. Se presentan aquí, dos posibilidades: 1) decir que el antecedente puede ser tanto verdadero como falso, lo cual es incorrecto y 2) tener en cuenta que la única fila que tiene como resultado una implicación verdadera en la columna central, es la de la última fila, con lo cual debe ser el antecedente falso.

7 estudiantes utilizaron la forma correcta de lo descrito anteriormente. Se muestra a continuación un ejemplo muy representativo de esta respuesta y seguido de este, otra respuesta correcta, pero con menos hincapié en la estructura MT.

P	$\Longrightarrow$	Q	
V	V	V	
V	F	F	NO PUEDE PASAR
F	V	F	
F	V	V	NO PUEDE PASAR
F	F	F	NO PUEDE PASAR

b) $p \Longrightarrow q$ es V.
c) Si no ocurre q, el antecedente es falso.

Participante 10 de Física – Justificativo correcto de tipo MT.

“

a) $V[p \Longrightarrow q] = V$, debido a que el producto de números pares siempre da como resultado un número par.

b) Se concluye que los números reales a_1, a_2, a_3 son todos impares debido a que solo el producto de números impares da como resultado un número impar y por ende no se cumple p.

”

Participante 4 de Física – Justificativo correcto de tipo MT.

En la respuesta del participante 10 de Física, se observa una sexta fila innecesaria y, si se quiere, contradictoria con la cuarta fila. Si bien podría pensarse en que la respuesta es incorrecta, lo que se entiende aquí es que este estudiante reafirma por esta sexta fila que no puede darse que, ante un antecedente y consecuente falso, la implicación haya sido correcta. Esto ya lo deja sentado su cuarta fila, a la cual no le hace ninguna observación al margen. De hecho, de los dos casos que no hace observaciones, podemos inferir que entiende son los que le sirven a la respuesta, y de estos dos en particular el único que le provee una implicación verdadera es el de la cuarta fila, compuesta por antecedente y consecuente falso. Esta tabla es la que da sustento a la respuesta dada en el ítem b).

2 estudiantes dejan expresado que podría ser el antecedente verdadero o falso, tal vez no advirtiendo que en la fila 3, columna 2 de la tabla 5 se encuentra F. En particular, uno de estos dos, si bien menciona lo dicho anteriormente, entiende que, por el contexto, sólo puede darse que el antecedente sea falso. Lo que dice es correcto, pero su respuesta pareciera indicar que se trata de un caso particular y no de una generalidad.

a)

P	⇒	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	V	V

b) Sobre el antecedente se puede concluir que su valor de verdad puede ser tanto V como F.

Participante 7 de Física – Justificativo incorrecto mediado por los resultados de la tabla de verdad.

1 estudiante analiza algo no pedido (participante 3), en este caso el recíproco, no advirtiendo que debía negar Q. El análisis que realiza es correcto, pero no es lo que pedía la consigna. En particular, lo que hace este estudiante es mostrar mediante un ejemplo que no se cumple “la vuelta”, es decir que la proposición $q \Longrightarrow p$ es falsa. Este análisis será requerido recién en la actividad 7 (caso AC). Al revisar el análisis de este estudiante en la actividad 7 se advierte una respuesta contradictoria, en la misma escribe: “*se concluye que* p *es verdad*” y renglones más abajo escribe “*se concluye que* p *es condición suficiente para que se cumpla* q *pero no necesaria*”.

En síntesis, tenemos 7 respuestas correctas para el MT dentro de los estudiantes de física y una marcada tendencia a hacer usos de elementos de la lógica proposicional en lugar de trabajar con casos numéricos particulares.

Se vuelve a continuación a hacer a una mirada general de las actividades de tipo MT que hemos analizado aquí.

El ítem a) de esta actividad tenía por finalidad dejar en claro que la implicación "$P \Longrightarrow Q$" era verdadera para así poder utilizar el hecho de que su contrarrecíproca "$-Q \Longrightarrow -P$" también lo es. El razonamiento vía el contrarrecíproco, esto es el MT, tenía en este caso, como se mencionó en 2.6, la dificultad de no tener una sola forma de negar P. Esto incidió en las respuestas de los matemáticos que decidieron hacer una distinción de los casos involucrados. Los físicos, tal vez para evitar incurrir en errores propios de este camino, decidieron hacer un buen uso de la lógica, mostrando inclusive en algunos casos tablas de verdad que justifiquen sus razonamientos. Se observó en ambos grupos una omisión casi absoluta del dato que afirmaba que los números de la consigna pertenecían al conjunto de los números reales (no necesariamente enteros), por lo tanto, decir que no todos son pares dejaba abierta la posibilidad para números fraccionarios o irracionales, por ejemplo.

La proposición "P" afirmaba los números reales a_1, a_2 y a_3 son todos pares y la proposición "Q" que el producto de estos tres números es par. Aquí se conjugan, como ya hemos mencionado, dos posibles errores. Uno de ellos sería suponer que "$-Q$" equivale a decir que "el producto de estos tres números es impar" dado que, el resultado de este producto bien podría dar un número irracional, por ejemplo. El otro error muy probable (más aún para quien ya cometió el anterior) sería decir que "$-P$" equivale a decir "a_1, a_2 y a_3 son todos impares", negación que hubiese sido correcta en el conjunto de los números enteros dado que, de haber un solo par ya convertiría en par al producto total. Se menciona lo anterior para dejar sentado lo oportuno de haber utilizado solo el camino de la lógica como recurso argumentativo. Tal vez en este caso el manejo tan fuerte que tienen de este contenido los estudiantes de matemática haya ido en detrimento de sus respuestas. De todos modos, se hace mención aquí que, para el análisis de las respuestas de ambos grupos de estudiantes, se consideraron como válidas aquellas en las que la negación era considerada sólo en el conjunto de los números enteros, debido a que son conceptos siempre trabajados sólo en este conjunto numérico.

Por último, y a modo de cierre, se recuerda que solo 6 de los matemáticos se desenvolvieron de manera óptima en el MT y 7 en el caso de los físicos. Solo estos 13 estudiantes optaron por el camino óptimo de justificar su respuesta basados en que se trata del contrarrecíproco de una proposición de la cual ya sabían que era verdadera [ítem a) de la misma actividad].

4.4 Análisis de la actividad 4 (MT):

Como se mencionó en el apartado metodológico, la actividad 4 proponía poner en juego la estructura lógica MT ocupando lo ya sabido sobre el TVM. En líneas generales la consigna niega el cumplimiento de la tesis del TVM, con lo cual se deduce, que al menos una de las componentes de la hipótesis del mismo no se cumple. Las dos proposiciones principales de esta hipótesis son la continuidad y la derivabilidad.

Al igual que en la actividad 3, la negación de la hipótesis del TVM no es única. Se encuentra presente aquí una de las leyes lógicas de De Morgan, la cual establece que la negación de una conjunción equivale a la disyunción de las negaciones, razón por la cual, pensar en una función que no cumple la hipótesis del TVM equivale a pensar en las siguientes 2 posibilidades: 1) Que la función no es continua en el intervalo $[a, b]$ (y por ende tampoco derivable), o bien, 2) que es continua en $[a, b]$, pero no derivable en el intervalo (a, b). Para el caso particular de la consigna debe aclararse que, dado que la continuidad es condición necesaria para la derivabilidad, era de esperarse que varios estudiantes contesten diciendo “la función no es continua ni derivable” en lugar de distinguir los casos antes mencionados.

Es importante destacar aquí que, si bien el contenido matemático involucrado en la actividad 4 (MT) es más elevado (dado los conocimientos y formación previa que requieren) que el de la actividad 3 (MT), la forma de negar la hipótesis del mismo es más sencilla, a saber: o la función no es continua o es continua pero no derivable. En términos simbólicos lo anterior podría explicarse del siguiente modo. Si se cuenta con una proposición de la forma $p \wedge q$ las posibles formas de negarla son tres, a saber: a) $-p \wedge q$, b) $p \wedge -q$, o bien, c) $-p \wedge -q$. Ahora bien, si la proposición p expresase “la función f es continua” y la proposición q fuera “la función f es derivable” entonces el caso a) estaría descartado dado que, no puede darse que una función sea discontinua en un punto y derivable en dicho punto. Por lo expresado aquí podrían ser esperables en las respuestas niveles distintos de especificidad en cuanto a la forma de negar la hipótesis en esta actividad. Se suma a lo complejo del análisis de esta actividad que, no podemos clasificar como incompleta una respuesta como “la función no es continua”, dado que no puede determinarse si se trata de una omisión o de un caso en que el estudiante tiene muy claro que si la función no es continua tampoco es derivable. De todos modos, se deja sentado que lo óptimo corresponde a una mención específica de los casos b) y c).

En otro orden de cosas, ahora en vínculo con las competencias geométricas, los estudiantes de matemática se mostraron más inclinados a acompañar sus respuestas con representaciones gráficas. Se registraron 7 respuestas acompañadas de representaciones para el caso de matemática y solo dos respuestas con representaciones para el caso de física.

9 estudiantes de matemática contestaron de manera correcta haciendo uso del modus tollens y le la negación establecida por De Morgan.

