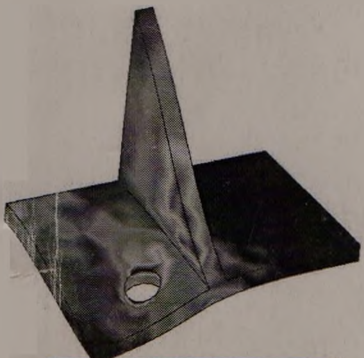
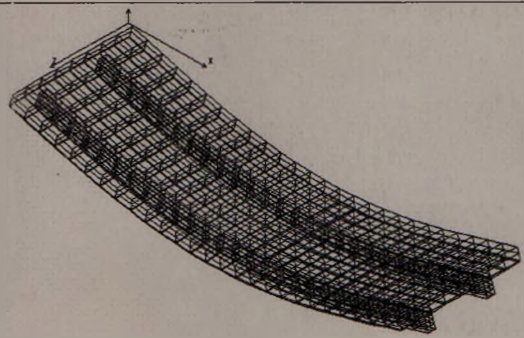
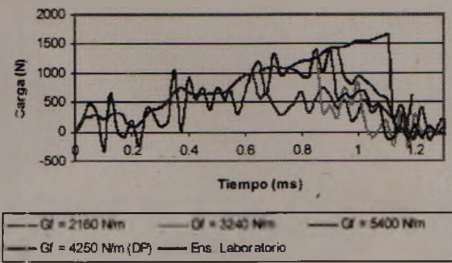
Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ingeniería
U.N.N.E. – Resistencia - Chaco
10 al 12 de Noviembre de 2004

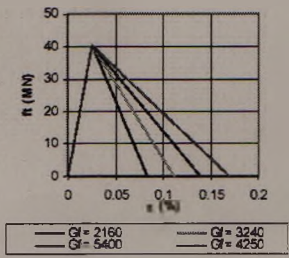


Contour Fill of NODAL V. MISES.
Deformation (x40): DISPLACEMENT of LOAD ANALYSIS, step 1.

2DA JORNADA DE COMUNICACIÓN CIENTÍFICA PARA INGENIERÍA 2004







Caracterización cualitativa de algunos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Mroginski, Javier L. – Beneyto, Pablo A. – Di Rado, H. Ariel – Manzolillo, Juan E.
Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional del Nordeste
Av. Las Heras 727, 3500 Resistencia - ARGENTINA.
e-mail: mroginski@javier.net.ar

Antecedentes.

El Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) es una técnica de análisis numérico que permite la obtención de soluciones aproximadas para una variedad de problemas de la Ingeniería y Física.

Estos problemas pueden ser expresados matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales de gobierno, sin embargo son muy pocos los casos en que es posible obtener la solución analítica de las mismas.

Las alternativas que se presentan son básicamente dos: considerar hipótesis simplificativas que eliminen las dificultades y tornen el problema hacia una solución analítica posible; o mantener las complejidades del problema y obtener soluciones numéricas aproximadas haciendo uso del avance en el desarrollo de las computadoras y de los algoritmos numéricos.

Para la obtención de soluciones numéricas aproximadas existen varias técnicas de análisis, cada una con sus ventajas y desventajas en el momento de su aplicación sobre un problema especifico, entre ellas se encuentra el Método de los Elementos Finitos.
Dicho método discretiza el dominio del problema en cuestión en pequeñas regiones o elementos de dimensiones finitas. Las incógnitas de las ecuaciones diferenciales se resuelven a nivel de cada elemento en determinados puntos conocidos como nodos. El conjunto de las soluciones aproximadas de cada elemento representan el comportamiento global del problema.

El resultado de la aplicación del Método de los Elementos Finitos a un dominio cualquier es un sistema de ecuaciones lineales simultáneas de gran tamaño, correspondiendo una ecuación por cada incógnita que se evalúe en cada nodo, imposible de ser resuelto sin el auxilio de un computador.

El presente trabajo desarrolla algunos aspectos significativos sobre los tres diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas mas usados en el Método de los Elementos Finitos que son el: Eliminación de Gauss, Sistema Banda y Frontal entre otros.

Materiales y Métodos.
En los párrafos siguientes se expondrá una breve descripción de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas que se estudian en el presente trabajo:

1) Eliminación de Gauss.
Es uno de los más antiguo y mejor conocido métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas.
Un sistema de ecuaciones lineales simultáneas puede ser expresado en forma genérica de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = C_n \end{cases} \quad (1)$$

o de manera resumida usando notación matricial:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{C} \quad (2)$$

donde:

$\underset{\sim}{A}$: es la matriz de orden (n x n) de los coeficientes

$\underset{\sim}{X}$: es el vector de las incógnitas.