Veamos a continuación una de las respuestas de esta categoría:

“

Se puede decir que la función no es continua en $[a, b]$ ni derivable en (a, b), ya que, si lo fuera, por el teorema de Lagrange, existiría un punto $c \in (a, b)$ donde $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

”

Participante 1 de matemática – Justificativo correcto de tipo MT.

Este caso que fue tomado como representativo dentro de la categoría de las respuestas correctas, muestra un desarrollo del tipo $-p \wedge -q$ para su negación.

El otro participante de matemática que resta por analizar da como respuesta lo que se transcribe a continuación:

"

Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, si se sabe que $\nexists\ c \in (a,b)$ en el que la pendiente de la recta tangente coincida con el de la recta que pasa por los puntos $\left(a, f(a)\right)$ y $\left(b, f(b)\right)$ entonces se puede decir que f no es una función lineal.

Si f no es una función lineal, f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), pensando geométricamente voy a hallar un punto en (a,b) tal que la tangente a ese punto es paralela a la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $\left(b,\ f(b)\right)$ pero no necesariamente van a coincidir.

"

Participante 4 de matemática – Justificativo incorrecto.

En la primera parte de la respuesta solo se encuentra una reescritura de lo que se menciona en la actividad. La segunda parte de la respuesta pareciera indicar que este estudiante entiende que las funciones lineales no están en el espectro de las funciones que cumplen con el TVM (cosa incorrecta). Seguido de esto tenemos una reafirmación de que si se cumplen con las condiciones de continuidad y derivabilidad podríamos encontrar un punto como el que establece la tesis del TVM, cosa que justamente ya sabemos por el mismo TVM. Por lo expuesto aquí entendemos que la respuesta no puede ser clasificada como correcta por no decir ininteligible.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes del grupo de física.

9 estudiantes contestaron de manera correcta la consigna, pero en este caso sólo 2 de estos acompañan sus justificativos de representaciones gráficas.

1 estudiante omitió la consigna.

Un caso representativo de las respuestas de los físicos es el siguiente:

"

Que f no es derivable en todo (a,b) o no es continua en todo $[a,b]$.

El teorema del valor medio tiene estas dos condiciones como hipótesis, si se cumplen entonces

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad c \in (a,b)$$

Al igual que en la actividad 3 que el consecuente no se cumpla implica que el antecedente tampoco se cumple.

"

Participante 9 de Física – Justificativo correcto de tipo MT.

Es interesante destacar de esta respuesta el vínculo que establece este estudiante con la actividad 3.

En líneas generales el desempeño de ambos grupos fue óptimo y el nivel de precisión de las respuestas es elevado, 18 de los 20 estudiantes contestaron correctamente mientras. Una respuesta incorrecta en el caso de los matemáticos y una omisión en el caso de los físicos.

4.5 Análisis de la actividad 5 (NA):

La actividad 5 vuelve a retomar las proposiciones ya trabajadas en la actividad 3, pero pregunta en esta ocasión "Si se sabe que no ocurre p ¿Qué puede concluirse sobre el consecuente?", exponiendo así a los estudiantes a una situación donde la falacia NA es altamente esperable.

En esta actividad, los estudiantes se encuentran prácticamente en terreno desconocido, dado que, las falacias, no son abordadas de modo explícito durante el proceso de instrucción de estos. En este orden, y por tratarse de un modo inferencial que desconocen se justifica, más aún, se valora que algunos hayan abordado la actividad haciendo un análisis de casos. Lo que también era esperable es que algunos fuesen menos osados que otros a hora de decir "nada puede afirmase del consecuente", mientras que otros sólo dejen plasmados los casos donde aparecen $-q$, o bien q. Otro de los abordajes esperables aquí era el ya prescrito por estudios similares a este, como ser los trabajos de Wason y los que le siguieron, en los que se menciona que ante la negación del antecedente los sujetos tienen a inferir la negación del consecuente, también conocida como afirmación obversa y ya tratada en la sección 2.4.2.

Debe destacarse aquí que la actividad 5 pretende ser facilitadora de la actividad 6. Ambas tratan con la falacia NA, lo que las diferencia es el contenido de las mismas, siendo la actividad 5 un contexto propicio para poder manipular fácilmente los casos a fines de dar respuesta a la consigna. Cuando se retome la actividad 6 sí volveremos sobre los resultados de cada estudiante en la actividad 5 para tratar de revisar si realmente la misma les brindó un contexto ameno para poder extrapolar resultados cuando abordaron el TVM, o bien, si se encuentran en la contradicción de resolver correctamente actividad 5 y en la siguiente incurrir en la falacia NA.

En el contexto antes descrito y con las posibilidades de manipular fácilmente las proposiciones involucradas, lo pretendido para esta actividad era que, los estudiantes pudiesen contestar que ante la negación del antecedente nada puede afirmarse del consecuente. Lo anterior se basa no solo en el hecho de que el contenido era muy básico, sino que por tratarse de una proposición muy particular y hecha para la ocasión no remitía a la memoria de alguna propiedad con nombre y apellido como el caso del TVM. Es por lo anterior, que las respuestas pretendidas por estudiantes avanzados de ambas carreras en esta actividad en particular fuesen del tipo "nada puede afirmarse del consecuente". Dejaremos aquellas respuestas en las que se muestran análisis de casos, pero sin sacar la conclusión de que nada puede decirse q dentro de la categoría "habilidad lógica acotada".

Hecha la introducción anterior y sin más preámbulos se expresa aquí que sólo se encontraron 5 respuestas óptimas para esta actividad entre los estudiantes de matemática, siendo 4 referentes de una habilidad lógica acotada y 1 representante de la falacia NA.

Se muestra a continuación una respuesta representativa de los 5 estudiantes que lograron contestar de forma óptima la actividad.

> “
>
> Que NO ocurra el antecedente implica que al menos uno de los números no es par (Negación de la conjunción).
>
> El consecuente puede darse o no. Si son todos impares NO se da el consecuente.
>
> Para que se dé el consecuente es necesario que al menos uno de los números sea par, ya que al factorizarlo me queda 2 por otro real. Luego al multiplicar los 3, por pp. asoc. asocio convenientemente y por cierre en $\mathbb{R}$, y por definición resulta el producto de los 3 un número par.
>
> ”

Participante 2 de matemática – Justificativo correcto que evita la falacia NA.

Estos 5 estudiantes contestaron correctamente afirmando que nada puede decirse del consecuente si se niega el antecedente. En particular las cuatro respuestas están muy bien fundamentadas.

Dentro de las respuestas que fueron clasificadas como representantes de una habilidad lógica acotada la dispersión de las mismas es más marcada, se observan imprecisiones operativas, como también falta de determinación de una respuesta específica. Esto último deja entrever lo desconocido de este tipo de contexto para los estudiantes. A continuación, se muestran algunas de estas respuestas y se las describe brevemente.

> “…………………… (Aquí el estudiante exponía un recuadro con un análisis que luego el mismo dejó anulado. Luego expone lo que se transcribe a continuación)
>
> Si se sabe que no ocurre p, es decir: “los n° $\mathbb{R}$ a_1, a_2, a_3 no son todos pares” tenemos que al menos 1 de ellos es par y si al menos 1 fuese par entonces el producto de $a_1, a_2 a_3$ es par.
>
> ”

Participante 4 de matemática – Habilidad lógica acotada. Falacia NA posiblemente causada por un análisis no exhaustivo de los casos involucrados, es decir, un uso incorrecto de las leyes de De Morgan.

Este estudiante, en principio, había contestado correctamente afirmando que “si no ocurre P, no podemos afirmar que el consecuente sea verdadero o falso”. Luego, deja anulada su respuesta con un recuadro, argumentando que el resultado será par. Lo que se observa aquí es posiblemente una negación incorrecta del antecedente dado que, si interpreta que negar que “son todos pares” equivale a decir “alguno es par” su conclusión sería acertada. Recordemos que si la falacia NA podría aparecer bajo la forma conocida “si no p entonces no q” como es el caso de la afirmación obversa, o bien, “si no p entonces q” como es el caso de este ejemplo. El reconocimiento correcto de la falacia NA consiste en saber que ante la negación del antecedente nada puede afirmarse del consecuente, ergo, cualquiera sea la conclusión a la que arriben debemos clasificar a la respuesta como un caso NA.

De los 5 estudiantes de matemática que restan por analizar se tiene a 2 que dejan entrever explicaciones sumamente difusas e imprecisas de que podría darse o no el consecuente. 3 de estos estudiantes mostraron los resultados distintos que podrían obtener ante la negación del antecedente. Uno de ellos concluye y aclara específicamente que el consecuente podría ocurrir. Los otros dos estudiantes realizan distinciones similares, empero, no atinan a dejar sentado lo que sus propios resultados le permitirían concluir o simplemente lo omitieron.

En resumen, para la actividad, 5 estudiantes contestan correctamente. Del resto tenemos un estudiante incurre en la falacia NA y 4 a los que se catalogó como respuestas que dejan entrever una habilidad lógica acotada.

A continuación, se sigue con en análisis de las respuestas de los estudiantes de física.

Tres estudiantes incurren en la falacia NA, en particular uno de ellos estudiante contesta que el consecuente sería falso dado que, para él, la negación del antecedente se circunscribe al caso en que son todos impares, con lo cual, el producto de los 3 números le dará un impar y de ahí su conclusión. Esto formalmente más que un caso de la falacia NA podría ser interpretado como un resultado de una negación incorrecta de la conjunción:

> "……………………
>
> Si P es F entonces Q es F
>
> El consecuente es falso ya que el producto de 3 números impares nunca puede dar como resultado un número par.
>
> "

Participante 10 de Física – Falacia NA dada por una negación incorrecta del antecedente.

Los otros dos estudiantes que comenten la falacia NA lo hacen por considerar solo uno de los casos, en particular, considerar que ante $-p$ obtienen q. Se muestra a continuación un ejemplo de estas dos respuestas:

> "
>
> Si $P \Longrightarrow Q$ y sabemos que P es una condición suficiente faltaría ver que pasa si P no se cumple, podría ser que se cumpla Q sin que se cumpla P.
>
> Por ejemplo: P: Soy Correntino
>
> Q: Soy argentino
>
> Si soy correntino ⟹ soy argentino ($P \Longrightarrow Q$)
>
> Si no soy correntino ⟹ no soy argentino ($-P \Longrightarrow -Q$)
>
> Podría ser chaqueño e igual sería argentino.
>
> "

Participante 3 de Física – Falacia NA dada por un análisis no exhaustivo de los casos.

Se destaca sobre este ejemplo, la claridad de la explicación del estudiante. Cuando menciona "Podría ser chaqueño e igual sería argentino" Está mostrando una de las posibilidades, en este caso: $-P \wedge Q$. Tal vez el hecho de haber intentado dar un ejemplo lo más coloquial posible haya impedido el análisis de la otra posibilidad que dejó de lado, esta es: $-P \wedge -Q$.

Los 7 estudiantes restantes contestan correctamente, con fundamentos concisos y claros, que nada pueden afirmar sobre el consecuente. Se muestra a continuación una respuesta representativa de esta categoría:

"

En este caso no se puede concluir nada.

Supongamos el caso de que a_1 y a_2 sean pares, mientras a_3 impar. Con estas condiciones q se seguiría cumpliendo.

En cambio, si por ejemplo, a_1, a_2 y a_3 son todos impares q resultaría falso.

Por tanto, que p no ocurra no significa necesariamente que q sea verdadero o falso.

"

Participante 9 de Física – Justificativo correcto que evita la falacia NA.

En resumen, tenemos 7 respuestas correctas y 3 casos de falacia NA.

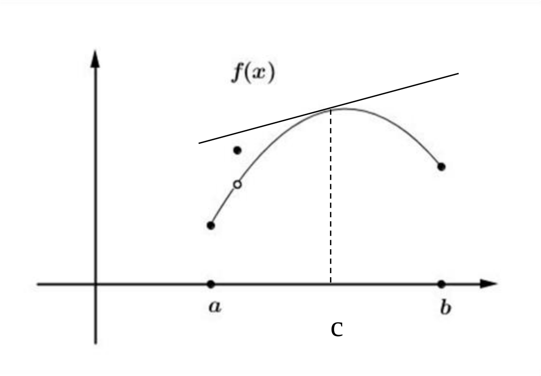
Se recuerda que, los dos casos en los que se podría presentar la falacia NA son: pensar que ante la negación del antecedente solo ocurre la negación del consecuente, o bien solo ocurre la afirmación del consecuente. Por esta razón fueron consideradas como incorrectas aquellas respuestas en las que no se consideraban sendas situaciones. Se tuvo cuidado aquí en distinguir lo que sería un caso NA, con problemas desencadenados por una negación incorrecta de la conjunción.

Se destaca, como particular de las respuestas dadas a esta actividad, la claridad de los estudiantes de física por sobre las respuestas de los estudiantes de matemática. Es notorio que ante una falacia lógica como la NA el contexto se les presentó como difuso a ambos grupos.

En síntesis, tenemos 7 respuestas correctas para el caso de los estudiantes de física y 5 respuestas correctas para los estudiantes de matemática.

4.6 Análisis de la actividad 6 (NA):

Se recuerda aquí la estructura de la actividad 6 (ver el gráfico de la actividad 6 en el apartado metodológico). La misma consistía en una gráfica discontinua que de todos modos tenía en su dominio un punto que satisface la tesis del TVM. Dado que dicho punto existe, la respuesta era "verdadera" y se estaría en presencia de un caso donde, no cumpliéndose la hipótesis, se cumple la tesis. Ahora bien, dado que justamente no cumple con la hipótesis del mismo, el único justificativo que permitiría demostrar la existencia del punto “c” por el cual se pregunta es representando sobre la gráfica de la actividad la recta tangente e indicando cuál es el punto en cuestión. A fines de ganar precisión se muestra a continuación cuál debería ser la representación que podían haber dejado plasmada como justificativo correcto de su respuesta.



Justificativo de la actividad 6 por medio de una representación gráfica.

A diferencia de la actividad 5, en la presente se encuentra muy probablemente la posibilidad de tratarse con casos de perfección del condicional. Estos estudiantes, no cuentan con antecedentes alternativos para la tesis del TVM, es por esta razón que ante la negación del antecedente conjeturen que también debe darse la negación de la tesis. En el contexto de la “paridad e imparidad” planteado por actividad 5 no resultaron dificultosas las manipulaciones de ejemplos que permitían un análisis de la situación, mas ahora, la complejidad del contexto y la falta de abordajes de este tipo de situaciones en su proceso de formación conspiran a favor de la falacia NA. Se insiste aquí una vez más en que, para quienes consideran que los estudiantes podrán estar perfeccionando el condicional no podría decirse que están incurriendo en la falacia NA sino más bien en un error de interpretación del alcance de la premisa mayor.

De entre los 10 estudiantes de matemática se encuentran solo 4 respuestas similares a las que mencionamos en el párrafo anterior. En estas respuestas se menciona el problema de continuidad que tiene la gráfica y se aclara que de todas formas existe el punto que satisface lo requerido en la consigna.

Se muestra a continuación un ejemplo representativo de esta categoría:

(El estudiante muestra la misma gráfica que se mencionada más arriba, luego aclara que la respuesta es verdadera y anota lo siguiente)

“Existe c y $f(c)$ está definida porque, aunque la f no cumpla con las condiciones del TVM, f es discontinua en un punto de (a, b), pero no es el punto donde “necesito” calcular la derivada.”

Participante 9 de matemática – Justificativo correcto que evita la falacia NA.

De entre los cuatro estudiantes pertenecientes a la categoría anterior cabe destacar que uno de ellos la señala como verdadera la respuesta y deja trazada una recta como la que se menciona más arriba, pero no da ninguna explicación escrita. Otro de ellos menciona además de su justificativo geométrico lo siguiente: “que no se cumplan las condiciones del TVM no garantiza que no se cumpla la tesis del mismo. El teorema es una condición suficiente no necesaria”. Estás explicaciones muestran una elevada compresión de la estructura lógica del teorema.

2 estudiantes incurren en la falacia NA argumentando el no cumplimiento de las condiciones del TVM. Uno de estos dos casos es bastante sorprendente dado que contesta que la proposición es falta por el no cumplimiento de la hipótesis del TVM, empero, deja trazada la gráfica de la recta tangente que satisface lo pedido. He aquí un caso puro de la falacia NA. Ni si quiera la prueba, que él mismo había logrado encontrar, hizo que fuese en contra de la idea incorrecta que tiene del alcance de lo que el teorema plantea. Como se indicó en el análisis de la actividad 5, iban a ser de interés mencionar aquellos estudiantes que, habiendo contestado bien la actividad 5 incurren en la falacia NA trabajando en la actividad 6. Se contabilizó de entre los dos casos encontrados de NA en la actividad 6 uno solo de estos había contestado correctamente la actividad 5 mientras que el otro es de aquellos que habían plasmado un estudio situaciones distintas para el consecuente, pero sin atinar a una conclusión. Cabe aclarar que, como todas las consignas fueron entregadas juntas y retiradas al finalizar, los participantes tenían la posibilidad de revisar sus producciones, razón por la cual, para este estudiante, sólo se puede inferir que no se percató de la contradicción de sus producciones en relación a las actividades 5 y 6.

1 estudiante de matemática omite la actividad 6. Cuando se le preguntó luego de haber entregado sus respuestas por qué no la había contestado, mencionó la contradicción que le produjo ver que no se cumpla con la hipótesis del TVM y se le pregunte por la existencia del punto. Se lo alentó a contestar parte de lo que había pensado, pero optó por entregar las actividades y retirarse. Se trata del participante número 1 y esta es la única actividad que no contestó.

3 estudiantes dejan entrever que entienden que la proposición es verdadera y en sus explicaciones muestran lo que ellos encuentran como una contradicción, a saber, el hecho de ver geométricamente un punto que satisface lo requerido, pero analíticamente ven un incumplimiento de las hipótesis del TVM. No podemos afirmar que estos tres casos sean de tipo NA, pero el hecho de que no se hayan inclinado por determinar el valor de verdad de la proposición hace pensar que no se sintieron seguros. Uno de ellos responde lo que se muestra a continuación:

> (El estudiante recuadra la opción verdadera y anota lo siguiente)
>
> “Pensando gráficamente, por el punto c donde $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pasa una recta tangente a la gráfica que forman $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
> Si bien vemos que la función es discontinua, es continua en donde se ubicaría el punto c dicho anteriormente, con lo cual $\exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
> Pensando analíticamente, el teorema que me asegura la existencia de dicho c es el teorema de Lagrange. Pero $f(x)$ no es continua en todo (a,b), por lo que no es posible que exista el punto c.”