$\underset{\sim}{C}$: es el vector de los términos independientes.

El método eliminación de Gauss se reduce a lograr un sistema triangular equivalente, mediante el uso de transformaciones lineales, que a su vez se resuelve con facilidad aplicando la denominada sustitución inversa.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = C_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = C'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a^{(n-2)}_{n-1,n-1}x_{n-1} + a^{(n-2)}_{n-1,n}x_n = C^{(n-2)}_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a^{(n-1)}_{n,n}x_n = C^{(n-1)}_n \end{cases} \quad (3)$$

Esto se obtiene de la siguiente manera:

1ro) La ecuación (1) se la divide por a11 resultando entonces:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{C_1}{a_{11}} \quad (4)$$

Esta ecuación (4) se multiplica por a_{21} (coeficiente de x_1 en la segunda fila) y lo que resulta se resta a la segunda ecuación, eliminando así x_1 de esta última. Un proceso

similar se sigue con todas las otras ecuaciones eliminando así x_1 de todo el sistema excepto en la primer ecuación.
La ecuación utilizada para eliminar las incógnitas en las ecuaciones que siguen se denomina "ecuación pivote" y en esta, el coeficiente de la incógnita que se quiere eliminar de las ecuaciones que siguen se denomina "coeficiente pivote", siendo obvio que debe ser distinto de cero.

2^{do}) Aplicando un procedimiento similar a todas las ecuaciones del sistema usando coeficiente pivote como a'_{11} se elimina x_2 desde la tercera en adelante. Este procedimien-to, utilizando diferentes ecuación pivote, se continua hasta que el conjunto de original de ecuaciones haya sido transformado a un sistema triangular equivalente como el que se muestra en (1).

3^{ro}) Una vez obtenido el sistema triangular de ecuaciones, la última ecuación de ese conjunto suministra directamente x_n El valor obtenido se sustituye entonces en la penúltima ecuación para obtener así el valor de x_{n-1} y así sucesivamente. Este procedimiento es denominado "Sustitución inversa".

Cabe aclarar que este método, aplicado a al M.E.F. requiere del armado completo de la matriz de rigidez global. Lo que significa un gran requerimiento de memoria y de espacio de disco para su eficiente ejecución.

2) Sistema banda de solución.

Este método de solución de sistemas de ecuaciones lineales simultaneas tiene aplicación exclusiva, a diferencia del anterior, a métodos matriciales, de elementos finitos, o similares.
Se define a una matriz como matriz banda a aquella que posee todos sus elementos no nulos concentrados en torno de la diagonal principal. Esta es una propiedad muy interesante que se presenta en las matrices de rigidez locales y globales, ya que por la forma de su ensamblaje se hacen nulos los elementos mas alejados de la diagonal principal.
El método banda de resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultaneas se basa en esta propiedad, permitiendo el ahorro de asignaciones de memoria, ya que solo guarda los elementos no nulos, y el incremento en la eficacia del método se traduce en un menor tiempo de ejecución ya son menos las operaciones que se deben realizar.
El presente método centra su eficiencia en la forma en que se realiza la numeración global de los nodos. Es así que el denominado semiancho de banda (ver figura 1), que es una pieza fundamental para el método, se calcula como la máxima diferencia entre la enumeración global de dos nodos contiguos (pertenecientes a un mismo elemento) mas uno (debido a la diagonal principal) por el número de grados de libertad por nodo.

$$\mathrm{NBAND} = \left(\left(\mathrm{INODE} - \mathrm{JNODE}\right) + 1\right) \cdot \mathrm{NGL}$$

donde:

INODE = numeración del nodo i
JNODE = numeración del nodo j
NGL = número de grados de libertad por nodo

Esta ecuación debe repetirse dentro de un bucle sobre todos los nodos de cada elemento a fin de obtener la mayor diferencia entre INODE Y JNODE.
Puede observarse en la figura 1 que en el caso de matrices simétricas, las cuales se presentan en la mayoría de los casos de la mecánica siempre que se trabaje con pequeñas deformaciones, el ancho de banda es igual al semiancho de banda por lo que el requerimiento de memoria de almacenaje disminuye prácticamente a la mitad mejorando aún mas el sistema de solución.