Participante 10 de matemática – Justificativo incompleto.

Se destaca aquí que, más allá de que haya señalado la respuesta como "verdadera" y dejado plasmada la duda que le suscita la consigna, no podemos clasificar a esta respuesta como correcta dado que una compresión cabal de la respuesta le hubiese permitido trazar la recta y marcar el punto que satisface lo pedido.

Tanto los 3 estudiantes ejemplificados recién, como los que incurrieron explícitamente en la falacia NA se enmarcan dentro de lo que hemos establecido como justificativos incorrectos que dejan entrever una habilidad lógica acotada.

En síntesis, para el grupo de matemática tenemos 1 omisión de la actividad, 4 respuestas correctas, y 5 respuestas que dejan entrever una habilidad lógica acotada.

La comparación entre el desempeño que tuvieron entre la actividad 5 y la 6 muestra que la diferencia en complejidad del contenido fue determinante.

Entiéndase aquí que proponer una función que no cumpliendo las hipótesis del TVM cumpla la tesis del mismo exige del manejo de una matemática mucho más compleja que la que trata solamente de números pares e impares.

Se pasa ahora si al análisis de las respuestas de los estudiantes de física.

3 estudiantes de física cometen errores por un manejo incorrecto de los conceptos de continuidad y derivabilidad. De estos tres tenemos 2 estudiantes de física que la consideran verdadera por una compresión incorrecta que hacen del intervalo en el que debe aplicar el TVM. Se perciben también nociones incorrectas de continuidad. El otro estudiante entiende que la proposición es falsa, pero por una interpretación errónea de las condiciones para que una gráfica admita recta tangente. En particular entiende que el punto "c" que se pretende que encuentre es el punto donde figura una discontinuidad en la gráfica y luego entiende que en dicho punto la pendiente es distinta de la que pasa por los extremos del intervalo, cosa totalmente incorrecta dado que no pueden calcularse rectas tangentes en puntos donde la función es discontinua (condición necesaria para la derivabilidad).

Como ejemplo se cita:

> (El estudiante recuadra la opción verdadera y anota lo siguiente)
>
> "Es verdadera porque $f(x)$ es continua y derivable en todo punto del intervalo $[a, b]$ y la derivada no presenta saltos en los subintervalos $[a, x_0)$ y $(x_0, b]$ por lo cual puede existir un punto "c" en cualquiera de esos dos subintervalos que cumplan con la afirmación".

Participante 10 de Física – Justificativo incorrecto por manejo erróneo del contenido.

5 estudiantes incurren en la falacia NA por entender el no cumplimiento de las proposiciones que componen la hipótesis del TVM. Dentro de estos 5 casos de tipo NA existe uno muy sutil que fue clasificado como tal. Este estudiante afirma que la proposición es verdadera y muestra correctamente cuál es el punto de la gráfica que lo satisface. Observa además que hay una discontinuidad en la gráfica, lo cual entiende como incumplimiento de la hipótesis del TVM. Para resolver lo que entiende como una contradicción, concluye argumentando que la función es continua. Esto es un caso NA

dado que, en su constructo argumentativo, solo es posible el cumplimiento de la tesis si se cumplieron todas las proposiciones que componen la hipótesis. Se transcribe la respuesta del mismo:

(El estudiante recuadra la opción verdadera, señala correctamente el punto que satisface lo pedido, traza correctamente la recta tangente en ese punto y anota lo siguiente) "Como existe por lo menos un punto "c" en el intervalo (a, b), quiere decir que la tangente a la curva en "c" es paralela a la secante que une los puntos a y b. En el gráfico, se observa una discontinuidad (está marcado) pero se afirma la existencia de un punto "c" en (a, b) y por lo tanto la función es continua."

Participante 5 de Física – Justificativo incorrecto de tipo NA.

Cabe destacar que dentro de estos 5 casos de tipo NA, tres de ellos habían logrado contestar correctamente la actividad 5 también de tipo NA.

Por último, tenemos 2 estudiantes de física que contestan correctamente que la proposición es verdadera y además aclaran que, el no cumplimiento de una de las componentes de la hipótesis no incide, al menos en este caso, en el cumplimiento de la tesis. Las respuestas correctas de estos dos son similares a las dadas por los matemáticos razón por la cual no se las transcribe aquí.

Lo anterior arroja los siguientes resultados: sólo 2 respuestas correctas, contra 8 incorrectas. Tres de estas últimas por interpretaciones incorrectas de conceptos y 5 de estas por la falacia NA.

La redacción de la consigna hace hincapié en si existe un punto "en esta gráfica". Esto fue una mejora realizada sobre una versión anterior del instrumento.

Se destaca de las respuestas a esta actividad una marcada incongruencia entre la comprensión analítica y geométrica del TVM. Estudiantes que, habiendo identificado correctamente el punto que pedía la consigna, argumentaban que la misma era falsa por el no cumplimiento de una de las proposiciones que componen la hipótesis del TVM.

El caso del estudiante de matemática y los 3 de física que, habiendo contestado bien la actividad 5 incurrieron en la falacia NA en la 6, se destacan dado que podrían arrojarnos información sobre el fenómeno de perfección del condicional. En la actividad 5 estos estudiantes contaban con un contexto que les permitía manipular con facilidad los casos a fines de contar con situaciones de tipo -p y q como también otras de tipo -p y -q. El desenvolvimiento correcto en esta tarea muestra una habilidad desarrollada para no incurrir en una falacia como la NA. Ahora bien, dado que contestaron correctamente la actividad 5, ¿no podría pensarse que no conociendo otros antecedentes para el TVM lo hayan perfeccionado?, en caso de ser así, las respuestas clasificadas como de tipo NA para la actividad 6 no serían tales. Este es un interrogante que no será cerrado en este trabajo, pero dejarlo planteado aquí es pertinente.

4.7 Análisis de la actividad 7 (AC):

Como se mencionó en el apartado metodológico, la actividad 7 tenía por objetivo estudiar la falacia AC, para dicho objetivo se volvieron a retomar las proposiciones expuestas en las actividades 3 y 5 siendo la pregunta en este caso "Si se sabe que el producto de los tres números a_1, a_2 y a_3 es par ¿Qué puede concluirse sobre el antecedente?". Se remarca aquí que la forma en la que podía ser abordada la actividad se encuentra en vínculo con lo trabajado en las actividades 3 y 5. Esto quedó expresado en algunas respuestas mediante expresiones como "Como hemos visto en la actividad 5" o "en el ejercicio 3 vimos". Una vez llegados a este punto los estudiantes parecieran haber comprendido que estaban trabajando con las mimas proposiciones y las diferentes direcciones que podría tomar el condicional.

Los 10 estudiantes contestan correctamente argumentando que ante el cumplimiento del consecuente no pueden asegurar que el antecedente haya sido verdadero y explican que el consecuente podría cumplirse con otros antecedentes.

Se muestran a continuación ejemplos representativos de esta categoría:

"Si el producto de los tres números es par podemos decir que el antecedente puede ocurrir o no, ya que en el ejercicio 3 vimos que si todos o algún número es impar el producto de los tres números es par"

Participante 6 de matemática – Justificativo correcto que evita la falacia AC.

Este estudiante relaciona correctamente con la respuesta que elaboró para la actividad 3 y logra mediante esto evitar la falacia AC.

"Si se sabe que $a_1,.a_2.a_3$ es par $\Longrightarrow$ alguno de sus componentes es par.
Supongamos que ninguno es par"

Participante 1 de matemática – Justificativo correcto que evita la falacia AC.

Este estudiante propone un antecedente que permite afirmar q. Nótese que éste, no es el antecedente que está propuesto en la actividad. El estudio de los casos que hizo en las actividades anteriores le permite generar un antecedente distinto que cumple con lo requerido. Nuevamente esto puede ser adjudicado a que el contenido es de fácil manipulación, ahora bien, cuando el contenido involucrado es más elevado la generación de antecedentes alternativos o un antecedente completamente nuevo puede ser tarea realmente difícil, inclusive para toda la comunidad matemática como muestra el ejemplo que se mencionó sobre la teoría de distribuciones en 2.4.1. La parte que deja incompleta de su respuesta es el comienzo de lo que pudo haber sido un justificativo utilizando el método de reducción al absurdo que se mencionó en 2.3.2.

En síntesis, tenemos 10 respuestas correctas por parte de los matemáticos para el modo inferencial AC trabajado en la actividad 7.

Se pasa a continuación al análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de física.

De los 10 estudiantes de física tenemos 8 que logran justificar correctamente que podrían existir otros antecedentes que den lugar al consecuente Q de la consigna. En particular, 5 de estas 8 respuestas fueron sumamente precisas.
Se muestra un ejemplo de razonamiento abductivo correcto con un alto nivel de precisión explicativo y seguido de este un ejemplo de lo que se entiende como una respuesta correcta de menor precisión.

> “p podría o no ocurrir, ya que a_1, a_2, a_3 podrían no ser todos pares”

Participante 1 de Física – Justificativo correcto que evita la falacia AC con un alto nivel de precisión.

> “Se puede concluir que uno de los tres, dos de los tres es/son par/es porque el único caso en donde el producto da un impar es cuando necesariamente, los tres son impares, si uno de ellos es par ya se concluye que el producto da un número par.”

Participante 4 de Física – Justificativo correcto que evita la falacia AC con un bajo nivel de precisión.
Nótese que la respuesta contiene una negación incorrecta del antecedente. Para este estudiante pensar en el no cumplimiento de p equivale a pensar que los tres deben ser impares cosa que sería cierta en el contexto de los números enteros, pero como ya se mencionó el conjunto de los números reales permite ejemplos como:

$$\pi.\frac{1}{\pi}.3 = 3$$

Nuevamente, como se mencionó anteriormente, para el caso de los estudiantes de física se consideró como correcta esta negación porque solo manejan los conceptos de paridad e imparidad dentro de los números enteros y el manejo de estos en los reales es más propio de los estudiantes de matemática.

De los dos estudiantes de física que restan por analizar 1 de ellos incurre en la falacia AC por no advertir otros posibles casos que dan como resultado un número par.
Se cita su respuesta a continuación:

> “$a_1.a_2.a_3 = 2n \qquad q \equiv V \Longrightarrow p \equiv V$
> El antecedente es necesariamente debe ser verdadero para que el consecuente así lo sea. Dado que el producto de 3 números impares da como resultado un número impar.
>
> $$a = 2n + 1 \rightarrow a_1.a_2.a_3 = (2n_1 + 1)(2n_2 + 1)(2n_3 + 1) = \\ \dots\dots\dots = 2n' + 1$$
> ”

Participante 10 de Física – Justificativo incorrecto de tipo AC.

Este estudiante argumenta que el antecedente debe ser necesariamente verdadero dado que, según lo que él entiende, la falsedad del antecedente equivale a pensar que los tres números son impares lo cual daría efectivamente un resultado impar. Esta negación incorrecta lo lleva a cometer la falacia AC.

Por último, 1 estudiante expone un resultado contradictorio dado que, en principio responde que P debe ser veradera, lo cual es incorrecto, y luego agrega algo, totalmente válido, a saber: "P es condición suficiente para que se cumpla Q, pero no necesaria". Dada la veracidad y claridad de esta última parte de su respuesta podríamos adscribir la aparente contradicción a un error de tipeo, o confusión, al escribir "P" en lugar de "Q". Si lo anterior es correcto podría estar entre las respuestas correctas. Cabe destacar que en función de las respuestas que dio a las demás actividades es muy probable que se trate de un error como el que se explicó anteriormente.

Se muestra su respuesta a continuación:

"Se concluye que P es verdad.
Se Concluye que P es condición suficiente para que se cumpla Q pero no necesaria."

Participante 3 de Física – Justificativo contradictorio.

Nótese que decir que P no es condición necesaria equivale a decir que $Q \nRightarrow P$. Esto es correcto dado que el cumplimiento de Q no implica el cumplimiento de P, de todos modos, dado lo sencillo del contenido involucrado hubiera sido esperable que la manipulación de algunos ejemplos le permitiese percatarse de su error.

Se observan un mejor desempeño por parte de los matemáticos en este modo inferencial. Tanto los estudiantes de matemática como los de física optaron por mostrar los casos particulares de otros antecedentes para explicar que ante el cumplimiento de Q, el antecedente P podría haber estado presente como no. Ambas poblaciones dejan entrever lo posible del antecedente y no la necesidad de este.

4.8 Análisis de la actividad 8 (AC):

La última de las actividades que componían el instrumento estaba compuesta por la recíproca del TVM. Se recuerda que la finalidad de ésta, era proponer un escenario propicio para la aparición de la falacia AC. Como ya se dejó sentado en el análisis de la actividad 6, existen funciones que, no cumpliendo las hipótesis del TVM cumplen igualmente la tesis, es decir, existen funciones no continuas y no derivables, o bien, continuas, pero no derivables, que cumplen lo requerido por el TVM.

La actividad 8 planteaba la existencia de una cierta función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$ para la cual se satisfacía la existencia de un cierto punto c dentro de (a, b) que cumplía con la ecuación:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

seguidamente de esto se afirmaba la continuidad de $f(x)$ en $[a, b]$ y la derivabilidad de esta en (a, b).

El estudiante que ya habiendo reflexionado correctamente sobre esto en la actividad 6 contaba con un ejemplo geométrico que podría ayudarle a dar respuesta a la presente actividad contestando que la misma es falsa.

Los 10 estudiantes de matemática señalaron que la proposición es falsa, lo cual es correcto, lo que se analiza a continuación son los justificativos que dieron para sostener su elección. Nótese que no se afirma aquí que todas las producciones sean correctas. Los estudiantes dieron muestras de funciones que, no cumpliendo el antecedente, cumplían con lo requerido en la tesis. Esto responde a una perfecta compresión de la estructura lógica que debe tener un contraejemplo como se mencionó en el apartado teórico 2.8. Si bien podrían haberse valido de la representación gráfica dada en la actividad 6, los participantes optaron por proporcionar ejemplos de carácter analítico y no solamente geométrico. Esta tarea no es nada fácil y requiere de un muy buen manejo algebraico y de las representaciones geométricas de funciones reales de una variable.

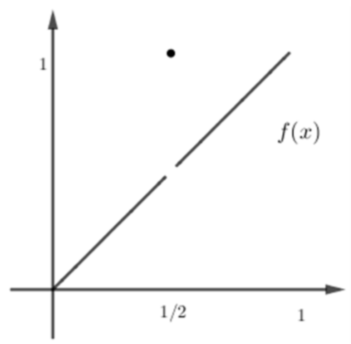
Se deja aclarado aquí que, el solo hecho de haber atinado a señalar como falsa la proposición de la actividad ya es una cuestión meritoria. De todos modos, estos estudiantes fueron más allá e intentaron dar contraejemplos (a excepción de uno de ellos que elige otra vía argumental) para mostrar la falsedad de la proposición.

Dentro de las respuestas se distinguen aquellas que hacen uso de herramientas geométricas evitando el uso de caso particulares de alguna función, y aquellos contraejemplos que hacen deducciones algebraicas hasta mostrar lo requerido. Ambos caminos son válidos siempre y cuando se justifique cada paso, pero de todos modos en términos estrictamente formales, el desarrollo algebraico y las cuentas son los que justifican realmente la existencia de estos contraejemplos sin dejar lugar a dudas. Dentro de los desarrollos se encuentran errores, algunos de conceptos, otros algebraicos.

A fines de lograr claridad en esto se muestran a continuación las transcripciones de una respuesta por cada uno de los 3 tipos distintos que se encontraron dentro de los matemáticos.

“La afirmación no es verdadera ya que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ 1 & \text{si} \quad x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Tomando $c \in (0,1) \,/\, c \neq \frac{1}{2}$ se verifica que $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1-0} = 1 = f'(c)$, pero f no es continua en $[0,1]$ y tampoco derivable en $(0,1)$.”

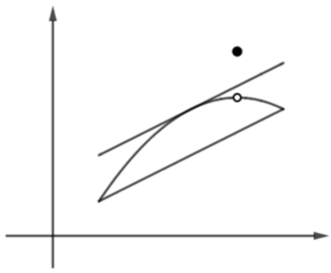


Participante 7 de matemática – Justificativo correcto que evita la falacia AC.

Este es un buen representante de aquellos estudiantes que optaron por proponer un contraejemplo concreto en lugar de una argumentación geométrica que muestre la existencia de posibles contraejemplos. Se contabilizaron en total 6 respuestas en esta categoría.

Se muestra a continuación un ejemplo representativo de los tres estudiantes de matemática que optaron por una argumentación de tipo geométrica que dé pruebas de la falsedad de lo propuesto en la actividad 8. En particular, el ejemplo seleccionado para esta categoría, muestra una explicación sumamente difusa y poco clara, pero acompañada de una representación gráfica sumamente pertinente que guarda grandes similitudes con la propuesta en la gráfica de la actividad 6.

"Puede suceder que la función no sea derivable en un punto, lo cual implica que se continua, ya que la afirmación solo dice que existe solo un punto perteneciente al intervalo (a, b) tal que cumpla con la igualdad, es decir, que exista su derivada (y sea continua en ese punto) pero no habla de los demás puntos que se encuentran en (a, b). Por lo tanto, no se puede afirmar que sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)."



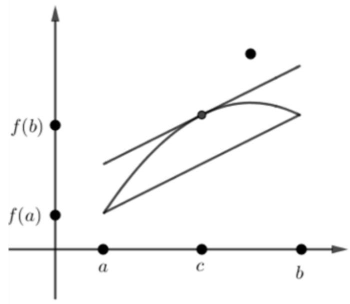
Participante 4 de matemática – Justificativo geométrico correcto que evita la falacia AC acompañado de una explicación de muy bajo nivel de precisión.