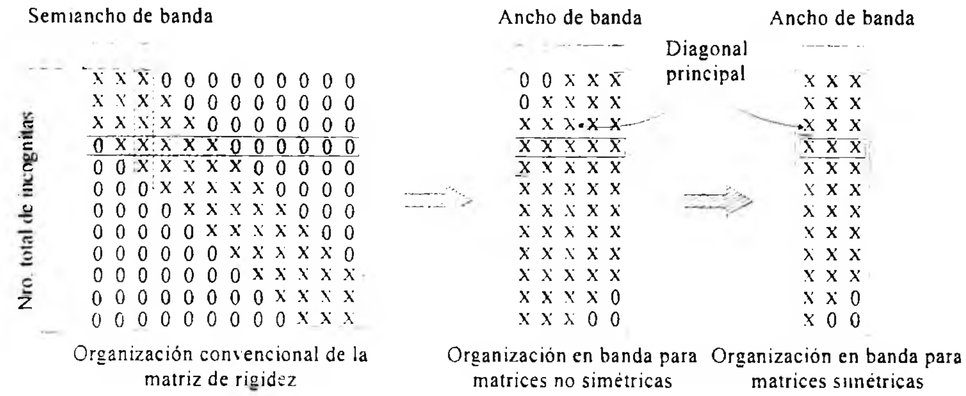


Figura 1

3) Método Frontal de resolución de ecuaciones lineales simultáneas.

Al igual que el método banda este método tiene aplicación exclusiva para resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultaneas de métodos matriciales, elementos finitos, o similares.
Este método trata de evitar el ensamblaje de la matriz de rigidez global. Consiste básicamente en ensamblar la menor cantidad de elementos y eliminar las variables al mismo tiempo, formando matrices de menor tamaño.
Esto es. inmediatamente después de que los coeficientes de una ecuación se ensamblan a partir de la contribución de todos los elementos relevantes, o que inciden sobre este coeficiente. la variable de este puede eliminarse. Como resultado, la matriz completa de toda la estructura jamás se forma.
A diferencia del método banda, la adecuada enumeración de los elemento es de gran importancia, no así la enumeración global de los nodos ya que estos son tratados por su

numeración local. Como primer medida esta característica del Front lo hace mas versátil ya que como la cantidad de elementos siempre es menor que la cantidad de nodos. independientemente de la forma de la estructura. siempre se tendrá mayos facilidad para enumerar los elementos que los nodos.

Discusión de Resultados.
Para analizar las cualidades de los distintos métodos propuestos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas se planteará la resolución mediante el empleo del FECCUND V 2.1 (software desarrollado por el Dto. De Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la UNNE) de dos ejemplos prácticos muy comunes en el campo de la ingeniería. como ser el caso de una barra traccionada y una viga sometida a flexión. representando los resultados mediante el pre-post procesador GID 7.2.
Para dicho análisis se tomarán como variables el tiempo de ejecución de cada método y su exactitud. la cual será determinada por comparación con los resultados obtenidos por el software denominado CALSEF provisto por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

1º) Barra sometida a esfuerzos de tracción.

En la figura 2 puede observarse el mallado de la barra. así como las condiciones de contorno de la misma. Cabe aclara que se tomaron en el FECCUND V2.1y en el CALSEF el mismo mallado y las condiciones de contorno. Mientras que en la figura 3 se observa la variación de los desplazamientos según el "eje y" obtenida del FECCUND V2.1.

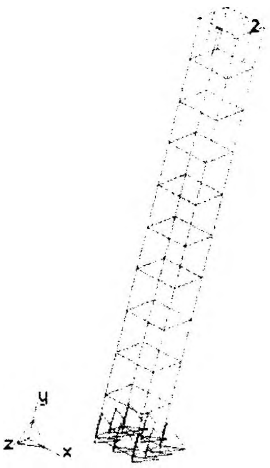


Figura 2

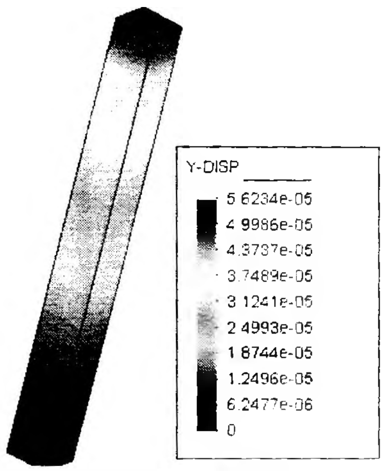


Figura 3

El valor del desplazamiento a considerar será el del nodo 2.