En la explicación se perciben errores de tipo conceptual como ser afirmar que "lo cual implica que sea continua". En relación a esta frase podría tratarse de un error de escritura o lo que sería mucho pero aún de un ejemplo de falacia NA, esto es, se sabe que si una función es derivable entonces es continua, luego decir que si no es derivable implica que es continua sería un error de tipo $-p \Longrightarrow q$. Avanzando dice "existe solo un punto", esto constituye un error en cuanto al uso de los cuantificadores dado que decir que existe ($\exists$), no es equivalente a decir "existe uno solo" ($\exists!$). Al finalizar termina concluyendo que "no puede afirmarse $f(x)$ sea continua $[a, b]$ y derivable en (a, b)" lo cual nos indica que lo previo fue un intento de dar sustento a esta última afirmación. Esta última afirmación, sumada a la representación gráfica tan pertinente para mostrar la falsedad, nos hacen pensar que se trata de un estudiante que no incurrió en la falacia AC pero no encontró mejores herramientas para justificar con más precisión su respuesta.

Debe destacarse aquí que la representación geométrica propuesta en la actividad 6 les sirvió de insumo para esta actividad y tal vez esto haya determinado que no hayan incurrido en la falacia AC.

La respuesta que resta por analizar tuvo que ser clasificada como incorrecta dado que no posee la estructura formal de un contraejemplo, esto es, cumplir el antecedente y no el consecuente.

"Si bien existe el teorema de Lagrange que expone: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en un $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un $c\in(a,b)$tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ vemos que el teorema no asegura "la vuelta", que es la afirmación planteada. Esto nos lleva a pensar por qué no hay un "sí y solo sí" en lugar de un "entonces". Veamos la interpretación gráfica del teorema. En c, la recta tangente a f es paralela a la recta que forman los extremos del intervalo a y b."



Participante 10 de matemática – Justificativo incorrecto.

La primera y la última parte de la respuesta corresponden al enunciado y la interpretación del TVM respectivamente. El razonamiento expuesto no está ajeno a lo que el sentido común indica, es decir, si fuese que vale el recíproco, es totalmente acertado pensar que el uso que se le daría en la comunidad matemática sería de tipo "sí y solo sí". Los matemáticos no desperdician esta clase de situaciones, dado que, tener un teorema del tipo "sí y solo sí", contiene más información que uno que solo es de la forma "entonces". De todos modos, la respuesta no posee la estructura formal de un contraejemplo, la cual es condición necesaria para poder determinar como falsa a una proposición. Por lo anterior se clasificó como incorrecta la respuesta.

En síntesis, se contabilizaron 9 respuestas correctas y 1 incorrecta por parte de los estudiantes de matemática.

Se pasa a continuación al análisis de las respuestas de los estudiantes de física a la actividad 8.

8 estudiantes contestan incorrectamente diciendo que la proposición es verdadera. En sus argumentaciones mencionan el TVM como argumento de validez. Algunos de estos por entender que lo expuesto no es otra cosa que el TVM y otros por considerar que es algo que se puede deducir de este. Si bien desde un punto formal debería decirse que se trata de una falacia AC, bien podría, tratarse de un caso de perfección del condicional. A diferencia de las proposiciones que componen la actividad 7, el TVM podría estar siendo perfeccionado por los estudiantes de física para quienes además la gran parte de las funciones que estudian y que son objeto de sus modelos teóricos son continuas. Es menester para evitar la perfección del condicional aquí que uno cuente con un amplio stock de funciones para poder dar con una que cumpliendo la tesis del TVM no cumpla con la hipótesis. Esto último podría explicar el porqué de esta marca diferencia en el desempeño de esta actividad entre matemáticos y físicos. Si la situación fuese esta última, no podríamos decir que están razonando erróneamente, sino que se trata de una interpretación errónea del alcance de la premisa mayor que brinda el teorema del valor medio. De todos modos, hubo dos estudiantes de física que lograron evitar la falacia AC y dieron justificativos de un alto nivel de precisión. En particular, las dos respuestas antes mencionadas contienen justificativos de carácter geométrico.

Se muestran a continuación un ejemplo representativo de cada caso.

En esta actividad se destaca la claridad en las respuestas de los estudiantes de matemática por sobre las respuestas de los de física. De las 10 afirmaciones correctas de los estudiantes de matemática y las 2 correctas de física debe destacarse que los primeros mostraron ejemplos de funciones que, no cumpliendo el anteceden, cumplían el consecuente. En el caso de los segundos, dieron argumentos similares, pero solo sustentadas por las representaciones gráficas que apoyaban su idea.

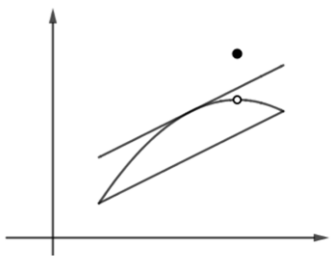
> "Sabemos, por el teorema del valor medio, que la inversa de dicha afirmación se cumple, es decir, si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Al ser esto un teorema probado podemos afirmar que su inversa, la afirmación en cuestión, es verdadera."

Participante 8 de Física – Justificativo incorrecto. Falacia AC.

Se destaca aquí que las otras respuestas erróneas bien podrían haberse dado por entender que lo que estaba planteado en la actividad era exactamente idéntico al TVM. Respuestas como "es el enunciado del TVM" parecerían indicar esto. Esta situación en particular nos acerca aún más a la idea de la perfección del condicional.

Por último, se muestra una respuesta de uno de los estudiantes de física que contestó correctamente a esta actividad.

> "La afirmación es el recíproco del teorema del valor medio, sin embargo, que se cumpla el consecuente no necesariamente implica que el antecedente sea verdadero. Esta es una función en la que la hipótesis se cumple, sin embargo, la función no es continua en todo $[a,b]$."



Participante 9 de Física – Justificativo correcto que evita la falacia AC.

La notoria diferencia entre el desempeño obtenido en el modo inferencial AC, por sobre el alcanzado en el modo NA, podría encontrar su explicación en la dinámica de estudio de los contenidos de las carreras observadas en esta población. Las clases de resolución de problemas son un escenario común a ambas carreras y en estos el entrenamiento en la producción de explicaciones (inferencia AC) es trabajado, sin embargo, la fuerte herencia positivista que acarrean la matemática y la física no hace preguntarse ¿qué su sucede si no pasa...? Siendo en líneas generales un entrenamiento del tipo "si pasa esto, haga esto".

En síntesis, solo se obtuvieron 2 respuestas correctas para esta actividad en los estudiantes de física.

4.9 Conclusiones parciales de los resultados

El análisis de los resultados, hecho en función de las respuestas dadas por los estudiantes tanto de matemática como de física, pone en evidencia una habilidad lógica acotada en la resolución y justificación de tareas que involucran los modos falaces: Negación del Antecedente (NA) y Afirmación del Consecuente (AC). En contraste con esto, los estudiantes muestran habilidades mejor desarrolladas en actividades donde aparecen los modos inferenciales válidos: Modus Ponens (MP) y Modus Tollens (MT).

Los estudiantes de matemática mostraron un mejor desempeño que los físicos en el modo AC, mientras que los físicos lo hicieron en el modo NA. Esta diferencia fue más marcada cuando el contenido involucrado era el del TVM, es decir, más elevado que el relacionado con cuestiones de paridad e imparidad de los números.

La negación del antecedente resulta a todas luces el modo inferencial que resultó más complejo a los estudiantes. La fuerte herencia positivista que acarrean la matemática y la física no hace preguntarse por los resultados de breve modificaciones en las hipótesis iniciales de un razonamiento, dejando pasar así de lado una excelente oportunidad de lograr entender si las proposiciones que componen dicha hipótesis son cada una necesaria.

Los modos inferenciales AC y NA, tan propios de quienes investigan estas disciplinas, deben ser abordados y explicitados en el proceso de formación. Este es un vacío en la formación de los estudiantes de estas carreras y debe ser subsanado. El trabajo en clases de generación de antecedentes alternativos a una proposición podría ser una solución para evitar la perfección del condicional, si fuese esta la explicación a las inferencias falaces detectadas.

Con esto se concluye este capítulo para dar lugar a las conclusiones generales del trabajo que emergen de estos resultados.

5 – Conclusiones generales del trabajo

Conclusiones sobre las respuestas

Se evidencian como resultado de esta investigación problemas en la resolución de tareas de razonamiento condicional, en los modos falaces negación del antecedente (NA) y afirmación del consecuente (AC) y en menor medida en el modus ponens (MP) y modus tollens (MT). Se pusieron en articulación diferentes explicaciones a las respuestas de los estudiantes. En particular, se señalaron posibles problemas en la negación de una conjunción (Leyes de De Morgan), o la posible perfección del condicional y la ausencia de recursos que permitiesen identificar las falacias NA y AC.

Se advirtieron diferencias entre las respuestas a las falacias NA y AC. La falacia NA es la que obtuvo mayor cantidad de respuestas incorrectas y se propuso como explicación el hecho de que la herencia positivista nunca entrena en preguntarse ¿qué sucede si no pasa...?, siendo en líneas generales un entrenamiento del tipo "si pasa esto, haga esto". Tampoco hace preguntarse por los resultados de breve modificaciones en las hipótesis iniciales de un razonamiento, dejando pasar así de lado una excelente oportunidad de lograr entender si las proposiciones que componen dicha hipótesis son cada una necesaria.

Volviendo a las actividades, ambos grupos fueron expuestos a consignas con contenido matemático, tal vez eso pudiera explicar por qué los físicos optaron en mayor proporción que los matemáticos a justificativos lógicos y no a distinciones mediante casos o contraejemplos. Es decir, preferían interactuar con la situación desde un punto de vista estrictamente formal tal vez por no sentirse a gusto manipulando los objetos matemáticos involucrados. No se encontraron diferencias significativas entre el desempeño de ambos grupos en los modos inferenciales válidos MP y MT. Por otra parte, los físicos obtuvieron un mejor desempeño en la falacia NA, mientas que los matemáticos en la falacia AC.

Se concluye que el desempeño destacable de los estudiantes de matemática en el modo AC que trabajaba con matemática más avanzada (TVM) podría deberse a su entrenamiento en la resolución de problemas, y se deja sentado que en esta actividad las respuestas hubieran mejorado por parte de los físicos si el contenido involucrado les hubiese sido más cercano. Esto puede verificarse por su desempeño en la actividad que tenía el mismo modo AC, pero solo trataba con el concepto de imparidad.

Se adopta como postura que los errores advertidos podrían ser producto de la perfección del condicional y en concordancia con esto se propone trabajar con hipótesis alternativas para evitar dicha perfección y mejorar así la comprensión que, tanto docentes como estudiantes, tenemos de los teoremas. También se toma distancia con las teorías que adhieren a una lógica mental y se deja planteado aquí que no solo operamos bajo las leyes de la lógica. Si así fuere, estaríamos restringidos a los modos inferenciales MP y MT sin embargo son la abducción, la inducción y la analogía quienes suelen dar herramientas para la producción de nuevos conocimientos.

Se destaca que el posicionamiento tomado acerca de los resultados obtenidos es intermedio. No se descarta aquí la colaboración que representa para el desarrollo de las habilidades lógicas un escenario abstracto como el que la matemática propone, tampoco adherimos a pensar que el entrenamiento en matemática sin una revisión profunda de su historia, de sus procesos de construcción y de una formación transversal en lógica vaya a generar sujetos bien entrenados en razonamiento condicional.

Por todo lo reseñado se pone en tela de juicio al supuesto antes mencionado acerca de teoría de las disciplinas formales (TDF) y se deja sentado que sigue abierto el debate de, si el entrenamiento en matemática propicia mejor que otros escenarios del desarrollo de habilidades avanzadas de razonamiento condicional.

En relación a lo dicho anteriormente se concluye que la habilidad lógica evidenciada no es la deseable por estudiantes avanzados de dos carreras con fuerte formación matemática, tomando como supuesto que la enseñanza de esta debiera dar cuentas de una habilidad mejor desarrollada.

Conclusiones sobre la forma en la que estamos enseñando matemática

La enseñanza de la lógica, al menos en las carreras involucradas en esta investigación, se encuentra restringida a la primera unidad de la primera materia de primer año. Es decir, tal vez uno de los contenidos más abstractos se encuentra restringido a esas primeras clases. También es cierto, que durante las demostraciones y explicaciones dadas en clase de matemática a veces suelen retomarse conceptos como el de condición necesaria, suficiente, razonamiento por el absurdo, pero no menos cierto es que dichos abordajes son acotados y en gran parte desprovistos de un repaso formal con la construcción de las tablas de verdad, o la construcción explícita de las tautologías involucradas en algún razonamiento. En particular, una breve encuesta entre estudiantes y docentes me percató de que lo que entendían por razonamiento por el absurdo era casi comprendido como una especie de principio matemático y desconocían la constitución mostrada en la Tabla 2 de este trabajo.

Se destaca lo promisorio de esta investigación y de las posibilidades de expandir los resultados que aquí se muestran. Se remarca lo incompleto que sería un análisis didáctico que soslaye el abordaje de tipo psicológico que se ha hecho aquí, no siendo ni uno ni otro el camino correcto, sino distintos y complementarios.

Se remarca como conclusión que la matemática constituye un escenario propicio para el entrenamiento de los modos inferenciales que son propios de la lógica, pero dicho escenario no es el único. Este entrenamiento puede darse desde adentro de cada disciplina. Los elementos para razonar, provistos por la lógica, pueden impregnarse de los contenidos propios de cada rama del saber, sin necesidad de que la matemática se encuentre presente. Ahora bien, si se pretende dejar en manos de la enseñanza de la matemática el aprendizaje de estas competencias, debe dejarse de suponer que un abordaje mecanicista e irreflexivo brindará dichas competencias. Los resultados de los dos grupos que componen la población que se estudió muestran datos no deseables para quienes se pretende estén más entrenados en el razonamiento condicional, lo cual lleva a preguntarnos, qué mejoras supone la inclusión de la matemática en cursos donde su único justificativo es el posibilitar el desarrollo de habilidades lógicas. Ahora bien, los problemas evidenciados en este trabajo no son subsanables simplemente por una formación en lógica más acabada. La breve reseña hecha sobre los orígenes de la demostración, así como la constitución de la matemática como ciencia hipotético-deductiva, dan cuenta del vínculo que existe entre las concepciones epistemológicas, metodológicas e históricas de los docentes y la forma en la que enseñamos. El vacío en la formación de otros modos inferenciales como la abducción y la analogía no puede ser aislado, sino que debe estar acompañado de una revisión epistemológica de sus orígenes y su historia.

La reseña mencionada tuvo como finalidad dar un contexto lo más acabado posible para sostener que los problemas que se evidencian en esta tesis no son aislados sino el producto de las concepciones epistemológicas y metodológicas que tienen los matemáticos sobre su disciplina. Desde las nociones prescriptivas de la ciencia, a las concepciones de una lógica metal, hasta las nociones de verdadero y las pruebas, todos estos aspectos deben ser tenidos en cuenta. Gran parte de lo aquí reseñado es desconocido por los formadores y luego por sus estudiantes. Los grandes devenires de la historia de la matemática y los problemas fundacionales que ha tenido y que aún tiene, son dejados de lado en la formación de los sujetos, es por esto que no solo el abordaje de la lógica debe ser transversal a la formación de los estudiantes, sino también su epistemología y su historia. La carrera de profesorado en matemática tiene en su currículo las materias Historia de la matemática, Metodología de la Investigación, pero no así materias como filosofía ni lógica. Los estudiantes de física no cuentan ni siquiera con Historia de la Física u otra materia donde se detengan exclusivamente a reflexionar en la forma de construir el conocimiento en su disciplina.

Se destaca también a modo de síntesis que los estudios que consideran como provechosa la implementación de la matemática para el desarrollo del razonamiento condicional han observado mejoras significativas en el modus ponens siendo menos remarcadas las mejoras en los otros modos inferenciales. Esto no se aleja de los resultados obtenidos en esta investigación, la diferencia aquí apunta al hecho de que no es deseable que estudiantes de los cuales se pretende mayor entrenamiento lógico sean incapaces de advertir los modos inferenciales en los que se encuentran trabajando. También se rescata que gran parte de la discusión de lo trabajado gira en torno a la inclusión de un curso de lógica formal y otros autores recomiendan la inclusión de cursos de matemática. Los resultados han sido más provechosos en el caso de los segundos. En particular se considera aquí que la matemática, si bien es una disciplina formal, carga de contenido a las funciones proposicionales con la que los sujetos operan permitiéndoles esto soportes manipulables, ya sea numéricos o geométricos que le permiten razonar.

El hecho de haber elegido la psicología cognitiva como marco referencial de este trabajo no invalida otras miradas y perspectivas. El análisis y abordaje de esta temática desde la didáctica es posible, viable y más aún, necesario. Se pretende seguir trabajando en posibles intervenciones, tomando como partida el estado del arte detectado. En particular, lo referido a la enseñanza de las demostraciones en clase de matemática y sus vínculos con los modos inferenciales parece ser prometedor.

En relación a lo anterior se retoma aquí la idea de demostración como proceso compuesto de sus instancias de discusión, prueba y conjetura, y se adhiere a la idea de que la enseñanza de las demostraciones constituye un escenario propicio para el estudio en profundidad de la estructura lógica que subyace a las mismas. Se recomienda hacer hincapié en dicha estructura en paralelo a la enseñanza de estas demostraciones. Los contextos de conjeturas, pruebas y refutaciones pueden ser óptimos para discutir con los estudiantes acerca de la validez de sus producciones y en dicho contexto utilizar las herramientas de la lógica para sustentar lo trabajado en el aula, a fin de dar una validez que trascienda este escenario, propiciando así que los estudiantes, al menos en el aula, se comporten como pequeños matemáticos.

En términos muy puntuales, se recomienda enseñar las falacias lógicas como parte de la unidad de álgebra y que los razonamientos lógicos involucrados en las demostraciones y discusiones del aula de matemática y física sean de uso cotidiano. Se insiste por último en que uno solo reconoce lo que conoce, por esto, se recomienda que formemos, al menos a nuestros futuros docentes e investigadores de la manera más completa posible, de tal modo que tengan herramientas para identificar en sus clases estos procesos inferenciales.

Es menester que los docentes de matemática volvamos a replantearnos cuál es el porqué de la enseñanza de nuestra disciplina y entre todos contrarrestar décadas de una enseñanza muchas veces fútil. Por lo menos deberíamos estar en conocimiento del debate que se lleva a nivel mundial acerca de la validez de la teoría de las disciplinas formales y no dar por sentado que la enseñanza de la matemática per se hará devenir a nuestros estudiantes en sujetos con habilidades lógicas mejor desarrolladas que sin matemática pos obligatorias.