Tabla 1				
	Tiempo de ejecución (seg)	Desplazamiento en z s/ FECCUND (m)	Desplazamiento en z s/ CALSEF (m)	Error (%)
Gauss	1,758	0,501953E-04	0,476190476e-04	5,13
Banda	0,552	0,498874E-04		4,55
Frontal	0,441	0,479135E-04		0,61

2º) Viga sometida a esfuerzos de flexión.

Al igual que en el ejemplo anterior en la figura 4 puede observarse el mallado de la viga y sus condiciones de contorno.

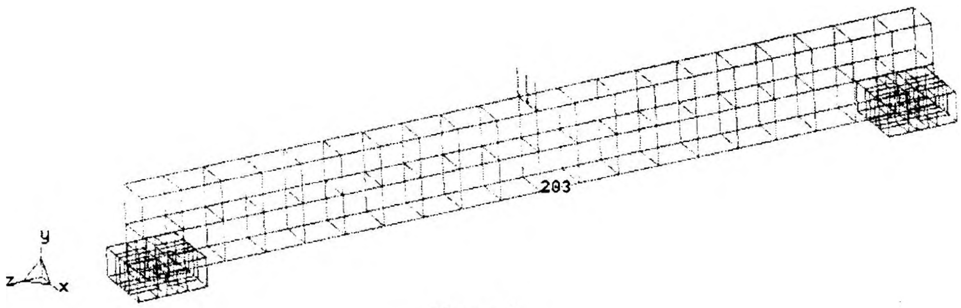


Figura 4

Seguidamente, en la figura 5, se observa la variación de los desplazamientos según el "eje y" obtenida del FECCUND V 2.1.

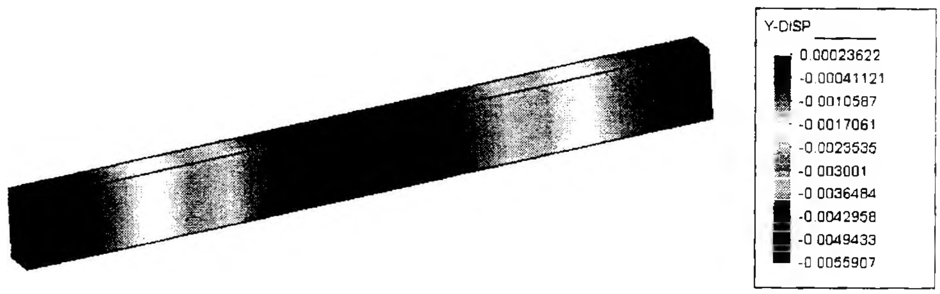


Figura 5

El valor del desplazamiento a considerar será el del nodo 203.

Tabla 2				
	Tiempo de ejecución (seg)	Desplazamiento en z s/ FECCUND (m)	Desplazamiento en z s/ CALSEF (m)	Error (%)
Gauss	31.547	-0.00615923	-0.00544118	11.66
Banda	2.025	-0.00560842		2.98
Frontal	1.752	-0.00552264		1.47

Conclusiones.

- El método Frontal es superior al Gauss y al Banda en cuanto a la exactitud de sus resultados y a la velocidad de ejecución.

- El efecto de la propagación de errores por redondeo, método de Gauss, incrementa notablemente la deficiencia de este sistema de solución frente a problemas de mayor envergadura.

- El método de Banda es recomendable su uso en el caso de contar con un software de pre-post procesamiento como el GID 7.2 ya que el mismo genera las mallas enumerando los nodos en la forma más adecuada para disminuir el ancho de banda.

Bibliografía.

AWRUCH. A. and DI RADO. H. Introducción al método de los elementos finitos. EUDENE (1998).
BATHE KLAUS-JURGEN Finite Element Procedures Prentice Hall (1996).
GARCIA MERAYO. F. Programación en FORTRAN Editorial Paraninfo S.A. (1996).
GUIDO, J. P. Métodos Numéricos EUDENE (1997).
MALVERN. L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium. Prentice Hall, Englewood Cliffs. NJ. USA (1969).
McCRACKEN. D. and DORN, W. S. Numerical Methods and FORTRAN Programming. John Wiley & Sons (1969).
OÑATE. E. Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Artes Gráficas Torres S.A. (1992)