Por último y con ánimos prospectivos se dejan planteados algunos interrogantes: Si estudiantes con alto grado de entrenamiento en matemática avanzada como ser los de esta investigación muestran debilidades en su formación lógica ¿Cómo seguir justificando la inclusión de una matemática simplemente basado en la creencia de que la misma constituye un escenario óptimo para el desarrollo de las habilidades lógicas? ¿No sería mejor para dicha finalidad un entrenamiento desde los mismos contenidos de cada disciplina? A este particular se recomienda la lectura de Henao y Moreno (2016). Estos autores realizan un trabajo de revisión en el que muestran el estado actual de la didáctica de la lógica y proponen estrategias para incorporar la abducción a la cual consideran como una inferencia relegada en comparación con otros modos inferenciales. Esta postura plantea grandes desafíos como ya se observó en los trabajos relacionados sobre abducción como ser los de Hoffman (ibíd.) y Adúriz-Bravo (2014, 2015, 2016).

Como matemático voy a seguir defendiendo la inclusión de la matemática, pero no una matemática instrumentista que ya ha sido ampliamente desplazada por el uso de los ordenadores. Estudiantes de carreras como Contador Público, por ejemplo, que jamás habrán de necesitar una integral, se ven imposibilitados de seguir con sus estudios por una matemática carente de sentido. ¿Y si ese tiempo se ocupara para entrenar lógicamente a estos sujetos con contenidos de su disciplina? ¿Y si enseñásemos menos, pero con mayor profundidad?

Las deficiencias observadas deben ser subsanadas mediante una mirada general de la ciencia y una revisión continua de sus modos, de su historia, de sus fundamentos. Las intervenciones aisladas y puntuales no serán capaces de subsanar las falencias que aquí fueron evidenciadas, ergo no seremos capaces de brindar sujetos críticos a una sociedad que lo demanda.

6 - Referencias

- Adúriz–Bravo, A. (2014). *Revisiting school scientific argumentation from the perspective of the history and philosophy of science*. En Matthews, M.R. (Ed.). International handbook of research in history, philosophy and science teaching, V. 2, 1443–1472.
- Adúriz–Bravo, A. (2015) *Naturaleza de la ciencia y educación de calidad para todos y todas*. Disponible en: https://www.academia.edu/30819388/NATURALEZA_DE_LA_CIENCIA_Y_EDUCACI%C3%93N_CIENT%C3%8DFICA_DE_CALIDAD_PARA_TODOS_Y_TODAS
- Adúriz–Bravo, A (Coordinación). Revel Chion, A.; Couló, A.; Erduran, S.; Furman, M.; Iglesia, P. (2016). *Estudios sobre la naturaleza de la argumentación científica escolar*. Disponible en: https://core.ac.uk/download/pdf/13306090.pdf
- Andrew Wiles (1993) https://biografia.org/andrew-wiles/
- Arsac, G. (1987). *El Origen de la demostración: Ensayo de epistemología didáctica.* Reserches en didactique des mathematiques. Vol. 8, N° 3, pp. 267-312. Traducción de Martín Acosta.
- Attridge, N. Inglis, M. (2013). *Advanced mathematical study and the development of conditional reasoning skills*. http://homepages.lboro.ac.uk/~mamji/files/AttridgeInglis2013.pdf
- Balacheff, N. (1987). *Procesus de preuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics. Vol. 18, N° 2 Mai 1987, p. 147-176.
- Barquero, B. (1995). *La representación de estados mentales en la comprensión de textos desde el enfoque teórico de los modelos mentales*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.
- Biembengut, M. S., Hein N. (2004) *Modelación Matemática y los desafíos para enseñar matemática*. Educación Matemática, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, pp. 105-125. Grupo Santillana México.
- Copi, I. (1962). *Introducción a la lógica*. EUDEBA.
- Crespo Crespo, C. R. (2014). *La importancia de la argumentación matemática en el aula.* https://www.researchgate.net/publication/272175083_ARGUMENTAR_MATEMATICAMENTE_SU_IMPORTANCIA_EN_EL_AULA
- Eco, Umberto (1990). Semiótica y filosofía del lenguaje. Barcelona: Lumen.
- Evans, J. St. B.T. (1972). *Reasoning with negatives*. British Journal of Psychology, *63*, 213-219.
- Evans, J. St. B.T. (1972). *Interpretation and matching bias in reasoning task*. Quarterly Journal of Experimental Psychology, *24*, 193-199.
- Galileo Galilei, *Il Saggiatore*. (Roma, 1623); The Assayer, English trans. Stillman Drake and C. D. O'Malley, in The Controversy on the Comets of 1618 (University of Pennsylvania Press, 1960)
- Gianella, A. (1998). *Lógica simbólica y elementos de una metodología de la ciencia*. El Ateneo. Duodécima Edición.
- Griffiths, P. A. *Las matemáticas ante el cambio de milenio*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 2000;3 (1):23-41.
- Greca, I. M., Moreira, M. A. (1997) *Modelos Mentales, Modelos Conceptuales y Modelización*. Décima Reunión en Enseñanza de la Física (REF X). Mar del Plata.
- Gödel, Kurt. https://es.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del

- Henao, R. ; Moreno, M. (2016) *Didáctica de la lógica para el ejercicio de la razonabilidad*. Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación. Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=281049122006> ISSN 2027-1174
- Henle, M. (1962). *On the relation between logic and thinking*. Psychological Review, 69, 366-378.
- Hoffman, M. ¿*Hay una lógica de la abducción*? Ver traducción de Sara Barrena en http://www.unav.es/gep/AN/Hoffmann.html
- Inglis, M., Simpson, A. (2008). *Conditional inference and advanced mathematical study.* Educational Studies in Mathematics, *67, 187-204.*
- Inglis, M., Simpson, A. (2009). *Conditional inference and advanced mathematical study: Further Evidence.* Educational Studies in Mathematics, *72, 185-198.*
- Johnson-Laird, P.N. & Tagart, J. (1969). *How implication is understood*. American Journal of Psychology, *82*, 367-373.
- Johnson-Laird, P.N. et Al. (1968). *Children's syllogistic reasoning*. The Quarterly Journal of Experimental Psychology, *38A*, 35-58.
- Lacués Apud, E. M. – *Condición ¿necesaria o suficiente? Estructuras deductivas usuales en las clases de matemática* -Actas de CUAREM 5 - ISSN 1688-9886 https://semur.edu.uy/curem5/actas/pdf/actas.pdf (pág. 91)
- López Astorga, M. (2014). *Can we avoid conditional perfection focusing antecedent or alternative antecedents are needed?* Revista Signos. Estudios Lingüísticos.
- López Astorga, M. (2015). *The formal discipline theory and metal logic.* Praxis Filosófica, N° 41, Julio-diciembre, 11-25.
- Nicolai, L. Attorresi, H. (2004). *Estudio sobre los modos de aceptación de falacias lógicas.* IX Jornadas de Investigación. Facultad de Psicología. Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires.
- Nicolai, L. Attorresi, H. (2004). *Razonamiento condicional en estudiantes universitarios.*
- Noya, S. y Bar, A. (2016). *Razonamiento condicional con contenido disciplinar en alumnos de matemática y física.* Actas del 2do CIECyM y del 3er ENEM.
- Oaksford, M. & Stenning, K. (1992). Reasoning with conditionals containing negated constituents. *Journal of Experimental Psychology*: *Learning, Memory, and Cognition*, 18, 835-854.
- Otero, M. R., Fanaro, M., Sureda, P., Llanos, V. C., Arlego, M. (2014) *La Teoría de los Campos Conceptuales y la Conceptualización. En el aula de matemática y física*. Dunken. Buenos Aires.
- Panizza, M. (2005). *Razonar y Conocer*. *Aportes a la racionalidad matemática de los alumnos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Piaget, J. (1955). *The Language and Thought of the Child*. New American Library.
- Platón. *La República*. D. Lee, Ed. Londres: Penguin.
- Quillas, A., Csongor, Juhos. (2013). *La psicología cognitiva y el estudio del razonamiento deductivo del último medio siglo.* Revista de Psicología. Vol. 31. N° 4. Lisboa.
- Samaja, J. (2004) *Epistemología y Metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica.* Eudeba. 3era revisión – 4ta reimpresión. pp 144.
- Schaeken, W.; Schroyens, W. & Dieussaert, K. (2001) *Conditional assertions, tense, and explicit negatives*. European Journal of Cognitive Psychology, 13 (4), 433-450.
- Wason, P. C. (1966). *Razonamiento*. En BM Foss (Eds.), New Horizons de la psicología. Harmonsworth, Middlesex, Inglaterra: Penguin Books.
- Wason, P. C. (1965). *The contexts of plausible denial.* Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, *4*, 7-11.

- Wason, P. C. (1972). *Psychology of Reasoning: Structure and Content*. Cambridge, M.A.: Harvard University Press.
- Wason, P. C. & Johnson-Laird, P.N. (1969). *Proving a disjunctive rule*. Quarterly Journal of Experimental Psychology, *21* 14-20.